Джамбеков А. М.

Математика
для студентов колледжа
Часть 2.
Естественно-научный цикл

2025

А. М. Джамбеков

Математика для студентов колледжа
Часть 2. Естественно-научный цикл

Учебное пособие

Электронное текстовое издание

Санкт-Петербург
Наукоемкие технологии
2025

ISBN 978-5-907946-49-1

УДК 51.01
ББК 22.1
Д40

Автор:
Джамбеков Азамат Матифулаевич, кандидат технических наук, преподаватель математики ГБПОУ АО «Астраханский колледж вычислительной техники»

Д40 Джамбеков А. М. Математика для студентов колледжа. Часть 2. Естественно-научный цикл [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. М. Джамбеков. – СПб.: Наукоемкие технологии, 2025. – 179 с. – URL: http://publishing.intelgr.com/archive/matematika-dlya-studentov-kolledzha2.pdf.

ISBN 978-5-907946-49-1

Учебное пособие разработано для студентов колледжа, обучающихся на базе основного общего образования. Содержит примеры выполнения задач, указания по выполнению и задания для аудиторной и домашней работы. Включает основные разделы курса математики естественно-научного цикла.

УДК 51.01
ББК 22.1

ISBN 978-5-907946-49-1

Учебное издание

Джамбеков Азамат Матифулаевич

Математика для студентов колледжа.
Часть 2. Естественно-научный цикл

Учебное пособие

Электронное текстовое издание

Подписано к использованию 07.04.2025.
Объем издания – 2,6 Мб.

Издательство «Наукоемкие технологии»
ООО «Корпорация «Интел Групп»
https://publishing.intelgr.com
E-mail: publishing@intelgr.com
Тел.: +7 (812) 945-50-63
Интернет-магазин издательства
https://shop.intelgr.com/

ISBN 978-5-907946-49-1

9 785907 946491 >

Оглавление

РАЗДЕЛ 1. МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ

1.1 Понятие множества. Понятие функции. Взаимно-однозначные отображения. Обратная функция

Используемый источник – Математика СПО [1], п.1.1-1.3.

<u>Аудиторные задания (А/з)</u>:

1)Задайте множество A, указав все его элементы, если $A = \{x: x \in N, -7 < x \leq 9\}$.

2)Составьте список элементов множества, заданного следующим образом:

а) $M = \{x: x^2 - 5x + 6 = 0\}$;

б) $P = \{x: x \in N, -3 < x \leq -1\}$.

3)Верно ли, что:

а) $\{3, 5\} \in \big\{\{1, 2\}, \{4, 3\}, \{3, 5, 1\}, 3, 5\big\}$;

б) $\{3, 5\} \subseteq \big\{\{1, 2\}, \{4, 3\}, \{3, 5, 1\}, 3, 5\big\}$?

4)Выписав все элементы множества всех подмножеств множества $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, подсчитайте их число.

<u>Домашние задания (Д/з)</u>:

1)Докажите, что $A = B$, если $A = \{1, 6\}$; $B = \{x: x^2 - 7x + 6 = 0\}$.

2)Будет ли $-10 \in A \cap B$, где $A = \left\{x: x + \frac{1}{1-x} < 3\right\}$; $B = \{x: -2x + 4 > 5\}$?

3)Дана функция $f(x) = x^2 + 3$. Найдите $f(0)$; $f(1)$; $f(-2)$; $f\left(\sqrt{2}\right)$.

4)Дана функция $F(x) = x^2$. Вычислите:

а) $\frac{F(b) - F(a)}{b - a}$;

б) $F\left(\frac{a+h}{2}\right) - F\left(\frac{a-h}{2}\right)$.

<u>Понятие множества. Понятие функции. Взаимно-однозначные отображения. Обратная функция (Примеры)</u>

<u>Примеры</u>:

1)Задайте множество A, указав все его элементы, если $A = \{x: x \in N, -8 < x \leq 8\}$.

2)Составьте список элементов множества, заданного следующим образом:

а) $M = \{x: x^2 - 4x + 3 = 0\}$;

б) $P = \{x: x \in N, -4 < x \leq -2\}$.

3)Верно ли, что:

а) $\{6, 5\} \in \big\{\{1, 2\}, \{4, 6\}, \{6, 5, 1\}, 6, 5\big\}$;

б) $\{6, 5\} \subseteq \big\{\{1, 2\}, \{4, 6\}, \{6, 5, 1\}, 6, 5\big\}$?

4)Выписав все элементы множества всех подмножеств множества $\{\alpha, \beta\}$, подсчитайте их число.

5)Докажите, что $A = B$, если $A = \{1, 7\}$; $B = \{x: x^2 - 8x + 7 = 0\}$.

6)Будет ли $-8 \in A \cap B$, где $A = \left\{x: x - \frac{1}{x-1} < 2\right\}$; $B = \{x: -3x + 2 > 6\}$?

7)Дана функция $f(x) = -x^2 - 3$. Найдите $f(-1)$; $f(2)$; $f(-2)$; $f\left(-\sqrt{3}\right)$.

8)Дана функция $F(x) = -x^2$. Вычислите:

а) $\frac{F(b)-F(a)}{a-b}$;

б) $F\left(\frac{a-h}{2}\right) - F\left(\frac{a+h}{2}\right)$.

<u>Решение</u>:

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

2. а) $\{1, 3\}$; б) $\emptyset$.

3. а) нет (т.к. не принадлежит множеству); б) да (т.к. является подмножеством множества $\{6, 5, 1\}$ данного множества).

4. $2^2 = 4$ (2^n – количество подмножеств n – элементного множества).

5. $x^2 - 8x + 7 = 0$; $x_1 = 1,\ x_2 = 7$ – ч.т.д.

6. да (т.к. $-8 \in A$ и $-8 \in B$, т.е. принадлежит пересечению A и B).

7. $f(x) = -x^2 - 3$.

$f(-1) = -(-1)^2 - 3 = -1 - 3 = -4$; $f(2) = -2^2 - 3 = -4 - 3 = -7$;

$f(-2) = -2^2 - 3 = -4 - 3 = -7$; $f(-\sqrt{3}) = -(-\sqrt{3})^2 - 3 = -3 - 3 = -6$.

8. $F(x) = -x^2$.

а) $\frac{F(b)-F(a)}{a-b} = \frac{-b^2-(-a^2)}{a-b} = \frac{-b^2+a^2}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)}{a-b} = a + b$;

б) $F\left(\frac{a-h}{2}\right) - F\left(\frac{a+h}{2}\right) = -\left(\frac{a-h}{2}\right)^2 - \left[-\left(\frac{a+h}{2}\right)^2\right] = -\left(\frac{a-h}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+h}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+h}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-h}{2}\right)^2 = \frac{a^2+2ah+h^2}{4} - \frac{a^2-2ah+h^2}{4} = \frac{4ah}{4} = ah$.

1.2 Уравнения, неравенства, тождества. Понятие о математических структурах

Используемый источник – Математика СПО [1], п.1.4-1.5.

Аудиторные задания (А/з):

1)Решите уравнение: $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x+2}{x-1} - 2 = 0$.

2)Решите уравнение: $\frac{9x+5}{6(x-1)} + \frac{3x^2-51x-71}{18(x^2-1)} = \frac{15x-7}{9(x+1)}$.

3)Решите неравенство: $\frac{1}{2}(x-1) - \frac{2}{5} < \frac{x-3}{4} - \frac{1}{2}$.

4) Решите неравенство: $x^2 + 3x + 10 < 0$.

Домашние задания (Д/з):

1)Решите уравнение: $\frac{1}{x-3} + \frac{7}{x+3} = \frac{14}{x^2-9} - \frac{x-4}{x-3}$.

2)Решите уравнение: $\frac{3}{2(x^2-1)} - \frac{1}{4(x+1)} = \frac{1}{8}$.

3)Решите неравенство: $x^2 + 2x + 1 > 0$.

4) Решите неравенство: $\frac{(1-x)^2}{5+x} < 0$.

Уравнения, неравенства, тождества. Понятие о математических структурах (Примеры)

Примеры:

1)Решите уравнение: $\frac{x+2}{x-3} + \frac{x+3}{x-2} - 3 = 0$.

2)Решите уравнение: $\frac{8x+6}{5(x-2)} + \frac{4x^2-50x-72}{15(x^2-4)} = \frac{14x-6}{10(x+2)}$.

3)Решите неравенство: $\frac{1}{3}(x-4) - \frac{3}{7} < \frac{x-4}{5} - \frac{1}{3}$.

4) Решите неравенство: $x^2 + 4x + 8 < 0$.

Решение:

1. $\frac{x+2}{x-3} + \frac{x+3}{x-2} - 3 = 0; \ |\cdot (x-2)(x-3)$

ОДЗ: $x \neq 2; x \neq 3;$

$(x+2)(x-2) + (x+3)(x-3) - 3(x-2)(x-3) = 0;$

$x^2 - 4 + x^2 - 9 - 3(x^2 - 5x + 6) = 0; \quad -x^2 + 15x - 31 = 0; \quad x^2 - 15x + 31 = 0;$

$D = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4 \cdot 31 = 101; \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{15 \pm \sqrt{101}}{2};$

$x_1 = \frac{15+\sqrt{101}}{2} \in$ ОДЗ; $\quad x_2 = \frac{15-\sqrt{101}}{2} \in$ ОДЗ $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{101}}{2}$.

2. $\frac{8x+6}{5(x-2)} + \frac{4x^2-50x-72}{15(x^2-4)} = \frac{14x-6}{10(x+2)}. \ |\cdot 30(x^2-4)$

ОДЗ: $x \neq 2; x \neq -2;$

$(8x+6) \cdot 6(x+2) + 2(4x^2 - 50x - 72) = (14x-6) \cdot 3(x-2);$

$(8x+6) \cdot (6x+12) + 2(4x^2 - 50x - 72) = (14x-6) \cdot (3x-6);$

$(8x+6) \cdot 2(3x+6) + 2(4x^2 - 50x - 72) = 2(7x-3) \cdot (3x-6);$

$(8x+6) \cdot (3x+6) + 4x^2 - 50x - 72 = (7x-3) \cdot (3x-6);$

$24x^2 + 66x + 36 + 4x^2 - 50x - 72 = 21x^2 - 51x + 18;$

$7x^2 + 67x - 54 = 0; \quad D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \left(\frac{67}{2}\right)^2 - 7 \cdot (-54) = \frac{4489}{4} + 378 = \frac{6001}{4};$

$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-\frac{67}{2} \pm \sqrt{\frac{6001}{4}}}{7} = \frac{-67 \pm \sqrt{6001}}{14} \in \text{ОДЗ} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-67 \pm \sqrt{6001}}{14}.$

3. $\frac{1}{3}(x-4) - \frac{3}{7} < \frac{x-4}{5} - \frac{1}{3};$

$\frac{1}{3}x - \frac{4}{3} - \frac{3}{7} < \frac{x}{5} - \frac{4}{5} - \frac{1}{3}; \qquad \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)x < \frac{4}{3} + \frac{3}{7} - \frac{4}{5} - \frac{1}{3}; \qquad \frac{2}{15}x < \frac{35 \cdot 4 + 3 \cdot 15 - 4 \cdot 21 - 35}{105};$

$\frac{2}{15}x < \frac{66}{105}; \qquad x < \frac{66}{105} \cdot \frac{15}{2}; \qquad x < \frac{33}{7}.$

4. $x^2 + 4x + 8 < 0.$

$x^2 + 4x + 4 + 4 < 0; \qquad (x+2)^2 + 4 < 0; \qquad \emptyset.$

1.3 Контрольная работа «Множества и функции»

Используемый источник – Математика СПО [1], п.1.1-1.5.

Контрольная работа «Множества и функции»

Аудиторные задания (А/з):

1)Дана функция $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$. Чему равно $f(0)$, $f(1)$, $f(\frac{3}{2})$?

2)Найдите функции, обратные данным:

а) $y = 3x + 2$; б) $y = \frac{2x}{1-x}$; в) $y = \sqrt[3]{x-2}$.

3)Найдите первые четыре члена последовательностей:

а) $x_n = n^2$; б) $x_n = \frac{1}{n^2}$; в) $x_n = \frac{n}{2n-1}$.

4) Найдите наименьший член последовательности: $x_n = n + \frac{1}{n}$.

Указание: $n + \frac{1}{n} \geq 2$.

Домашние задания (Д/з):

1) Решите уравнение: $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$.

2) Решите уравнение: $\sqrt{3 + x} = 3 - x$.

3) Решите неравенство: $\frac{2}{x} - \frac{1}{2} > \sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{4}}$.

4) Решите неравенство: $\sqrt{x^2 + x - 1} < x - 1$.

Контрольная работа «Множества и функции» (Подготовка)

Примеры:

1)Дана функция $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+2}$. Чему равно $f(-1)$, $f(2)$, $f(-\frac{1}{2})$?

2)Найдите функции, обратные данным:

а) $y = 2x + 3$; б) $y = \frac{3x}{2-x}$; в) $y = \sqrt[5]{x-1}$.

3)Найдите первые четыре члена последовательностей:

а) $x_n = -n^2$; б) $x_n = -\frac{1}{n^2}$; в) $x_n = \frac{2n}{3n-1}$.

4) Найдите наименьший член последовательности: $x_n = 2n + \frac{1}{n}$.

Указание: $2n + \frac{1}{n} \geq 3$.

5) Решите уравнение: $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$.

6) Решите уравнение: $\sqrt{5 + x} = 5 - x$.

7) Решите неравенство: $\frac{3}{x} - \frac{1}{3} > \sqrt{\frac{3}{x^2} - \frac{4}{5}}$.

8) Решите неравенство: $\sqrt{x^2 + 2x - 1} < 2x - 1$.

Решение:

1. $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+2}$.

$f(-1) = \frac{3(-1)-4}{(-1)^2+2} = \frac{-3-4}{1+2} = -\frac{7}{3}$; $f(2) = \frac{3\cdot 2-4}{2^2+2} = \frac{6-4}{4+2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3\left(-\frac{1}{2}\right)-4}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2} = \frac{-\frac{3}{2}-4}{\frac{1}{4}+2} = \frac{-6-16}{8+1} = -\frac{22}{9}$.

2. а) $y = 2x + 3$; $2x = y - 3$; $x = \frac{y-3}{2} \Rightarrow$ обратн. функция $y = \frac{x-3}{2}$.

б) $y = \frac{3x}{2-x}$; $y \cdot (2 - x) = 3x$; $2y - xy = 3x$; $2y = x(y + 3)$; $x = \frac{2y}{y+3}$; $\Rightarrow$ обратн. функция $y = \frac{2x}{x+3}$.

в) $y = \sqrt[5]{x - 1}$; $y^5 = x - 1$; $x = y^5 + 1$ $\Rightarrow$ обратн. функция $y = x^5 + 1$.

3. а) $x_n = -n^2$; $x_1 = -1^2 = -1$; $x_2 = -2^2 = -4$; $x_3 = -3^2 = -9$; $x_4 = -4^2 = -16$.

б) $x_n = -\frac{1}{n^2}$; $x_1 = -\frac{1}{1^2} = -1$; $x_2 = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$; $x_3 = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}$; $x_4 = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16}$.

4. $x_1 = 3$ – наименьший член последовательности (т.к. $2n + \frac{1}{n} \geq 3$).

5. $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$;

$x^2 = t$; $t^2 - 7t + 6 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 6$; $x^2 = 1$; $x_{1,2} = \pm 1$; $x^2 = 6$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{6}$.

6. $\sqrt{5 + x} = 5 - x$.

ОДЗ: $\begin{cases} 5 + x \geq 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 5 \end{cases}$ $x \in [-5; 5]$

$5 + x = (5 - x)^2$; $5 + x = 25 - 10x + x^2$; $x^2 - 11x + 20 = 0$;

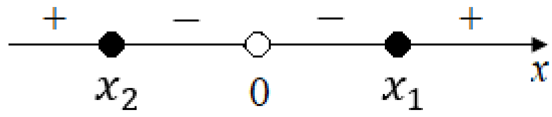
$D = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \cdot 20 = 121 - 80 = 41$; $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 \pm \sqrt{41}}{2}$; $x_1 = \frac{11 - \sqrt{41}}{2} \approx 2{,}3 \in$ ОДЗ; $x_2 = \frac{11 + \sqrt{41}}{2} \approx 8{,}7 \notin$ ОДЗ; $\Rightarrow x = \frac{11 - \sqrt{41}}{2}$

7. $\frac{3}{x} - \frac{1}{3} > \sqrt{\frac{3}{x^2} - \frac{4}{5}}$.

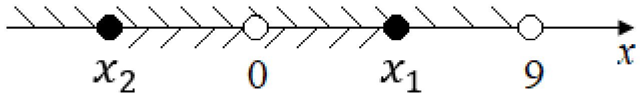
ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0;\ \frac{3}{x} - \frac{1}{3} > 0 \\ \frac{3}{x^2} - \frac{4}{5} \geq 0 \end{cases}$

$\frac{3}{x} > \frac{1}{3}$; $\frac{x}{3} < 3$; $x < 9$; $x \neq 0$; $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 9)$;

$\frac{15-4x^2}{5x^2} \geq 0;$ $\quad\frac{4x^2-15}{5x^2} \leq 0;$ $\quad 4x^2 - 15 = 0;$ $\quad x_1 = \frac{\sqrt{15}}{2};$ $\quad x_2 = -\frac{\sqrt{15}}{2}$; $x \neq 0;$



$x \in \left[-\frac{\sqrt{15}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{15}}{2}\right];$



$x \in \left[-\frac{\sqrt{15}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{15}}{2}\right]$ – ОДЗ;

$\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{3}\right)^2 > \frac{3}{x^2} - \frac{4}{5};$ $\quad\frac{9}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{9} > \frac{3}{x^2} - \frac{4}{5};$ $\quad\frac{6}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{41}{45} > 0;$

$\frac{41x^2-2x+6}{45x^2} > 0;$

$41x^2 - 2x + 6 = 0;$ $\quad D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 41 \cdot 6 < 0; \cdot \emptyset \cdot$

$\frac{41x^2-2x+6}{45x^2} > 0;$ $\quad x \in R, x \neq 0;$ $\quad x \in \left[-\frac{\sqrt{15}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{15}}{2}\right]$ – решение неравенства.

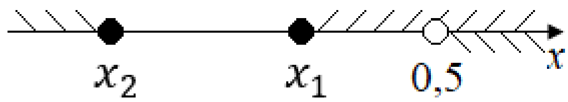
8. $\sqrt{x^2 + 2x - 1} < 2x - 1.$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 + 2x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$

$x^2 + 2x - 1 \geq 0;$ $\quad x^2 + 2x - 1 = 0;$ $D = 4 + 4 = 8;$ $\quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2};$

$x_1 = -1 + \sqrt{2} \approx 0{,}41;$ $x_2 = -1 - \sqrt{2} \approx -2{,}41;$ $x \in \left(-\infty; -1 - \sqrt{2}\right] \cup \left[-1 + \sqrt{2}; +\infty\right);$

$2x - 1 > 0;$ $\quad 2x > 1;$ $\quad x > 0{,}5;$

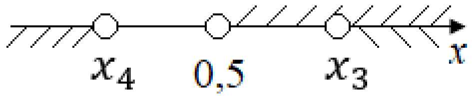


$x \in (0{,}5; +\infty)$ – ОДЗ;

$x^2 + 2x - 1 < (2x - 1)^2$; $\quad x^2 + 2x - 1 < 4x^2 - 4x + 1$; $\quad 3x^2 - 6x + 2 > 0$;

$3x^2 - 6x + 2 = 0$; $\quad D_1 = 9 - 3 \cdot 2 = 3$; $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$; $x_3 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}58$;

$x_4 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}42$; $\quad x \in \left(-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$;



$x \in \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$ – решение неравенства.

1.4 Множества и функции в профессиональных задачах

Используемый источник – [2].

