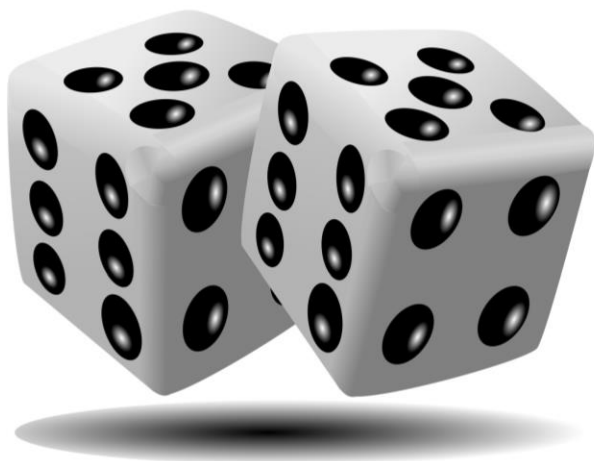


Ясногородский Р. М.

Теория вероятностей и математическая статистика



Ясногородский Р.М.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Научные технологии
2019

УДК 519.2

ББК 22.17

Я 82

Рецензент:

Малышев Вадим Александрович – доктор
физико-математических наук, профессор
МГУ имени М.В. Ломоносова.

Я 82

Ясногородский Р. М. Теория вероятностей и
математическая статистика: учебное пособие. – СПб.:
Научное издательство «Лань», 2019. – 320 с.

ISBN 978-5-6042065-0-8

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов всех специальностей, обучающихся учебным дисциплинам «Математика» и «Высшая математика». Оно может быть также полезно преподавателям при подготовке и организации учебного процесса.

Учебное пособие написано в соответствии с действующими федеральными государственными образовательными стандартами и содержит теоретический материал для изучения теории вероятностей и математической статистики. Многочисленные примеры могут использоваться также и на практических занятиях.

Рекомендовано УМО в области инновационных междисциплинарных общеобразовательных программ в качестве учебного пособия по направлению 010500 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

ISBN 978-5-6042065-0-8

© Ясногородский Р. М., 2019

Оглавление

Предисловие	9
Часть 1. Теория вероятностей.	10
Введение.....	10
Глава 1.	11
1.1. Теоретико-множественный подход к определению события.....	11
1.2. Алгебра множеств.	11
1.2.1. Операции над множествами.	11
1.3. Алгебра событий	14
1.4. Вероятность события.	16
Глава 2. Классическое определение вероятности.	18
2.1. Случайный выбор.....	18
2.1.1. Вероятность события для случайного выбора.....	18
2.2. Основные формулы комбинаторики. Вычисление числа возможных исходов.....	19
2.3. Примеры на классическую вероятность.....	24
Глава 3. Вычисление вероятности произведения событий. Формула полной вероятности и формула Байеса.....	27
3.1. Вычисление вероятности произведения двух событий.	27
3.1.1. Вероятность произведения двух независимых событий.	27
3.1.2. Условная вероятность.	27
3.2. Вычисление вероятности произведения нескольких событий (больше двух).	29
3.3. Полная группа событий и формула полной вероятности.....	30
3.4. Формула Байеса.	31
Глава 4. Биномиальная схема и формула Бернулли.....	33
4.1. Биномиальная схема.....	33
4.2. Формула Бернулли.	34
4.3. Наиболее вероятное значение числа реализаций явления в биномиальной схеме.....	36
Глава 5. Дискретные случайные величины.....	38
5.1. Определение дискретной случайной величины.	38
5.2. Примеры дискретных случайных величин(ДСВ).....	39
5.3. Закон распределения ДСВ.	39

5.4. Числовые характеристики дискретной случайной величины.	41
5.4.1. Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства.	41
5.4.2. Вычисление математического ожидания важнейших дискретных случайных величин.	44
5.4.3. Дисперсия дискретной случайной величины и ее свойства.	45
5.4.4. Вычисление дисперсии некоторых дискретных случайных величин.	47
5.5. Понятие независимости дискретных случайных величин.	48
5.6. Ковариация дискретных случайных величин.	49
5.7. Коэффициент корреляции.	53
Глава 6. Понятие σ – алгебры.	55
6.1. Определение σ – алгебры.	55
6.2. Формула полной вероятности для σ – алгебры.	57
Глава 7. Непрерывные случайные величины.	60
7.1. Функция распределения случайной величины и ее свойства.	60
7.2. Определение непрерывной случайной величины.	63
7.3. Плотность распределения непрерывной случайной величины и ее свойства.	63
7.4. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.	64
7.5. Некоторые часто встречающиеся СВ.	70
Глава 8. Функции от случайных величин.	74
8.1. Функция распределения функции от случайной величины.	74
8.2. Линейная зависимость между случайными величинами.	77
8.3. Построение часто используемых случайных величин как функций от стандартных случайных величин.	78
Глава 9. Случайные векторы.	80
9.1. Случайный дискретный вектор.	80
9.2. Случайный непрерывный вектор.	83

9.3. Функция распределения случайного вектора.	84
9.4. Плотность распределения непрерывного случайного вектора.	86
Глава 10. Зависимость случайных величин.	88
10.1. Независимые непрерывные случайные величины.	88
10.2. Зависимые случайные величины.	89
10.2.1. Условные законы распределения для дискретных случайных величин. Условная функция распределения.	89
10.2.2. Условные законы распределения для непрерывных случайных величин. Условная функция распределения.	91
10.2.3. Условная плотность и ее свойства.	95
10.2.4. Примеры вычисления условных законов распределения для непрерывных случайных величин ...	97
10.2.5. Условное математическое ожидание и его свойства.	100
10.2.6. Примеры вычисления условного математического ожидания.	102
Глава 11. Числовые характеристики случайного вектора. ...	103
11.1. Математическое ожидание случайного вектора.	103
11.2. Ковариационная матрица случайного вектора.	104
Глава 12. Гауссовский случайный вектор.	106
12.1. Стандартный гауссовский случайный вектор.	106
12.1.1. Некоторые часто встречающиеся законы распределения, связанные с вектором Z	106
12.2. Определение гауссовского случайного вектора.	109
12.3. Матрица ковариаций гауссовского случайного вектора.	110
12.4. Плотность распределения гауссовского случайного вектора.	111
12.5. Независимость гауссовских случайных векторов. ...	113
12.6. Линейные преобразования над гауссовским случайным вектором.	115
12.7. Условное распределение гауссовского случайного вектора.	117
12.8. Регрессия для гауссовского случайного вектора.	118

Глава 13. Понятие вероятностной сходимости.....	119
13.1. Различные виды вероятностной сходимости.....	119
13.1.1. Сходимость по распределению.....	119
13.1.2. Сходимость по вероятности.....	123
13.1.3. Отношения между сходимостью по вероятности и сходимостью по распределению.....	124
13.1.4. Некоторые свойства сходимости по распределению.....	125
13.1.5. Свойства сходимости по вероятности.....	125
Глава 14. Предельные теоремы теории вероятностей.....	128
14.1. Закон больших чисел (ЗБЧ).....	128
14.1.1. Неравенство Чебышева.....	128
14.2. Центральная предельная теорема (ЦПТ).....	130
Приложение 1.....	133
Приложение 2.....	136
Приложение 3.....	138
Часть 2. Статистика.....	142
Часть 2.1. Описательная статистика.....	142
Глава 1. Статистические показатели генеральной совокупности.....	144
1.1. Меры среднего уровня.....	144
1.1.1. Среднее значение.....	144
1.1.2. Медиана.....	145
1.1.3. Мода.....	146
1.1.4. Квартили.....	146
1.2. Меры рассеяния.....	146
1.2.1. Размах статистического ряда.....	146
1.2.2. Дисперсия.....	147
1.2.3. Среднеквадратическое отклонение.....	147
1.2.4. Интерквартильный интервал.....	147
Глава 2. Графическое представление статистического ряда для непрерывного признака.....	149
2.1. Интервальный ряд.....	149
2.2. Гистограмма.....	149
2.3. Полигон.....	152
2.4. Методы определения числа интервалов.....	153

Часть 2.2. Математическая статистика.....	156
Глава 1. Выборка и вариационный ряд.....	156
1.1. Выборка.....	156
1.2. Вариационный ряд.....	157
Глава 2. Достаточные статистики и экспоненциальные семейства.....	159
2.1. Достаточные статистики.....	159
2.2. Экспоненциальные семейства.....	163
2.2.1. Свойства экспоненциальных семейств.....	166
Глава 3. Теория оценивания.....	172
3.1. Сравнение различных оценок. Метод улучшения оценок.....	172
3.2. Эффективные оценки.....	175
3.3. Несмещенные оценки.....	175
3.3.1. Свойства несмещенных оценок.....	178
3.4. Метод максимального правдоподобия.....	180
3.5. Асимптотические свойства оценок.....	184
3.5.1. Состоятельные и асимптотически нормальные оценки.....	185
3.5.2. Регулярные модели.....	189
3.5.3. Неравенство Рао – Крамера.....	191
3.5.4. Асимптотически эффективные оценки. Суперэффективность.....	196
3.5.5. Построение асимптотически суперэффективных оценок.....	197
3.5.6. Класс асимптотически нормальных оценок, в котором асимптотически эффективные оценки оптимальны.....	200
3.5.7. Примеры асимптотически эффективных оценок.....	201
Глава 4. Проверка статистических гипотез.....	205
4.1. Параметрические гипотезы.....	205
4.1.1. Форма критической области. Лемма Неймана – Пирсона.....	207
4.1.2. Общий метод для построения оптимальных критических областей для сложных альтернатив.....	211
4.1.3. Несмещенные критические области.....	212
4.1.4. Простые нулевые гипотезы.....	213

4.1.5. Построение несмещенных оптимальных критических областей для однопараметрических экспоненциальных семейств.....	213
4.1.6. Случай многопараметрического экспоненциального семейства.	223
4.1.7. Сложные гипотезы.....	237
4.1.8. Построение критических областей для больших выборок.....	252
4.2. Непараметрические гипотезы.....	257
4.2.1. Два теста непараметрических гипотез.....	257
4.2.2. Проверка принадлежности выборки гауссовскому или экспоненциальному семействам распределений.	260
4.3. Критерий Пирсона (Мультиномиальный закон).	262
Глава 5. Интервальное оценивание.....	267
5.1. Связь области принятия нулевой гипотезы с доверительным интервалом.....	268
5.1.1. Оценка параметров гауссовского закона.....	270
5.1.2. Построение доверительного интервала для выборки из экспоненциального закона с параметром γ	273
5.1.3. Оценка параметра биномиального закона.....	275
5.2. Доверительные интервалы для больших выборок.	277
Глава 6. Метод Монте-Карло.	279
6.1. Вычисление критического значения для расстояния Пирсона методом Монте-Карло.	279
Приложение 1.....	283
Приложение 2.....	284
Приложение 3.....	286
Приложение 4.....	293
Приложение 5.....	298
Приложение 6.....	300
Приложение 7. Стандартное гауссовское распределение.....	304
Приложение 8. Распределение Стьюдента.....	306
Приложение 9. Хи-квадрат распределение	309
Список литературы.....	311
Предметный указатель	312

Предисловие

Эта книга возникла на основании курса лекций, прочитанного автором курсантам 2-го курса Военно-космической академии имени А.Ф.Можайского. Формат учебника позволил расширить и углубить понятия, изложенные в ходе лекций.

Все результаты, за немногим исключением, подробно объясняются и доказываются. Результаты, которые требуют более высокой математической культуры, принимаются без доказательства.

Теория вероятностей - это одна из областей математики (она скорее стала таковой со временем), и в то же время в ней по-прежнему сохранилось нечто отличное от формальной математики и сближающее с физикой, где важна роль интуиции в постановке и решении проблем, что и ставит ее в особое положение среди других областей математики. Это отличие теряется на более высоком уровне развития теории. Этот более высокий уровень теории вероятностей выходит за рамки этой книги.

Следует отметить, что в части Теория вероятностей очень детально изучаются вопросы сходимости случайных последовательностей, необходимые для обоснования асимптотических оценок и тестов в математической статистике.

В книге сделана попытка сохранить равновесие между интуицией в подходе к задачам теории вероятностей и математической строгостью изложения.

То же самое касается и математической статистики.

Классические проблемы математической статистики, которые рассматриваются в книге, приведены со всеми необходимыми объяснениями и доказательствами.

В заключение я хотел бы поблагодарить доцента кафедры математики Военно-космической академии им. А.Ф.Можайского В.С. Будневич за огромную помощь в написании книги. Своими советами, замечаниями и даже решением некоторых проблем она внесла существенный вклад в создание учебника. Без нее замысел книги никогда бы не осуществился.

Я очень благодарен старшему преподавателю кафедры математики Военно-космической Академии им. Можайского Э.М. Голубиной за внимание к моей работе, за полезные замечания и советы.

Я также благодарен моей дочери за редакцию рисунков.

Часть 1. Теория вероятностей.

Введение

В окружающем нас мире ничто объективно не случайно, мы только не в состоянии предсказать того, что произойдет, из-за незнания всех определяющих это факторов, или же из-за недостатка технических средств, позволяющих их учесть. Поэтому предсказание того, что произойдет, производится с какой-то погрешностью, которая означает, что допускается некоторая неопределенность результата, возможность нескольких вариантов, появлению каждого из которых мы даем оценку его возможностей.

Можно сказать, что теория вероятностей является наукой, исследующей закономерности, вызванные взаимодействием большого числа факторов различной природы. Учесть влияние всех факторов, как правило, невозможно, однако проводя много раз один и тот же эксперимент, можно вывести определенные закономерности и использовать их для предсказания будущего результата эксперимента.

Теория вероятностей это наука о предсказании непредсказуемого. Предсказать выпадет «орел» или «решка» при очередном бросании монеты невозможно, но можно утверждать, что при многочисленном повторении таких бросаний выпадет примерно столько же «орлов», сколько «решек».

Все разумные люди применяют на практике вероятностный подход в принятии решений, т. е. они знают, что очень многие вещи могут нарушить их планы и, тем не менее, планируют отпуска, поездки, встречи и т.д., никогда не имея 100% уверенности в осуществлении их планов, отмечая все, что скорее всего не произойдет и принимая во внимание только то, что может произойти с близкой к 100% уверенностью.

Более того, даже в природе, в физических явлениях и химических реакциях процессы протекают по наиболее предсказуемым путям.

Глава 1.

1.1. Теоретико-множественный подход к определению события.

Представим себе, что мы бросаем игральную кость. Мы не можем заранее сказать, какая грань окажется наверху, но точно знаем, что выпадет 1 или 2 или 3 или 4 или 5 или 6.

Если мы бросаем кость 2 раза, то мы знаем, что выпадет одна из 36-ти пар чисел от одного до шести. Этими числами исчерпываются все возможные результаты бросания кости, которые мы называем исходами. Если нас интересует выпадение хотя бы одной шестерки, то наше желание ее увидеть осуществится, если выпадет одна комбинация из набора чисел 16, 26, 36, 46, 56, 66, 61, 62, 63, 64, 65.

Если назвать событием некоторый результат осуществляемого эксперимента, то, что может произойти или не произойти, то выпадение хотя бы одной шестерки является событием и его можно отождествить с перечисленным выше набором чисел. Таким образом, каждое событие отождествляется с каким-то набором возможных исходов из множества всех возможных исходов эксперимента и, говоря о событии, мы имеем в виду некоторое подмножество множества всех исходов. Поэтому логично начинать изучение теории вероятностей с понятия, связанного с множествами, а именно, с алгебры множеств.

1.2. Алгебра множеств.

1.2.1. Операции над множествами.

Пусть Ω - некоторое множество элементов любой природы и A, B, C - подмножества Ω . Введем следующие операции над множествами, называемые сложением и умножением.

Суммой A и B , $A + B$ (объединением $A \cup B$) называется множество, составленное из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B

Произведением A и B , AB (пересечением $A \cap B$) называется множество, составленное из элементов, общих для множеств A и B .

Пример 1.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; A = \{1, 2, 3\}; B = \{3, 4\}$$

$$\text{Тогда } A + B = \{1, 2, 3, 4\}; AB = \{3\}$$

Для введенных операций выполняются следующие свойства.

1. Ассоциативность

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(AB)C = A(BC).$$

Это позволяет обходиться без скобок и писать просто $A + B + C$, ABC .

2. Распределительность

$$(A + B)C = AC + BC \text{ (умножения по отношению к сложению)}$$

$$AB + C = (A + C)(B + C) \text{ (сложения по отношению к умножению)}$$

Доказательство.

1. Свойство ассоциативности очевидно.

$$2. a \in (A + B)C \Leftrightarrow a \in C \text{ и } a \in (A + B) \Leftrightarrow (a \in C \text{ и } a \in A)$$

$$\text{или } (a \in C \text{ и } a \in B) \Leftrightarrow a \in AC \text{ или } a \in BC \Leftrightarrow a \in (AC + BC).$$

Последнее равенство доказывается в замечании 1.2.1.2., приведенном ниже.

Замечание 1.2.1.1.

Операции сложения и умножения коммутативны.

Замечание 1.2.1.2.

Если $A \subset B$, то $A + B = B$, $AB = A$.

Отсюда, в частности, следует распределительность сложения по отношению к умножению:

$$(A + C)(B + C) = AB + CB + AC + C^2 = AB + C,$$

т.к. $AC \subset C$, $BC \subset C$ и $C^2 = C$,

поэтому $AC + CB + C^2 = C$.