1.4.Режимы работы электрической цепи

Элементами электрической цепи являются конкретные электротехнические устройства, которые могут работать в различных режимах. Режимы работы как отдельных элементов, так и всей электрической цепи характеризуются значениями тока и напряжения. Поскольку ток и напряжение в общем случае могут принимать любые значения, то режимов может быть бесчисленное множество.

Рассмотрим наиболее характерные режимы работы электрической цепи с источником ЭДС, к которому подключен электроприемник с регулируемым сопротивлением R (рис. 1.1).

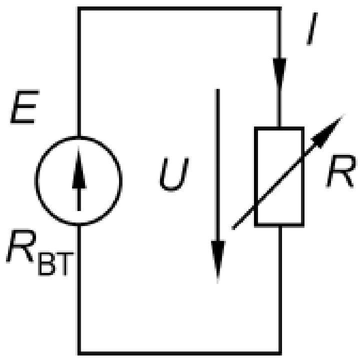


Рис. 1.1. Схема простейшей цепи постоянного тока с переменным сопротивлением электроприемника

Пусть ЭДС E источника и его внутреннее сопротивление $R_{ВТ}$ остаются неизменными. Ток в цепи изменяется при изменении сопротивления R электроприемника, который является линейным элементом. Для схемы (рис. 1.1) по второму закону Кирхгофа можно записать:

$$E = RI + R_{\text{ВТ}}I, \tag{1.1}$$

где $RI = U$ – напряжение на зажимах приемника, т.е. напряжение на зажимах внешней цепи; $R_{\text{ВТ}}I$ – падение напряжения внутри источника ЭДС. Так как приемник присоединен непосредственно к зажимам источника ЭДС, то напряжение U одновременно является напряжением и на его зажимах.

Из уравнения (1.1) следует

$$U = E - R_{\text{ВТ}}I. \tag{1.2}$$

Это уравнение, описывающее зависимость напряжения на зажимах источника ЭДС от тока в цепи, является уравнением внешней характеристики источника ЭДС (рис. 1.2).

При условии, что $E = const$ и $R_{\text{ВТ}} = const$, зависимость $U(I)$ является линейной. Характерные режимы удобнее всего рассматривать, пользуясь внешней характеристикой.

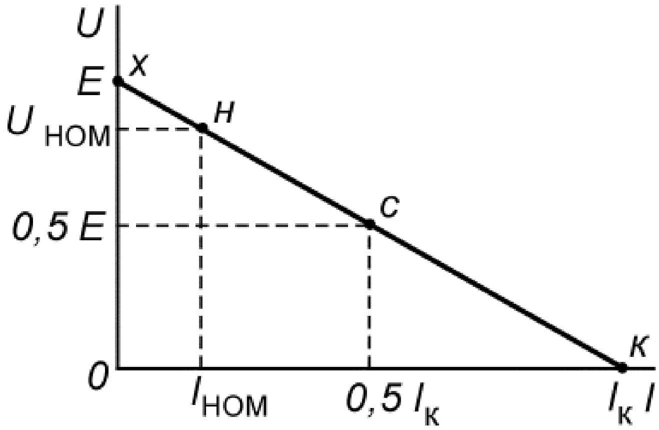


Рис. 1.2. Внешняя характеристика источника ЭДС

Режим холостого хода – это режим, при котором ток в цепи $I = 0$, что имеет место при разрыве цепи. Как следует из уравнения (1.2), при холостом ходе напряжение на зажимах источника ЭДС $U = E$, поэтому вольтметр (прибор с очень большим внутренним сопротивлением), будучи включен в такую цепь, измеряет ЭДС источника. На внешней характеристике точка холостого хода обозначена x.

Номинальный режим имеет место тогда, когда источник ЭДС или любой другой элемент цепи работает при значениях тока, напряжения и мощности, указанных в паспорте данного электротехнического устройства. Номинальные значения тока $I_{\text{ном}}$, напряжения $U_{\text{ном}}$ и мощности $P_{\text{ном}}$ соответствуют наиболее выгодным условиям работы устройства с точки зрения экономичности, надежности, долговечности и т.п. На внешней характеристике точка, соответствующая номинальному режиму, обозначена $н$.

Режим короткого замыкания – это режим, когда сопротивление приемника равно нулю, что соответствует соединению зажимов источника ЭДС между собой.

Из уравнения (1.1) следует, что ток в цепи в любом из режимов

$$I = \frac{E}{R + R_{\text{ВТ}}}. \qquad (1.3)$$

При коротком замыкании цепи, когда $R = 0$, ток достигает максимального значения $I_{\text{к}} = E/R_{\text{ВТ}}$, ограниченного внутренним сопротивлением $R_{\text{ВТ}}$

источника ЭДС, а напряжение на зажимах источника ЭДС $U = RI = 0$. Значению тока $I_к$ и напряжению $U = 0$ соответствует точка $к$ на внешней характеристике источника ЭДС. Ток короткого замыкания может достигать больших значений, во много раз превышающих номинальный ток. Поэтому режим короткого замыкания для большинства электроустановок является аварийным режимом.

Согласованный режим источника ЭДС и внешней цепи имеет место, когда сопротивление внешней цепи $R = R_{\text{ВТ}}$. В согласованном режиме ток в цепи

$$I_с = \frac{E}{2R_{\text{ВТ}}} = 0{,}5I_к, \quad (1.4)$$

т.е. в два раза меньше тока короткого замыкания. ЭДС E источника уравновешивается двумя равными по значению падениями напряжения, обусловленными сопротивлением внешней цепи и внутренним сопротивлением, т.е. $U = 0{,}5E$. Точка, соответствующая согласованному режиму, на внешней характеристике обозначена c.

Множества и функции в профессиональных задачах

Аудиторные задания (А/з):

1) Из формулы (1.1) выразите I.

2) Найдите значение I (А) при $E = 22$ (В); $R = 10$ (Ом); $R_{\text{ВТ}} = 1$ (Ом).

3) Из формулы (1.2) выразите I.

4) Найдите значение I (А) при $E = 20$ (В); $U = 15$ (В); $R_{\text{ВТ}} = 5$ (Ом).

Домашние задания (Д/з):

1) Из формулы (1.3) выразите R.

2) Найдите значение R (Ом) при $E = 20$ (В); $I = 10$ (А); $R_{\text{ВТ}} = 0{,}5$ (Ом).

3) Из формулы (1.3) выразите $R_{\text{ВТ}}$.

4) Найдите значение $R_{\text{ВТ}}$ (Ом) при $E = 25$ (В); $I = 5$ (А); $R = 4$ (Ом).

Множества и функции в профессиональных задачах (Примеры)

Примеры:

1) Из формулы (1.4) выразите $I_к$ через E и $R_{ВТ}$.

2) Найдите значение $I_к$ (А) при $E = 20$ (В); $R_{ВТ} = 5$ (Ом).

3) Из формулы (1.4) выразите $I_с$ через E и $R_{ВТ}$.

4) Найдите значение $I_с$ (А) при $E = 20$ (В); $R_{ВТ} = 5$ (Ом).

Решение:

1. $\frac{E}{2R_{ВТ}} = 0{,}5I_к \Rightarrow I_к = \frac{E}{2R_{ВТ}} \cdot 2 = \frac{E}{R_{ВТ}}$;   т.е. $I_к = \frac{E}{R_{ВТ}}$.

2. $E = 20$ (В); $R_{ВТ} = 5$ (Ом); $I_к = \frac{20}{5} = 4$ (А).

3. $I_с = \frac{E}{2R_{ВТ}}$.

4. $E = 20$ (В); $R_{ВТ} = 5$ (Ом); $I_с = \frac{20}{2\cdot 5} = 2$ (А).

РАЗДЕЛ 2. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

2.1 Множество натуральных чисел. Множество целых чисел. Система рациональных чисел

Используемый источник – Математика СПО [1], п.2.1-2.3.

Аудиторные задания (А/з):

1)Найдите наибольший общий делитель (НОД) чисел: $224, 352, 800$.

2)Запишите следующее число в виде произведения трех простых чисел: 78.

3)Укажите все простые числа от 1 до 60.

4)Являются ли указанные числа парой взаимно простых чисел: 26 и 105.

Домашние задания (Д/з):

1)Найдите НОД чисел: $340, 561, 867$.

2)Запишите следующее число в виде произведения трех простых чисел: 805.

3)Укажите все составные числа от 40 до 70.

4)Являются ли указанные числа парой взаимно простых чисел: 282 и 711.

Указание:

Используемый источник – [3].

1)Чтобы найти НОД нескольких чисел, достаточно разложить их на простые множители и перемножить между собой те из них, которые являются общими для всех данных чисел.

Пример. Найти НОД (84, 90).

Решение: Раскладываем числа 84 и 90 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$84=\underline{2}\cdot 2\cdot \underline{3}\cdot 7$
$90=\underline{2}\cdot \underline{3}\cdot 3\cdot 5$

Итак, мы подчеркнули все общие простые множители, осталось перемножить их между собой:

$$2 \cdot 3 = 6$$

Таким образом, НОД (84, 90)=6.

2)Число 1 – не является ни простым, ни составным числом, т.к. у него только один делитель – 1.

3)Взаимно простые числа – целые числа, не имеющие никаких общих делителей, кроме ±1.

4)Последовательность простых чисел начинается так:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, …….

Множество натуральных чисел. Множество целых чисел. Система рациональных чисел (Примеры)

Примеры:

1)Найдите наибольший общий делитель (НОД) чисел: $224, 352, 400$.

2)Запишите следующее число в виде произведения трех простых чисел: 130.

3)Укажите все простые числа от 2 до 61.

4)Укажите все составные числа от 42 до 73.

5)Являются ли указанные числа парой взаимно простых чисел: 26 и 35.

6)Являются ли указанные числа парой взаимно простых чисел: 282 и 1185.

Решение:

1. $224 = 2 \cdot 112 = 2 \cdot 2 \cdot 56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 28 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 14 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 7.$

$352 = 2 \cdot 176 = 2 \cdot 2 \cdot 88 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 44 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 22 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 11.$

$400 = 2 \cdot 200 = 2 \cdot 2 \cdot 100 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 50 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 25 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 5 \cdot 5.$

$\text{НОД}(224, 352, 400) = 2^4 = 16.$

2. $130 = 2 \cdot 65 = 2 \cdot 5 \cdot 13.$

3. $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61.$

4. $42, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 69, 70, 72.$

5. $26 = 2 \cdot 13; \quad 35 = 5 \cdot 7 \Rightarrow$ да, являются взаимно простыми числа 26 и 35.

6. $\frac{282=2\cdot 141=2\cdot \underline{3}\cdot 47}{1185=5\cdot 237=5\cdot \underline{3}\cdot 79} \Rightarrow$ нет, не являются взаимно простыми числа 282 и 1185.

2.2 Приближенные вычисления. Система действительных чисел. Система комплексных чисел

Используемый источник – Математика СПО [1], п.2.4-2.6.

Аудиторные задания (А/з):

1)Решите неравенство: $|x| \geq 2$.

2)Решите уравнение: $|x - 1| = 2x - 1$.

3)Вычислите: $\left(1 - \sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{6}i\right)$.

4)Вычислите: $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-3i}$.

Домашние задания (Д/з):

1)Решите неравенство: $0 < |x| \leq 3$.

2)Решите уравнение: $|x^2 - x - 6| = x + 2$.

3)Вычислите: $(2 + 5i)^2 \cdot (3 - i)$.

4)Вычислите: $\frac{3+i}{3-i} + \frac{3-i}{3+i}$.

Приближенные вычисления. Система действительных чисел. Система комплексных чисел (Примеры)

Примеры:

1)Решите неравенство: $|x| \geq 3$.

2)Решите неравенство: $0 < |x| \leq 2$.

3)Решите уравнение: $|x^2 - 2x - 6| = x + 3$.

4)Решите уравнение: $|2x - 1| = x - 1$.

5)Вычислите: $\left(1 - 2\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{6}i\right)$.

6)Вычислите: $(1 + 5i)^2 \cdot (2 - i)$.

7)Вычислите: $\frac{2\sqrt{3}-i}{2\sqrt{3}-3i}$.

8)Вычислите: $\frac{6+i}{6-i} + \frac{6-i}{6+i}$.

Решение:

1. $|x| \geq 3$.

$\left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ -x \geq 3 \end{array}\right.$. $\quad \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq -3 \end{array}\right.$. $\quad x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

2. $0 < |x| \leq 2$.

$\left[\begin{array}{l} 0 < x \leq 2 \\ 0 < -x \leq 2 \end{array}\right.$. $\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -x \leq 2 \\ -x > 0 \end{cases} \end{array}\right.$. $\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -2 \\ x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow x \in [-2; 0) \cup (0; 2]$.

3. $|x^2 - 2x - 6| = x + 3$.

$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 6 = x + 3 \\ x^2 - 2x - 6 = -x - 3 \end{array}\right.$. $\quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x - 9 = 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{array}\right.$. $\quad \begin{array}{l} D = 9 + 4 \cdot 9 = 45; \\ D = 1 + 4 \cdot 3 = 13; \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} x_{1,2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}; \\ x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}; \end{array}$

ОДЗ: $x+3\geq 0$; $x\geq -3$; $x_1=\frac{3-3\sqrt{5}}{2}\approx -1{,}85\in$ ОДЗ; $x_2=\frac{3+3\sqrt{5}}{2}\approx 4{,}85\in$ ОДЗ;

$x_3=\frac{1-\sqrt{13}}{2}\approx -1{,}3\in$ ОДЗ; $x_4=\frac{1+\sqrt{13}}{2}\approx 2{,}3\in$ ОДЗ $\Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm 3\sqrt{5}}{2}$; $x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

4. $|2x-1|=x-1$.

$\left[\begin{matrix}2x-1=x-1\\1-2x=x-1\end{matrix}\right.$. $\left[\begin{matrix}x=0\\x=\frac{2}{3}\end{matrix}\right.$. ОДЗ: $x-1\geq 0$; $x\geq 1$; $x=0\notin$ ОДЗ; $x=\frac{2}{3}\notin$ ОДЗ $\Rightarrow x=\emptyset$.

5. $\left(1-2\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3}+2\sqrt{6}i\right)$.

$\left(1-2\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3}+2\sqrt{6}i\right)=\sqrt{3}+2\sqrt{6}i-\sqrt{6}i+12\sqrt{2}=\sqrt{3}+12\sqrt{2}+\left(2\sqrt{6}-6\right)i$.

6. $(1+5i)^2\cdot(2-i)$.

$(1+5i)^2\cdot(2-i)=(1+10i-25)\cdot(2-i)=(-24+10i)\cdot(2-i)=-48+24i+20i+10=-38+44i$.

7. $\frac{2\sqrt{3}-i}{2\sqrt{3}-3i}$.

$\frac{2\sqrt{3}-i}{2\sqrt{3}-3i}=\frac{\left(2\sqrt{3}-i\right)\left(2\sqrt{3}+3i\right)}{\left(2\sqrt{3}-3i\right)\left(2\sqrt{3}+3i\right)}=\frac{12+4\sqrt{3}i+3}{12+9}=\frac{15+4\sqrt{3}i}{21}=\frac{15}{21}+\frac{4\sqrt{3}i}{21}=\frac{5}{7}+\frac{4\sqrt{3}}{21}i$.

8. $\frac{6+i}{6-i}+\frac{6-i}{6+i}$.

$\frac{6+i}{6-i}+\frac{6-i}{6+i}=\frac{(6+i)^2+(6-i)^2}{(6-i)(6+i)}=\frac{36+12i-1+36-12i-1}{36+1}=\frac{72-2}{37}=\frac{70}{37}$.

2.3 Контрольная работа «Числовые множества»

Используемый источник – Математика СПО [1], п.2.1-2.6.

Контрольная работа «Числовые множества»

Аудиторные задания (А/з):

1)Найдите наибольший общий делитель (НОД) чисел: $234, 598, 1274$.

2)Запишите следующее число в виде произведения трех простых чисел: 957.

3)Укажите все простые числа от 40 до 70.

4)Являются ли указанные числа парой взаимно простых чисел: 145 и 190.

Домашние задания (Д/з):

1) Решите неравенство: $|x-2|<1$.

2) Решите уравнение: $\big||x-1|+2\big|=1$.

3)Вычислите: $(1+2i)^2\cdot(i-2)^2$.

4)Вычислите: $\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}i}{1-i}$.

Контрольная работа «Числовые множества» (Подготовка)

1)Найдите наибольший общий делитель (НОД) чисел: $234, 598, 182$.

2)Запишите следующее число в виде произведения трех простых чисел: 429.

3)Укажите все простые числа от 42 до 72.

4)Являются ли указанные числа парой взаимно простых чисел: 145 и 285.

5) Решите неравенство: $|x-3|<1$.

6) Решите уравнение: $\big||x-2|+1\big|=1$.

7)Вычислите: $(1+3i)^2\cdot(i-3)^2$.

8)Вычислите: $\frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{3}i}{1-i}$.

Решение:

1. $234=2\cdot117=2\cdot3\cdot39=\underline{2}\cdot3\cdot3\cdot\underline{13}$.

$598=2\cdot299=\underline{2}\cdot\underline{13}\cdot23$.

$182=2\cdot91=\underline{2}\cdot7\cdot\underline{13}$.

НОД$(234,598,182)=2\cdot13=26$.

2. $429 = 3 \cdot 143 = 3 \cdot 11 \cdot 13.$

3. $43{,}47, 53, 59, 61, 67, 71.$

4. $145 = \underline{5} \cdot 29; \quad 285 = 5 \cdot 57 = \underline{5} \cdot 3 \cdot 19 \Rightarrow$ нет, не являются взаимно простыми числа 145 и 285.

5. $|x - 3| < 1.$

$\begin{cases} x - 3 < 1 \\ 3 - x < 1 \end{cases}; \begin{cases} x < 4 \\ -x < -2 \end{cases}; \begin{cases} x < 4 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x \in (2; 4).$

6. $\big||x - 2| + 1\big| = 1.$

$\left[\begin{array}{l} |x-2|+1=1 \\ |x-2|+1=-1 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} |x-2|=0 \\ |x-2|=-2 \end{array}\right. \Rightarrow x = 2.$

7. $(1 + 3i)^2 \cdot (i - 3)^2.$

$(1 + 3i)^2 \cdot (i - 3)^2 = (1 + 6i - 9) \cdot (-1 - 6i + 9) = (-8 + 6i) \cdot (8 - 6i) = -64 + 48i + 48i + 36 = -28 + 96i.$

8. $\frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{3}i}{1-i}.$

$\frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{3}i}{1-i} = \frac{(-\sqrt{3}+2\sqrt{3}i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i-2\sqrt{3}}{1+1} = \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{3}i}{2} = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

2.4 Числовые множества в профессиональных задачах

Используемый источник – [2].

1.2. Условные положительные направления ЭДС, тока в элементах цепи и напряжения на зажимах элементов цепи

Чтобы правильно записать уравнения, описывающие процессы в электрических цепях, и произвести анализ этих процессов, необходимо задать условные положительные направления ЭДС источников питания, токов в элементах или ветвях цепи и напряжений на зажимах элементов цепи или между узлами цепи.

Внутри источника ЭДС постоянного тока положительным является направление ЭДС от отрицательного полюса к положительному, т.е. от полюса с низшим потенциалом к полюсу с высшим потенциалом. Это соответствует определению электродвижущей силы как величины, характеризующей способность стороннего поля и индуцированного электрического поля вызывать электрический ток.

По отношению к источнику ЭДС все элементы, входящие в состав цепи, составляют внешний участок цепи. За положительное направление тока в цепи принимают направление, совпадающее с направлением ЭДС. Это значит, что во внешней цепи положительным является направление от положительного полюса источника ЭДС к отрицательному, т.е. направление, совпадающее с направлением движения положительно заряженных частиц.