Пример 2.

$$(A + B)(A + C)(B + C) = (A^2 + AC + BA + BC)(B + C) = \\ = (A + BC)(B + C) = AB + AC + BC.$$

Дополнением множества A называется множество элементов Ω , не входящих в A , оно обозначается $\bar{A}$.

Это определение можно записать в алгебраической форме $A + \bar{A} = \Omega$; $A\bar{A} = \emptyset$ пустое множество.

Пусть $\sqsupset$ некоторый набор подмножеств множества Ω . Если он замкнут относительно операций сложения, умножения и образования дополнения, то $\sqsupset$ называется алгеброй множеств, а введенные выше операции над множествами называются алгебраическими, т.к. соответствуют аналогичным операциям над числами.

Из этого определения следует, что алгебра множеств содержит пустое множество $\emptyset$ и множество Ω .

Ω называется универсальным множеством.

Замечание 1.2.1.3.

Алгебра множеств из Ω не обязательно содержит все подмножества из Ω , например, если в Ω четное число элементов, то все подмножества с четным числом элементов из Ω образуют алгебру множеств.

Замечание 1.2.1.4.

Введенная алгебра является алгеброй с 0 и 1.

Действительно, т.к. $A + \emptyset = A$; $A\emptyset = \emptyset$, пустое множество аналогично 0 в алгебре чисел.

$A\Omega = A$ для любого A , и, следовательно, Ω является аналогом единицы.

Разность двух множеств A и B .

Определим разность $(A - B)$, если $B \subset A$, как множество всех элементов A , которые не входят в B , или, более обще $A \setminus B = A - AB$.

Пример 3.

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 5\}, A \setminus B = \{1, 2, 4\}, B \setminus A = \{5\}.$$

Свойства операций дополнения и разности множеств:

$$1) \bar{\bar{A}} = \Omega - A$$

$$2) \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$3) \overline{\overline{A}} = A$$

$$4) \begin{cases} A \setminus B = A\overline{B} \\ (A \setminus B)B = \emptyset \end{cases}$$

1.3. Алгебра событий

Назовем осуществление некоторой совокупности условий экспериментом, а каждый из возможных результатов эксперимента элементарным исходом.

Если трактовать универсальное множество Ω как множество всех элементарных исходов данного эксперимента, то каждое случайное событие будет отождествляться с некоторой совокупностью элементарных исходов. Случайное событие происходит только тогда, когда какой-то элементарный исход из этой совокупности происходит.

Исходы этой совокупности называются элементарными исходами, благоприятствующими данному событию. Поясним это на примере.

Пример 4.

Пусть символы "о" и "р" соответственно обозначают "орел" и "решка".

а) $\Omega = \{o, p\}$ – набор исходов бросания одной монеты.

б) Если монета бросается 3 раза, то

$$\Omega = \{***\} = \{ooo, oop, oro, roo, rrr, rro, ror, orr\},$$

т.е. Ω – множество всех возможных троек из символов "о" и "р".

Событие $A = \{\text{выпадет по крайней мере 2 "орла"}\}$ можно описать как

$$A = \{roo, oro, oop, ooo\}.$$

Каждый исход называется элементарным событием.

Ω – универсальное множество, множество всех возможных исходов эксперимента, будет называться достоверным событием.

$\emptyset$ – пустое множество будет называться невозможным событием.

Каждое событие – это набор некоторого множества исходов, то есть некоторое подмножество Ω .

Операции над множествами элементарных исходов естественным образом переносятся на операции над событиями.

По аналогии с алгеброй множеств любое множество событий называется алгеброй событий, если оно замкнуто относительно операций сложения, умножения и образования дополнения.

Пример 5. (Продолжение пункта б примера 4)

$$B = \{\text{только один орел}\};$$

$$C = \{\text{ровно два орла}\};$$

$$D = \{\text{ни одного орла}\}; \quad BC = \emptyset, \quad \bar{B} = A + D$$

Определение несовместности двух событий

События A и B называются несовместными, если $AB = \emptyset$, то есть появление одного из этих событий исключает появление другого.

События B , C и D из примера 5 являются попарно несовместными событиями (B и D , C и D , B и C несовместные события).

Пример 6.

Пусть Ω – все возможные наборы из 2-х карт. Эксперимент состоит здесь в случайном выборе 2-х карт из колоды.

Соответствующая алгебра событий – это все подмножества Ω .

$$A = \{\text{хотя бы одна карта черной масти}\}$$

$$B = \{\text{обе карты черной масти}\}$$

$$C = \{\text{только одна карта черной масти}\}$$

$$\bar{A} = \{\text{ни одной карты черной масти}\}$$

$$\bar{B} = \{\text{хотя бы одна карта нечерной масти}\} =$$

$$= \{\text{только одна карта не черная}\} + \{\text{обе карты не черные}\} =$$

$$= \bar{A} + C$$

$$B \subset A \Rightarrow AB = B; A + B = A;$$

$$C \subset A \Rightarrow A\bar{B} = A(\bar{A} + C) = A\bar{A} + AC = C.$$

1.4. Вероятность события.

Определение.

На введенной ранее алгебре событий определим числовую функцию от событий, которую обозначим P .

Эта функция называется вероятностью, если она обладает следующими свойствами:

1) для любого события A $0 \leq P(A) \leq 1$

2) $P(\Omega) = 1$

3) свойство аддитивности:

если события A и B несовместны ($AB = \emptyset$), то

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Из определения вероятности можно вывести несколько следствий:

а) Вероятность невозможного события $P(\emptyset) = 0$.

Действительно, для любого события A

$$A + \emptyset = A \text{ и } A\emptyset = \emptyset \Rightarrow P(A) = P(A) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0.$$

б) Вероятность дополнительного события

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Действительно, $A\bar{A} = \emptyset$, $A + \bar{A} = \Omega \Rightarrow 1 = P(A) + P(\bar{A})$

в) $P(B \setminus A) = P(B) - P(AB)$

Действительно, так как $B = B \setminus A + AB$ и $B \setminus A$ и AB несовместны, то

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(AB).$$

Следствие.

Поскольку $A + B = A + (B \setminus A)$, получаем следующую формулу

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

откуда, в частности, для любых A и B $P(A + B) \leq P(A) + P(B)$.

Неравенство всегда строгое, если события A и B совместны.

Обобщим понятие аддитивности на множество событий больше 2-х.

Если A, B, C попарно несовместны ($AB = AC = BC = \emptyset$), то

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Доказательство:

$$A(B+C) = AB + AC = \emptyset + \emptyset = \emptyset \quad (AB = AC = \emptyset). \text{ Отсюда}$$

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B + C) = P(A) + P(B) + P(C),$$

так как $BC = \emptyset$.

В общем случае, если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ попарно несовместны, то

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \quad (1.4.1.)$$

Пример 7.

По мишени производится 3 выстрела, вероятности попадания при первом, втором и 3-ем выстреле соответственно равны $p_1 = 0,4; p_2 = 0,5; p_3 = 0,7$.

Какова вероятность того, что в результате трех выстрелов в мишени окажется только одна пробоина?

$$A = \{\text{только одна пробоина}\}$$

$$A_1 = \{\text{попадание при первом выстреле}\}$$

$$A_2 = \{\text{попадание при втором выстреле}\}$$

$$A_3 = \{\text{попадание при третьем выстреле}\}$$

$$p(A_i) = p_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$A = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_1 + A_3 \bar{A}_1 \bar{A}_2$ сумма 3-х попарно несовместных событий $\Rightarrow$

$$p(A) = p(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + p(A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_1) + p(A_3 \bar{A}_1 \bar{A}_2).$$

Окончательный расчет будет произведен позднее, поскольку нужны дополнительные предположения.

Глава 7. Непрерывные случайные величины.

Обобщим понятие СВ на случай, когда среди ее значений есть интервалы вещественной прямой.

В отличие от ДСВ, значения такой СВ всегда определяются с некоторой погрешностью, поэтому нам необходимо, помимо множества возможных значений СВ X уметь вычислять

$$P(X \in [c; d)) \text{ для любых } c \text{ и } d.$$

Итак, случайная величина X – это некоторая вещественная функция, определенная на множестве исходов и такая, что для нее определены $P(X \in [c; d))$ для любых c и d .

7.1. Функция распределения случайной величины и ее свойства.

Определение.

Функцией распределения случайной величины X , обозначаемой F_X , называется функция, определенная на всей вещественной оси, и такая, что в точке x $F_X(x) = P(X < x)$.

Достаточно ли функции распределения, чтобы вычислить $P(X \in [c; d))$ для любых c и d ?

Замечание 7.1.1. Причина, по которой рассматриваются полуоткрытые интервалы, будет понятна в дальнейшем.

Очевидно следующее соотношение:

$\{X \in [c; d)\} + \{X < c\} = \{X < d\}$ и тогда по свойству аддитивности вероятности $P(X \in [c; d)) + P(X < c) = P(X < d)$, следовательно

$$P(X \in [c; d)) = F_X(d) - F_X(c) \quad (7.1.1.)$$

Поэтому для вычисления $P(X \in [c; d))$ для любых c и d достаточно уметь считать $P(X < x) = F_X(x)$ для любых x .

Итак, можно переформулировать определение СВ:

случайная величина X - это некоторая вещественная функция, определенная на множестве исходов и такая, что для нее определена функция распределения.

Так же как и ДСВ, любая СВ однозначно описывается двумя характеристиками: множеством ее возможных значений и ее функцией распределения. То, что это - функция, определенная на множестве исходов, употребляется лишь для удобства, так как природу множества исходов для большинства моделей мы не в состоянии определить и интересовать нас будет только множество ее возможных значений и ее функция распределения.

Свойства F_X :

$$1) 0 \leq F_X(x) \leq 1.$$

2) F_X возрастает .

3) Если $X \leq Y$, то $F_Y(x) \leq F_X(x)$ для любого x .

$$4) а) F_X(\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} P(X < x) = 1 ;$$

$$б) F_X(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(X < x) = 0 .$$

Доказательство.

Первое свойство следует из определения функции распределения как вероятности. Второе свойство вытекает из (7.1.1.).

Третье – из включения $\{Y < x\} \subset \{X < x\}$.

Докажем одновременно свойства 3а) и 3б).

Рассмотрим события $A_n = \{X < -n\}$ и $B_n = \{X \geq n\}$.

$$P(A_n) = F_X(-n), P(B_n) = 1 - F_X(n),$$

Последовательности A_n и B_n убывают:

$$(A_{n+1} \subset A_n), (B_{n+1} \subset B_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = P(\emptyset) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n\right) = P(\emptyset) = 0$$

по свойству непрерывности вероятности.

$$\text{Отсюда } \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = F_X(-\infty); \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = 1 - F_X(\infty).$$

4) F_X всегда непрерывна слева.

Пусть возрастающая последовательность x_n стремится к x . Тогда последовательность интервалов $[x_n, x)$ убывает к пустому множеству и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X \in [x_n, x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F_X(x) - F_X(x_n)) = 0.$$

Замечание 7.1.2. Для доказательств свойств 4) и 5) мы использовали возрастание функции распределения F_X , откуда следовало, что все рассматриваемые пределы существуют, поэтому нужно было провести необходимые вычисления лишь для какой-нибудь последовательности.

Этот принцип применяется и в дальнейшем.

Замечание 7.1.3. Функция распределения ДСВ.

Пусть X ДСВ, принимающая значения $x_1, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$, $x_1 < \dots < x_n$, и пусть $k(x) = \max(i, x_i < x)$.

Тогда

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{k(x)} p_i.$$

Это ступенчатая функция, непрерывная слева, со скачками в точках $x_1, \dots, x_n$ и ступеньками высотой $p_1, p_2, \dots, p_n$, последняя ступенька уровня 1 бесконечной длины.

Ее график приводится ниже

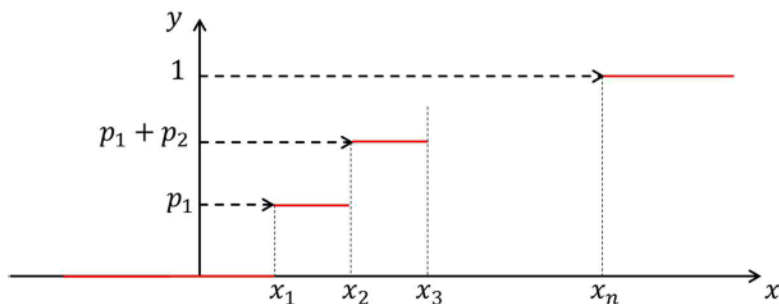


Рис 1. Функция распределения ДСВ

7.2. Определение непрерывной случайной величины.

Определение.

1) Случайная величина X называется непрерывной, если её функция распределения непрерывна.

или

2) Случайная величина X непрерывна, если $P(X=x)=0$ для любого x .

Докажем эквивалентность этих двух определений.

Из равенства

$$\{X=x\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{X \in [x, x+a_n)\},$$

где a_n стремится к 0 убывая, следует, что

$$P(X=x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \in [x, x+a_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F_x(x+a_n) - F_x(x)) = 0$$

по непрерывности F_x .

Докажем обратное утверждение.

Пусть $P(X=x)=0$, тогда предыдущее соотношение дает непрерывность справа F_x , а, следовательно, и непрерывность F_x в точке x по свойству 4.

Замечание 7.2.1. Из доказательства эквивалентности двух определений вытекает, что если x – какое-то фиксированное число, функция распределения СВ X F_x непрерывна в точке x тогда и только тогда, когда $P(X=x)=0$.

Замечание 7.2.2. Если X непрерывная СВ, то вероятности попадания X в интервалы $(a,b), [a,b), (a,b], [a,b]$ равны.

7.3. Плотность распределения непрерывной случайной величины и ее свойства.

Рассмотрим тот случай, когда функция распределения дифференцируема.

Поскольку $P\{X \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon)\} = F_x(x+\varepsilon) - F_x(x-\varepsilon)$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_x(x+\varepsilon) - F_x(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} = F'_x(x) = f_x(x).$$

Функция f_x называется плотностью распределения СВ X .

Из последнего равенства следует, что при малом ε , нормированная вероятность (деленная на 2ε) события $\{X \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]\}$ приблизительно равна плотности распределения в точке x . Таким образом, плотность распределения в точке x аналогична вероятности события $(X = x)$ для дискретной случайной величины.

Свойства плотности распределения:

1) $f_x(x) \geq 0$, так как $F_x(x)$ - возрастающая функция.

$$2) F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(t) dt.$$

Действительно, существует c , такое, что

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(t) dt + c,$$

так как F_x - некоторая первообразная f_x .

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow F_x(-\infty) = c \Rightarrow c = 0.$$

Следовательно, $F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(t) dt$ для любого x .

В частности,

$$1) F_x(+\infty) = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t) dt = 1.$$

$$2) P(X \in [c, d]) = \int_c^d f_x(t) dt.$$

7.4. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.

7.4.1. Понятия математического ожидания и дисперсии для непрерывной случайной величины.

Понятия математического ожидания и дисперсии для непрерывной случайной величины X , имеющей плотность

распределения f_x , аналогичны соответствующим понятиям, введенным для дискретных случайных величин. Отличие состоит в том, что суммы заменяются интегралами.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f_x(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x) dx - (M(X))^2 = M(X^2) - (M(X))^2,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

7.4.2. Свойства математического ожидания и дисперсии для непрерывных случайных величин, имеющих плотность распределения.

Соответствующие свойства математического ожидания и дисперсии для дискретных случайных величин переносятся без изменения на непрерывные случайные величины, имеющие плотность распределения.

Свойства математического ожидания.

1) $M(cX) = cM(X)$ (c – постоянная)

2) Пусть X и Y – 2 случайные величины, тогда

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

3) Если $X \geq Y$, то $M(X) \geq M(Y)$

4) Если $Y = g(X)$, X имеет плотность и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_x(x) dx \text{ существует, то } M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_x(x) dx.$$

Свойство 2) будет доказано в приложении 1.

Свойство 3) будет доказано в следствии 7.4.1.

Свойство 4) будет доказано в следствии 10.2.2.

Свойства дисперсии.

1) Она инвариантна по отношению к сдвигу: $D(X+a) = D(X)$ для любого a .

2) Дисперсию можно вычислять по более удобной формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

3) $D(aX) = a^2 D(X)$ для любого a .

$\sigma(aX) = |a| \sigma(X)$ для любого a .

Следующая теорема дает для непрерывных случайных величин, имеющих плотность распределения, выражение МО через функцию распределения.

Теорема 7.4.1.

Пусть X непрерывная случайная величина; имеющая плотность распределения f_X и такая, что $M(X)$ существует.

Тогда $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$ можно записать в виде

$$M(X) = - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx + \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx, \text{ где } F_X$$

функция распределения СВ X .

Доказательство.

Докажем сначала равенство

$$\int_0^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx.$$

Поскольку $1 - F_X(x) = P(X \geq x) = \int_x^{\infty} f_X(t) dt$,

$$\int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx = \int_0^{\infty} \left(\int_x^{\infty} f_X(t) dt \right) dx.$$

Переставляя пределы интегрирования, получаем

$$\int_0^{\infty} \left(\int_x^{\infty} f_X(t) dt \right) dx = \int_0^{\infty} f_X(t) \left(\int_0^t dx \right) dt = \int_0^{\infty} t f_X(t) dt.$$

Далее, поскольку $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$,

снова переставляя пределы интегрирования, получаем

$$\begin{aligned}
-\int_{-\infty}^0 F_X(x) dx &= -\int_{-\infty}^0 \left(\int_{-\infty}^x f_X(t) dt \right) dx = -\int_{-\infty}^0 f_X(t) dt \left(\int_t^0 dx \right) = \\
&= -\int_{-\infty}^0 (-t) f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 t f_X(t) dt.
\end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned}
&-\int_{-\infty}^0 F_X(x) dx + \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx = \\
&= \int_{-\infty}^0 t f_X(t) dt + \int_0^{\infty} t f_X(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt = M(X).
\end{aligned}$$

Возможность перестановки пределов интегрирования в обоих двойных интегралах здесь, как и в дальнейшем, принимается без доказательства.

Следствие 7.4.1.

Если $X \leq Y$, то $M(X) \leq M(Y)$. Вытекает из свойства 3) функций распределения.

Теорема 7.4.1. показывает, что МО зависит только от функции распределения СВ и, более того, позволяет распространить определение МО случайной величины на случайную величину любой природы при условии, что два интеграла Римана,

$$\int_{-\infty}^0 F_X(x) dx \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx \quad \text{конечны.}$$

Определение.

СВ, для которой выполнено последнее условие, называется интегрируемой.

Докажем, что МО ДСВ, вычисляемое по этой формуле, совпадает с определением МО в главе 5.

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7.4.1.

Пусть $X, Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ случайные величины, $s_1, s_2, \dots, s_k > 0$ и такие, что $s_1 + s_2 + \dots + s_k = 1$.

Тогда, если $F_X = s_1 F_{Y_1} + s_2 F_{Y_2} + \dots + s_k F_{Y_k}$ и $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ интегрируемы, то X интегрируема и

$$M(X) = s_1 M(Y_1) + s_2 M(Y_2) + \dots + s_k M(Y_k).$$

Доказательство.

По теореме 7.4.1.

$$\begin{aligned} M(X) &= - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx + \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx = \\ &= - \int_{-\infty}^0 (s_1 F_{Y_1}(x) + s_2 F_{Y_2}(x) + \dots + s_k F_{Y_k}(x)) dx + \\ &+ \int_0^{\infty} (s_1 + s_2 + \dots + s_k - (s_1 F_{Y_1}(x) + s_2 F_{Y_2}(x) + \dots + s_k F_{Y_k}(x))) dx = \\ &= - (s_1 \int_{-\infty}^0 F_{Y_1}(x) dx + s_2 \int_{-\infty}^0 F_{Y_2}(x) dx + \dots + s_k \int_{-\infty}^0 F_{Y_k}(x) dx) + \\ &+ s_1 \int_0^{\infty} (1 - F_{Y_1}(x)) dx + s_2 \int_0^{\infty} (1 - F_{Y_2}(x)) dx + \dots + s_k \int_0^{\infty} (1 - F_{Y_k}(x)) dx = \\ &= s_1 \left(- \int_{-\infty}^0 F_{Y_1}(x) dx + \int_0^{\infty} (1 - F_{Y_1}(x)) dx \right) + \\ &+ s_2 \left(- \int_{-\infty}^0 F_{Y_2}(x) dx + \int_0^{\infty} (1 - F_{Y_2}(x)) dx \right) + \dots + \\ &+ s_k \left(- \int_{-\infty}^0 F_{Y_k}(x) dx + \int_0^{\infty} (1 - F_{Y_k}(x)) dx \right) = \\ &= s_1 M(Y_1) + s_2 M(Y_2) + \dots + s_k M(Y_k). \end{aligned}$$

Следствие 7.4.2.

Если X ДСВ, принимающая значения $x_1, \dots, x_n$ с вероятностями $s_1, s_2, \dots, s_n$, $x_1 < \dots < x_n$, то

$$M(X) = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_n x_n.$$

Доказательство.

Положим в лемме 7.4.1 $Y_i = x_i$ $i=1, 2, \dots, n$.

Заметим, что

$$s_1 F_{Y_1}(x) + s_2 F_{Y_2}(x) + \dots + s_n F_{Y_n}(x) = \sum_{i=1}^{k(x)} s_i,$$

где $k(x) = \max(i, x_i < x)$, поскольку $F_{Y_i}(x) = 1, i \leq k(x)$,
 $F_{Y_i}(x) = 0, i > k(x)$.

С другой стороны, функция распределения ДСВ X была определена в замечании 7.1.3. той же формулой $F_X(x) = \sum_{i=1}^{k(x)} s_i$.

Поэтому

$$F_X(x) = s_1 F_{Y_1}(x) + s_2 F_{Y_2}(x) + \dots + s_n F_{Y_n}(x) \text{ для всех } x.$$

Остается вычислить $M(Y_i)$.

$$F_{Y_i}(x) = 0, x \leq x_i, F_{Y_i}(x) = 1, x > x_i.$$

$$\text{Если } x_i \geq 0, M(Y_i) = \int_0^{\infty} (1 - F_{Y_i}(x)) dx = \int_0^{x_i} 1 dx = x_i$$

$$\text{Если } x_i < 0, M(Y_i) = - \int_{x_i}^0 F_{Y_i}(x) dx = - \int_{x_i}^0 1 dx = \int_0^{x_i} 1 dx = x_i.$$

Поэтому $M(Y_i) = x_i$, для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Следствие 7.4.2. доказано.

Таким образом, мы объединили определения МО для ДСВ и для случайных величин, имеющих плотность распределения в одно, с помощью теоремы 7.4.1.

Замечание 7.4.1.

Функция распределения СВ может иметь разрывы и, поскольку она возрастает, это разрывы 1-го рода. Предположим, что ее разрывы в точках $x_1, \dots, x_n$; $x_1 < \dots < x_n$, (так называемые атомы распределения) со скачками $p_1, \dots, p_n$, а в остальных точках она дифференцируема.

По замечанию 7.2.1 это означает: $P(X = x_k) = p_k > 0$,

$$p_k = \lim_{t \rightarrow x_k + 0} (F_X(t) - F_X(x_k)), k = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть $p_1 + \dots + p_n = p < 1$, $f_x(x)$ производная $F_x(x)$, которая не определена в точках $x_1, \dots, x_n$ и определена для остальных x .

Если Y – непрерывная СВ с плотностью $\frac{f_x(x)}{1-p}$, Z - ДСВ, принимающая значения $x_1, \dots, x_n$ с вероятностями $\frac{p_1}{p}, \dots, \frac{p_n}{p}$.

Тогда

$$F_x = (1-p)F_Y + pF_Z. \quad (7.4.1.)$$

Действительно, пусть x любое число и $k(x) = \max\{i, x_i < x\}$.

Тогда

$$P(X < x) = p\left(\frac{p_1}{p} + \dots + \frac{p_{k(x)}}{p}\right) + (1-p) \frac{F_x(x) - (p_1 + \dots + p_{k(x)})}{1-p} = F_x(x).$$

Последний результат позволяет нам найти $M(X)$.

По (7.4.1.), лемме 7.4.1 и следствию 7.4.2.

$$\begin{aligned} M(X) &= (1-p)M(Y) + pM(Z) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx + p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n. \end{aligned}$$

7.5. Некоторые часто встречающиеся СВ.

а) Стандартная гауссовская случайная величина.

Стандартной гауссовской случайной величиной называется случайная величина Z , плотность распределения которой определяется формулой $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, а ее график имеет вид:

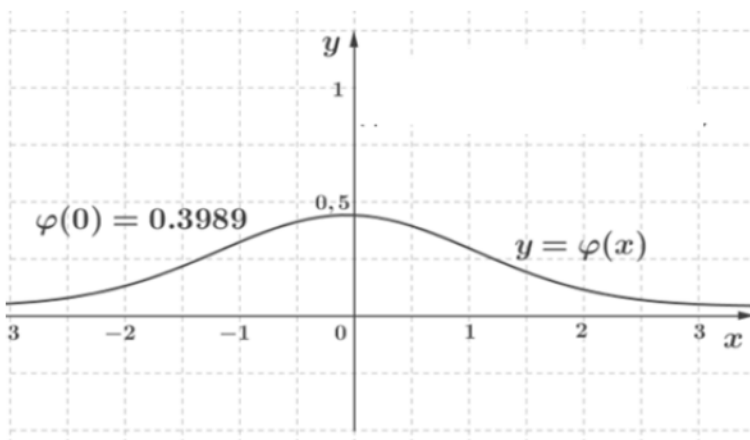


Рис.2. Стандартная гауссовская кривая

Найдем числовые характеристики этой СВ.

$M(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_z(x) dx = 0$ как интеграл от нечетной функции по симметричному интервалу.

$D(Z) = M(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_z(x) dx = 1$. Этот интеграл берется по частям, полагая $u=x$, $v = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, с учетом того, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

б) Случайная величина, равномерно распределенная на $[a, b]$.

Ее закон распределения обозначается $U[a, b]$.

Плотность распределения этой случайной величины имеет вид

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b] \\ 0, & \text{если } x \text{ не принадлежит } [a, b] \end{cases}.$$

График плотности равномерного распределения приведен ниже

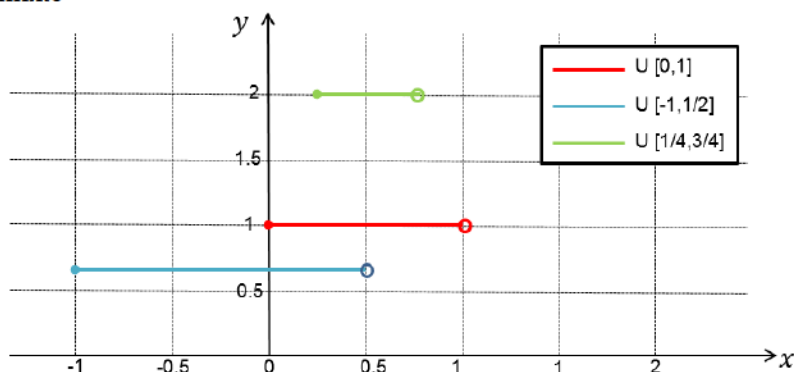


Рис.3. Плотность равномерного распределения

Если СВ X равномерно распределена на $[0,1]$, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^0 xf_x(x)dx + \int_0^1 xf_x(x)dx + \int_1^{+\infty} xf_x(x)dx$$

$$M(X) = 0 + \int_0^1 xdx + 0 = \frac{1}{2}.$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

$$M(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

$$D(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Ее функция распределения легко вычисляется

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Тогда, например, по формуле (7.1.1.).

$$P\left(X \in \left[\frac{1}{2}, 2\right)\right) = F_x(2) - F_x\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

в) Случайная величина, распределенная по экспоненциальному (показательному) закону.

Плотность распределения СВ с показательным законом распределения имеет вид $f(x, \gamma) = \begin{cases} \gamma e^{-\gamma x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \gamma > 0.$

Так как $\int_0^{+\infty} f(x, \gamma) dx = 1$, то

$$\int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} dx = \frac{1}{\gamma}.$$

Дифференцируя под знаком интеграла по γ последовательно 2 раза получаем

$$\int_0^{+\infty} x e^{-\gamma x} dx = \frac{1}{\gamma^2}, \quad \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\gamma x} dx = \frac{2}{\gamma^3}, \quad \text{что дает}$$

$$M(X) = \int_0^{+\infty} x f(x, \gamma) dx = \gamma \int_0^{+\infty} x e^{-\gamma x} dx = \frac{1}{\gamma}$$

$$M(X^2) = \gamma \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\gamma x} dx = \frac{2}{\gamma^2} \quad \text{и поэтому}$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{1}{\gamma^2}.$$

Найдем функцию распределения экспоненциальной СВ X .

при $x < 0$ $F_X(x) = 0$.

$$\text{при } x \geq 0 \quad F_X(x) = \int_0^x \gamma e^{-\gamma t} dt = 1 - e^{-\gamma x}.$$

Глава 12. Гауссовский случайный вектор.

Как мы видели раньше, для двух СВ знание их ковариации недостаточно, чтобы описать степень их зависимости, для этого нам нужна совместная функция распределения этих величин. В случае нескольких СВ, ситуация очень сильно усложняется, нам нужна теперь уже многомерная функция распределения.

Особый случай представляет так называемый гауссовский или нормальный вектор, для которого знание попарных ковариаций его координат полностью описывает зависимость между ними. По этой причине в приложениях во многих моделях используется гипотеза нормального распределения случайного вектора.

12.1. Стандартный гауссовский случайный вектор.

Пусть Z стандартная гауссовская СВ.

Напоминаем, что $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$, $f_z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Пусть $Z_1, \dots, Z_n$ стандартные гауссовские случайные величины, независимые в совокупности.

Тогда вектор $Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$ мы будем называть стандартным

гауссовским случайным вектором.

12.1.1. Некоторые часто встречающиеся законы распределения, связанные с вектором Z .

1) Распределение хи-квадрат.

$\chi_n^2 = Z^T Z = \sum_{i=1}^n Z_i^2$, где Z – определенный выше вектор.

СВ χ_n^2 имеет распределение, носящее имя «распределение χ^2 с n степенями свободы».

Плотность этого распределения имеет вид

$$f(x,n) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} & \text{при } x > 0 \end{cases},$$

где функция $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0$ гамма – функция.

2) Распределение Стьюдента.

Рассмотрим случайную величину $T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n Z_i^2}{n}}}$.

В этой формуле $Z, Z_1, \dots, Z_n$ стандартные гауссовские случайные величины, независимые в совокупности.

СВ T_n распределена по закону, называемому распределением Стьюдента с n степенями свободы.

Плотность ее распределения задается формулой

$$f(x,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n(n+1)} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[1 + \frac{x^2}{n}\right]^{-\frac{n+1}{2}} \text{ для любого } x.$$

Это четная функция.

3) Распределение Фишера - Снедекора.

Пусть $Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{n+m} \end{pmatrix}$ стандартный гауссовский случайный

вектор.

СВ $F_{n,m} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i^2}{\sum_{i=n+1}^{n+m} Z_i^2} \cdot \frac{n}{m}$ распределена по закону Фишера -

Снедекора с плотностью $f(x; n, m) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{(nx)^n m^m}{(nx+m)^{n+m}}}}{xB\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)} \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x \leq 0. \end{cases}$

Здесь $B\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{(nx)^n m^m}{(nx+m)^{n+m}}} \frac{dx}{x}$.

Функция распределения СВ $F_{n,m}$ дается формулой

$$P(F_{n,m} < x) = \frac{\int_0^{\frac{nx}{nx+m}} t^{\frac{n}{2}-1} (1-t)^{\frac{m}{2}-1} dt}{\int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1} (1-t)^{\frac{m}{2}-1} dt} = I_{\frac{nx}{nx+m}}\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right),$$

где $I_x\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right) = \frac{\int_0^x t^{\frac{n}{2}-1} (1-t)^{\frac{m}{2}-1} dt}{\int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1} (1-t)^{\frac{m}{2}-1} dt}$ неполная бета-функция.

12.2. Определение гауссовского случайного вектора.

Определение.

X называется гауссовским случайным вектором, если существуют постоянный вектор X_0 и невырожденная матрица A такие, что $X = AZ + X_0$, где

Z – стандартный гауссовский случайный вектор.

Замечание 12.2.1. (Пример гауссовского случайного вектора).

Пусть $X_1, \dots, X_n$ гауссовские случайные величины, независимые в совокупности.

Тогда $\begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix}$ гауссовский случайный вектор.

Действительно, для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ существуют такие σ_i, m_i , что $X_i = \sigma_i Z_i + m_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, где $Z_1, \dots, Z_n$ стандартные гауссовские случайные величины, независимые в совокупности.

Тогда $X = AZ + X_0$ с A диагональной матрицей, у

которой на диагонали стоят $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, $X_0 = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m_n \end{pmatrix}$.

Замечание 12.2.2.

Если X – гауссовский случайный вектор, то для любой невырожденной матрицы B , $Y = BX$ тоже является гауссовским случайным вектором. ($Y = (BA)Z + BX_0$)

Пусть X – гауссовский случайный вектор.

Тогда он записывается в виде $X = AZ + X_0$, где A некоторая невырожденная матрица, Z – стандартный гауссовский случайный вектор и X_0 некоторый вектор.

Отсюда $M(X) = AM(Z) + X_0$.

$$M(Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M(X) = X_0 \text{ и, если ввести}$$

$$\tilde{X} = X - X_0, \text{ то } M(\tilde{X}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вектор $\tilde{X}$, определенный выше, является центрированным случайным вектором.

В дальнейшем будут рассматриваться только центрированные случайные векторы.

12.3. Матрица ковариаций гауссовского случайного вектора.

Теорема 12.3.1.

Пусть A и B две прямоугольные матрицы порядков $(1, n)$ и (s, n) соответственно. Тогда $COV(AZ, BZ) = AB^T$, Z – стандартный гауссовский случайный вектор

Доказательство.

По определению

$$COV(AZ, BZ) = M(AZ(BZ)^T) = AM(ZZ^T)B^T.$$

Остается заметить, что $M(ZZ^T) = E$ (единичная матрица).

Следствие 12.3.1.

Если $X = AZ$, где Z гауссовский стандартный случайный вектор, то ковариационная матрица $V(X)$ вектора X , $V(X) = AA^T$.

12.4. Плотность распределения гауссовского случайного вектора.

Для вычисления плотности распределения гауссовского случайного вектора нам понадобится следующая теорема, которую мы приводим без доказательства:

Теорема 12.4.1. (замена переменных в многомерном интеграле)

Пусть $f_X(x) = f_X(x_1, \dots, x_n)$ плотность распределения случайного вектора X , и $Y = AX$, где A невырожденная матрица порядка n .

$$\text{Тогда } f_Y(x) = |\det A^{-1}| f_X(A^{-1}x).$$

Применим эту теорему к гауссовскому случайному вектору X .