Условным положительным направлением падения напряжения, или просто напряжения, на элементе цепи или между двумя узлами цепи принимают направление, совпадающее с условным положительным направлением тока в этом элементе или в этой ветви. Действительно, падение напряжения U_R на резисторе R определяется соотношением $U_R = RI$. Так как $R > 0$, то падение напряжения U_R и ток I имеют одинаковые знаки.

Напряжение U_R является напряжением U на зажимах источника ЭДС. Таким образом, положительное направление напряжения на зажимах источника ЭДС всегда противоположно положительному направлению ЭДС источника.

Условные положительные направления (или просто положительные направления) тока, ЭДС и напряжения показывают на электрических схемах стрелками. Действительные направления электрических величин, определяемые расчетом, могут совпадать или не совпадать с условными. Если расчетом или каким-либо иным образом определено, что ток, ЭДС и напряжение положительны, то их действительные направления совпадают с условно принятыми положительными направлениями, и наоборот.

1.3.Законы Кирхгофа

Соотношения между токами и ЭДС в ветвях электрической цепи и напряжениями на элементах цепи, позволяющие произвести расчет электрической цепи, определяются двумя законами Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа отражает принцип непрерывности движения электрических зарядов, из которого следует, что в любой момент времени количество электрических зарядов, направленных к узлу, равно количеству зарядов, направленных от узла, т.е. электрический заряд в узле не накапливается. Поэтому

Алгебраическая сумма токов в ветвях, сходящихся в узле электрической цепи, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0, \qquad (2.1)$$

где n – число ветвей, сходящихся в узле.

До написания уравнения (2.1) необходимо задать условные положительные направления токов в ветвях, обозначив эти направления на схеме стрелками. В уравнении (2.1) токи, направленные к узлу, записывают с одним знаком (например, с плюсом), а токи, направленные от узла, - с противоположным знаком (с минусом). Таким образом, для узла b схемы уравнение по первому закону Кирхгофа будет иметь вид

$$I_1 - I_3 - I_5 = 0.$$

Первый закон Кирхгофа может быть сформулирован иначе:

Сумма токов, направленных к узлу, равна сумме токов, направленных от узла.

Тогда уравнение для узла b будет записано так:

$$I_1 = I_3 + I_5.$$

Второй закон Кирхгофа отражает физическое положение, состоящее в том, что изменение потенциала во всех элементах контура в сумме равно нулю. Это значит, что при обходе контура abcda электрической цепи, показанной на рис. 2.1, в силу того, что потенциал точки a один и тот же, общее изменение потенциала в контуре равно нулю. Из этого следует такая формулировка второго закона Кирхгофа:

В любом контуре электрической цепи постоянного тока алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме падений напряжений на всех элементах этого контура:

$$\sum_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{m} R_k I_k, \qquad (2.2)$$

где n – число ЭДС в контуре; m – число элементов с сопротивлением R_k в контуре.

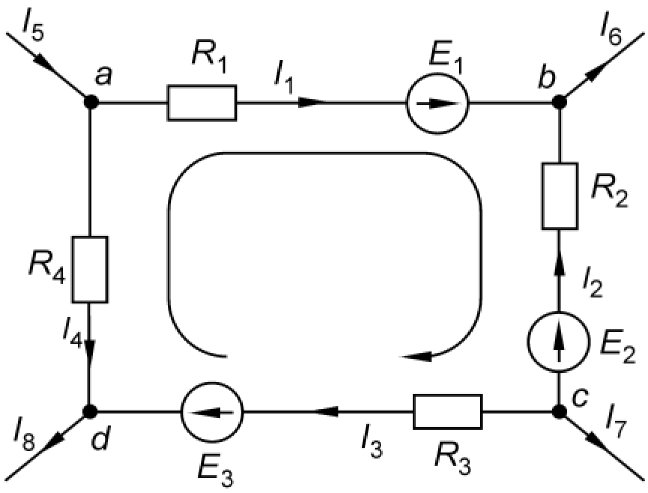


Рис. 2.1. Схема одного контура многоконтурной электрической цепи

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа предварительно задают условные положительные направления токов во всех ветвях электрической цепи и для каждого контура выбирают направление обхода. Если при этом направление ЭДС совпадает с направлением обхода контура, то такую ЭДС берут со знаком плюс, если не совпадает – со знаком минус. Падения напряжений в правой части уравнения (2.2) берут со знаком плюс, если положительное направление тока в данном элементе цепи совпадает с направлением обхода контура, если не совпадает – со знаком минус.

Внутренние сопротивления $R_{вт}$ источников ЭДС на электрических схемах могут быть изображены по-разному (рис. 2.2).

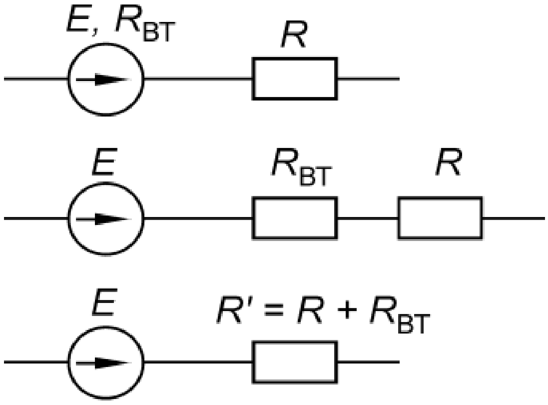


Рис. 2.2. Способы отображения на электрических схемах наличия внутреннего сопротивления источника ЭДС

Два контура abcda (рис. 2.1), сопротивления ветвей которого включают в себя и внутренние сопротивления источников ЭДС, уравнение (1.3) принимает вид

$$E_1 - E_2 + E_3 = R_1I_1 - R_2I_2 + R_3I_3 - R_4I_4.$$

Рассмотрим теперь контур abca (рис. 2.1), состоящий из ветвей ab, bc и ca. Ветвь ca, замыкающая контур, проходит в пространстве, в котором отсутствуют источники ЭДС. Падение напряжения на ней равно напряжению U_{ca} между точками c и a (условное положительное направление напряжения U_{ca} принято от точки c к точке a). По второму закону Кирхгофа для этого контура можно написать уравнение

$$E_1 - E_2 = R_1I_1 - R_2I_2 + U_{ca},$$

откуда напряжение между точками c и a

$$U_{ca} = E_1 - E_2 - R_1I_1 + R_2I_2.$$

Если напряжение U_{ca} положительно, то это означает, что потенциал точки c выше потенциала точки a, и наоборот.

Таким образом, используя второй закон Кирхгофа, можно определять разность потенциалов (напряжение) между любыми двумя точками электрической цепи.

Для одноконтурной схемы в соответствии с уравнением (1.3) можно записать: $E = RI = U_R$. Но вместо ЭДС E при обходе контура по направлению тока можно взять напряжение на зажимах источника ЭДС, которое направлено противоположно направлению обхода контура, в результате чего получим $U_R - U = 0$ или $U = U_R$.

Следовательно, второй закон Кирхгофа можно сформулировать в таком виде:

Сумма напряжений на всех элементах контура, включая источники ЭДС, равна нулю:

$$\sum_k U_k = 0.$$

Если в ветви имеется n последовательно соединенных элементов с сопротивлением k-го элемента R_k, то

$$U = \sum_{k=1}^{n} U_k,$$

где $U_k = R_k I_k$, т.е. падение напряжения на участке цепи или напряжение между зажимами ветви, состоящей из последовательно соединенных элементов, равно сумме падений напряжений на этих элементах.

Числовые множества в профессиональных задачах

Аудиторные задания (А/з):

1) Из формулы (2.1) получить формулу вида:

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n = 0$$

для 5 ветвей, сходящихся в узле.

2) На основе полученной формулы вычислить значение тока I_1 (А) при $I_2 = -2$ (А), $I_3 = 4$ (А), $I_4 = -6$ (А), $I_5 = 8$ (А).

3) Из формулы (2.2) получить формулу вида:

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_n = R_1 I_1 + R_2 I_2 + \cdots + R_m I_m$$

для 4 ЭДС в контуре и 3 элементов с сопротивлением R_k в контуре.

4) На основе полученной формулы вычислить значение ЭДС E_1 (В) при $E_2 = 10$ (В), $E_3 = -12$ (В), $R_1 = 2$ (Ом), $I_1 = -1$ (А), $R_2 = 2{,}5$ (Ом), $I_2 = 2$ (А), $R_3 = 3$ (Ом), $I_3 = 3$ (А).

Домашние задания (Д/з):

1) Из формулы (2.1) получить формулу вида:

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n = 0$$

для 6 ветвей, сходящихся в узле.

2) На основе полученной формулы вычислить значение тока I_6 (А) при $I_1 = 3$ (А), $I_2 = -2$ (А), $I_3 = 1$ (А), $I_4 = 5$ (А), $I_5 = -3$ (А).

3) Из формулы (2.2) получить формулу вида:

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_n = R_1 I_1 + R_2 I_2 + \cdots + R_m I_m$$

для 3 ЭДС в контуре и 4 элементов с сопротивлением R_k в контуре.

4) На основе полученной формулы вычислить значение ЭДС E_3 (В) при $E_1 = -5$ (В), $E_2 = 12$ (В), $R_1 = 1$ (Ом), $I_1 = -4$ (А), $R_2 = 1{,}5$ (Ом), $I_2 = -4$ (А), $R_3 = 2$ (Ом), $I_3 = 3$ (А), $R_4 = 2{,}5$ (Ом), $I_4 = 2$ (А).

Указание:

1) $\sum_{k=1}^{n} I_k = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$, n – число ветвей, сходящихся в узле.

2) $\sum_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{m} R_k I_k$, n – число ЭДС в контуре; m – число элементов с сопротивлением R_k в контуре.

$E_1 + E_2 + \cdots + E_n = R_1 I_1 + R_2 I_2 + \cdots + R_m I_m$.

Числовые множества в профессиональных задачах (Примеры)

Примеры:

1) Из формулы (2.1) получить формулу вида:

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n = 0$$

для 4 ветвей, сходящихся в узле.

2) На основе полученной формулы вычислить значение тока I_1 (А) при $I_2 = -2$ (А), $I_3 = 4$ (А), $I_4 = -6$ (А).

3) Из формулы (2.2) получить формулу вида:

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_n = R_1 I_1 + R_2 I_2 + \cdots + R_m I_m$$

для 3 ЭДС в контуре и 2 элементов с сопротивлением R_k в контуре.

4) На основе полученной формулы вычислить значение ЭДС E_1 (В) при $E_2 = 10$ (В), $E_3 = -12$ (В), $R_1 = 2$ (Ом), $I_1 = -1$ (А), $R_2 = 2{,}5$ (Ом), $I_2 = 2$ (А).

Решение:

1. $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0.$

2. $I_1 = -I_2 - I_3 - I_4.$

$I_2 = -2$ (А), $I_3 = 4$ (А), $I_4 = -6$ (А).

$I_1 = 2 - 4 + 6 = 4$ (А).

3. $E_1 + E_2 + E_3 = R_1 I_1 + R_2 I_2.$

4. $E_1 = R_1 I_1 + R_2 I_2 - E_2 - E_3.$

$E_2 = 10$ (В), $E_3 = -12$ (В), $R_1 = 2$ (Ом), $I_1 = -1$ (А), $R_2 = 2{,}5$ (Ом), $I_2 = 2$ (А).

$E_1 = 2 \cdot (-1) + 2{,}5 \cdot 2 - 10 + 12 = 5$ (В).

РАЗДЕЛ 3. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

3.1 Предел последовательности. Предел функции в точке

Используемый источник – Математика СПО [1], п.3.1-3.2.

Аудиторные задания (А/з):

1) Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$.

2) Укажите номер n, начиная с которого выполняется неравенство:

$\left|\frac{n^2+1}{n^2}-1\right|<\varepsilon$ при $\varepsilon=0{,}1$.

3) Найдите предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2^n}{1+2^n}$.

4) Найдите предел: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

Домашние задания (Д/з):

1) Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1}=\frac{1}{2}$.

2) Укажите номер n, начиная с которого выполняется неравенство:

$\left|\frac{n^2+1}{n^2}-1\right|<\varepsilon$ при $\varepsilon=0{,}01$.

3) Найдите предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{2n}{3n+1}\right)$.

4) Найдите предел: $\lim\limits_{x\to 5+0}\frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$.

Предел последовательности. Предел функции в точке (Примеры)

Примеры:

1) Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{5^n} = 0$.

2) Укажите номер n, начиная с которого выполняется неравенство:

$\left|\frac{n^2+2}{n^2} - 1\right| < \varepsilon$ при $\varepsilon = 0{,}1$.

3) Найдите предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-3\cdot 2^n}{1+2^n}$.

4) Найдите предел: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

5) Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{3n+1} = \frac{1}{3}$.

6) Укажите номер n, начиная с которого выполняется неравенство:

$\left|\frac{n^2+2}{n^2} - 1\right| < \varepsilon$ при $\varepsilon = 0{,}01$.

7) Найдите предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{2n}{4n+1}\right)$.

8) Найдите предел: $\lim\limits_{x\to 4+0} \frac{x^2-4x+10}{x^2-16}$.

Решение:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{5^n} = 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N: |x_n - a| < \varepsilon$.

$\varepsilon = 1;\ \left|\frac{1}{5^n} - 0\right| < 1, N = 1\ \left|\frac{1}{5}\right| < 1; n = 2 > N\ \left|\frac{1}{25}\right| < 1$ – ч. т. д.

2. $\left|\frac{n^2+2}{n^2} - 1\right| < \varepsilon, \qquad \varepsilon = 0{,}1$.

$\left|\frac{n^2+2}{n^2} - 1\right| = \left|1 + \frac{2}{n^2} - 1\right| = \left|\frac{2}{n^2}\right| = \frac{2}{n^2} < \varepsilon; \qquad n^2 > \frac{2}{\varepsilon}; \qquad n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} = \sqrt{20} \approx 4{,}47 \Rightarrow n = 5$ (ближайшее целое число, большее чем данное).

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-3\cdot 2^n}{1+2^n}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-3\cdot 2^n}{1+2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}-3}{\frac{1}{2^n}+1}=-3.$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}.$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{3n+1}=\frac{1}{3}.$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N\colon\forall n>N\colon|x_n-a|<\varepsilon.$

$\varepsilon=1;\ \left|\frac{n-1}{3n+1}-\frac{1}{3}\right|<1, N=1\ \left|-\frac{1}{3}\right|<1; n=2>N\ \left|\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\right|<1;\ \left|-\frac{4}{21}\right|<1$ – ч. т. д.

6. $\left|\frac{n^2+2}{n^2}-1\right|<\varepsilon,\qquad \varepsilon=0{,}01.$

$\frac{2}{n^2}<\varepsilon;\ \ n^2>\frac{2}{\varepsilon};\ \ n>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}=10\sqrt{2}\approx 14{,}14\Rightarrow n=15.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{2n}{4n+1}\right).$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{2n}{4n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{4n+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0{,}5.$

8. $\lim\limits_{x\to 4+0}\frac{x^2-4x+10}{x^2-16}.$

$\lim\limits_{x\to 4+0}\frac{x^2-4x+10}{x^2-16}=\left[\frac{10}{+0}\right]=+\infty.$

3.2 Асимптотическое поведение функций. Непрерывные функции и их основные свойства

Используемый источник – Математика СПО [1], п.3.3-3.4.

Аудиторные задания (А/з):

1) Вычислите приращение функции $y=x^3$, задав приращение аргумента Δx. (записать общую формулу исходя из формулы $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$).

2) Докажите непрерывность функции $y=x^2+x$ в любой точке x, убедившись, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

3) Укажите точку разрыва функции $y = \frac{4}{x-2}$. Найдите $\lim\limits_{x\to 2-0} y$, $\lim\limits_{x\to 2+0} y$ и постройте кривую по точкам $x = -2; 0; 1; 3; 4; 6$.

4) Постройте график функции $y = \frac{x+1}{|x+1|}$.

Домашние задания (Д/з):

1) Постройте график функции $y = \begin{cases} 0{,}5x^2 \text{ при } |x| < 2 \\ 2{,}5 \text{ при } |x| = 2 \\ 3 \text{ при } |x| > 2 \end{cases}$ и укажите её точки разрыва.

2) Исследуйте на непрерывность $y = \begin{cases} 2x, \text{если } x \in [0; 1] \\ 3 - x, \text{если } x \in [1; 2] \end{cases}$.

3) Найдите точки разрыва и постройте график функции $y = 2 - \frac{|x|}{x}$.

4) Найдите кривую, характеризующую асимптотическое поведение функции $y = \frac{x^3+2x^2-2}{x+1}$ при $x \to \pm\infty$.

(Указание: поделить числитель на знаменатель; частное без остатка будет являться искомой функцией).

Асимптотическое поведение функций. Непрерывные функции и их основные свойства (Примеры)

Примеры:

1) Вычислите приращение функции $y = x^2$, задав приращение аргумента Δx. (записать общую формулу исходя из формулы $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$).

2) Докажите непрерывность функции $y = x^3 + x$ в любой точке x, убедившись, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

3) Укажите точку разрыва функции $y = \frac{5}{x-3}$. Найдите $\lim\limits_{x\to 3-0} y$, $\lim\limits_{x\to 3+0} y$ и постройте кривую по точкам $x = -2; 0; 1; 2; 4; 6; 5$.

4) Постройте график функции $y = \frac{x+2}{|x+2|}$.

5) Постройте график функции $y = \begin{cases} 0{,}1x^2 \text{ при } |x| < 3 \\ 1{,}5 \text{ при } |x| = 3 \\ 2 \text{ при } |x| > 3 \end{cases}$ и укажите её точки разрыва.

6) Исследуйте на непрерывность $y = \begin{cases} 3x, \text{если } x \in [0; 2] \\ 8 - x, \text{если } x \in [2; 4] \end{cases}$.

7) Найдите точки разрыва и постройте график функции $y = 3 - \frac{|x|}{x}$.

8) Найдите кривую, характеризующую асимптотическое поведение функции $y = \frac{x^3 - 2x^2 - 2}{x+1}$ при $x \to \pm\infty$.

(Указание: поделить числитель на знаменатель; частное без остатка будет являться искомой функцией).

Решение:

1. $y = x^2,\ \Delta x$.

$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x + \Delta x)$.

2. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \quad y = x^3 + x$.

$\Delta y = (x + \Delta x)^3 + (x + \Delta x) - x^3 - x = (x + \Delta x)^3 - x^3 + \Delta x = (x + \Delta x - x)((x + \Delta x)^2 + x(x + \Delta x) + x^2) + \Delta x = \Delta x(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + x^2 + x\Delta x + x^2) + \Delta x = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1)$.