Для гауссовского стандартного случайного вектора Z имеем

$$\begin{aligned} f_z(z) &= f_z(z_1, \dots, z_n) = f_{z_1}(z_1) f_{z_2}(z_2) \dots f_{z_n}(z_n) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_1^2}{2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_n^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{(z_1^2 + \dots + z_n^2)}{2}} = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2} z^T z} \end{aligned}$$

Заменяя в теореме 12.4.1. X на Z , а Y на X , получаем

$$\begin{aligned} f_X(x) &= |\det A^{-1}| \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2} (A^{-1}x)^T (A^{-1}x)}; \\ f_X(x) &= \bar{C} e^{-\left(\frac{1}{2}\right) x^T (A^{-1})^T (A^{-1}x)} = \bar{C} e^{-\left(\frac{1}{2}\right) x^T (AA^T)^{-1} x} = \bar{C} e^{-\left(\frac{1}{2}\right) x^T (V(X))^{-1} x} \end{aligned}$$

Здесь $\bar{C} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \left(\frac{1}{|\det A|} \right)$.

Замечание 12.4.1.

$$|\det A| = \sqrt{\det A \det A^T} = \sqrt{\det A A^T} = \sqrt{\det V(X)}$$

Произведенные вычисления приводят нас к следующей теореме:

Теорема 12.4.2.

Если X гауссовский случайный вектор, то

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \left(\frac{1}{\sqrt{\det V(X)}} \right) e^{\left(\frac{1}{2} \right) x^T (V(X))^{-1} x},$$

где $V(X)$ ковариационная матрица вектора X .

Следствие 12.4.1.

Если A ортогональная матрица, то $f_{AZ}(x) = f_Z(x)$, т. е. $X = AZ$ стандартный гауссовский случайный вектор.

(Матрица A называется ортогональной, если $AA^T = E$).

Действительно, $V(X) = AA^T = E$.

Замечание 12.4.2.

Закон распределения центрированного гауссовского случайного вектора X по теореме 12.4.2 полностью определяется его ковариационной матрицей $V(X)$. Отсюда следует, что матрица A в определении гауссовского случайного вектора X определена с точностью до ортогональной матрицы. Действительно, если $X = AZ = BZ'$, где Z и Z' – гауссовские стандартные случайные векторы, а A и B – невырожденные матрицы, то тогда

$$V(X) = AA^T = BB^T, \text{ что эквивалентно } (A^{-1}B)(A^{-1}B)^T = E,$$

а это означает, что $A^{-1}B = P$ ортогональная матрица, поэтому $B = AP$ (умножение на P справа).

Пример вычисления плотности распределения гауссовского центрированного случайного вектора размерности 2.

$$\begin{aligned}
V(X,Y) &= \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_X \sigma_Y \rho(X,Y) \\ \sigma_X \sigma_Y \rho(X,Y) & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \\
V^{-1}(X,Y) &= \frac{1}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2 (1 - (\rho(X,Y))^2)} \begin{pmatrix} \sigma_Y^2 & -\sigma_X \sigma_Y \rho(X,Y) \\ -\sigma_X \sigma_Y \rho(X,Y) & \sigma_X^2 \end{pmatrix} \\
f_{(X,Y)}(x,y) &= \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y \sqrt{1 - (\rho(X,Y))^2}} e^{\frac{1}{2}(x,y)^T V^{-1}(X,Y) (x,y)} = \\
&= \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y \sqrt{1 - (\rho(X,Y))^2}} e^{\frac{1}{2\sigma_X^2(1 - (\rho(X,Y))^2)} x^2 - \frac{1}{2\sigma_Y^2(1 - (\rho(X,Y))^2)} y^2 + \frac{\rho(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y (1 - (\rho(X,Y))^2)} xy}
\end{aligned}$$

12.5. Независимость гауссовских случайных векторов.

Замечание 12.5.1.

Теорема 10.1.1. легко распространяется на векторы

Пусть X, Y два вектора, имеющие плотности $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ соответственно.

X и Y независимы $\Leftrightarrow$ существуют функции $\varphi(x)$ и $\Psi(y)$, такие, что $f_{X,Y}(x,y) = \varphi(x)\Psi(y)$.

Теорема 12.5.1.

Пусть X, Y два вектора, такие, что $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ гауссовский случайный вектор.

Если $\text{COV}(X,Y)$ нулевая матрица, то X, Y независимые гауссовские случайные векторы.

Доказательство.

Матрица $V\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$ имеет следующий вид:

$$V\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} V(X) \text{COV}(X,Y) \\ \text{COV}(Y,X) V(Y) \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$\begin{pmatrix} \text{cov}(X_1, X_1) \dots \text{cov}(X_1, X_n) \\ \dots\dots\dots \\ \text{cov}(X_n, X_1) \dots \text{cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix} = V(X), \\
\begin{pmatrix} \text{cov}(Y_1, Y_1) \dots \text{cov}(Y_1, Y_m) \\ \text{cov}(Y_m, Y_1) \dots \text{cov}(Y_m, Y_m) \end{pmatrix} = V(Y) \\
\begin{pmatrix} \text{cov}(X_1, Y_1) \dots \text{cov}(X_1, Y_m) \\ \dots\dots\dots \\ \text{cov}(X_n, Y_1) \dots \text{cov}(X_n, Y_m) \end{pmatrix} = \text{COV}(X, Y) \\
\begin{pmatrix} \text{cov}(Y_1, X_1) \dots \text{cov}(Y_1, X_n) \\ \dots\dots\dots \\ \text{cov}(Y_m, X_1) \dots \text{cov}(Y_m, X_n) \end{pmatrix} = \text{COV}(Y, X) = (\text{COV}(X, Y))^T$$

Если $\text{COV}(X, Y)$ нулевая матрица, тогда матрица $V\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$

имеет 2 диагональных блока $V(X)$ и $V(Y)$, вне которых стоят нули, т.е. она принимает следующий вид

$$V\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} V(X) & 0 \\ 0 & V(Y) \end{pmatrix}.$$

В матрице $V^{-1}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$ тоже 2 диагональных блока, только

не $V(X)$ и $V(Y)$, а их обратные, вне которых нули. Тогда

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x_1, \dots, x_n; y, \dots, y_m) &= \bar{C} e^{\frac{1}{2}((x,y)^T (V(X,Y))^{-1} (x,y))} = \\ &= \bar{C} e^{\frac{1}{2}(x^T V(X)^{-1} x + y^T V(Y)^{-1} y)} = \bar{C} e^{-\frac{1}{2}x^T V(X)^{-1} x} e^{-\frac{1}{2}y^T V(Y)^{-1} y} \Rightarrow
\end{aligned}$$

X и Y независимые гауссовские векторы, так как

$$f_X(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x^T V(X)^{-1} x}, \quad f_Y(y) = C_2 e^{-\frac{1}{2}y^T V(Y)^{-1} y},$$

$$C_1 C_2 = \bar{C} \quad \text{и} \quad f_{X,Y}(x_1, \dots, x_n; y, \dots, y_m) = f_X(x) f_Y(y).$$

Замечание 12.5.2.

Из доказательства теоремы 12.5.1. вытекает, что если X , Y – независимые гауссовские случайные векторы, то $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ гауссовский случайный вектор.

12.6. Линейные преобразования над гауссовским случайным вектором.**Теорема 12.6.1.**

Пусть X гауссовский случайный вектор размерности n , D матрица размерности (s, n) , ранга m .

Пусть D' – матрица, составленная из каких-то m линейно независимых строк матрицы D . Тогда $D'X$ – гауссовский случайный вектор размерности m и все остальные координаты DX являются линейными комбинациями координат гауссовского вектора $D'X$.

Ранг ковариационной матрицы вектора DX равен m .

Следствие 12.6.1.

Пусть случайный вектор X определяется равенством $X = AZ$, где A вырожденная матрица порядка n , ранга m . Положим в теореме $D=A$, $X=Z$.

Тогда ранг $V(X)$ равен m и существует гауссовский вектор Y размерности m , составленный из некоторых m координат вектора X , остальные координаты X являются линейными комбинациями координат вектора Y .

Все такие гауссовские векторы размерности m получаются произвольным выбором m линейно независимых строк матрицы A в качестве матрицы D' . Они все имеют форму $Y = D'Z$ и являются наборами некоторых m координат вектора X .

Доказательство теоремы 12.6.1. приведено в приложении 2.

Следствие 12.6.2.

Если $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ – гауссовский случайный вектор, то X и Y – гауссовские случайные векторы.

Доказательство.

Пусть n и m - размерности X и Y , D матрица размерности $(n \times (n+m))$, у которой стоят n единиц на диагонали, а остальные нули. Тогда $D \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = X$, и по теореме 12.6.1. вектор X является гауссовским. Аналогично доказывается гауссовскость Y .

Следствие 12.6.3.

Пусть $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix}$ гауссовский случайный вектор и

$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}$ ненулевой вектор.

Тогда $C^T X$ является гауссовской СВ. В частности, это верно, если $X_1, \dots, X_n$ - гауссовские СВ, независимые в совокупности. В последнем случае

$$D(C^T X) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_i^2, \text{ где } D(X_i) = \sigma_i^2, i = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда вытекает, что $C^T X = \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_i^2} Z$, где Z - стандартная гауссовская СВ.

12.7. Условное распределение гауссовского случайного вектора.

Теорема 12.7.1.

Если X, Y два вектора, для которых $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ гауссовский случайный вектор, то существует единственная матрица B такая, что $Y - BX$ не зависит от X . B определяется однозначно из матричного уравнения

$$\text{COV}(Y, X) = BV(X). \quad (12.7.1.)$$

Более того, условный закон распределения Y относительно $X = x$ является гауссовским с математическим ожиданием

$V^{-1}(X)\text{COV}(Y, X)x$ и ковариационной матрицей

$$V = V(Y) - BV(X)B^T = V(Y) - \text{COV}(Y, X)V^{-1}(X)\text{COV}(X, Y).$$

Доказательство.

Запишем Y в виде $Y = Y - BX + BX$.

$(Y - BX, X)$ гауссовский случайный вектор для любой матрицы B соответствующей размерности, так как он получается невырожденным линейным преобразованием из гауссовского случайного вектора $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ (замечание 12.2.2.).

Если $\text{COV}(Y - BX, X)$ равна нулевой матрице, то $Y - BX$ и X по теореме 12.5.1. независимы для B , удовлетворяющей этому условию.

Но

$$\begin{aligned} \text{COV}(Y, X) &= \text{COV}(Y - BX + BX, X) = \\ &= \text{COV}(Y - BX, X) + B\text{COV}(X, X) = BV(X) \end{aligned}$$

и поэтому $\text{COV}(Y, X) = BV(X)$, т.е. (12.2.5.1.) доказано.

Далее, из следствия 12.6.2. следует, что $Y - BX$ гауссовский вектор, так как $(Y - BX, X)$ гауссовский случайный вектор.

Так как в условном законе $X = x$, то $Y = Y - BX + BX$ условно распределен как $Y - BX + Bx$, т.е. его условный закон

распределения гауссовский с математическим ожиданием равным Bx и ковариационной матрицей $V(Y - BX)$.

Далее, так как $V(Y) = V(Y - BX) + V(BX)$ вследствие независимости $Y - BX$ и BX , где B определяется из (12.7.1.), откуда следует, что $V(Y - BX) = V(Y) - V(BX)$, и это завершает доказательство.

12.8. Регрессия для гауссовского случайного вектора.

Определение.

$M(Y / X) = F(X)$ – регрессия Y по отношению к X .

Теорема 12.8.1.

Если $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ гауссовский случайный вектор, то регрессия Y

по X всегда линейна: $M(Y / X) = M(Y) + B(X - M(X))$, где B определяется из (12.7.1.).

Действительно, пусть B определяется из (12.2.5.1.) и тогда $(Y - BX)$ и X независимы.

По свойствам условного математического ожидания

$$\begin{aligned} M(Y / X) &= M((Y - BX + BX) / X) = \\ &= M((Y - BX) / X) + BX = M(Y - BX) + BX, \end{aligned}$$

так как $M((Y - BX) / X) = M(Y - BX)$ вследствие независимости $(Y - BX)$ и X .

Часть 2. Статистика.

Статистика занимается изучением характеристик некоторого набора объектов, называемых статистическими объектами.

Совокупность всех изучаемых статистических объектов называется генеральной совокупностью. Сами объекты могут иметь различную природу, это могут быть люди, животные или какие-то предметы.

Общим для них является наличие у каждого объекта определенного признака, который и является предметом изучения статистика.

Для изучения таких признаков генеральной совокупности возможны два подхода. Один из них называется описательной статистикой, которая использует для своих целей всю генеральную совокупность и описывает только ее, не пытаясь распространить полученные результаты на другие генеральные совокупности. Второй подход называется математической статистикой, которая делает выводы о признаке всей генеральной совокупности, анализируя ее часть, называемую выборкой.

Часть 2.1. Описательная статистика.

Описательная статистика имеет дело с некоторым набором эмпирических данных, называемых наблюдениями, касающихся одного или нескольких признаков (этот набор обычно достаточно велик).

Признаки делятся на качественные, которым нельзя приписать числовые значения (например, цвет глаз) и количественные, принимающие числовые значения. Каждый качественный признак имеет множество различных значений.

Например, цвет глаз может быть синим, карим и т. д.

Каждый количественный признак также имеет множество значений, которые выражены в числах (например, число баллов, полученных учениками одного класса по ЕГЭ).

При изучении группы студентов университета, в качестве признаков можно брать количественные признаки: их возраст, рост, вес и качественные признаки: их пол, их национальность.

Огромность и хаотичность информации, содержащейся в полученных данных, мешают нам увидеть то существенное, что в них содержится.

Поэтому возникает необходимость упорядочивания данных и сокращения информации, содержащейся в наблюдениях, с целью сохранения только той информации, которая нам нужна для понимания и описания изучаемого явления. Все полученные данные заменяются набором небольшого числа характеристик (статистических показателей), а также строятся графики для наглядного представления наблюдений, дающие суммарное представление обо всех наблюдениях, так как они содержат всю существенную информацию о них.

В дальнейшем мы рассматриваем только количественные признаки. Количественные признаки могут быть дискретными (например, оценки, полученные студентами на экзамене) и непрерывными (например, их вес или рост).

На основании полученных N наблюдений некоторого признака мы составляем статистический (вариационный) ряд, который может быть представлен в виде ряда всех значений признака, упорядоченных по возрастанию, $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$, одинаковые значения повторяются столько раз, сколько они встречаются, либо, что предпочтительнее, в виде, определяемом ниже:

каждому значению x_i признака ставится в соответствие число k_i объектов, принимающих это значение;

k_i - это частота значения x_i .

Тогда статистический ряд для одного признака можно записать в виде последовательности пар (x_i, k_i) , где $i = 1, 2, \dots, n$, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $k_1 + k_2 + \dots + k_n = N$.

Число $p_i = \frac{k_i}{N}$, $i = 1, 2, \dots, n$ называется относительной частотой данного значения признака.

Сумма относительных частот всегда равна 1.

Относительные частоты часто выражаются в процентах.

$$p_i = \frac{k_i}{N} \text{ или } p_i = \frac{k_i}{N} \times 100 \%, i = 1, 2, \dots, n.$$

Как говорилось выше, при работе с полученными данными мы заменяем всю генеральную совокупность на небольшое число ее характеристик, статистических показателей, дающих о ней по возможности полное представление.

Эти статистические показатели делятся на меры среднего уровня и меры рассеяния.

Глава 1. Статистические показатели генеральной совокупности.

Меры среднего уровня дают усредненную характеристику совокупности объектов по определенному признаку. Ими являются

Среднее значение, Медиана, Мода, Квартиль.

Меры рассеяния показывают, насколько хорошо эти меры среднего уровня представляют данную совокупность. Ими являются

Размах, Дисперсия, Среднеквадратическое отклонение, Интерквартильный размах.

1.1. Меры среднего уровня.

1.1.1. Среднее значение.

Средним значением $\bar{x}$ статистического ряда называется средневзвешенная сумма значений признака

$$\bar{x} = \frac{x_1 k_1 + x_2 k_2 + \dots + x_n k_n}{N} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Среднее значение принимает во внимание все значения признака.

1.1.2. Медиана.

Медианой Me статистического ряда называется самое маленькое его значение, такое, что по крайней мере 50% наблюдений меньше или равны ему. Медиана по определению находится в центре значений признака и нечувствительна к крайним по величине его значениям, поэтому в некоторых ситуациях ее предпочитают среднему значению.

Для определения медианы нам необходимо или восстановить вариационный ряд, т. е. для каждого i повторить x_i k_i раз, и тогда $Me = x_{((N+1)/2)}$, если N нечетно и $\frac{1}{2} (x_{(N/2)} + x_{((N/2)+1})$, если N четно (по соглашению); или же, сохраняя пары (x_i, k_i) , где $i=1, 2, \dots, n$, и, суммируя последовательно $k_1, k_2, \dots$, останавливаемся, как только очередная последовательная сумма $k_1 + k_2 + \dots + k_i$ превысит впервые $N/2$. Тогда это значение i нам дает x_i в качестве медианы.

Если окажется, что для некоторого i $k_1 + k_2 + \dots + k_i$ равно $N/2$ (это означает, что N четно), в качестве медианы мы берем $(x_i + x_{i+1}) / 2$ (по соглашению).

Пример 1 (дискретный признак).

Статистический ряд составлен из баллов, полученных учениками одного класса по ЕГЭ.

40 45 45 50 55 60 64 65 70 70 71 72 75 85 87 90 91 92 92 95 95 97 97

Здесь $N = 23$, $N/2 = 11,5$. Тогда номер варианты в вариационном ряду, берущейся в качестве медианы, равен 12. $Me = x_{12} = 72$.

Т. е. число учеников, имеющих баллы 72 и меньше равно числу учеников, имеющих баллы 72 и больше.

Пусть этот ряд имеет вид

45 45 50 55 60 64 65 70 70 71 72 75 85 87 90 91 92 92 95 95 97 97.

Здесь $N = 22$, $N/2 = 11$. Тогда для расчета медианы мы в статистическом ряду берем значения, стоящие на 11-м и 12-м месте.

$$Me = (x_{11} + x_{12}) / 2 = (72 + 75) / 2 = 73,5.$$

1.1.3. Мода.

Мода, Mo – это наиболее часто наблюдаемое значение признака.

Случай дискретного признака.

Вернемся к примеру 1.

45,70,92,95,97 встречаются 2 раза, все остальные значения – только один раз. Этот статистический ряд – мультимодальный, у него 5 мод.

Для случая непрерывного признака мода будет определена для интервального статистического ряда, при рассмотрении его графической интерпретации.

1.1.4. Квартили.

Другими мерами среднего уровня являются квартили.

Первый квартиль Q_1 определяется как наименьшее значение статистического ряда, такое, что по крайней мере 25% этого ряда находятся перед ним.

Третий квартиль Q_3 определяется как наименьшее значение статистического ряда, такое, что по крайней мере 75% ряда находятся перед ним. Тогда распределение значений статистического ряда по указанным интервалам будет иметь следующий вид

$Min_25\%_Q_1_25\%_Q_2_25\%_Q_3_25\%_Max$

Второй квартиль Q_2 совпадает с медианой.

Min - наименьшее значение признака, Max - наибольшее значение признака.

6 чисел (Min , Q_1 , Me , Mo , Q_3 , Max) дают сжатую характеристику генеральной совокупности, отраженную в статистическом ряде.

1.2. Меры рассеяния.

1.2.1. Размах статистического ряда.

$Max-Min$ называется размахом статистического ряда.

1.2.2. Дисперсия.

Теперь мы хотим связать со статистическим рядом характеристику, позволяющую оценить разброс его членов относительно среднего значения. Это средневзвешенная сумма квадратов отклонений значений признака от среднего значения статистического ряда.

$$\begin{aligned} S &= \frac{k_1(x_1 - \bar{x})^2 + k_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + k_n(x_n - \bar{x})^2}{N} = \\ &= \frac{k_1}{N}(x_1 - \bar{x})^2 + \frac{k_2}{N}(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + \frac{k_n}{N}(x_n - \bar{x})^2 = \\ &= p_1(x_1 - \bar{x})^2 + p_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + p_n(x_n - \bar{x})^2, \end{aligned}$$

где p_i относительная частота значения x_i .

S называется дисперсией статистического ряда.

1.2.3. Среднеквадратическое отклонение.

Квадратный корень из дисперсии $s = \sqrt{S}$ называется среднеквадратическим отклонением статистического ряда. Достоинство среднеквадратического отклонения заключается в том, что его размерность совпадает с размерностью исходных данных в отличие от размерности дисперсии.

1.2.4. Интерквартильный интервал.

Интервал $[Q_1; Q_3]$ называется интерквартильным интервалом ряда. Его длина $Q_3 - Q_1$ называется интерквартильным размахом.

Интерквартильный интервал $[Q_1; Q_3]$ содержит примерно 50% элементов статистического ряда.

Он является мерой разброса 50% значений признака относительно медианы.

Замечание 1.2.3.

Если рассмотреть дискретную случайную величину, принимающую значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, определенные выше, с вероятностями (относительными частотами) соответственно $p_1, p_2, \dots, p_n$, тогда определенные выше для статистического

ряда среднее, дисперсия и среднеквадратическое отклонение являются соответственно математическим ожиданием, дисперсией и среднеквадратическим отклонением для этой дискретной случайной величины. Поэтому все свойства математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения, рассмотренные в первой части, переносятся на введенные в этой главе среднее, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

Глава 2. Графическое представление статистического ряда для непрерывного признака.

2.1. Интервальный ряд.

Для графического представления собранных данных мы разбиваем значения статистического ряда на n интервалов, левый конец первого интервала - это наименьшее значение статистического ряда; все интервалы полуоткрыты и открыты справа, кроме последнего, который замкнут, его правый конец - это наибольшее значение статистического ряда. В качестве представителя интервала берем его середину. Таким образом, мы обрабатываем не всю совокупность данных N , а значительно меньшую совокупность, объема n .

По аналогии с предыдущим замечанием мы заменяем множество собранных данных на некоторую дискретную случайную величину, значениями которой являются середины интервалов, а их вероятностями - относительные частоты этих интервалов.

Замечание 2.1.1.

Поскольку при разбиении на интервалы точные значения наблюдений теряются, мы вынуждены предполагать, что значения, попавшие в каждый интервал, распределены в нем равномерно, и поэтому в качестве представителя каждого интервала мы берем математическое ожидание равномерного закона распределения, которое для него является серединой интервала.

2.2. Гистограмма.

Для построения гистограммы на оси абсцисс откладываются интервалы, на которых располагаются прямоугольники, площади которых пропорциональны частотам (или относительным частотам) интервалов.

Замечание 2.2.1.

Почему высота прямоугольника определяется через площадь? Чтобы это понять, допустим, что мы хотим

объединить 2 соседних интервала. Предположим для простоты, что их частоты одинаковы и одинаковы также длины этих интервалов. Это означает, что эти прямоугольники, стоящие рядом друг с другом, совершенно одинаковы.

Для объединенного интервала число наблюдений в нем удваивается, но в то же время и длина суммарного интервала тоже удваивается, поэтому, поскольку в этом случае прямоугольники просто объединяются, высота суммарного прямоугольника не меняется, и, следовательно, в общем случае, высота прямоугольника должна быть пропорциональна частоте, поделенной на длину интервала, то есть пропорциональна частоте на единицу длины. Благодаря такому определению высот прямоугольников мы видим, что при любой группировке интервалов суммарная площадь всех прямоугольников остается прежней, и, при соответствующей нормировке, будет всегда равна 1. Это построение предвосхищает определение плотности распределения непрерывной случайной величины.

Построенный таким образом график называется гистограммой статистического ряда.

Для определения моды выбирается самый высокий прямоугольник, который называется модальным.

Интервал базы этого прямоугольника называется модальным интервалом. Очень часто мода не определяется, и говорят только о модальном интервале. Когда мода определяется, часто в ее качестве берется середина модального интервала или же осуществляется более сложная конструкция:

на гистограмме правую вершину модального прямоугольника соединяют с правым верхним углом предыдущего прямоугольника, а левую вершину модального прямоугольника – с левым верхним углом последующего прямоугольника. Абсцисса точки их пересечения и дает моду статистического ряда.

Если номер модального интервала k , то определенная геометрически мода вычисляется по формуле:

$$Mo = x_k + h_k \frac{f_k - f_{k-1}}{f_k - f_{k-1} + f_k - f_{k+1}},$$

где x_k - левый конец модального интервала, h_k - его длина, f_k - его плотность (высота модального прямоугольника), f_{k-1}, f_{k+1} - плотности предыдущего и последующего интервалов (высоты предыдущего и последующего прямоугольников). $f_i = \frac{p_i}{h_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Модальный интервал и мода зависят от способа разбиения на интервалы.

Для вычисления медианы для интервального ряда используется линейная интерполяция. Пусть

$$S_i = \sum_{j=1}^i \vartheta_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \vartheta_j - \text{число наблюдений } j - \text{того}$$

интервала, $k = \max\{i, S_i \leq N/2\}$, x_k - левый конец $k+1$ -го интервала, h_k - его длина. Тогда интервал, содержащий медиану: $[x_k, x_k + h_k)$, и сама

$$Me = x_k + h_k \frac{\frac{N}{2} - S_k}{\vartheta_{k+1}}.$$

Пример 2.

Рассматриваются возрасты 658 жителей некоторого поселка. Разбиваем ряд из значений возрастов на интервалы, имеющие длину 20 лет.

Возрастные интервалы

$$[0; 20) \quad [20; 40) \quad [40; 60) \quad [60; 80) \quad [80; 100]$$

Число жителей, попавших в соответствующий интервал,

$$132 \quad 178 \quad 203 \quad 113 \quad 32$$

Отношение числа жителей, попавших в интервал, к общему числу жителей и к длине отрезка

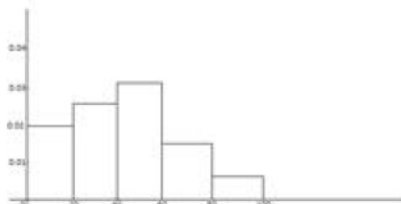
$$\frac{132}{13160} \quad \frac{178}{13160} \quad \frac{203}{13160} \quad \frac{113}{13160} \quad \frac{32}{13160}$$

Откладываем на оси абсцисс 5 отрезков длиной 20. На них, как на основаниях, строим прямоугольники, высоты которых соответственно равны

$$\frac{132}{13160} \quad \frac{178}{13160} \quad \frac{203}{13160} \quad \frac{113}{13160} \quad \frac{32}{13160}$$

$$0,01; 0,0135; 0,0154; 0,0086; 0,0024.$$

Полученная фигура и является искомой гистограммой



Мы видим, что модальный интервал – это интервал [40; 60) и мода или просто 50 лет или по формуле

$$M_o = 40 + 20 \frac{\frac{203}{13160} - \frac{178}{13160}}{\frac{203}{13160} - \frac{178}{13160} + \frac{203}{13160} - \frac{113}{13160}} =$$

$$= 40 + 20 \frac{203 - 178}{203 - 178 + 203 - 113} = 44 \text{ года и 4 месяца.}$$

Наиболее распространенный возраст жителей этого поселка 44 года и 4 месяца.

Интервал медианы для примера 2 тот же [40; 60). Сама медиана $M_e = 40 + 20 \frac{329 - (132 + 178)}{203} = 41 \text{ год и 10 месяцев.}$

2.3. Полигон.

Соединяя середины отрезков, ограничивающих прямоугольники, из которых состоит гистограмма, сверху, мы получим ломаную линию, носящую название полигона. Для двух крайних прямоугольников строятся отрезки, проходящие через середину крайней боковой стороны и середину отрезка, ограничивающего прямоугольник сверху до пересечения с осью абсцисс.

Полигон и гистограмма также дают сжатое представление о генеральной совокупности, но уже не в виде набора чисел, а в виде графиков.

2.4. Методы определения числа интервалов

Для визуализации собранных данных непрерывного признака их необходимо разбить на классы, определяя соответствующие интервалы и после этого строить гистограмму.

Гистограмма может быть приближена некоторой непрерывной кривой, так называемой плотностью распределения, очень часто это гауссовская кривая.

Существуют разные способы разбиения собранных данных на классы, наиболее распространенный – интервалы одинаковой длины. Если длина интервала d , а их число n , то $dn = \text{Max} - \text{Min}$, то есть размах. Поэтому определение числа интервалов или определение длины интервала – эквивалентные проблемы.

Для определения числа интервалов используются 3 правила:

1) по правилу Стержесса это число равно $1 + [\log_2 N]$

Поскольку по ЦПТ СВ X биномиального закона с параметрами n и p имеет для больших n приблизительно то же распределение, что и гауссовская СВ $np + \sqrt{np(1-p)} Z$ где Z стандартная гауссовская СВ, с помощью сдвига и изменения масштаба можно, наоборот, приблизить любую гауссовскую СВ линейной функцией от биномиальной СВ. Поскольку ни сдвиг, ни изменение масштаба не меняют структуру разбиения на классы, этими двумя операциями можно пренебречь.

Стержесс для сохранения симметрии рассматривал СВ симметричного биномиального закона с параметрами $n-1$ и $\frac{1}{2}$ для n классов. Среднее число наблюдений в i -том классе равно

$$NP(X=i-1) = N \frac{C_{n-1}^{i-1}}{2^{n-1}}, \text{ где } N - \text{общее число наблюдений.}$$

Чтобы оно было целым для любого $i=1,2,\dots,n$, надо выбрать

N пропорциональным 2^{n-1} , $N = k 2^{n-1}$.

Таким образом, число наблюдений и количество интервалов связаны соотношением $N = k 2^{n-1}$. Число классов p зависит от числа наблюдений N и от выбора k . Стержесс (1926г.) взял $k=1$, когда получается наибольшее число классов.

Отсюда $p=1+\lceil \log_2 N \rceil$.

Эта формула Стержесса использует для определения числа классов только число наблюдений и из-за своей простоты применяется повсеместно. Следует отметить, что доказательная база для формулы Стержесса практически отсутствует, в основном на уровне утверждения, что $NP(X=i-1)$ должно быть целым и соотношения $N = k 2^{n-1}$. Хотя в ее основе лежит гауссовское распределение, тем не менее она применяется не только для обработки набора наблюдений, соответствующих гауссовскому распределению, но и для любой совокупности собранных данных, в частности, для асимметричного распределения.

На практике, несмотря на сказанное, утверждается, что эта формула позволяет построить удовлетворительную гистограмму, если число наблюдений меньше 200 ($n < 9$), хотя может быть применима только для больших n .

2) Скотт (1979г.) минимизирует расстояние между теоретической плотностью распределения (непрерывной кривой) и ее гистограммой в интегральном среднем квадратическом и получает для длины оптимального интервала асимптотическую формулу

$$d = \sqrt[3]{\frac{6}{N \int_{-\infty}^{\infty} (f'(x))^2 dx}} = \frac{\gamma}{\sqrt[3]{N}},$$

где $\gamma = \sqrt[3]{\frac{6}{\int_{-\infty}^{\infty} (f'(x))^2 dx}}$ и f - плотность приближаемого гистограммой распределения.

Для гауссовского закона он получает, в частности,

$\gamma = \sqrt[3]{6\sqrt{\pi}} s$, где s – среднеквадратическое отклонение.

$$\text{Поэтому } d = \sqrt[3]{6\sqrt{\pi}} \frac{s}{\sqrt[3]{N}} \approx 3,5 \frac{s}{\sqrt[3]{N}},$$

3) Фридман и Диаконис (1981г.) двумя годами позже получили независимо от Скотта тот же результат и, кроме того, предложили простую приближенную формулу для $\gamma: \gamma = 2(Q_3 - Q_1)$, надежность которой подтверждается многочисленными вычислениями.

Тогда для длины интервала получаем выражение:

$$2 \frac{Q_3 - Q_1}{\sqrt[3]{N}}.$$

Отсюда число интервалов будет примерно равно $\frac{\text{Max} - \text{Min}}{2(Q_3 - Q_1)} \sqrt[3]{N}$, где $\text{Max}, \text{Min}, Q_3, Q_1$ были определены раньше.

Правило Скотта точнее, чем правило Фридмана-Диакониса для гауссовского закона и определяется для любого закона по указанной формуле, но правило Фридмана-Диакониса универсальнее, так как дает единую простую формулу.

Оба последних правила математически обоснованы в отличие от правила Стержесса, являются асимптотическими, как и, впрочем, правило Стержесса, и для большого числа наблюдений требуют гораздо большего числа интервалов, чем правило Стержесса.

Часть 2.2. Математическая статистика.

Глава 1. Выборка и вариационный ряд.

1.1. Выборка.

Вместо того, чтобы, как это делалось в предыдущей главе, имея большое количество численных данных, сводить их к нескольким значениям, теряя при этом большой объем информации, математическая статистика предпочитает иной путь, а именно, извлечь из этой огромной массы данных несколько значений, называемых выборкой, и по ним строить нужные нам характеристики, а затем, опираясь на них, делать предсказания, касающиеся всего изучаемого множества (генеральной совокупности).

Определение этих выборочных значений должно удовлетворять определенным условиям.

Прежде всего, эти значения должны быть выбраны случайным образом, независимо друг от друга. В то же время они должны представлять наиболее полно всю генеральную совокупность во всех ее аспектах.

Более того, выбираемое число наблюдений должно принимать во внимание материальную (финансовую) и моральную стоимости эксперимента (испытания лекарств и методов лечения на животных), сводя к минимуму разрушение исследуемых объектов.

Основное предположение.

Выбранные значения $X_1, \dots, X_n$ представляют собой независимые, одинаково распределенные СВ, и их закон распределения совпадает с законом распределения изучаемого признака общей (генеральной) совокупности данных.

Собранные значения или наблюдения называются выборкой из этого закона распределения.

Любая функция от наблюдений будет называться статистикой.

1.2. Вариационный ряд.

Определение.

Упорядоченная по возрастанию последовательность выборки $X_1, \dots, X_n$, которую мы обозначим $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$, $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ называется вариационным рядом. Элементы вариационного ряда называются порядковыми статистиками.

Законы распределения порядковых статистик были определены в первой части в примере 28

$$F_{X_{(k)}}(x) = \sum_{i=k}^n C_n^i (F_{X_1}(x))^i (1 - F_{X_1}(x))^{n-i}, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Выборочная медиана Me определяется из вариационного ряда, она находится в его середине, это самое маленькое значение, такое, что, по крайней мере 50% вариационного ряда меньше или равны ему. Если n нечетно, то $Me = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. Если n

четно, то по соглашению $Me = \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$ или просто

$Me = X_{\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)}$ для больших n . Выборочный первый квартиль

определяется как наименьшее значение вариационного ряда, такое, что, по крайней мере 25% вариационного ряда находятся перед ним или это просто $X_{\left(\left[\frac{n}{4}\right]\right)}$ для больших n . Выборочный

третий квартиль определяется как наименьшее значение вариационного ряда, такое, что по крайней мере 75% вариационного ряда находятся перед ним или это просто $X_{\left(\left[\frac{3n}{4}\right]\right)}$

для больших n .