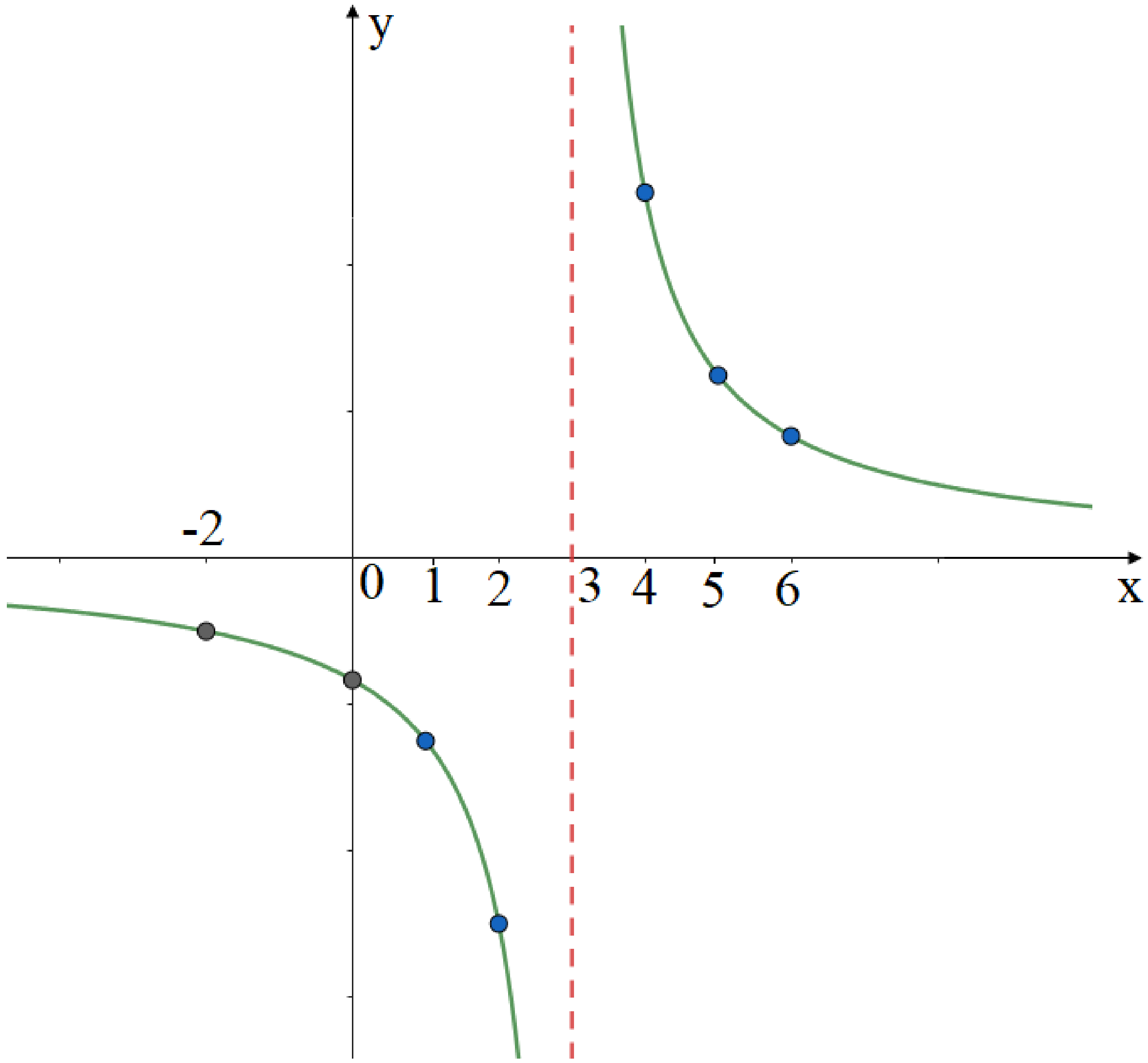
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1) = 0$ – ч. т. д.

3. $y = \frac{5}{x-3}$.

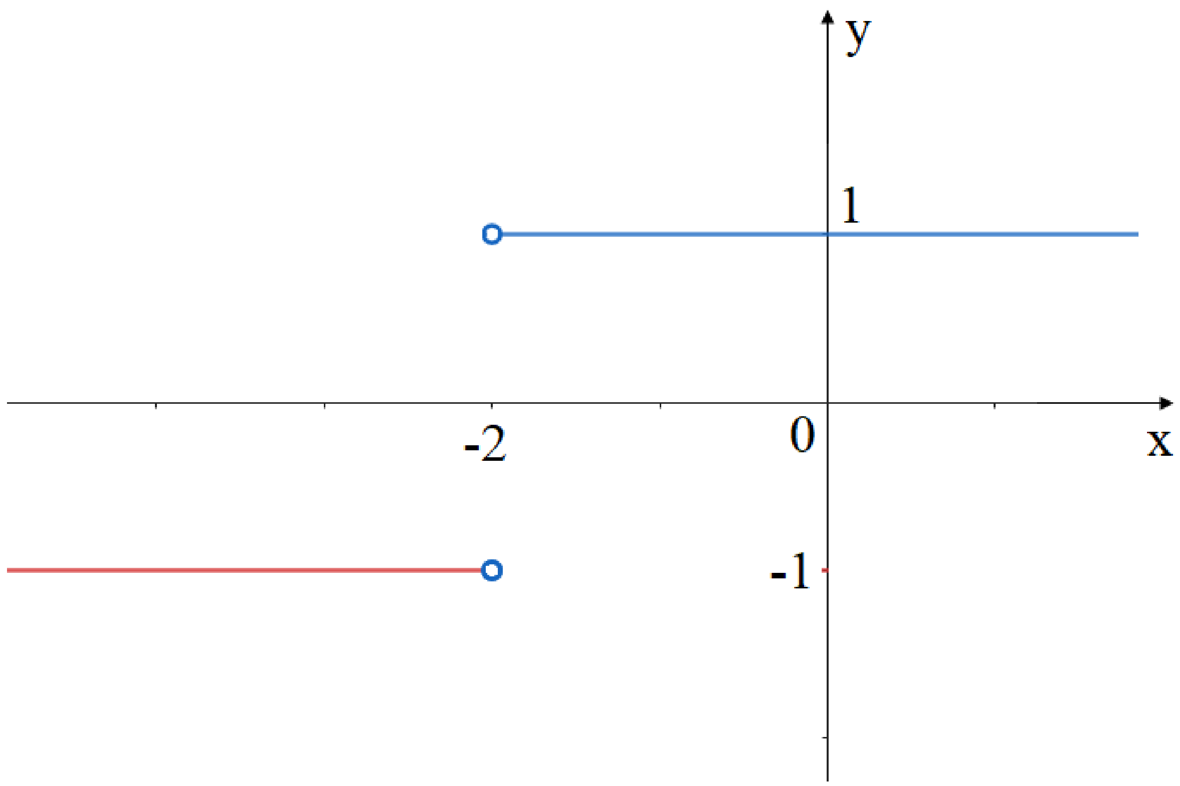
$x = 3$ – точка разрыва.

$\lim\limits_{x \to 3-0} \frac{5}{x-3} = \left[\frac{5}{-0}\right] = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 3+0} \frac{5}{x-3} = \left[\frac{5}{+0}\right] = +\infty \Rightarrow x = 3$ – точка разрыва 2-ого рода.

x	-2	0	1	2	4	6	5
y	-1	-5/3	-2,5	-5	5	5/3	2,5



4. $y = \frac{x+2}{|x+2|} = \begin{cases} 1, x > -2 \\ -1, x < -2 \end{cases}$.

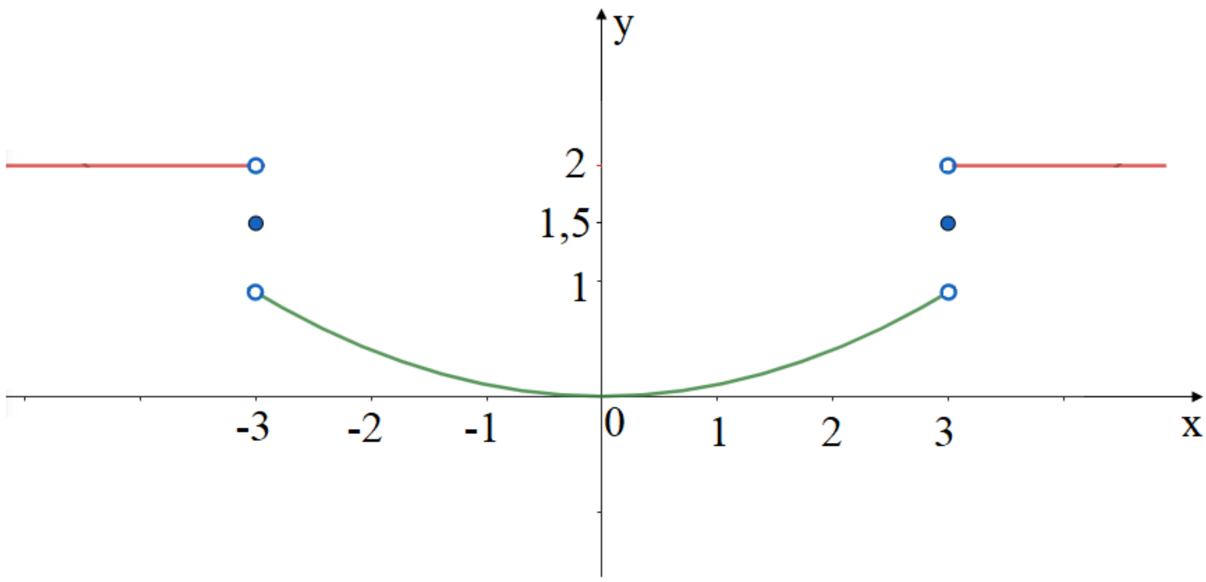


5. $y = \begin{cases} 0{,}1x^2 \text{ при } |x| < 3 \\ 1{,}5 \text{ при } |x| = 3 \\ 2 \text{ при } |x| > 3 \end{cases}.$

$y = \begin{cases} 0{,}1x^2 \text{ при } -3 < x < 3 \\ 1{,}5 \text{ при } x = \pm 3 \\ 2 \text{ при } x > 3, x < -3 \end{cases}.$

$y = 0{,}1x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
y	0,4	0,1	0	0,1	0,4



6. $y = \begin{cases} 3x, \text{если } x \in [0;2] \\ 8 - x, \text{если } x \in [2;4] \end{cases}.$

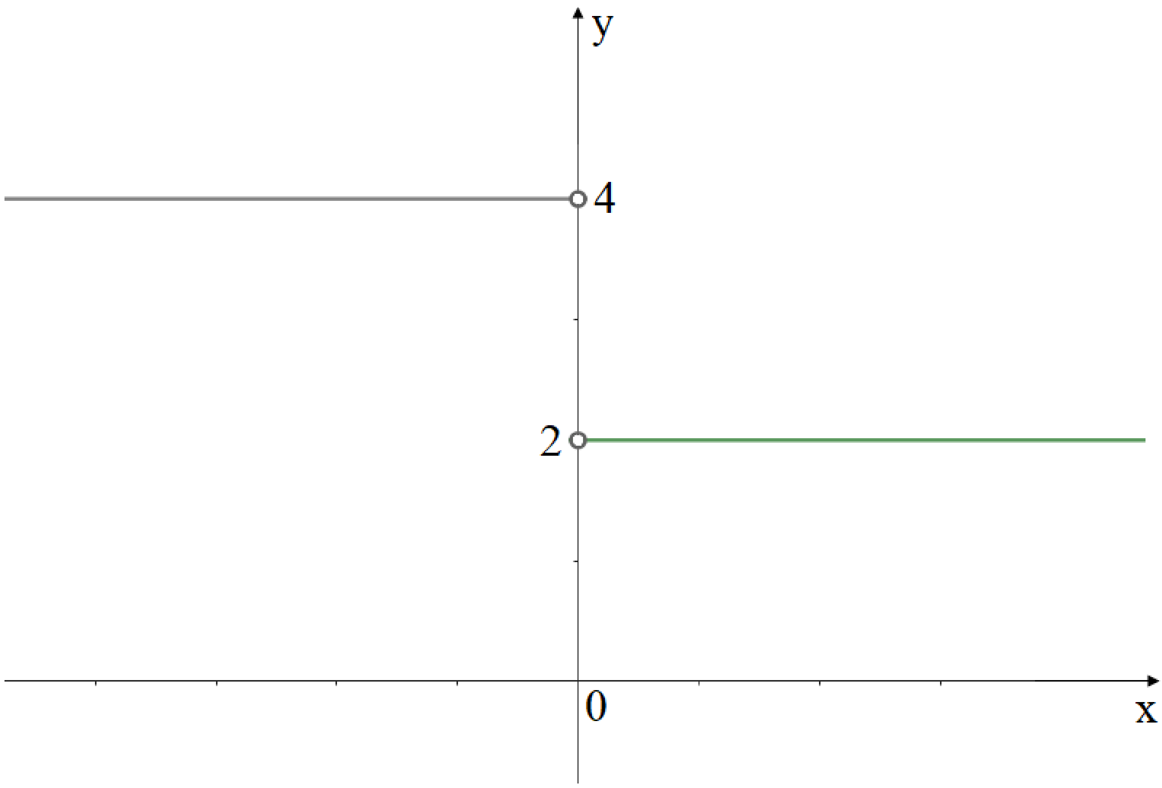
Функция не имеет точек разрыва $\Rightarrow$ непрерывна

$f(2) = \lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = 6.$

7. $y = 3 - \frac{|x|}{x}$.

$x = 0$ – точка разрыва. $y = \begin{cases} 2, \text{при } x > 0 \\ 4, \text{при } x < 0 \end{cases}.$

$\lim\limits_{x \to -0} y = \lim\limits_{x \to -0} 4 = 4; \quad \lim\limits_{x \to +0} y = \lim\limits_{x \to +0} 2 = 2 \Rightarrow x = 0$ – точка разрыва 1-ого рода.



8. $y = \frac{x^3-2x^2-2}{x+1}$.

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^3-2x^2-2 \\ \underline{x^3+x^2} \end{array} & \underline{\;x+1\;} \\ -\begin{array}{r} -3x^2-2 \\ \underline{-3x^2-3x} \end{array} & x^3-3x+3 \\ -\begin{array}{r} 3x-2 \\ \underline{3x+3} \end{array} & \\ -5 & \end{array}$$

$y = \frac{x^3-2x^2-2}{x+1} = x^2 - 3x + 3 - \frac{5}{x+1}$.

$y = x^2 - 3x + 3$ – кривая, характеризующая асимптотическое поведение функции при $x \to \pm\infty$.

3.3 Контрольная работа «Предел и непрерывность»

Используемый источник – Математика СПО [1], п.3.1-3.4.

Контрольная работа «Предел и непрерывность»

Аудиторные задания (А/з):

1)Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+2}=\frac{1}{3}$.

2)Найти предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{n(n+4)+2}$.

3)Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)=2$. Найдите такое $\delta>0$, что при $|x|<\delta$ выполняется неравенство $\left|\frac{x+2}{x+1}-2\right|<\varepsilon$ для $\varepsilon=0{,}01$.

4)Найдите предел: $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$.

Домашние задания (Д/з):

1)Исследуйте на непрерывность и постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2, \text{если } x\in(-\infty;3] \\ 2x+1, \text{если } x\in(3;+\infty) \end{cases}.$$

2)Исследуйте поведение функции $y=\frac{x^2+x}{|x|}$ вблизи точки разрыва, изобразите эскиз графика.

3)Пусть задана функция $y=\begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, \text{если } x\neq 2 \\ A, \text{если } x=2 \end{cases}$. Как следует выбрать значение A, чтобы функция была непрерывной?

4)Найдите асимптоты графика функции и изобразите эскиз асимптотического поведения функции $y=\frac{1}{(x-2)^2}$.

Контрольная работа «Предел и непрерывность» (Подготовка)

1)Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{4\sqrt{n}+2}=\frac{1}{4}$.

2)Найти предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n(n+3)+1}$.

3)Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)=3$. Найдите такое $\delta>0$, что при $|x|<\delta$ выполняется неравенство $\left|\frac{x+3}{x+1}-3\right|<\varepsilon$ для $\varepsilon=0{,}01$.

4)Найдите предел: $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x^2-3x}{x^2-4x+3}$.

5)Исследуйте на непрерывность и постройте график функции

$$y=\begin{cases}2x^2, \text{если } x\in(-\infty;2]\\ 3x+1, \text{если } x\in(2;+\infty)\end{cases}.$$

6)Исследуйте поведение функции $y=\frac{x^2+2x}{|x|}$ вблизи точки разрыва, изобразите эскиз графика.

7)Пусть задана функция $y=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3}, \text{если } x\neq 3\\ A, \text{если } x=3\end{cases}$. Как следует выбрать значение A, чтобы функция была непрерывной?

8)Найдите асимптоты графика функции и изобразите эскиз асимптотического поведения функции $y=\frac{1}{(x-3)^2}$.

Решение:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{4\sqrt{n}+2}=\frac{1}{4}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N{:}\ \forall n>N{:}\ |x_n-a|<\varepsilon$.

$\left|\frac{\sqrt{n}}{4\sqrt{n}+2}-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon$; $\left|\frac{4\sqrt{n}-4\sqrt{n}-2}{(4\sqrt{n}+2)4}\right|<\varepsilon$; $\frac{2}{4(4\sqrt{n}+2)}<\varepsilon$; $\frac{1}{2(4\sqrt{n}+2)}<\varepsilon$; $4\sqrt{n}+2>\frac{1}{2\varepsilon}$;

$2\sqrt{n}+1>\frac{1}{4\varepsilon}$; $2\sqrt{n}>\frac{1}{4\varepsilon}-1$; $\sqrt{n}>\frac{1}{8\varepsilon}-\frac{1}{2}$; $\varepsilon=1$; $\sqrt{n}>\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1-4}{8}=$
$-\frac{3}{8}$;

$N=1; n=2>N$ $\sqrt{2}>-\frac{3}{8}$ – ч. т. д.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n(n+3)+1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n(n+3)+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n^2+3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3/n^2}{1+3/n+1/n^2}=2.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)=3$; $\delta>0, |x|<\delta$ $\left|\frac{x+3}{x+1}-3\right|<\varepsilon$, $\varepsilon=0{,}01$.

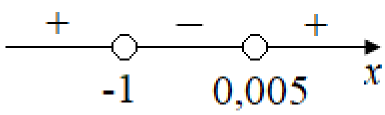
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)=\frac{3}{1}=3$$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall x$ из $|x-x_0|<\delta$ следует $|f(x)-A|<$
$f(x)$.

$\left|\frac{x+3}{x+1}-3\right|<\varepsilon$; $\left|\frac{x+3-3x-3}{x+1}\right|<\varepsilon$; $\left|\frac{-2x}{x+1}\right|<\varepsilon$; $\left|\frac{2x}{x+1}\right|<\varepsilon$;

$\frac{2x}{x+1}<\varepsilon$; $\frac{2x-\varepsilon(x+1)}{x+1}<0$; $\frac{(2-\varepsilon)x-\varepsilon}{x+1}<0$;

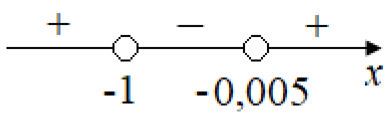
$x=\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}=\frac{0{,}01}{2-0{,}01}=\frac{0{,}01}{1{,}99}\approx 0{,}005$; $x\neq -1$



$x\in(-1; 0{,}005)$

$-\frac{2x}{x+1}<\varepsilon$; $\frac{2x}{x+1}>-\varepsilon$; $\frac{2x+\varepsilon(x+1)}{x+1}>0$; $\frac{(2+\varepsilon)x+\varepsilon}{x+1}>0$;

$x=-\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}=-\frac{0{,}01}{2+0{,}01}=-\frac{0{,}01}{2{,}01}\approx -0{,}005$; $x\neq -1$



$x\in(-\infty; -1)\cup(-0{,}005; +\infty)$

$x\in(-0{,}005; 0{,}005)\Rightarrow\delta=0{,}004$

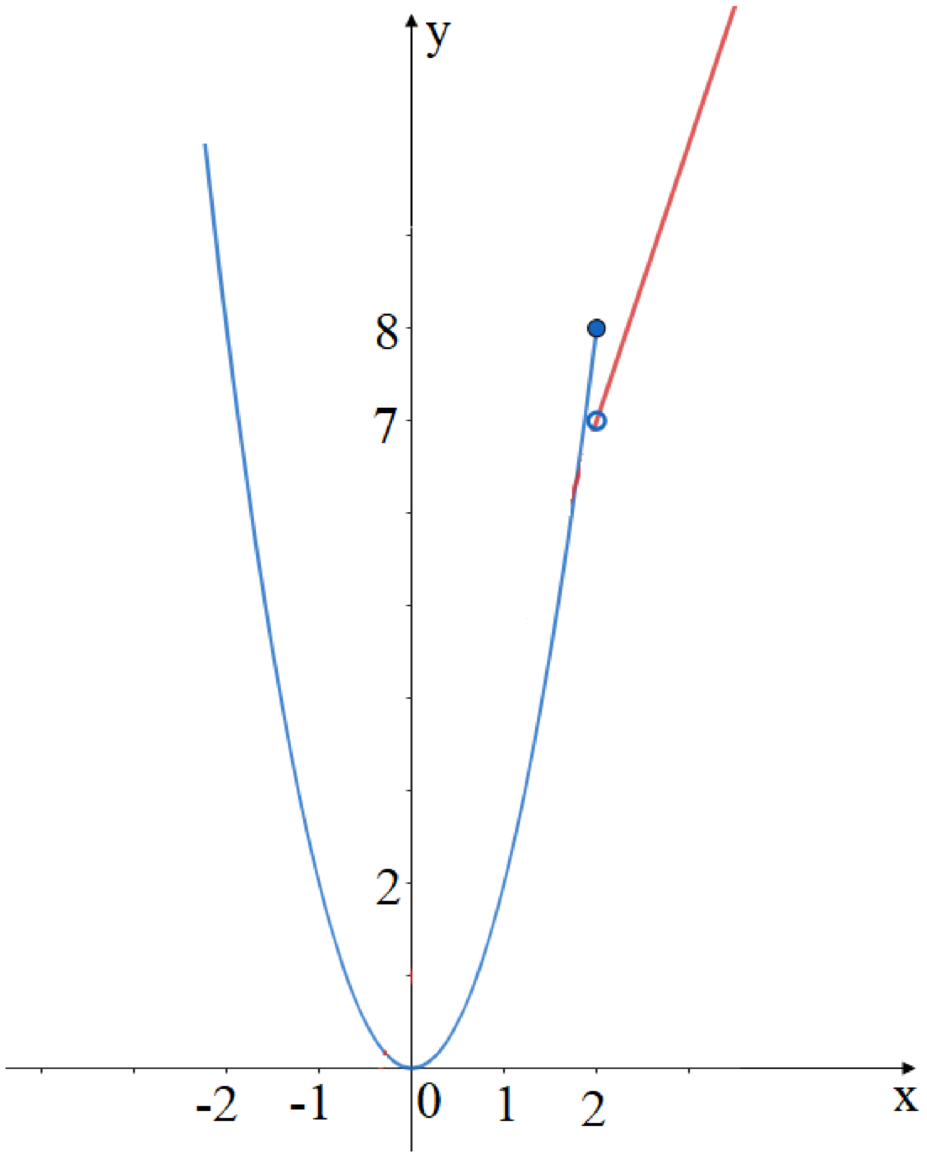
4. $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x^2-3x}{x^2-4x+3}$.

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-3x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x(x-3)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{x-1}=\left[\frac{1}{-0}\right]=-\infty.$$

5. $y = \begin{cases} 2x^2, \text{если } x \in (-\infty; 2] \\ 3x + 1, \text{если } x \in (2; +\infty) \end{cases}.$

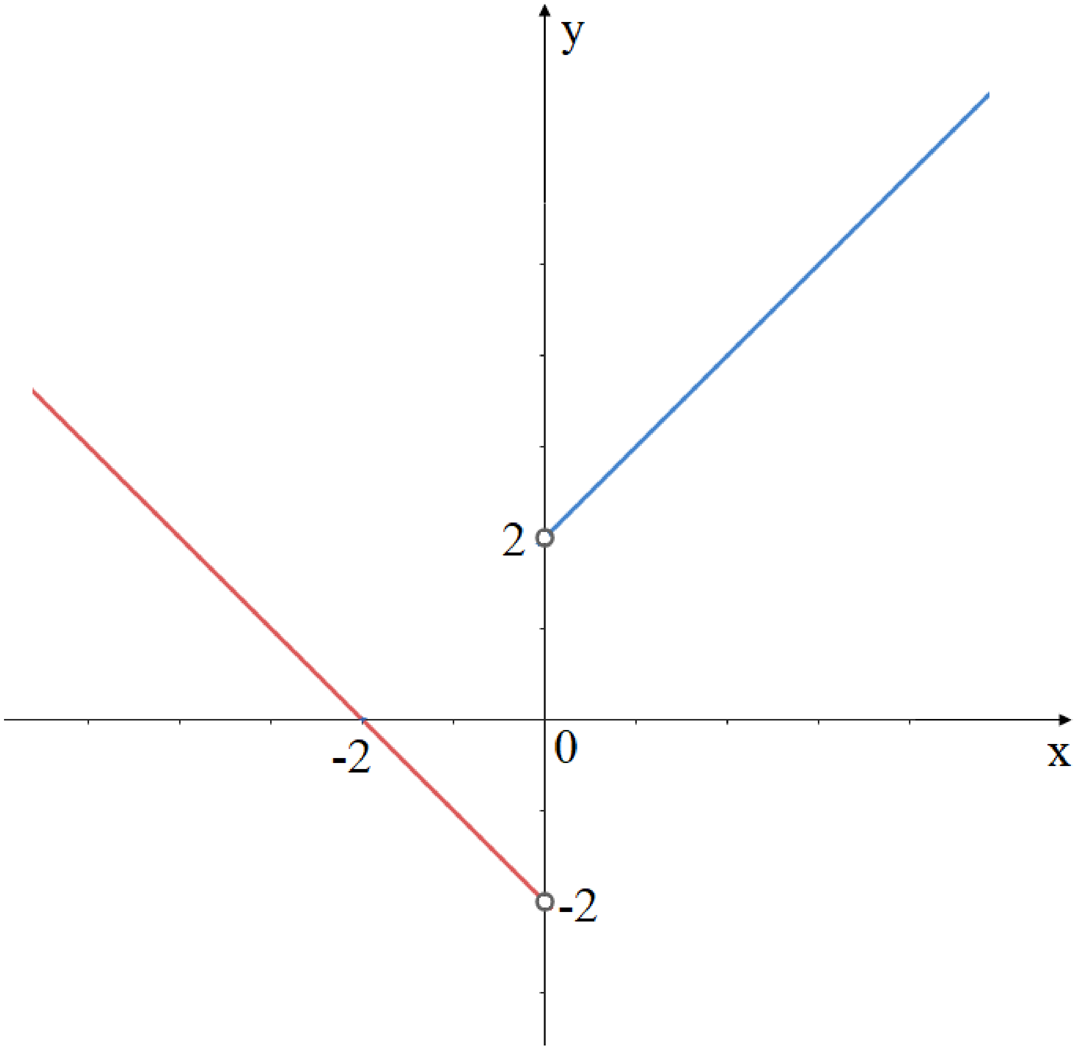
$f(2) = 8.$

$\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = 8;\ \ \lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = 7 \Rightarrow x = 2$ – точка разрыва 1-ого рода.



6. $y = \frac{x^2+2x}{|x|}.$

$$y = \begin{cases} \frac{x^2+2x}{x} = x + 2, x > 0 \\ \frac{x^2+2x}{-x} = -x - 2, x < 0 \end{cases}.$$



$x = 0$ – точка разрыва 1-ого рода.

7. $y = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, \text{если } x \neq 3 \\ A, \text{если } x = 3 \end{cases}.$

$\lim\limits_{x\to 3} y = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x+3) = 6 \Rightarrow A = 6.$

8. $y = \frac{1}{(x-3)^2}.$

$x = 3$ – вертикальная асимптота;

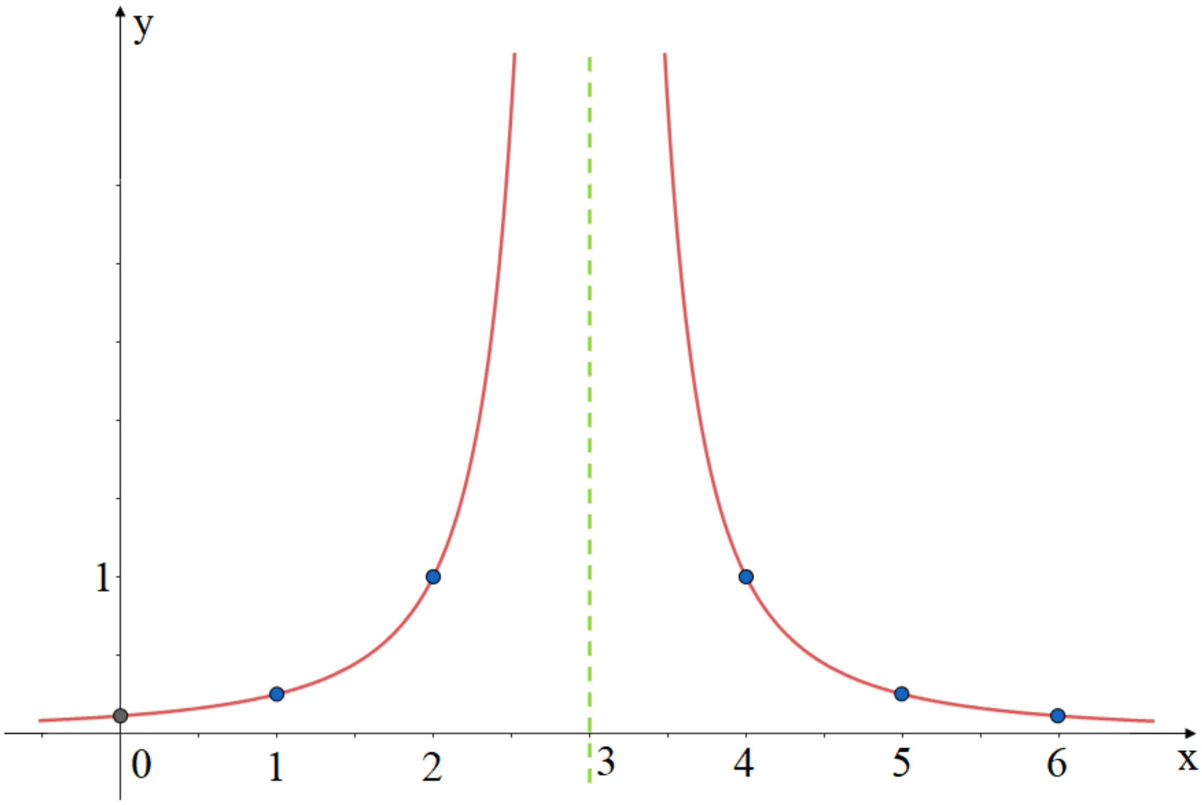
$\lim\limits_{x\to 3\pm 0} y = \lim\limits_{x\to 3\pm 0} \frac{1}{(x-3)^2} = \left[\frac{1}{(\pm 0)^2}\right] = +\infty;$

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x(x-3)^2} = 0;$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(x-3)^2} = 0;$

$y = kx + b = 0$ – горизонтальная асимптота.

x	0	1	2	4	5	6
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$



3.4 Предел и непрерывность в профессиональных задачах

Используемый источник – [2].

1.7. Нелинейные элементы электрической цепи

По виду вольт-амперной характеристики различают нелинейные элементы с симметричной и несимметричной характеристиками (по отношению к началу координат). Значение тока в нелинейном элементе с симметричной характеристикой не зависит от полярности приложенного напряжения (рис. 3.1а), а сопротивление этого элемента не зависит от направления тока в нем. В нелинейном элементе с несимметричной характеристикой значение тока зависит от полярности приложенного напряжения (рис. 3.1б), а сопротивление элемента зависит от направления тока в нем.

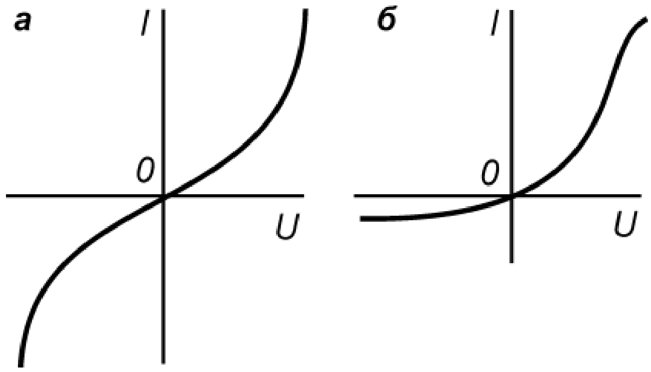


Рис. 3.1. Вольт-амперные характеристики нелинейных элементов

К нелинейным элементам с симметричной характеристикой относятся лампы накаливания, терморезисторы, тиритовые и вилитовые элементы, бареттеры, лампы с тлеющим разрядом, электрическая дуга между одинаковыми электродами и др.

Нелинейность характеристик ламп накаливания обусловлена тем, что, например, вольфрамовая нить имеет положительный температурный коэффициент сопротивления и в соответствии с формулой (1.1) при повышении температуры (с увеличением тока) ее сопротивление увеличивается и возрастание тока замедляется (1 на рис. 3.2). Угольная же нить имеет отрицательный температурный коэффициент сопротивления, и поэтому зависимость 2 имеет вогнутый характер.

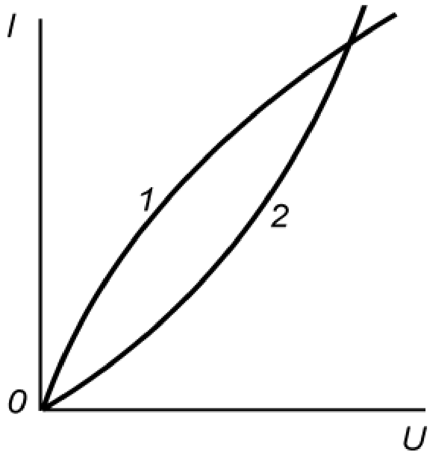


Рис. 3.2. Вольт-амперные характеристики ламп накаливания:
1 – с вольфрамовой нитью; 2 – с угольной нитью

Терморезистор имеет вольт-амперную характеристику, аналогичную характеристике угольной нити. С увеличением тока его сопротивление уменьшается. Терморезисторы применяют для компенсации изменений сопротивления элементов, изготовленных из металлических проводников, сопротивление которых увеличивается с увеличением тока в цепи. При последовательном включении такого элемента и терморезистора общее сопротивление цепи остается неизменным при любом значении тока.

Бареттер по внешнему виду напоминает лампу накаливания. В стеклянном баллоне, заполненном водородом, помещается стальная нить. На вольт-амперной характеристике (рис. 3.3) имеется участок АВ, на протяжении которого с увеличением напряжения сопротивление нити увеличивается так, что ток остается почти постоянным. Бареттер включают последовательно в ту цепь, в которой надо поддержать ток постоянным. Тогда все изменения напряжения $\pm\Delta U$ источника питания принимает на себя бареттер, а напряжение на приемнике и, следовательно, ток в нем не изменяются.

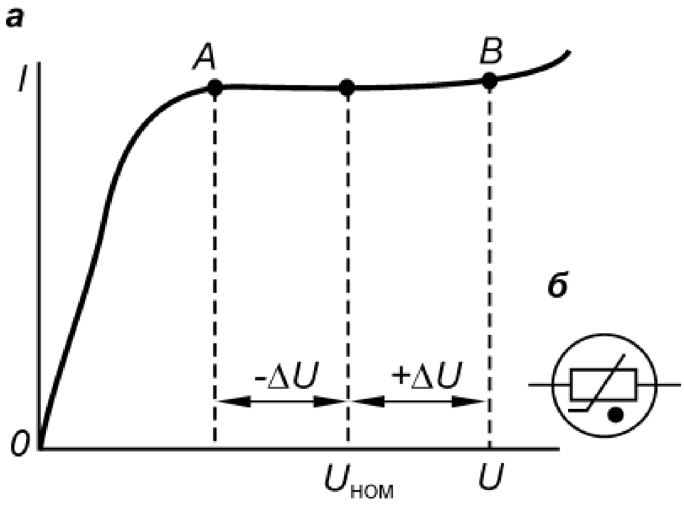


Рис. 3.3. Бареттер:

а – вольт-амперная характеристика; б – условное обозначение на электрических схемах

Тиритовые и вилитовые элементы изготовляют из карборунда. Они имеют вольт-амперную характеристику, изображенную на рис. 3.4. Из нее видно, что с увеличением напряжения проводимость элемента увеличивается. Из тиритовых дисков выполняют разрядники, предназначенные для защиты установок высокого напряжения (подстанций, линий электропередачи) от перенапряжений.

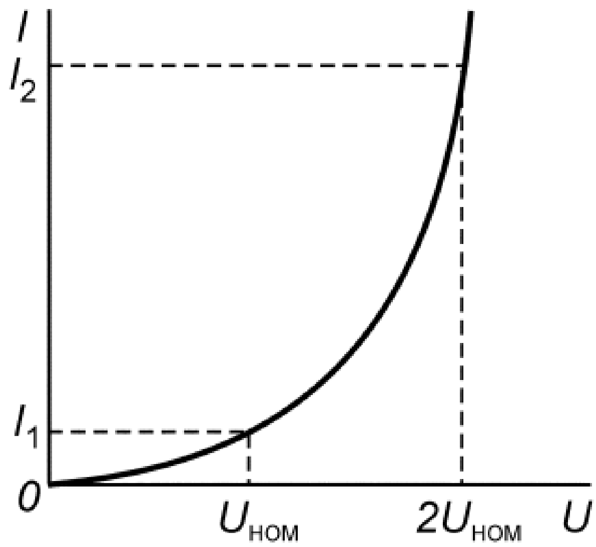


Рис. 3.4. Вольт-амперная характеристика тиритового элемента

При возрастании напряжения в два раза проводимость тиритового элемента увеличивается примерно в десять раз.

К нелинейным элементам с симметричной характеристикой относится также электрическая дуга, возникающая между одинаковыми электродами и являющаяся элементом цепи электросварочных установок, электроплавильных печей, прожекторов, проекционных аппаратов и т.д.

Вольт-амперная характеристика дуги представлена на рис. 3.5. С увеличением тока дуги падение напряжения на ней уменьшается, что обусловлено резким увеличением ее проводимости.

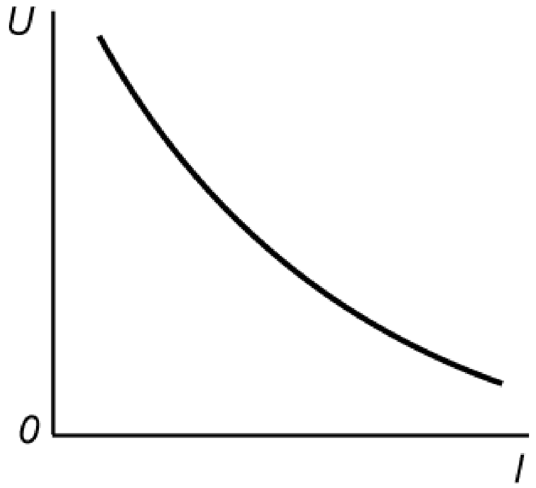


Рис. 3.5. Вольт-амперная характеристика электрической дуги

У ламп с тлеющим разрядом стеклянный баллон заполняют инертным газом (неоновые лампы). При увеличении напряжения ток в газе между электродами сначала увеличивается очень медленно (см. рис. 3.6). Когда напряжение достигает некоторого значения U_0, между электродами возникает тлеющий разряд, газ ионизируется, проводимость лампы резко возрастает и ток продолжает увеличиваться даже при уменьшении напряжения. Постоянство напряжения в некотором диапазоне изменения тока (участок АВ) позволяет использовать лампы с тлеющим разрядом для стабилизации напряжения.

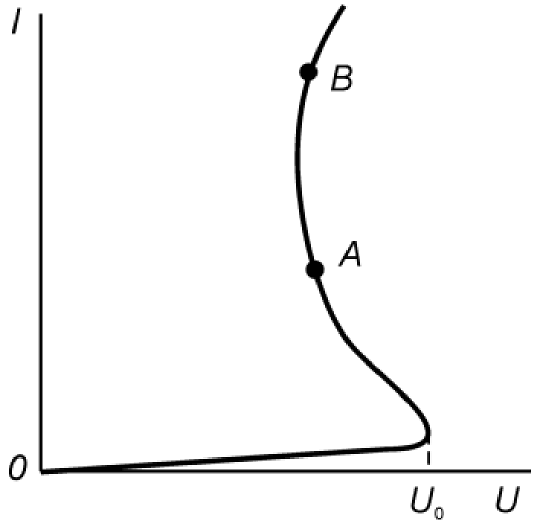


Рис. 3.6. Вольт-амперная характеристика лампы с тлеющим разрядом

К нелинейным элементам с несимметричной вольт-амперной характеристикой относятся электронные лампы, ртутные вентили, полупроводниковые диоды и триоды, электрическая дуга при неоднородных электродах и др. В основном их используют для преобразования переменного тока в постоянный ток.