Замечание 1.2.1.

Эти понятия были нами уже использованы в описательной статистике. Отличие состоит в том, что здесь вариационный ряд построен по выборке, а не по всей генеральной совокупности, как в случае описательной статистики. Поэтому здесь введенные ранее понятия приобретают прилагательное выборочный.

В общем случае выборочный p - квантиль определяется из вариационного ряда: это порядковая статистика $X_{([np])}$.

Любая статистика может представлять собой оценку некоторой характеристики общей (генеральной) совокупности данных.

Для выборки из непрерывного закона распределения случайной величины оценкой p - квантиля, то есть решения уравнения $F(x) = p$ для ее неизвестной функции распределения $F(x)$, служит $X_{([np])}$.

Выборочная медиана, выборочный первый квартиль, выборочный третий квартиль, являются оценками решений уравнения для непрерывной функции распределения случайной величины $F(x) = p$ при $p = 1/2$, $p = 1/4$, $p = 3/4$. Для этих значений p они называются квартилями, для остальных квантилями.

Глава 5. Интервальное оценивание.

При интервальном оценивании в качестве оценки неизвестного параметра распределения генеральной совокупности предлагается не число, а интервал или даже некоторое множество значений, содержащее оцениваемый параметр с очень высокой вероятностью, так называемой доверительной вероятностью.

Если это интервал, его границами являются две статистики, зависящие от выборки и доверительной вероятности.

Соответствующий интервал называется доверительным интервалом для неизвестного параметра, соответствующее множество называется доверительным множеством.

Доверительные вероятности выбираются пользователем из множества 0,90. 0,95. 0,99....

Для построения доверительного множества с данной доверительной вероятностью для каждого значения параметра, определяющего закон распределения выборки, находится область значений выборки, имеющая заданную доверительную вероятность. Здесь уже заложена неоднозначность такого построения, так как можно предложить различные области значений выборки, имеющие заданную доверительную вероятность. Если, тем не менее, мы располагаем для каждого значения параметра некоторой областью значений выборки, тогда отбираются те области, для которых полученное в результате эксперимента значение выборки находится в них и значит соответствующие значения параметра. В результате отобранные таким образом значения параметра образуют доверительное множество с заданной доверительной вероятностью.

Эта неоднозначность в построении доверительного множества приводит нас к необходимости поиска наилучшего доверительного множества.

Доверительное множество является наилучшим среди всех доверительных множеств, если для него вероятность накрытия любого неистинного значения параметра наименьшая. В общем случае не существует равномерно оптимального

доверительного множества (такого, что любое неистинное значение параметра накрывается им с наименьшей вероятностью).

Поэтому, чтобы построить оптимальное доверительное множество, очень часто необходимы дополнительные ограничения на выбор доверительных множеств, среди которых мы ищем наилучшее.

Определение.

Назовем доверительное множество несмещенным, если оно накрывает истинное значение параметра с не меньшей вероятностью, чем любое другое значение параметра.

Тогда, как мы увидим дальше, все построенные ниже доверительные интервалы для однопараметрических экспоненциальных распределений являются оптимальными среди всех несмещенных доверительных множеств.

Это также верно, когда изучаемый закон распределения экспоненциального семейства зависит, кроме основного параметра, который оценивается, от других, побочных параметров.

5.1. Связь области принятия нулевой гипотезы с доверительным интервалом.

Пусть α – доверительная вероятность.

Пусть $H_0 = \{\theta = \theta_0\}$, $H_1 = \{\theta \neq \theta_0\}$ и пусть $A(\theta_0)$, область принятия нулевой гипотезы $((A(\theta_0))^c$ – критическая область с вероятностью ошибки 1-го рода $1 - \alpha$).

Определение.

Пусть $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ – выборка. Доверительное множество $D(X)$ с доверительной вероятностью α определяется из условия

$$\theta \in D(X) \leftrightarrow X \in A(\theta) \quad (5.1.1)$$

для всех θ . Это означает, что $D(X)$ состоит из всех тех θ , для которых $(A(\theta))^c$ не содержит выборку X .

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 5.1.1.

Доверительное множество $D(X)$ для параметра θ обладает следующими свойствами:

Если $(A(\theta))^c$ – несмещенная критическая область для каждого θ , то $D(X)$ – несмещенное доверительное множество.

Если $(A(\theta))^c$ – оптимальная несмещенная критическая область для каждого θ , то $D(X)$ оптимальное несмещенное доверительное множество (что означает равномерную минимальность вероятности ошибки 2-го рода).

Доказательство.

Условие (5.1.1) означает, что для любого $\theta \in D(X)$ $P_\theta(\theta \in D(X)) = P_\theta(X \in A(\theta))$ ($\{\theta \in D(X)\}$ и $\{X \in A(\theta)\}$ это одно и то же событие).

В частности, если $(A(\theta))^c$ – несмещенная критическая область, что означает $P_\theta(X \in (A(\theta))^c) \geq P_\theta(X \in (A(\theta))^c)$ для любого $\theta \neq \theta$, то $D(X)$ несмещенное доверительное множество для θ , то есть

$$\begin{aligned} P_\theta(\theta \in D(X)) &= P_\theta(X \in A(\theta)) = 1 - P_\theta(X \in (A(\theta))^c) \leq \\ &\leq 1 - P_\theta(X \in (A(\theta))^c) = P_\theta(X \in A(\theta)) = P_\theta(\theta \in D(X)). \end{aligned}$$

Верно, очевидно, так же и обратное.

То же самое касается ошибки 2-го рода. Действительно, пусть $(A^*(\theta))^c$ – некоторая несмещенная критическая область, $D^*(X)$ доверительное множество для θ , определяемое соотношением (5.1.1) для $A^*(\theta)$. Тогда $D^*(X)$ – несмещенное доверительное множество для θ , что следует из предыдущего (заменяя A на A^*).

Далее, для одинаковых вероятностей ошибки 1-го рода

$$P_\theta(X \in (A^*(\theta))^c) = P_\theta(X \in (A(\theta))^c) \quad (5.1.2)$$

оптимальность $(A(\theta))^c$ означает

$$P_{\theta}(X \in (A^c(\theta))^c) \geq P_{\theta}(X \in (A(\theta))^c) \quad (5.1.3)$$

для любого $\theta \neq \theta$.

(5.1.2) записывается в виде

$$1 - P_{\theta}(X \in (A^c(\theta))) = 1 - P_{\theta}(X \in (A(\theta))),$$

откуда, используя (5.1.1) получаем

$$1 - P_{\theta}(\theta \in D^c(X)) = 1 - P_{\theta}(\theta \in D(X))$$

то есть

$$P_{\theta}(\theta \in (D(X))^c) = P_{\theta}(\theta \in (D^c(X))^c),$$

что дает одинаковые вероятности ошибки 1-го рода для доверительных множеств.

Далее, из (5.1.3), используя (5.1.1), получаем

$$P_{\theta}(\theta \in (D^c(X))^c) \geq P_{\theta}(\theta \in (D(X))^c)$$

что эквивалентно

$$P_{\theta}(\theta \in D^c(X)) \leq P_{\theta}(\theta \in D(X)),$$

для любого $\theta \neq \theta$, откуда и следует оптимальность несмещенного доверительного множества $D(X)$ для θ .

Примеры.

5.1.1. Оценка параметров гауссовского закона.

Выборка из гауссовского закона с параметрами m и σ . Рассмотрим, как строится доверительный интервал при различных допущениях.

а) Пусть m неизвестно, дисперсия σ^2 известна, и строится доверительный интервал для m

Доверительный интервал для m находится по области

$$\text{принятия нулевой гипотезы } D^c = \left\{ \left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - m)}{\sigma} \right| \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \right\}.$$

Здесь $z_{\frac{\alpha}{2}}$ находится по таблицам нормального распределения (Приложение 7).

Поэтому доверительный интервал для m с уровнем доверия (надежностью) α $[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}]$.

Он является оптимальным среди всех несмещенных доверительных множеств для m с уровнем доверия $\leq \alpha$.

б) Пусть m неизвестно, σ^2 неизвестно и оценивается m .

Доверительный интервал для m находится по области

принятия нулевой гипотезы $D^c = \left\{ \frac{\sqrt{n-1} |\bar{X} - m|}{\sqrt{X^2 - (\bar{X})^2}} \leq t_{n-1, 1-\alpha} \right\}$

где $t_{n-1, 1-\alpha}$ находится по таблицам распределения Стьюдента (Приложение 8) с $n-1$ степенью свободы.

Отсюда следует, что доверительный интервал для m с уровнем доверия α

$$[\bar{X} - \frac{t_{n-1, 1-\alpha}}{\sqrt{n-1}} \sqrt{X^2 - (\bar{X})^2}, \bar{X} + \frac{t_{n-1, 1-\alpha}}{\sqrt{n-1}} \sqrt{X^2 - (\bar{X})^2}]$$

Он является оптимальным среди всех несмещенных доверительных множеств для m с уровнем доверия $\leq \alpha$.

в) Пусть m неизвестно и оценивается σ^2 .

Доверительный интервал для σ^2 находится по области принятия нулевой гипотезы из неравенств

$$t_1 \leq \frac{n(X^2 - (\bar{X})^2)}{\sigma^2} \leq t_2,$$

где t_1 и t_2 определяются из соотношения $P(t_1 \leq \chi_{n-1}^2 \leq t_2) = \alpha$ по таблицам распределения χ^2 с $n-1$ степенями свободы и из условия несмещенности.

Тогда доверительный интервал для σ^2 с уровнем доверия α

$$\left[\frac{n(\overline{X^2} - (\bar{X})^2)}{t_2}, \frac{n(\overline{X^2} - (\bar{X})^2)}{t_1} \right].$$

Полученный интервал является оптимальным среди всех несмещенных доверительных множеств для σ^2 с уровнем доверия $\leq \alpha$.

На практике из соображений простоты в предположении симметрии хвостов распределения χ_{n-1}^2 (которой на самом деле нет) t_1 и t_2 находятся из условий

$$P(t_1 < \chi_{n-1}^2) = \frac{1+\alpha}{2}, P(\chi_{n-1}^2 > t_2) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Получаемый таким способом интервал имеет только уровень доверия α , но он не может быть сравним по качеству ни с каким другим доверительным множеством.

Для конкретного примера (пример 10) была найдена оптимальная несмещенная критическая область с вероятностью ошибки 1-го рода 0,05022 для $n=11$,

$$\left[\frac{n(\overline{X^2} - (\bar{X})^2)}{21,713}, \frac{n(\overline{X^2} - (\bar{X})^2)}{3,52} \right].$$

Пренебрегая погрешностью $0,95 - 0,94978 = 0,00022$, можно утверждать, что полученный для этого примера доверительный интервал наилучший среди всех несмещенных доверительных интервалов с доверительной вероятностью 0,95.

Сравним полученный результат с результатом стандартного подхода.

При $\alpha=0,95$, находим по таблицам значение t_1 , соответствующее $(1+\alpha)/2=0,975$ и значение t_2 , соответствующее $(1-\alpha)/2=0,025$ для 10 степеней свободы. $t_1=3,25$; $t_2=20,5$.

$$\text{Интервал } \left[\frac{n(\overline{X^2} - (\bar{X})^2)}{20,5}, \frac{n(\overline{X^2} - (\bar{X})^2)}{3,25} \right] \text{ накрывает истинное}$$

значение параметра с доверительной вероятностью 0,95, но не является несмещенным и невозможно построить класс

доверительных интервалов с доверительной вероятностью 0,95, для которого он был бы наилучшим.

5.1.2. Построение доверительного интервала для выборки из экспоненциального закона с параметром γ .

Пусть $X_1, \dots, X_n$ выборка из экспоненциального закона с параметром γ .

$T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i$ достаточная статистика для выборки

и СВ $\gamma T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \gamma X_i$ имеет гамма-распределение с

плотностью $f(x) = \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-x}$, если $x > 0$; $f(x) = 0$, если $x \leq 0$

(смотреть пример 8).

С другой стороны $f_{2\gamma T}(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{x^{n-1}}{2^{n-1} \Gamma(n)} e^{-\frac{x}{2}} =$
 $= \frac{x^{n-1}}{2^n \Gamma(n)} e^{-\frac{x}{2}}$. Поэтому это в то же время плотность

распределения χ^2 с $2n$ степенями свободы и значит $2\gamma T(X_1, \dots, X_n) = \chi_{2n}^2$.

Тогда доверительный интервал для γ определяется из условия

$$\frac{t_1}{2T(X_1, \dots, X_n)} \leq \gamma \leq \frac{t_2}{2T(X_1, \dots, X_n)}$$

где t_1 и t_2 определяются из соотношения $P(t_1 \leq \chi_{2n}^2 \leq t_2) = \alpha$ таким образом, чтобы интервал был бы несмещенным.

По предыдущему примеру несмещенность дает условие

$t_1^n e^{\frac{t_1}{2}} = t_2^n e^{\frac{t_2}{2}}$ что, в свою очередь, эквивалентно равенству

$$\ln(t_1) - \frac{t_1}{2n} = \ln(t_2) - \frac{t_2}{2n}.$$

Положим $s_1 = \frac{t_1}{2n}$, $s_2 = \frac{t_2}{2n}$. Тогда предыдущее равенство записывается в виде $s_1 - \ln(s_1) = s_2 - \ln(s_2)$, где $s_1 < 1$, $s_2 > 1$.

Далее повторяем расчет для нового значения s_1 находим s_2 и затем t_1 и t_2 . Повторяем операцию до тех пор, пока $P(t_1 \leq \chi_{2n}^2 \leq t_2)$ не становится равным α .

Пример 16.

$$\text{Для любого } k \ P(\chi_{2k}^2 > 2t) = \int_t^\infty \frac{x^{k-1} e^{-x}}{(k-1)!} dx = (1+t + \frac{t^2}{2!} \dots \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}) e^{-t}$$

Пусть объем выборки n равен 6. Находим

$$P(\chi_{12}^2 > 2t) = (1+t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!}) e^{-t}$$

При $\alpha = 0,95$

$$P(\chi_{12}^2 > t_1^0) = \alpha = 0.95.$$

Из таблиц распределения χ^2 находим $t_1^0 = 5,23$, $s_1 = 0,44$. Решая уравнение $s_1 - \ln(s_1) = s_2 - \ln(s_2)$ относительно s_2 , аналогично тому, как мы это делали в рассмотренном выше примере, получим $s_2 = 1,906$. Тогда имеем $t_1 = 5,23$; $t_2 = 22,872$.

$$P(t_1 \leq \chi_{12}^2 \leq t_2) = (1 + \frac{t_1}{2} + \frac{(\frac{t_1}{2})^2}{2!} + \frac{(\frac{t_1}{2})^3}{3!} + \frac{(\frac{t_1}{2})^4}{4!} + \frac{(\frac{t_1}{2})^5}{5!}) e^{-\frac{t_1}{2}} - (1 + \frac{t_2}{2} + \frac{(\frac{t_2}{2})^2}{2!} + \frac{(\frac{t_2}{2})^3}{3!} + \frac{(\frac{t_2}{2})^4}{4!} + \frac{(\frac{t_2}{2})^5}{5!}) e^{-\frac{t_2}{2}} = 0,921.$$

Следовательно, необходимо увеличить интервал, то есть уменьшить s_1 .

Проведем аналогичный расчет для $s_1 = 0,4$.

Тогда $s_2 = 2,019$; $t_1 = 4,8$; $t_2 = 24,228$. $P(t_1 \leq \chi_{12}^2 \leq t_2) = 0,9454$.

Для $s_1=0,39$. $s_2=2,049$. $t_1=4,68$; $t_2=24,588$. $P(t_1 \leq \chi^2_{12} \leq t_2) = 0,9509$. Останавливаемся на последнем результате $t_1=4,68$; $t_2 = 24,588$.

Тогда доверительный интервал для γ :

$$\left[\frac{2,34}{T(X_1, \dots, X_6)}, \frac{12,29}{T(X_1, \dots, X_6)} \right].$$

Здесь $T(X_1, \dots, X_6) = \sum_{i=1}^6 X_i$.

5.1.3. Оценка параметра биномиального закона

В случае небольших выборок ($n \leq 70$) для нахождения доверительного множества с уровнем доверия α строится для каждого значения p несмещенная оптимальная область принятия нулевой гипотезы с двусторонней альтернативой. Это, как мы знаем, интервал $[c_1, c_2]$, где c_1, c_2 целые числа, для которых выполняется условие $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq n$ и условие несмещенности критической области. Концы c_1, c_2 включаются в этот интервал с определенными вероятностями для достижения точного уровня доверия α и для несмещенности критической области.

Определим некоторое конечное множество S значений p и для каждого p из этого множества найдем область принятия нулевой гипотезы с двусторонней альтернативой, интервал $[c_1, c_2]$, сначала с помощью необходимых

$$\sum_{k=c_1+1}^{c_2-1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \leq \alpha \leq \sum_{k=c_1}^{c_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\sum_{k=c_1}^{c_2-2} C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-1-k} \leq \alpha \leq \sum_{k=c_1-1}^{c_2-1} C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-1-k}.$$

а потом окончательный отбор c_1, c_2 с помощью необходимых и достаточных условий

$$\max \left\{ \frac{npB - c_1A - ((c_2 - c_1)b)}{np - c_1}, \frac{c_2A - npB - (c_2 - c_1)a}{c_2 - np} \right\} \leq \alpha \leq \\ \leq \min \left\{ \frac{npB - c_1A}{np - c_1}, \frac{c_2A - npB}{c_2 - np} \right\},$$

где

$$A = \sum_{k=c_1}^{c_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, B = \sum_{k=c_1-1}^{c_2-1} C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-1-k}, \\ a = C_n^{c_1} p^{c_1} (1-p)^{n-c_1}, b = C_n^{c_2} p^{c_2} (1-p)^{n-c_2},$$

неравенства, определенные в приложении 5.