На рис. 3.7 изображена вольт-амперная характеристика термистора – терморезистора из полупроводникового материала. Значительная часть характеристики термистора имеет падающий характер, что обусловлено его высоким отрицательным температурным коэффициентом в этой части характеристики. Термисторы применяют в измерительных устройствах, в технике высокой частоты и т.п.

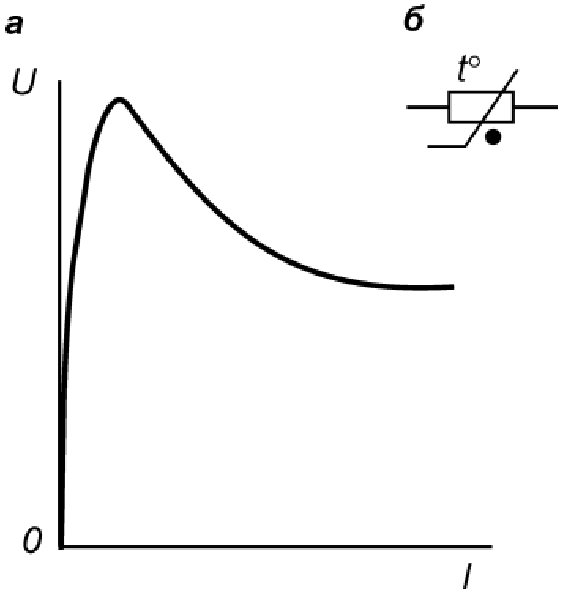


Рис. 3.7. Термистор:
а – вольт-амперная характеристика; б – условное обозначение на электрических схемах

Электронная лампа (диод) проводит электрический ток, если анод имеет положительный потенциал, а катод – отрицательный. При обратной полярности электродов ток, замыкающийся через лампу, практически равен нулю (рис. 3.8).

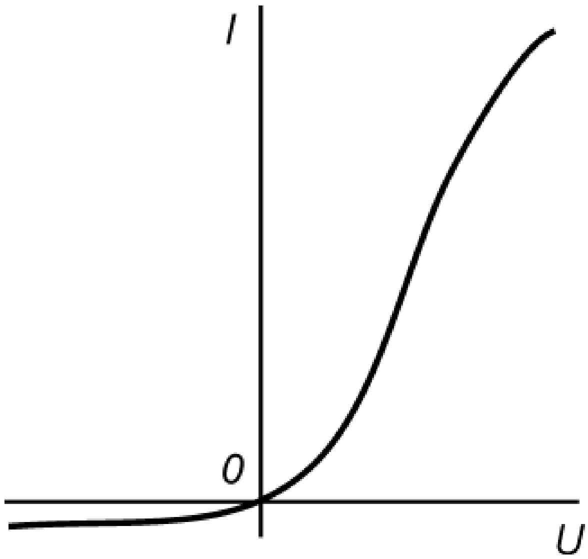


Рис. 3.8. Вольт-амперная характеристика электронной лампы (диода)

Характеристики твердотельных полупроводниковых диодов (селеновых, кремниевых, германиевых и др.) аналогичны (рис. 3.9).

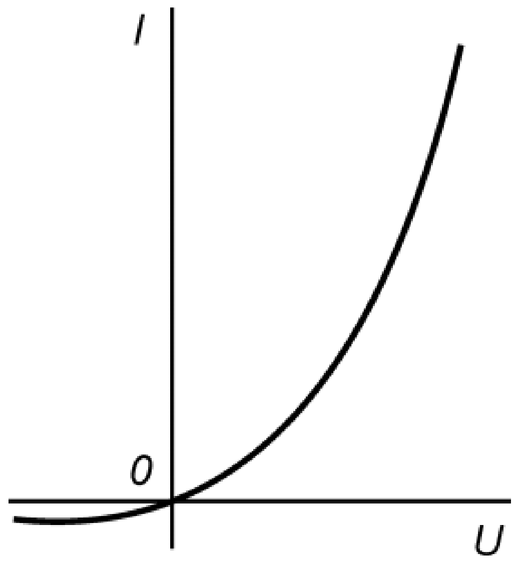


Рис. 3.9. Вольт-амперная характеристика электронной полупроводникового диода

Нелинейные элементы характеризуются двумя параметрами: статическим $R_{\text{ст}}$ и дифференциальным $R_{\text{диф}}$ сопротивлениями. Эти сопротивления изменяются от точки к точке вольт-амперной характеристики.

Статическое сопротивление нелинейного элемента определяется отношением напряжения в данной точке вольт-амперной характеристики к току в этой же точке. Для точки А характеристики (рис. 3.10а, б) статическое сопротивление

$$R_{\text{ст}} = \frac{U}{I} = \frac{m_U|OB|}{m_I|BA|} = m_R tg\alpha,$$

где m_U, m_I, m_R – масштабные коэффициенты для напряжения, тока и сопротивления соответственно.

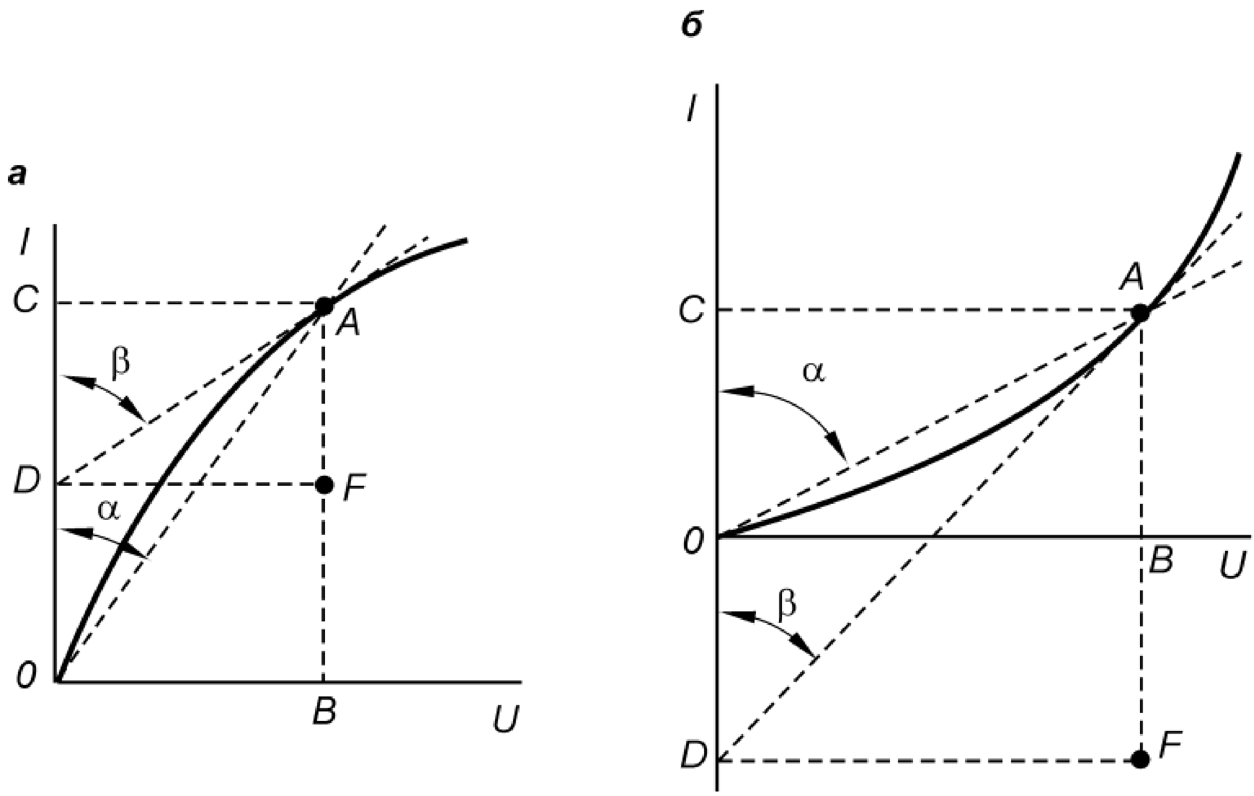


Рис. 3.10. Определение статического и дифференциального сопротивлений нелинейных элементов с монотонно возрастающей зависимостью между напряжением и током: а – с выпуклой вольт-амперной характеристикой; б – с вогнутой вольт-амперной характеристикой

Статическое сопротивление нелинейного элемента в любой точке характеристики пропорционально тангенсу угла наклона линии, проведенной из начала координат через эту точку, к оси тока.

С увеличением напряжения статическое сопротивление $R_{\text{ст}}$ для элемента с выпуклой характеристикой увеличивается (рис. 3.10а), а с вогнутой характеристикой – уменьшается (рис. 3.10б).

Под дифференциальным сопротивлением понимают предел отношения приращения напряжения в данной точке вольт-амперной характеристики к приращению медленно изменяющегося тока, когда это приращение стремится к нулю. Для точки А характеристики (рис. 3.10а, б) дифференциальное сопротивление

$$R_{диф} = \frac{dU}{dI} = \frac{m_U|DF|}{m_I|FA|} = m_R tg\beta. \quad (3.1)$$

Дифференциальное сопротивление нелинейного элемента в любой точке характеристики пропорционально тангенсу угла наклона касательной линии, проведенной через эту точку, к оси тока.

С увеличением напряжения дифференциальное сопротивление $R_{диф}$ элемента с выпуклой характеристикой увеличивается (рис. 3.10а), а элемента с вогнутой характеристикой – уменьшается (рис. 3.10б). При этом в первом случае $R_{диф} > R_{ст}$, а во втором – $R_{диф} < R_{ст}$. Следовательно, если на каком-то участке вольт-амперной характеристики имеет место соотношение $R_{диф} > R_{ст}$, то с увеличением напряжения или тока сопротивление нелинейного элемента увеличивается, и наоборот.

Для нелинейного элемента с обратной зависимостью между напряжением и током (рис. 3.11) угол $\beta > 90^0$ и, следовательно, дифференциальное сопротивление такого элемента отрицательно.

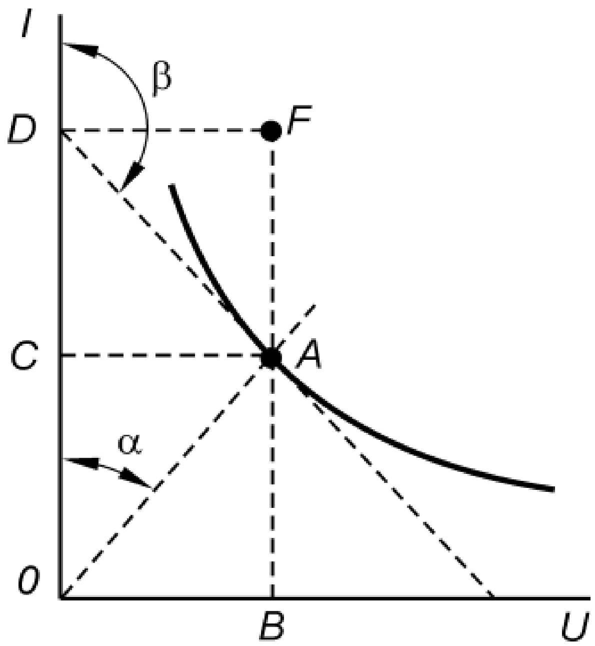


Рис. 3.11. Определение статического и дифференциального сопротивлений нелинейных элементов с обратной зависимостью между напряжением и током

На горизонтальном участке АВ характеристики бареттера (см. рис. 3.3) $R_{диф} \to \infty$, а на вертикальном участке АВ характеристики лампы с тлеющим разрядом (см. рис. 3.6) $R_{диф} \to 0$.

Это показывает, что если статическое сопротивление всегда положительно, то дифференциальное сопротивление может быть отрицательным и положительным, равным нулю и стремиться к бесконечности. Чем больше разница между статическим и дифференциальным сопротивлениями, тем сильнее проявляется нелинейность данного элемента.

Предел и непрерывность в профессиональных задачах

Аудиторные задания (А/з):

1) Определить вид монотонности (возрастает или убывает) вольт-амперных характеристик (ВАХ) нелинейных элементов, представленных на рис. 3.1.

2) Определить, непрерывны ли ВАХ ламп накаливания, представленные на рис. 3.2.

3) Определить, существует ли обратная характеристика для ВАХ бареттера, представленной на рис. 3.3.

4) По рис. 3.3 определить значение напряжения в точке А, если $U_B = 20$ (В), $\Delta U = 5$ (В).

Домашние задания (Д/з):

1) Определить вид монотонности (строго монотонно возрастает или монотонно возрастает) ВАХ тиритового элемента, представленной на рис. 3.4.

2) Определить вид монотонности (строго монотонно убывает или монотонно убывает) ВАХ электрической дуги, представленной на рис. 3.5.

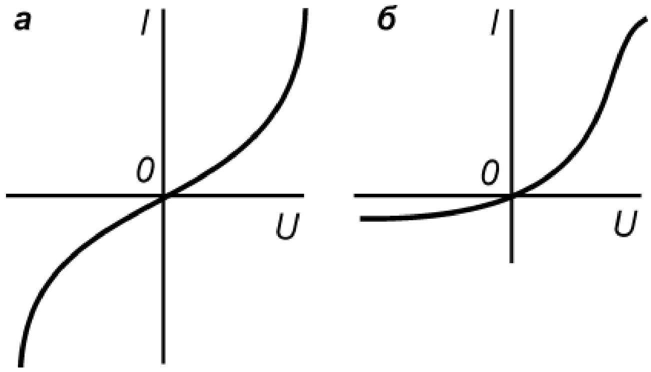
3) Определить, существует ли обратная характеристика для ВАХ лампы с тлеющим разрядом, представленной на рис. 3.6.

4) По рис. 3.10 (а) определить значение напряжения в точке А, если $\alpha = 30^0$ и значение тока I в точке А равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (А).

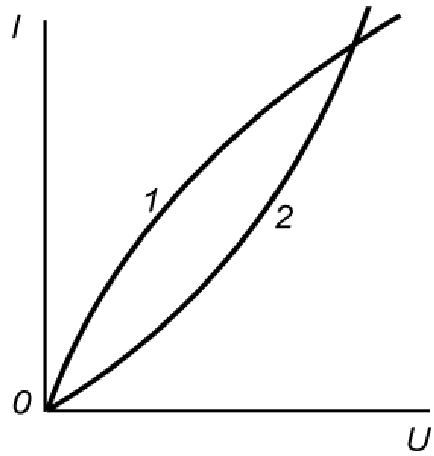
Предел и непрерывность в профессиональных задачах (Примеры)

Примеры:

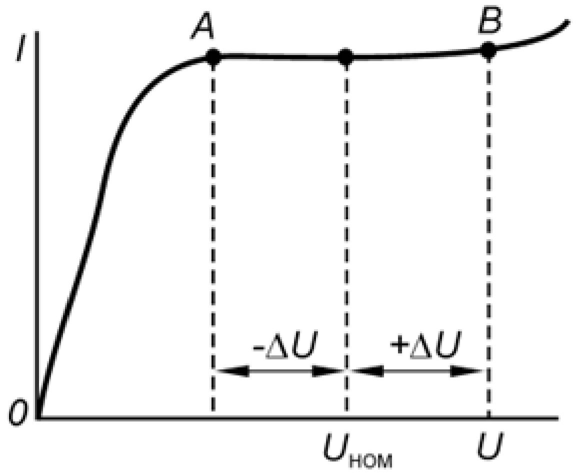
1) Определить вид монотонности (возрастает или убывает) вольт-амперных характеристик (ВАХ) нелинейных элементов, представленных на рисунке:



2) Определить, непрерывны ли ВАХ ламп накаливания, представленные на рисунке:

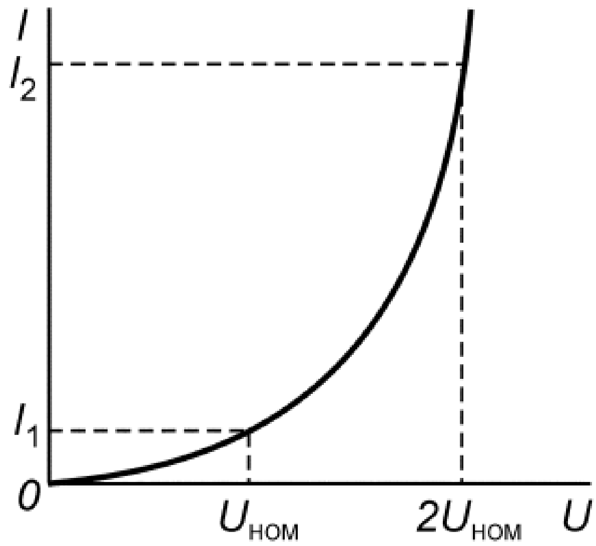


3) Определить, существует ли обратная характеристика для ВАХ бареттера, представленной на рисунке:

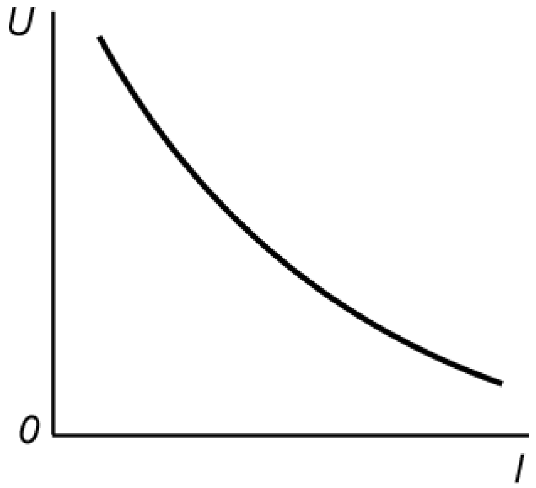


4) По предыдущему рисунку определить значение напряжения в точке А, если $U_B = 15$ (В), $\Delta U = 2$ (В).

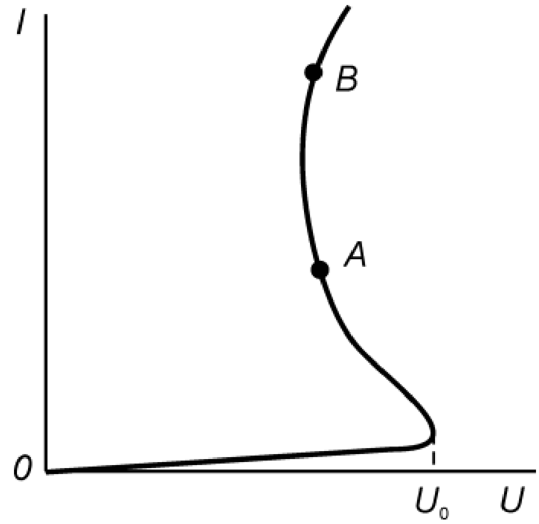
5) Определить вид монотонности (строго монотонно возрастает или монотонно возрастает) ВАХ тиритового элемента, представленной на рисунке:



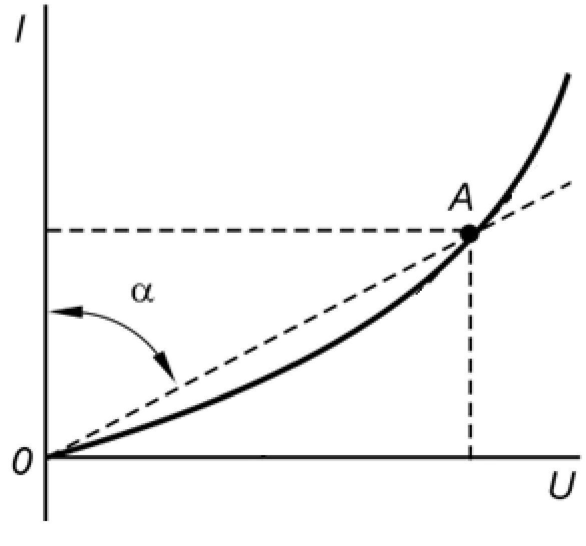
6) Определить вид монотонности (строго монотонно убывает или монотонно убывает) ВАХ электрической дуги, представленной на рисунке:



7) Определить, существует ли обратная характеристика для ВАХ лампы с тлеющим разрядом, представленной на рисунке:



8) По следующему рисунку определить значение напряжения в точке А, если $\alpha = 60^0$ и значение тока I в точке А равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (А).



Решение:

1. Возрастает (т.к. при $U_1 < U_2 \;\; I(U_1) < I(U_2)$).

2. Да, непрерывны.

3. Нет, т.к. для точек A и B и промежуточных точек значение тока примерно одинаково, т.е. для данного значения тока существует более одного значения напряжения.

4. $U_{\text{B}} = 15$ (B), $\Delta U = 2$ (B)

$U_{\text{A}} = U_{\text{B}} - 2\Delta U = 15 - 2 \cdot 2 = 15 - 4 = 11$ (B).

5. Строго монотонно возрастает (т.к. при $U_1 < U_2 \;\; I(U_1) < I(U_2)$).

6. Строго монотонно убывает (т.к. при $I_1 < I_2 \;\; U(I_1) > U(I_2)$).

7. Нет, т.к. для точек A и B и промежуточных точек значение напряжения примерно одинаково, т.е. для данного значения напряжения существует более одного значения тока.

8. $\alpha = 60^0$ (B), $I_{\text{A}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (A)

$tg\alpha = \frac{U_A}{I_A} \Rightarrow U_A = tg\alpha \cdot I_A = tg60^0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ (B).

РАЗДЕЛ 4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

4.1 Простейшие понятия для классификации функций. Степенная функция. Показательная функция. Логарифмическая функция

Используемый источник – Математика СПО [1], п.4.1-4.4.

Аудиторные задания (А/з):

1) Найдите область определения функции: $y = 10^{\frac{1}{x-\sqrt{x}}}$.

2) Упростите выражение: $\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$.

3) Вычислите: $27^{-\frac{1}{3}\log_3\frac{1}{2}-\log_{27}2}$.

4) Докажите, что функции $f(x) = \frac{3^x+3^{-x}}{2}$ и $g(x) = \frac{x^2-1}{x^4+1}$ четные.

Домашние задания (Д/з):

1) Выполните действия: $\frac{5a^nb^{n-1}c^{n-2}}{6x^{n+1}y^{n+2}z^{n+1}} : \frac{3a^{n-1}bc^{n+1}}{2xy^nz^{n+1}}$.

2) Найдите область определения функции: $y = \log_2\left(\frac{2x}{x+1} - 1\right)$.

3) Вычислите: $5^{\log_{\sqrt{5}}4-\log_5 2+2\log_{25}3}$.

4) Докажите, что следующая функция ограничена в области определения: $y = \frac{x^2}{x^2+1}$.

Простейшие понятия для классификации функций. Степенная функция. Показательная функция. Логарифмическая функция (Примеры)

Примеры:

1) Найдите область определения функции: $y = 10^{\frac{1}{2x-\sqrt{x}}}$.

2) Упростите выражение: $\frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}$.

3) Вычислите: $27^{-\frac{1}{3}\log_3\frac{1}{2}+\log_{27}2}$.

4) Докажите, что функции $f(x)=\frac{4^x+4^{-x}}{2}$ и $g(x)=\frac{x^4-1}{x^6+1}$ четные.

5) Выполните действия: $\frac{a^n b^{n-1} c^{n-2}}{x^{n+1} y^{n+2} z^{n+1}}:\frac{a^{n-1} b c^{n+1}}{x y^n z^{n+1}}$.

6) Найдите область определения функции: $y=\log_2\left(\frac{3x}{x+1}-1\right)$.

7) Вычислите: $5^{\log_{\sqrt{5}}4-\log_5 2+2\log_{25}4}$.

8) Докажите, что следующая функция ограничена в области определения: $y=\frac{x^3}{x^3+1}$.

Решение:

1. $y=10^{\frac{1}{2x-\sqrt{x}}}$.

$\begin{cases}2x-\sqrt{x}\neq 0\\ x>0\end{cases}$ $\begin{cases}2x\neq\sqrt{x}\\ x>0\end{cases}$ $\begin{cases}4x^2-x\neq 0\\ x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x\neq 0, x\neq\frac{1}{4}\\ x>0\end{cases}\Rightarrow$ ОДЗ: $x\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$.

2. $\frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}$.

$\frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}=\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}-\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}=\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}=\sqrt{\frac{y}{x}}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)$.

3. $27^{-\frac{1}{3}\log_3\frac{1}{2}+\log_{27}2}$.

$27^{-\frac{1}{3}\log_3\frac{1}{2}+\log_{27}2}=27^{\frac{1}{3}\log_3 2+\frac{1}{3}\log_3 2}=27^{\frac{2}{3}\log_3 2}=27^{\log_{27}4}=4$.

4. $f(x)=\frac{4^x+4^{-x}}{2}$; $g(x)=\frac{x^4-1}{x^6+1}$.

$f(-x)=\frac{4^{-x}+4^x}{2}=f(x)\Rightarrow f(x)$ – четная.

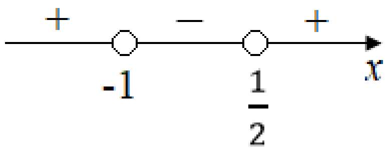
$g(-x)=\frac{x^4-1}{x^6+1}=g(x)\Rightarrow g(x)$ – четная.

5. $\frac{a^n b^{n-1} c^{n-2}}{x^{n+1} y^{n+2} z^{n+1}} : \frac{a^{n-1} b c^{n+1}}{x y^n z^{n+1}}$.

$\frac{a^n b^{n-1} c^{n-2}}{x^{n+1} y^{n+2} z^{n+1}} : \frac{a^{n-1} b c^{n+1}}{x y^n z^{n+1}} = \frac{a^n b^{n-1} c^{n-2}}{x^{n+1} y^{n+2} z^{n+1}} \cdot \frac{x y^n z^{n+1}}{a^{n-1} b c^{n+1}} = \frac{a b^{n-2} c^{-3}}{x^n y^2} = \frac{a b^{n-2}}{c^3 x^n y^2}$.

6. $y = \log_2\left(\frac{3x}{x+1} - 1\right)$.

ОДЗ: $\frac{3x}{x+1} - 1 > 0$; $\frac{3x-x-1}{x+1} > 0$; $\frac{2x-1}{x+1} > 0$; $\frac{2x-1}{x+1} = 0$; $x = \frac{1}{2}$, $x \neq -1$;



$x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

7. $5^{\log_{\sqrt{5}} 4 - \log_5 2 + 2\log_{25} 4}$.

$5^{\log_{\sqrt{5}} 4 - \log_5 2 + 2\log_{25} 4} = 5^{4\log_5 2 - \log_5 2 + \log_5 4} = 5^{3\log_5 2 + 2\log_5 2} = 5^{5\log_5 2} = 5^{\log_5 2^5} = 2^5 = 32$.

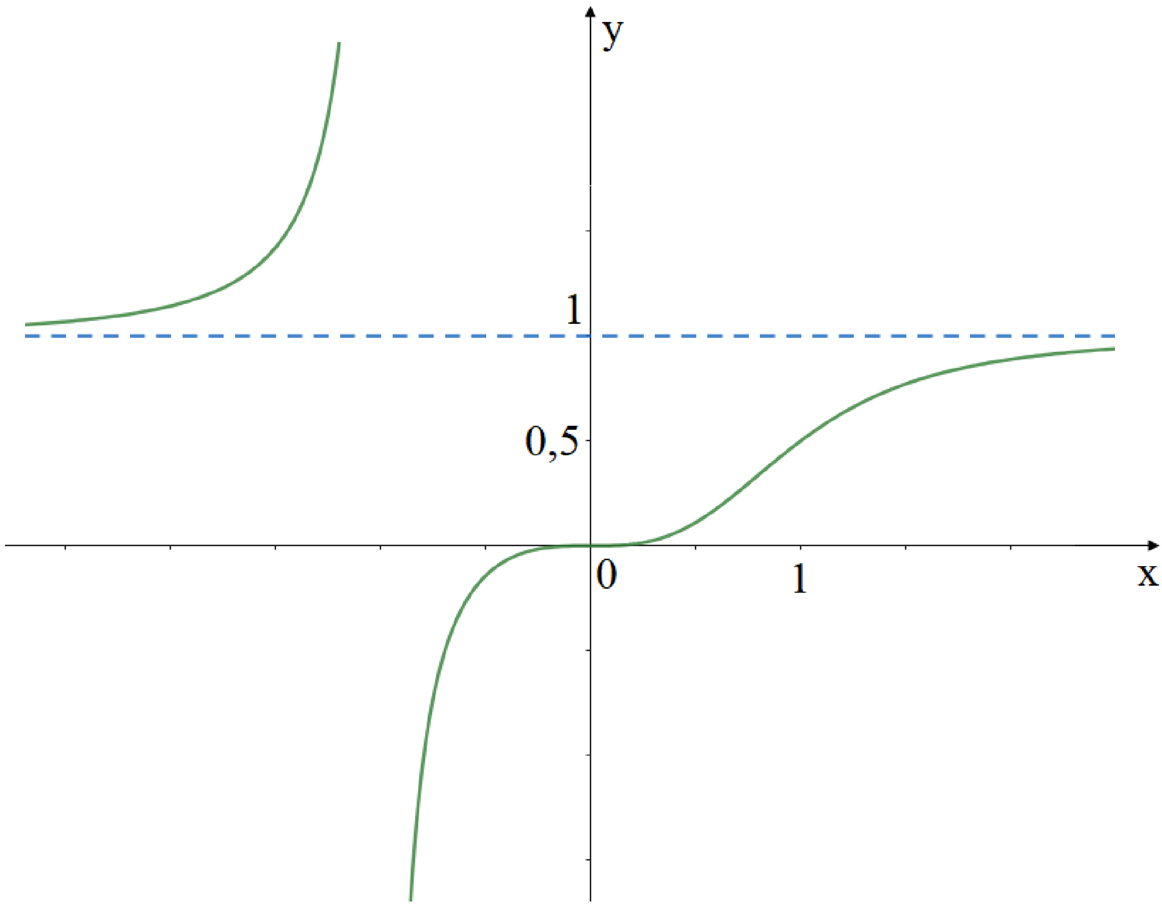
8. $y = \frac{x^3}{x^3+1}$.

$y = \frac{x^3}{x^3+1} = \frac{x^3-1+1}{x^3+1} = 1 - \frac{1}{x^3+1}$.

$x \to \infty$: $y \to 1$.

$y = 1$ – горизонтальная асимптота.

x	0	1	2	3	4	5
y	0	0,5	$\frac{8}{9}$	$\frac{27}{28}$	$\frac{64}{65}$	$\frac{125}{126}$



4.2 Тригонометрические функции. Обратные тригонометрические функции. Класс элементарных функций. Решение уравнений и неравенств, связанных с элементарными функциями

Используемый источник – Математика СПО [1], п.4.5-4.8.

Аудиторные задания (А/з):

1) Найдите сложную функцию $f\left(\varphi(t)\right)$:

$f(x) = \lg x^2, \quad \varphi(t) = cost.$

2) Докажите тождество: $\frac{(sin\alpha+cos\alpha)^2-1}{ctg\alpha-sin\alpha cos\alpha} = 2tg^2\alpha.$

3) Решите уравнение: $100^x = 0{,}1(10^{x-1})^5$.

4) Решите неравенство: $2^{x^2-4x+2} > 2^{4x-13}$.

Домашние задания (Д/з):

1) Найдите сложную функцию $f(\varphi(t))$:

$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $\varphi(t) = \frac{1}{t}$.

2) Докажите тождество: $\frac{sin(\alpha-\beta)}{tg\alpha - tg\beta} = cos\alpha cos\beta$.

3) Решите уравнение: $3^{2x+1} - 3^{2x-1} + 3^{2x-2} = 225$.

4) Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 3) > \log_{\frac{1}{2}}(13 - x)$.

Тригонометрические функции. Обратные тригонометрические функции. Класс элементарных функций. Решение уравнений и неравенств, связанных с элементарными функциями (Примеры)

Примеры:

1) Найдите сложную функцию $f(\varphi(t))$:

$f(x) = \log_2 x^3$, $\varphi(t) = sint$.

2) Докажите тождество: $\frac{1}{2} \cdot \frac{(sin\alpha + cos\alpha)^2 - 1}{ctg\alpha - sin\alpha cos\alpha} = tg^2\alpha$.

3) Решите уравнение: $9^x = \frac{1}{3} \cdot (3^{x-2})^5$.

4) Решите неравенство: $3^{x^2+4x+2} > 3^{4x+13}$.

5) Найдите сложную функцию $f(\varphi(t))$:

$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $\varphi(t) = t$.

6) Докажите тождество: $\frac{sin(\alpha+\beta)}{tg\alpha + tg\beta} = cos\alpha cos\beta$.

7) Решите уравнение: $9^{2x+1} - 9^{2x-1} + 9^{2x-2} = 721$.

8) Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 4x + 3) > \log_{\frac{1}{3}}(13 + x)$.

Решение:

1. $f(\varphi(t))$, $f(x) = \log_2 x^3$, $\varphi(t) = sint$.

$f(\varphi(t)) = \log_2 sin^3 t$, $t \neq \pi n, n \in Z$.

2. $\frac{1}{2}\cdot\frac{(sin\alpha+cos\alpha)^2-1}{ctg\alpha-sin\alpha cos\alpha}=tg^2\alpha.$

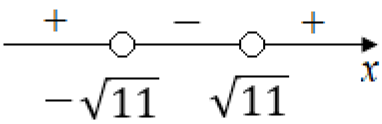
$\frac{1}{2}\cdot\frac{(sin\alpha+cos\alpha)^2-1}{ctg\alpha-sin\alpha cos\alpha}=tg^2\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{sin^2\alpha+2sin\alpha cos\alpha+cos^2\alpha-1}{\frac{cos\alpha}{sin\alpha}-sin\alpha cos\alpha}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2sin^2\alpha cos\alpha}{cos\alpha-sin^2\alpha cos\alpha}=$ $\frac{sin^2\alpha}{1-sin^2\alpha}=\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}=tg^2\alpha$ – ч. т. д.

3. $9^x=\frac{1}{3}\cdot(3^{x-2})^5.$

$3^{2x}=3^{5x-11};\ \ 2x=5x-11;\ \ 3x=11;\ \ x=\frac{11}{3}.$

4. $3^{x^2+4x+2}>3^{4x+13}.$

$x^2+4x+2>4x+13;\ \ x^2-11>0;\ \ ;\ \ x^2-11=0;\ \ ;\ \ x=\pm\sqrt{11};$



$x\in\left(-\infty;-\sqrt{11}\right)\cup\left(\sqrt{11};+\infty\right).$

5. $f\big(\varphi(t)\big),\ \ f(x)=\frac{1+x}{1-x},\ \ \varphi(t)=t.$

$f\big(\varphi(t)\big)=\frac{1+t}{1-t},\ t\neq 1.$

6. $\frac{sin(\alpha+\beta)}{tg\alpha+tg\beta}=cos\alpha cos\beta.$

$\frac{sin(\alpha+\beta)}{tg\alpha+tg\beta}=\frac{sin\alpha cos\beta+cos\alpha in\beta}{\frac{sin\alpha}{cos\alpha}+\frac{sin\beta}{cos\beta}}=cos\alpha cos\beta$ – ч. т. д.

7. $9^{2x+1}-9^{2x-1}+9^{2x-2}=721.$

$9\cdot9^{2x}-\frac{1}{9}\cdot9^{2x}+\frac{1}{81}\cdot9^{2x}=721;\ \ \left(9-\frac{1}{9}+\frac{1}{81}\right)9^{2x}=721;\ \ \frac{729-9+1}{81}\cdot9^{2x}=$ $721;$

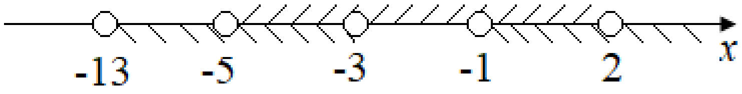
$\frac{721}{81}\cdot9^{2x}=721;\ \ 9^{2x}=81;\ \ ;\ \ 9^{2x}=9^2;\ \ 2x=2;\ \ ;\ \ x=1.$

8. $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+4x+3)>\log_{\frac{1}{3}}(13+x).$

$x^2+4x+3<13+x;\ \ x^2+3x-10<0;$

$x_1=-5;\ \ x_2=2;\ \ x\in(-5;2).$

ОДЗ: $\begin{cases}x^2+4x+3>0\\ 13+x>0\end{cases}$ $\begin{matrix}x\in(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)\\ x\in(-13;+\infty)\end{matrix}\Rightarrow$ ОДЗ: $x\in$ $(-13;-3)\cup(-1;+\infty).$



$x \in (-5; -3) \cup (-1; 2)$.

4.3 Контрольная работа «Элементарные функции»

Используемый источник – Математика СПО [1], п.4.1-4.8.

Контрольная работа «Элементарные функции»

Аудиторные задания (А/з):

1)Выполните действия: $\frac{(x+y)^{-5}\cdot(x+y)^2}{(x+y)^{-2}\cdot(x+y)^{-1}}$.

2)Найти область определения функции: $y = \lg(2x - x^2 + 15)$.

3)Вычислите: $sin\left(arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arctg\sqrt{3}\right)$.

4)Какие из функций четные, какие – нечетные:

а) $y = \frac{sinx}{x}$; б) $y = x + sinx$.

Домашние задания (Д/з):

1)Докажите, что функции $f(x) = \frac{|x|}{x}$ и $g(x) = 2^x - 2^{-x}$ нечетные.

2)Найдите сложную функцию $f\left(\varphi(t)\right)$:

$f(x) = \frac{1}{1-x}$, $\varphi(t) = f(t)$.

3)Докажите тождество: $2sin2\alpha \cdot \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = sin4\alpha$.

4)Решите уравнение: $\sqrt{3-x} - 2x + 3 = 0$.

Контрольная работа «Элементарные функции» (Подготовка)

1)Выполните действия: $\frac{(x+y)^{-4}\cdot(x+y)^2}{(x+y)^{-2}\cdot(x+y)^{-1}}$.

2)Найти область определения функции: $y = \log_2(x - 2x^2 + 15)$.

3)Вычислите: $sin\left(arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arctg0\right)$.

4)Какие из функций четные, какие – нечетные:

а) $y = \frac{sin2x}{2x}$; б) $y = 2x + sin2x$.

5)Докажите, что функции $f(x) = \frac{|2x|}{2x}$ и $g(x) = 2^{-x} - 2^x$ нечетные.

6)Найдите сложную функцию $f\left(\varphi(t)\right)$:

$f(x) = \frac{1}{x-1}$, $\varphi(t) = f(t)$.

7)Докажите тождество: $sin2\alpha \cdot \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{sin4\alpha}{2}$.

8)Решите уравнение: $\sqrt{4-x} - 2x + 4 = 0$.

Решение:

1. $\frac{(x+y)^{-4}\cdot(x+y)^2}{(x+y)^{-2}\cdot(x+y)^{-1}} = x + y$.

2. $y = \log_2(x - 2x^2 + 15)$.