Более того, мы отбираем только те интервалы, которые содержат наблюдаемое значение СВ X .

Обозначим P множество значений p , для которых эти интервалы содержат наблюдаемое значение СВ X .

По определению P и есть доверительное множество.

Для каждого p из конечного множества S существует его окрестность, для которой область принятия нулевой гипотезы с двусторонней альтернативой остается неизменной, только вероятности концов меняются. Объединение этих окрестностей нам даст искомое доверительное множество P , если множество S достаточно полно.

Заметим, что для этого доверительного множества уровень доверия $> \alpha$ или $< \alpha$, так как для тех p , для которых область принятия нулевой гипотезы имеет в качестве одного из концов наблюдаемое значение СВ X , то есть имеет вид $[X, c_2]$ или $[c_1, X]$, содержит это наблюдаемое значение не всегда, а только с определенными вероятностями и в случае, если этот интервал полуоткрытый, вида $(X, c_2]$ или $[c_1, X)$, он должен быть исключен, как не содержащий X .

Отсюда следует, что мы стоим перед выбором: включать или нет в доверительное множество те p , для которых область принятия нулевой гипотезы имеет вид: $[X, c_2]$ или $[c_1, X]$.

Существуют таблицы для доверительного интервала с заданным уровнем доверия для небольших выборок, которые не учитывают несмещенность, а только уровень доверия.

5.2. Доверительные интервалы для больших выборок.

В частности, построим доверительный интервал для параметра биномиального закона.

Доверительный интервал для p приближенно оптимальный определяется из неравенств

$$-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}.$$

Решая эти неравенства, получаем

$$\bar{X} + p_1(n, \bar{X}) \leq p \leq \bar{X} + p_2(n, \bar{X}),$$

где $p_1(n, \bar{X})$ и $p_2(n, \bar{X})$ корни квадратного уравнения

$$(n + z_{\frac{\alpha}{2}}^2) p^2 - z_{\frac{\alpha}{2}}^2 (1 - 2\bar{X}) p - (1 - \bar{X}) \bar{X} z_{\frac{\alpha}{2}}^2 = 0,$$

$$p_1(n, \bar{X}) < 0, \quad p_2(n, \bar{X}) > 0.$$

$$p_{1,2}(n, \bar{X}) = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^2 (1 - 2\bar{X}) \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{z_{\frac{\alpha}{2}}^2 + 4n(1 - \bar{X})\bar{X}}}{2 \left(n + z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \right)}$$

и тогда доверительный интервал для p (он не симметричен) можно записать в виде

$$\bar{X} - \frac{2(1 - \bar{X}) \bar{X} z_{\frac{\alpha}{2}}}{z_{\frac{\alpha}{2}} \left((1 - 2\bar{X}) + \sqrt{z_{\frac{\alpha}{2}}^2 + 4n(1 - \bar{X})\bar{X}} \right)} \leq$$

$$\leq p \leq \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}} (1 - 2\bar{X}) + \sqrt{z_{\frac{\alpha}{2}}^2 + 4n(1 - \bar{X})\bar{X}} \right)}{2 \left(n + z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \right)}$$

На практике из соображений простоты берется СВ $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}}$, которая тоже сходится к гауссовской стандартной СВ по распределению, так как $\bar{X}$ сходится по закону больших чисел по вероятности к p , и, следовательно, $\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}$ сходится по вероятности к $\sqrt{p(1 - p)}$ по свойствам сходимости по вероятности, так как $f(x) = \sqrt{x(1 - x)}$ непрерывна на $[0, 1]$.

Тогда доверительный интервал для p (симметричный) с уровнем доверия α находится из неравенства

$$\frac{\sqrt{n}|\bar{X} - p|}{\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$$

и имеет вид

$$\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}}{\sqrt{n}} \leq p \leq \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{X})}}{\sqrt{n}}.$$

Приложение 7. Стандартное гауссовское распределение

Для данного z , $3,09 \geq z \geq 0,00$ таблица дает значение интеграла

$$P(0 < Z < z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

а также позволяет решать обратную задачу: по данному α , $0 < \alpha < 0,5$ находить решение z_α уравнения

$$\int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \alpha.$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Приложение 8. Распределение Стьюдента

Значения $t_{n,\alpha}$ Т-критерия Стьюдента $P(|T_n| \geq t_{n,\alpha}) = \alpha$.

n -число степеней свободы.

Для данных α , $\alpha = 0,01; 0,05; 0,1; 0,15; 0,20; 0,25; 0,30$ и $n \leq 100$ таблица дает значение $t_{n,\alpha}$

Для $n > 100$ $t_{n,\alpha}$ берется равным $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

n	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,15$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,25$	$\alpha = 0,3$
1	63,6567412	12,7062047	6,3137515	4,1652998	3,0776835	2,4142136	1,9626105
2	9,9248432	4,3026527	2,9199856	2,2819306	1,8856181	1,6035675	1,3862066
3	5,8409093	3,1824463	2,3533634	1,9243197	1,6377444	1,4226253	1,2497781
4	4,6040949	2,7764451	2,1318468	1,7781922	1,5332063	1,3443976	1,1895669
5	4,0321430	2,5705818	2,0150484	1,6993626	1,4758840	1,3009490	1,1557673
6	3,7074280	2,4469119	1,9431803	1,6501732	1,4397557	1,2733493	1,1341569
7	3,4994833	2,3646243	1,8945786	1,6165917	1,4149239	1,2542787	1,1191591
8	3,3553873	2,3060041	1,8595480	1,5922214	1,3968153	1,2403183	1,1081454
9	3,2498355	2,2621572	1,8331129	1,5737358	1,3830287	1,2296592	1,0997162
10	3,1692727	2,2281389	1,8124611	1,5592359	1,3721836	1,2212554	1,0930581
11	3,1058065	2,2009852	1,7958848	1,5475598	1,3634303	1,2144602	1,0876664
12	3,0545396	2,1788128	1,7822876	1,5379565	1,3562173	1,2088525	1,0832114
13	3,0122758	2,1603687	1,7709334	1,5299196	1,3501713	1,2041462	1,0794687
14	2,9768427	2,1447867	1,7613101	1,5230951	1,3450304	1,2001403	1,0762802
15	2,9467129	2,1314495	1,7530504	1,5172280	1,3406056	1,1966893	1,0735314
16	2,9207816	2,1199053	1,7458837	1,5121302	1,3367572	1,1936854	1,0711372
17	2,8982305	2,1098156	1,7396067	1,5076598	1,3333794	1,1910471	1,0690331
18	2,8784405	2,1009220	1,7340636	1,5037077	1,3303909	1,1887115	1,0671695
19	2,8609346	2,0930241	1,7291328	1,5001888	1,3277282	1,1866293	1,0655074
20	2,8453397	2,0859634	1,7247182	1,4970355	1,3253407	1,1847614	1,0640158
21	2,8313596	2,0796138	1,7207429	1,4941938	1,3231879	1,1830764	1,0626697
22	2,8187561	2,0738731	1,7171144	1,4916196	1,3212367	1,1815487	1,0614488
23	2,8073357	2,0686576	1,7138715	1,4892769	1,3194602	1,1801572	1,0603365
24	2,7969395	2,0638986	1,7108821	1,4871358	1,3178359	1,1788845	1,0593189
25	2,7874358	2,0595386	1,7081408	1,4851713	1,3163451	1,1777160	1,0583844
26	2,7787145	2,0555294	1,7056179	1,4833625	1,3149719	1,1766394	1,0575232
27	2,7706830	2,0518305	1,7032884	1,4816916	1,3137029	1,1756443	1,0567270
28	2,7632625	2,0484071	1,7011309	1,4801434	1,3125268	1,1747218	1,0559887
29	2,7563859	2,0452296	1,6991270	1,4787048	1,3114336	1,1738642	1,0553022
30	2,7499957	2,0422725	1,6972609	1,4773647	1,3104150	1,1730649	1,0546623
31	2,7440419	2,0395134	1,6955188	1,4761131	1,3094635	1,1723181	1,0540644
32	2,7384815	2,0369333	1,6938887	1,4749418	1,3085728	1,1716189	1,0535045
33	2,7332766	2,0345153	1,6923603	1,4738431	1,3077371	1,1709628	1,0529790
34	2,7283944	2,0322445	1,6909243	1,4728105	1,3069516	1,1703459	1,0524849
35	2,7238056	2,0301079	1,6895725	1,4718382	1,3062118	1,1697649	1,0520194
36	2,7194846	2,0280940	1,6882977	1,4709212	1,3055139	1,1692167	1,0515802
37	2,7154087	2,0261925	1,6870936	1,4700547	1,3048544	1,1686986	1,0511651
38	2,7115576	2,0243942	1,6859545	1,4692348	1,3042302	1,1682082	1,0507721

n	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,15$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,25$	$\alpha = 0,3$
39	2,7079132	2,0226909	1,6848751	1,4684578	1,3036386	1,1677433	1,0503995
40	2,7044593	2,0210754	1,6838510	1,4677204	1,3030771	1,1673020	1,0500458
41	2,7011813	2,0195410	1,6828780	1,4670197	1,3025434	1,1668826	1,0497095
42	2,6980662	2,0180817	1,6819524	1,4663529	1,3020355	1,1664834	1,0493895
43	2,6951021	2,0166922	1,6810707	1,4657177	1,3015516	1,1661030	1,0490846
44	2,6922783	2,0153676	1,6802300	1,4651119	1,3010901	1,1657402	1,0487936
45	2,6895850	2,0141034	1,6794274	1,4645335	1,3006493	1,1653936	1,0485158
46	2,6870135	2,0128956	1,6786604	1,4639807	1,3002280	1,1650624	1,0482501
47	2,6845556	2,0117405	1,6779267	1,4634518	1,2998249	1,1647454	1,0479959
48	2,6822040	2,0106348	1,6772242	1,4629453	1,2994389	1,1644418	1,0477524
49	2,6799520	2,0095752	1,6765509	1,4624598	1,2990688	1,1641507	1,0475190
51	2,6757222	2,0075838	1,6752850	1,4615468	1,2983727	1,1636032	1,0470798
52	2,6737336	2,0066468	1,6746892	1,4611170	1,2980450	1,1633454	1,0468730
53	2,6718226	2,0057460	1,6741162	1,4607037	1,2977298	1,1630975	1,0466741
54	2,6699848	2,0048793	1,6735649	1,4603059	1,2974265	1,1628588	1,0464826
55	2,6682160	2,0040448	1,6730340	1,4599228	1,2971343	1,1626289	1,0462982
56	2,6665124	2,0032407	1,6725223	1,4595535	1,2968527	1,1624073	1,0461204
57	2,6648705	2,0024655	1,6720289	1,4591974	1,2965810	1,1621936	1,0459489
58	2,6632870	2,0017175	1,6715528	1,4588538	1,2963189	1,1619873	1,0457833
59	2,6617588	2,0009954	1,6710930	1,4585219	1,2960657	1,1617881	1,0456234
60	2,6602830	2,0002978	1,6706489	1,4582013	1,2958211	1,1615955	1,0454689
61	2,6588571	1,9996236	1,6702195	1,4578913	1,2955846	1,1614094	1,0453196
62	2,6574786	1,9989715	1,6698042	1,4575914	1,2953558	1,1612293	1,0451750
63	2,6561450	1,9983405	1,6694022	1,4573011	1,2951343	1,1610550	1,0450351
64	2,6548543	1,9977297	1,6690130	1,4570201	1,2949198	1,1608861	1,0448996
65	2,6536045	1,9971379	1,6686360	1,4567478	1,2947120	1,1607226	1,0447683
66	2,6523935	1,9965644	1,6682705	1,4564838	1,2945106	1,1605640	1,0446410
67	2,6512197	1,9960084	1,6679161	1,4562278	1,2943152	1,1604102	1,0445176
68	2,6500813	1,9954689	1,6675723	1,4559795	1,2941256	1,1602609	1,0443978
69	2,6489768	1,9949454	1,6672385	1,4557384	1,2939416	1,1601161	1,0442815
70	2,6479046	1,9944371	1,6669145	1,4555042	1,2937629	1,1599754	1,0441685
71	2,6468634	1,9939434	1,6665997	1,4552768	1,2935893	1,1598387	1,0440588
72	2,6458519	1,9934636	1,6662937	1,4550557	1,2934205	1,1597058	1,0439521
73	2,6448688	1,9929971	1,6659962	1,4548408	1,2932564	1,1595766	1,0438484
74	2,6439129	1,9925435	1,6657069	1,4546317	1,2930968	1,1594509	1,0437475
75	2,6429831	1,9921022	1,6654254	1,4544282	1,2929415	1,1593286	1,0436493
76	2,6420783	1,9916726	1,6651514	1,4542302	1,2927903	1,1592095	1,0435537
77	2,6411976	1,9912544	1,6648845	1,4540374	1,2926430	1,1590936	1,0434606
78	2,6403400	1,9908471	1,6646246	1,4538495	1,2924996	1,1589806	1,0433699
79	2,6395046	1,9904502	1,6643714	1,4536665	1,2923598	1,1588705	1,0432815
80	2,6386906	1,9900634	1,6641246	1,4534881	1,2922236	1,1587632	1,0431953
81	2,6378971	1,9896863	1,6638839	1,4533141	1,2920907	1,1586586	1,0431113
82	2,6371234	1,9893186	1,6636492	1,4531444	1,2919611	1,1585565	1,0430294
83	2,6363688	1,9889598	1,6634202	1,4529788	1,2918347	1,1584569	1,0429494
84	2,6356325	1,9886097	1,6631967	1,4528173	1,2917113	1,1583597	1,0428713
85	2,6349139	1,9882679	1,6629785	1,4526595	1,2915908	1,1582648	1,0427951
86	2,6342123	1,9879342	1,6627654	1,4525055	1,2914732	1,1581722	1,0427207
87	2,6335272	1,9876083	1,6625573	1,4523550	1,2913582	1,1580816	1,0426480

n	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,15$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,25$	$\alpha = 0,3$
88	2,6328580	1,9872899	1,6623540	1,4522080	1,2912459	1,1579932	1,0425770
89	2,6322042	1,9869787	1,6621553	1,4520643	1,2911362	1,1579067	1,0425075
90	2,6315652	1,9866745	1,6619611	1,4519238	1,2910289	1,1578222	1,0424397
91	2,6309405	1,9863772	1,6617712	1,4517865	1,2909240	1,1577396	1,0423733
92	2,6303296	1,9860863	1,6615854	1,4516521	1,2908214	1,1576587	1,0423083
93	2,6297321	1,9858018	1,6614037	1,4515207	1,2907210	1,1575796	1,0422448
94	2,6291476	1,9855234	1,6612259	1,4513921	1,2906227	1,1575022	1,0421827
95	2,6285757	1,9852510	1,6610518	1,4512662	1,2905265	1,1574265	1,0421218
96	2,6280158	1,9849843	1,6608814	1,4511430	1,2904324	1,1573523	1,0420622
97	2,6274678	1,9847232	1,6607146	1,4510223	1,2903402	1,1572796	1,0420039
98	2,6269311	1,9844675	1,6605512	1,4509041	1,2902499	1,1572085	1,0419467
99	2,6264055	1,9842170	1,6603912	1,4507883	1,2901614	1,1571388	1,0418908
100	2,6258905	1,9839715	1,6602343	1,4506749	1,2900748	1,1570705	1,0418359

Приложение 9. Хи-квадрат распределение

Критические значения $\chi^2_{n,\alpha}$ для хи-квадрат χ^2_n распределения

$P(\chi^2_n \geq \chi^2_{n,\alpha}) = \alpha$, n -число степеней свободы.

Для данных α и $n \leq 30$ таблица дает значение $\chi^2_{n,\alpha}$

Для $n > 30$ $\chi^2_{n,\alpha}$ вычисляется по формуле $\chi^2_{n,\alpha} = n + \sqrt{2n} z_{0,5-\alpha}$.

$\frac{\alpha}{n}$	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.750	0.500
1	0.00004	0.00016	0.00098	0.00393	0.01579	0.10153	0.45494
2	0.01003	0.02010	0.05064	0.10259	0.21072	0.57536	1.38629
3	0.07172	0.11483	0.21580	0.35185	0.58437	1.21253	2.36597
4	0.20699	0.29711	0.48442	0.71072	1.06362	1.92256	3.35669
5	0.41174	0.55430	0.83121	1.14548	1.61031	2.67460	4.35146
6	0.67573	0.87209	1.23734	1.63538	2.20413	3.45460	5.34812
7	0.98926	1.23904	1.68987	2.16735	2.83311	4.25485	6.34581
8	1.34441	1.64650	2.17973	2.73264	3.48954	5.07064	7.34412
9	1.73493	2.08790	2.70039	3.32511	4.16816	5.89883	8.34283
10	2.15586	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518	6.73720	9.34182
11	2.60322	3.05348	3.81575	4.57481	5.57778	7.58414	10.34100
12	3.07382	3.57057	4.40379	5.22603	6.30380	8.43842	11.34032
13	3.56503	4.10692	5.00875	5.89186	7.04150	9.29907	12.33976
14	4.07467	4.66043	5.62873	6.57063	7.78953	10.16531	13.33927
15	4.60092	5.22935	6.26214	7.26094	8.54676	11.03654	14.33886
16	5.14221	5.81221	6.90766	7.96165	9.31224	11.91222	15.33850
17	5.69722	6.40776	7.56419	8.67176	10.08519	12.79193	16.33818
18	6.26480	7.01491	8.23075	9.39046	10.86494	13.67529	17.33790
19	6.84397	7.63273	8.90652	10.11701	11.65091	14.56200	18.33765
20	7.43384	8.26040	9.59078	10.85081	12.44261	15.45177	19.33743
21	8.03365	8.89720	10.28290	11.59131	13.23960	16.34438	20.33723
22	8.64272	9.54249	10.98232	12.33801	14.04149	17.23962	21.33704
23	9.26042	10.19572	11.68855	13.09051	14.84796	18.13730	22.33688
24	9.88623	10.85636	12.40115	13.84843	15.65868	19.03725	23.33673
25	10.51965	11.52398	13.11972	14.61141	16.47341	19.93934	24.33659
26	11.16024	12.19815	13.84390	15.37916	17.29188	20.84343	25.33646
27	11.80759	12.87850	14.57338	16.15140	18.11390	21.74940	26.33634
28	12.46134	13.56471	15.30786	16.92788	18.93924	22.65716	27.33623
29	13.12115	14.25645	16.04707	17.70837	19.76774	23.56659	28.33613
30	13.78672	14.95346	16.79077	18.49266	20.59923	24.47761	29.33603

$\frac{\alpha}{n}$	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	1.32330	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	2.77259	4.60517	5.99146	7.37776	9.21034	10.59663
3	4.10834	6.25139	7.81473	9.34840	11.34487	12.83816
4	5.38527	7.77944	9.48773	11.14329	13.27670	14.86026
5	6.62568	9.23636	11.07050	12.83250	15.08627	16.74960
6	7.84080	10.64464	12.59159	14.44938	16.81189	18.54758
7	9.03715	12.01704	14.06714	16.01276	18.47531	20.27774
8	10.21885	13.36157	15.50731	17.53455	20.09024	21.95495
9	11.38875	14.68366	16.91898	19.02277	21.66599	23.58935
10	12.54886	15.98718	18.30704	20.48318	23.20925	25.18818
11	13.70069	17.27501	19.67514	21.92005	24.72497	26.75685
12	14.84540	18.54935	21.02607	23.33666	26.21697	28.29952
13	15.98391	19.81193	22.36203	24.73560	27.68825	29.81947
14	17.11693	21.06414	23.68479	26.11895	29.14124	31.31935
15	18.24509	22.30713	24.99579	27.48839	30.57791	32.80132
16	19.36886	23.54183	26.29623	28.84535	31.99993	34.26719
17	20.48868	24.76904	27.58711	30.19101	33.40866	35.71847
18	21.60489	25.98942	28.86930	31.52638	34.80531	37.15645
19	22.71781	27.20357	30.14353	32.85233	36.19087	38.58226
20	23.82769	28.41198	31.41043	34.16961	37.56623	39.99685
21	24.93478	29.61509	32.67057	35.47888	38.93217	41.40106
22	26.03927	30.81328	33.92444	36.78071	40.28936	42.79565
23	27.14134	32.00690	35.17246	38.07563	41.63840	44.18128
24	28.24115	33.19624	36.41503	39.36408	42.97982	45.55851
25	29.33885	34.38159	37.65248	40.64647	44.31410	46.92789
26	30.43457	35.56317	38.88514	41.92317	45.64168	48.28988
27	31.52841	36.74122	40.11327	43.19451	46.96294	49.64492
28	32.62049	37.91592	41.33714	44.46079	48.27824	50.99338
29	33.71091	39.08747	42.55697	45.72229	49.58788	52.33562
30	34.79974	40.25602	43.77297	46.97924	50.89218	53.67196

Список литературы

1. Э. Леман Проверка статистических гипотез. – М.: Наука, 1964. – 498 с.
2. Э. Леман Теория точечного оценивания. – М.: Наука, 1991. – 448 с.
3. Roudolf Iasnogorodski et Hugo Lheritier Theorie de l'estimatuon ponctuelle parametrique EDP sciences 2003.

Предметный указатель

p -квантиль 158

σ -алгебра 55, 57, 59, 119

Аддитивность 16, 17, 28, 56, 57, 60

Аксиома σ -аддитивности 56

Алгебра

- множеств 11, 13

- событий 14, 15, 16, 55, 57, 59, 119

Альтернатива H_1

- двусторонняя 213, 215, 232, 238, 276, 277

- односторонняя 212, 237, 239, 242

- сложная 211, 258

Атом 69, 100

Атомы распределения 69

Биномиальная схема 33, 35, 36, 39, 41, 44, 130, 176

Вектор

- гауссовский 106, 107, 108, 112, 130, 136, 219, 287

- дискретный 80

- непрерывный 83, 96

- нормальный 106

- нормальный стандартный 107, 110, 112, 130, 287

- случайный 80, 84, 103, 106, 107, 112, 209, 236, 287, 302

- центрированный 104, 110, 112, 165

Вероятность

- априорная 31

- доверительная 266, 267, 271, 272

- наименьшая 216, 267

- ошибки 1-го рода, 2-го рода 205, 206, 215, 216, 219, 221, 222, 226, 231, 235, 238, 239, 241, 245, 252, 267, 269

- произведения двух событий 27

- произведения независимых событий 16, 27

- произведения нескольких событий (больше двух) 29

- события 16, 18, 23, 27, 31, 35, 245

- условная 27, 28, 93, 158, 226, 231, 245

Возрастающие последовательности событий 56, 62, 260

Выбор

- без возвращения 20, 22, 24, 25

- с возвращением 19, 20, 22
- случайный 18, 19, 23
- Гипотеза
 - непараметрическая 204, 256
 - нулевая H_0 204, 205, 208, 209, 210, 212, 218, 219, 223, 226, 229, 231, 232, 238, 241, 242, 245, 252, 256, 264, 267, 270, 274, 275, 279, 294
 - параметрическая 204, 262
 - простая 212
 - сложная 236
- Гистограмма 148, 149, 150, 151, 152, 153
- Дискретное множество 119, 120
- Дисперсия
 - асимптотическая 185, 186, 196, 197, 198, 199, 200, 279
 - биномиальной случайной величины 33, 39
 - дискретной величины 45, 47
 - непрерывной величины 65
 - случайной величины 45, 46, 47, 65, 66, 104, 128
 - случайной величины Бернулли 33
- Зависимые случайные величины 89
- Закон больших чисел (ЗБЧ) 128, 129, 185, 257, 277, 279
- Закон распределения
 - геометрический 41, 44, 55, 120
 - дискретный 158, 159
 - ДСВ 39, 246
 - маргинальный 80
 - мультиномиальный 299
 - условный 116, 117, 169, 250
- Интервал доверительный
 - для больших выборок 267, 269, 275, 277
- Информация Фишера 189
- Исход эксперимента 11, 14
- Квартиль
 - выборочный 156, 158
 - первый 145, 156, 157
 - третий 145, 156, 157
- Ковариационная матрица случайного вектора $COV(X, Y)$ 104, 110, 112, 117, 301

Ковариация дискретных случайных величин 49, 50, 52, 104

Коэффициент корреляции 53, 54, 192

Критерий

- достаточности Неймана – Фишера 159

- Колмогорова 256, 259

- Лилиефорса 261

- однородности Смирнова 260

- Пирсона 261, 265, 279

Лемма Неймана – Пирсона 206, 209, 210, 215

Линейная зависимость между случайными величинами 77

Линейные преобразования над гауссовским случайным вектором 115, 117

Логарифмическое правдоподобие 181, 182, 183, 201

Маргинальные плотности распределения 87

Маргинальный закон распределения ДСВ 80

Математическое ожидание

- биномиальной случайной величины 44

- дискретной случайной величины 41, 42, 44, 45, 49, 128

- непрерывной случайной величины 65

- пуассоновской случайной величины 45

- случайного вектора 103

- случайной величины Бернулли 44

- условное 100, 101, 102, 103

Матрица

- гауссовского случайного вектора 109, 110, 117, 136

- ковариаций 104, 110

- ковариационная 104, 111, 112, 115, 117, 118, 303

- ортогональная 112, 286

Медиана 144, 145, 146, 147, 151, 152

- выборочная 157, 158, 183, 184

Меры среднего уровня, рассеяния 144, 146

Метод максимального правдоподобия 180, 201

Метод Монте-Карло 262, 279, 282

Мода

- выборочная 146, 150

Модели регулярные 189, 190, 191, 200, 201, 202

Наиболее вероятное значение числа реализаций явления в биномиальной схеме 38

Независимость

- гауссовских случайных векторов 113
- дискретных случайных величин 48, 49
- непрерывных случайных величин 88
- событий 27

Независимые непрерывные случайные величины 88

Неравенство

- Буняковского-Коши 53, 54, 191, 192
- Чебышева 128, 129
- Рао – Крамера 191, 192, 193, 194, 195, 196

Область

- критическая 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 216, 217, 218, 219, 220, 222, 224, 226, 228, 229, 231, 233, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 248, 252, 253, 255, 256, 260, 262, 264, 268, 272, 275, 280, 293, 295, 296, 297
- критическая для больших выборок 252
- наилучшая критическая 212, 213
- несмещенная критическая 212, 213, 214, 215, 217, 218, 220, 224, 227, 228, 229, 231, 232, 233, 234, 236, 238, 244, 245, 248, 250, 251, 256, 269
- оптимальная 207, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 224, 225, 231, 233, 237, 247, 248, 250, 251, 252, 256, 257, 269
- отвержения нулевой гипотезы 206, 213, 229, 265, 288
- принятия нулевой гипотезы 206, 238, 243, 268, 271, 275, 276

Отношения между сходимостью по вероятности и сходимостью по распределению 124

Оценивание интервальное 267

Оценки

- максимума правдоподобия 181, 182, 183, 201, 202, 203, 262
- нормальные асимптотически 185, 186, 187, 188, 189, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 203, 258, 280
- параметра биномиального закона 195, 202, 275
- состоятельные асимптотически 186
- эффективные 173, 175, 178, 179, 185, 192, 193, 195, 196, 200, 201, 202
- эффективные асимптотически 185, 196, 200, 201

- эффективные асимптотически нормальные 185, 186, 187, 188, 189, 197, 198, 199, 200, 203, 258
- эффективные несмещенные 175, 176, 177, 179, 183, 185, 188, 191, 192, 195, 196
- Ошибка 1-го рода, 2-го рода 206, 207, 209, 213, 215, 217, 219, 220, 222, 224, 226, 227, 229, 231, 232, 236, 237, 238, 240, 241, 244, 245, 247, 248, 253, 259, 265, 268, 269, 270, 272, 299
- Парадокс шевалье де Мере 35
- Параметр оцениваемый, двумерный 159, 164, 168, 169, 175, 176, 178, 180, 181, 185, 186, 187, 191, 192, 193, 195, 196, 201, 202
- Плотность распределения
 - гауссовского случайного вектора 111, 112, 165, 230
 - непрерывного случайного вектора 86
 - совместная 89, 162, 167, 180
 - условная 95, 96, 100, 159, 162, 223, 283
- Полигон 152, 153
- Полная группа событий 30, 32, 57, 58
- Правило
 - Стержесса 153, 154, 155
 - Скотта 154, 155
 - Фридмана – Диакониса 155
- Предельные теоремы 128, 130, 185, 188, 279
- Приближение
 - биномиального закона пуассоновским 123, 130
 - гипергеометрического закона распределения биномиальным 120, 122, 256
- Признаки
 - качественные 142, 143
 - количественные 142, 143
 - непрерывные 146, 149, 153
- Размах интерквантильный 144, 147
- Распределение
 - гауссовского случайного вектора 106, 111, 112, 117
 - Снедекора 107, 108
 - Стьюдента 107, 229, 231, 240, 242, 244, 271, 287, 289, 292, 297, 306
 - условное 91, 92, 95, 96, 97, 99, 101, 117, 174, 225, 227, 236, 245, 251, 283, 295
 - Фишера 107, 108

- хи-квадрат 106, 107, 130, 233, 235, 272, 273, 274, 309
- Регрессия для гауссовского случайного вектора 118
- Ряд
 - интервальный 147, 149, 151
 - статистический, вариационный 143, 144, 145, 146, 147, 149, 150, 156, 157, 158, 174, 258, 261, 280
- Свойства сходимости по вероятности 119, 124, 125, 129, 185, 198, 278
- Семейства
 - экспоненциальные 159, 163, 164, 166, 167, 168, 178, 184, 185, 202, 210, 212, 213, 214, 215, 220, 221, 223, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 232, 237, 243, 244, 245, 253, 260, 268, 283, 295
 - многопараметрические экспоненциальные 223
 - однопараметрические экспоненциальные 210, 212, 213, 214, 219, 220, 221, 223, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 232, 237, 243, 244, 245, 253, 260, 268, 283, 295
- Случайная величина
 - Бернулли 39, 44, 47, 52, 165, 258
 - биномиальная 39, 44, 77, 120, 122, 123, 153, 258
 - гауссовская 70, 77, 78, 106, 107, 109, 116, 130, 131, 153, 186, 187, 188, 196, 199, 219, 220, 239, 255, 261, 278, 281, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 302
 - геометрическая 41, 44, 55
 - гипергеометрическая 39, 120, 256
 - дискретная 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 60, 61, 62, 64, 65, 67, 70, 80, 89, 90, 96, 147, 148, 149
 - интегрируемая 67, 128, 173, 189
 - непрерывная 55, 60, 63, 64, 88, 91, 97
 - пуассоновская 41, 55, 122, 131
 - равномерно распределенная 71, 279
 - равномерно распределенная на $[a, b]$ 71, 98, 279
 - распределенная по экспоненциальному (показательному) закону 73
 - стандартная гауссовская 70, 77, 78, 106, 107, 108, 109, 130, 131, 153,
 - экспоненциальная 73, 203, 226
- Случайные величины
 - коррелированные 52, 129

- независимые 48, 52, 76, 88, 89, 97, 98, 100, 106, 107, 109, 116, 130, 258, 281, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 302
- некоррелированные 52, 220, 239, 255, 261, 278, 281, 286, 288, 289, 290, 291, 302
- центрированные 50
- Случайный вектор
 - дискретный 80
 - непрерывный 83, 86
- Событие
 - достоверное 14
 - невозможное 14, 16
 - элементарное 14, 18
- События
 - независимые в совокупности 29, 33, 41
 - несовместные 15, 16, 33, 160
 - полная группа 30, 31, 32, 57, 58
 - попарно несовместные 17, 43, 56, 57
- Совокупность генеральная 144, 146, 153, 156, 157, 158, 170, 190, 205, 266, 267
- Среднее значение 144
- Среднеквадратическое отклонение 46, 144, 147, 148, 155
- Стандартная гауссовская случайная величина 70, 106, 116, 130, 131, 153, 255, 288
- Стандартный гауссовский случайный вектор 106, 108, 109, 110, 112, 130
- Статистики достаточные, порядковые 159, 162, 167, 174, 178, 179, 182
- Статистические показатели 144
- Суперэффективность 196
- Сходимость
 - по вероятности 123, 124, 125, 126, 129, 138, 139, 140, 185, 198, 278
 - по распределению 119, 120, 122, 124, 125, 126, 127, 130, 131, 138, 139, 140, 146, 185, 198, 256, 300, 301
- Теорема
 - центральная предельная (ЦПТ) 130, 153, 167, 186, 188, 252, 258
 - Купмана-Питмана-Дармуа 167
 - Басу 255, 228, 230, 232, 246, 296

Тест наилучший, отношения правдоподобия, независимости
 двух выборок 181, 182, 183, 184, 201
 Тест хи-квадрат 263, 264
 Убывающая последовательность событий 56
 Уравнение правдоподобия 182, 184, 201, 202, 203
 Условная функция распределения 89, 90, 91, 92, 99, 290
 Условные законы распределения для дискретных случайных
 величин 89
 Условные законы распределения для непрерывных случайных
 величин 91, 97
 Формула
 – Байеса 27, 31, 32
 – Бернулли 33, 34
 – полной вероятности 27, 30, 31, 32, 57, 90, 93, 94, 133, 221
 – полной вероятности для σ -алгебры 57
 Функции
 – от случайных величин 74
 Функция правдоподобия 181, 182, 201, 202, 211
 Функция распределения
 – выборочная 258, 257, 280
 – маргинальная 84, 86
 – непрерывная 63, 75, 76, 84, 86, 91, 92, 98, 125, 126, 127,
 139, 141, 189, 199, 257, 258, 279, 300, 303
 – непрерывная слева 62
 – случайного вектора 84
 – случайной величины 60, 61, 62, 63, 66, 69, 89, 91, 108,
 198
 – условная 89, 90, 91, 92, 99
 – функции от случайной величины 74
 Центрированный вектор 104, 110, 112, 165, 302
 Частота относительная 144, 147 149
 Черный ящик 21, 33
 Число степеней свободы 264, 265, 306, 309
 Эффективность 178, 184

Учебное издание

Ясногородский Рудольф Михайлович

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

Учебное пособие

Издательство «Наукоемкие технологии»

ООО «Корпорация «Интел Групп»

<http://publishing.intelgr.com>

E-mail: publishing@intelgr.com

Тел.: (812) 945-50-63

Подписано в печать 15.04.2019.

Формат 60×84/16

Объем 20 п.л.

Гарнитура РТ Astra Serif

Тираж 200 экз.