ОДЗ: $x - 2x^2 + 15 > 0$; $2x^2 - x - 15 < 0$; $2x^2 - x - 15 = 0$; $D = b^2 - 4ac = 1 - 4\cdot 2\cdot(-15) = 121$; $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{1-11}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{1+11}{4} = \frac{12}{4} = 3$;

$x \in (-2{,}5; 3)$.

3. $sin\left(arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arctg0\right) = sin\left(-\frac{\pi}{3} + 0\right) = sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. а) $y = \frac{sin2x}{2x}$

$y(-x) = \frac{sin2x}{2x} = y(x) \Rightarrow y$ – четная.

б) $y = 2x + sin2x$

$y(-x) = -2x - sin2x = -(2x + sin2x) = -y(x) \Rightarrow y$ – нечетная.

5. $f(x) = \frac{|2x|}{2x}$, $g(x) = 2^{-x} - 2^x$

$f(-x) = \frac{|2x|}{-2x} = -\frac{|2x|}{2x} = -f(x)$; $g(-x) = 2^x - 2^{-x} = -(2^{-x} - 2^x) = -g(x)$ $\Rightarrow$ функции нечетные, ч. т. д.

6. $f(\varphi(t))$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $\varphi(t) = f(t)$

$f(\varphi(t)) = \frac{1}{\frac{1}{t-1}-1} = \frac{t-1}{1-t+1} = \frac{t-1}{2-t}$, $t \neq 2$.

7. $sin2\alpha \cdot \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{sin4\alpha}{2}$.

$sin2\alpha \cdot \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = sin2\alpha \cdot cos2\alpha$; $\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = cos2\alpha$; $\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = cos^2\alpha - sin^2\alpha$;

$1 - tg^2\alpha = (1 + tg^2\alpha)(cos^2\alpha - sin^2\alpha)$;

$1 - tg^2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha + sin^2\alpha - tg^2\alpha sin^2\alpha$; $1 - tg^2\alpha = cos^2\alpha - tg^2\alpha sin^2\alpha$; $1 - \frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{cos^4\alpha - sin^4\alpha}{cos^2\alpha}$; $cos^2\alpha - sin^2\alpha = (cos^2\alpha - sin^2\alpha)(cos^2\alpha + sin^2\alpha)$;

$cos^2\alpha - sin^2\alpha = (cos^2\alpha - sin^2\alpha)$ – ч. т. д.

8. $\sqrt{4-x} - 2x + 4 = 0$.

ОДЗ: $\begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ 2x - 4 \geq 0 \end{cases}$: $\begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 2 \end{cases}$ $x \in [2; 4]$

$4 - x = (2x-4)^2$; $4 - x = 4x^2 - 16x + 16$; $4x^2 - 15x + 12 = 0$;

$D = b^2 - 4ac = 15^2 - 4 \cdot 4 \cdot 12 = 225 - 192 = 33$; $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{15 \pm \sqrt{33}}{8}$;

$x_1 = \frac{15-\sqrt{33}}{8} \approx 1{,}16 \notin$ ОДЗ; $x_2 = \frac{15+\sqrt{33}}{8} \approx 2{,}59 \in$ ОДЗ $\Rightarrow x = \frac{15+\sqrt{33}}{8}$.

4.4 Элементарные функции в профессиональных задачах

Используемый источник – [2].

2.4. Изображение синусоидальных ЭДС, напряжений и токов в прямоугольных координатах

В общем случае аргумент синусоидальной функции, называемый фазовым углом или просто фазой, равный $\omega t + \psi$ или $\omega t - \psi$, может отличаться от нуля при $t = 0$. Тогда мгновенные значения можно записать так:

$$e = E_m sin(\omega t \pm \psi_e);\ \ u = U_m sin(\omega t \pm \psi_u);\ \ i = I_m sin(\omega t \pm \psi_i). \quad (4.1)$$

Значение фазового угла при $t = 0$ называют начальной фазой (ψ_e, ψ_u, ψ_i).

Графическое изображение синусоидального напряжения и тока в прямоугольных координатах, записываемые уравнениями (4.1), когда начальные фазы равны нулю, показано на рис. 4.1.

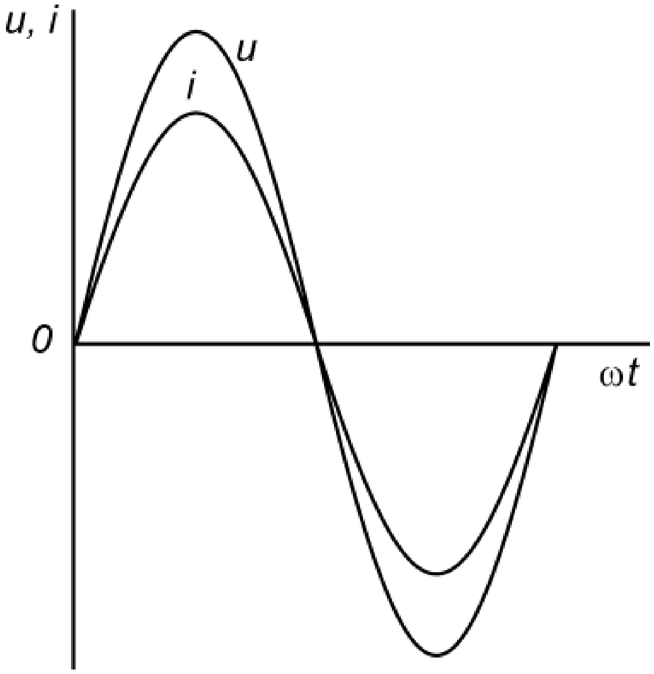


Рис. 4.1. Синусоидальные напряжение и ток, совпадающие по фазе

В этом случае синусоидальные величины одновременно принимают нулевые или максимальные значения. О таких величинах говорят, что они совпадают по фазе. Синусоидальные величины будут также совпадать по фазе, если их начальные фазы равны.

Если две синусоидальные величины одновременно проходят через нулевые значения и одновременно принимают максимальные значения противоположных знаков, то такие величины находятся в противофазе или сдвинуты по фазе на угол π (рис. 4.2).

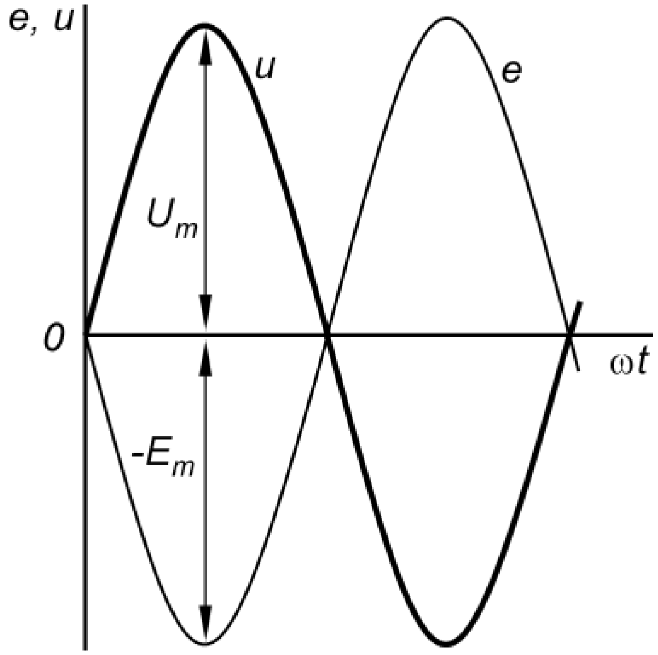


Рис. 4.2. Синусоидальные ЭДС и напряжение, находящиеся в противофазе

На практике чаще всего имеют место случаи, когда ЭДС, напряжение и токи не совпадают по фазе, т.е. через нулевые значения проходят не одновременно (рис. 4.3).

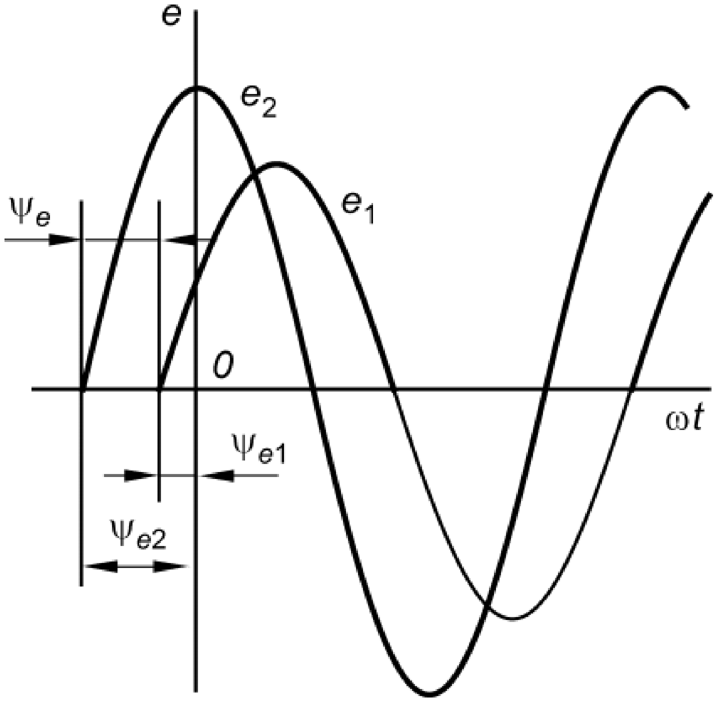


Рис. 4.3. Синусоидальные ЭДС, не совпадающие по фазе

Если такие ЭДС описываются уравнениями

$$e_1 = E_{1m} sin(\omega t \pm \psi_{e_1}); \;\; e_2 = E_{2m} sin(\omega t \pm \psi_{e_2}),$$

то при $\psi_{e_2} > \psi_{e_1}$ ЭДС e_2 опережает по фазе e_1, или ЭДС e_1 отстает по фазе от ЭДС e_2. Разность фазовых углов, равную разности начальных фаз

$$\psi_e = \psi_{e_2} - \psi_{e_1}, \tag{4.2}$$

называют разностью или сдвигом фаз.

С помощью графического изображения в прямоугольных координатах можно находить опережающую и отстающую синусоидальные величины. При этом пользуются таким правилом. Отстает по фазе та из двух синусоидальных величин, которая при переходе от отрицательных значений к положительным позже (правее) пересекает ось абсцисс. На рис. 4.3 ЭДС e_1 отстает по фазе от ЭДС e_2. Фазовый угол, определяемый отрезком оси абсцисс, заключенным между точками пересечения ее синусоидальными кривыми, является углом сдвига по фазе (угол ψ_e).

Таким образом, можно сделать вывод: если синусоидальная величина при переходе от отрицательных значений к положительным пересекает ось абсцисс левее оси ординат, то она имеет положительную начальную фазу, а если правее – то отрицательную. Например, ЭДС, изображенные на рис. 4.4, описываются уравнениями

$$e_1 = E_{1m} sin(\omega t + \psi_{e_1}); \;\; e_2 = E_{2m} sin(\omega t - \psi_{e_2}).$$

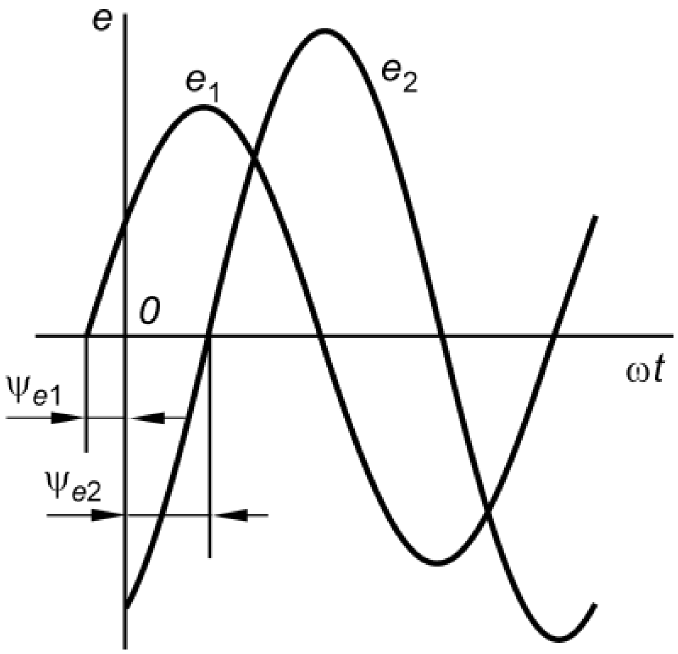


Рис. 4.4. Синусоидальные ЭДС с положительной и отрицательной начальными фазами

Особое значение в электротехнике и электроэнергетике имеет сдвиг по фазе φ между напряжением и током. В соответствии с формулой (4.2)

$$\varphi = \psi_u - \psi_i,$$

где ψ_u и ψ_i – начальные фазы напряжения и тока.

Если начальную фазу тока выразить через начальную фазу напряжения: $\psi_i = \psi_u - \varphi$, то напряжение и ток будут описываться уравнениями

$$u = U_m sin(\omega t + \psi_u);\ \ i = I_m sin(\omega t + \psi_u - \varphi).$$

Если $\psi_u = 0$, то $u = U_m sin\omega t$; $i = I_m sin(\omega t - \varphi)$.

Эти уравнения показывают, что если угол φ положительный, то ток отстает по фазе от напряжения на этот угол (рис. 4.5), и наоборот.

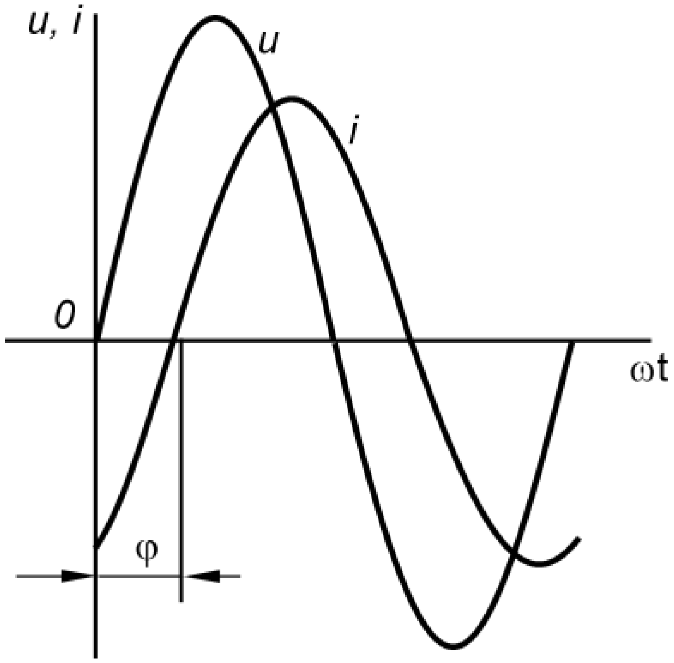


Рис. 4.5. Синусоидальные напряжение и ток, сдвинутые по фазе на φ

При сложении синусоидальных величин, изображенных в прямоугольных координатах, надо сложить ординаты для ряда значений угла ωt и по точкам построить синусоиду суммарной величины. Чем больше точек берут для построения, тем точнее сложение. На рис. 4.6 показано сложение двух токов i_1 и i_2.

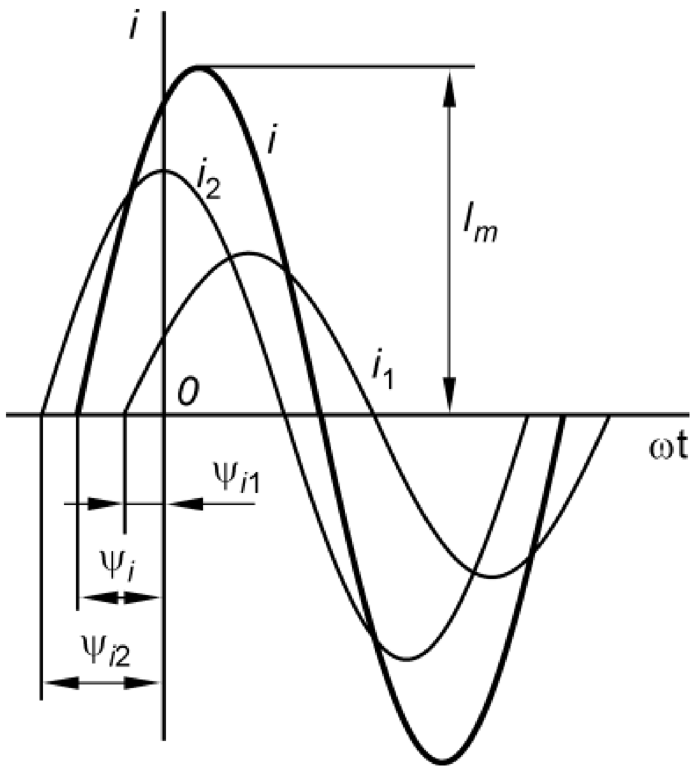


Рис. 4.6. Графическое сложение синусоидальных токов

Суммарный ток $i = I_m sin(\omega t + \psi_i)$, причем $I_m \neq I_{1m} + I_{2m}$, а $\psi_i \neq \psi_{i2} - \psi_{i1}$.

Элементарные функции в профессиональных задачах

Аудиторные задания (А/з):

1) На основе формулы (4.1) получить формулу для определения мгновенного значения синусоидальной ЭДС e при $E_m = 20$ (В), $\omega = 2$ (с$^{-1}$), аргументом синусоидальной функции вида $(\omega t + \psi_e)$ и начальной фазой $\psi_e = \frac{\pi}{3}$.

2) Из полученной формулы определить мгновенное значение синусоидальной ЭДС e при $t = \frac{\pi}{3}$ (с).

3) Определить период полученной синусоидальной функции T_1

($T_1 = \frac{T}{|k|}$; $y = Af(kx + b)$, T – период функции $y = f(x)$).

4) Найти область значений полученной синусоидальной функции.

Домашние задания (Д/з):

1) На основе формулы (4.1) получить формулу для определения мгновенного значения синусоидального напряжения u при $U_m = 10$ (В), $\omega = 3$ (с$^{-1}$), аргументом синусоидальной функции вида $(\omega t - \psi_u)$ и начальной фазой $\psi_u = \frac{\pi}{6}$.

2) Из полученной формулы определить мгновенное значение синусоидального напряжения u при $t = 0$ (с).

3) Определить период полученной синусоидальной функции T_1.

4) Найти область значений полученной синусоидальной функции.

Элементарные функции в профессиональных задачах (Примеры)

Примеры:

1) На основе формулы (4.1) получить формулу для определения мгновенного значения синусоидального тока i при $I_m = 15$ (А), $\omega = 4$ (с$^{-1}$), аргументом синусоидальной функции вида $(\omega t + \psi_i)$ и начальной фазой $\psi_i = \frac{\pi}{4}$.

2) Из полученной формулы определить мгновенное значение синусоидального тока i при $t = \frac{\pi}{16}$ (с).

3) Определить период полученной синусоидальной функции T_1

($T_1 = \frac{T}{|k|}$; $y = Af(kx + b)$, T – период функции $y = f(x)$).

4) Найти область значений полученной синусоидальной функции.

Решение:

1. $i = I_m sin(\omega t \pm \psi_i\,)$; $I_m = 15$ (А), $\omega = 4$ (с$^{-1}$), $(\omega t + \psi_i)$, $\psi_i = \frac{\pi}{4}$.

$i = 15 sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$.

2. $t = \frac{\pi}{16}$ $i\left(\frac{\pi}{16}\right) = 15 sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}\right) = 15 sin\frac{\pi}{2} = 15$ (А).

3. $T_1 = \frac{T}{|k|}$; $k = \omega = 4$; $T = 2\pi$; $T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

4. $-1 \leq sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$

$-15 \leq 15sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right) \leq 15$

$E(i) = [-15; 15]$.

РАЗДЕЛ 5. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

5.1 Системы координат. Векторы

Используемый источник – Математика СПО [1], п.5.1-5.2.

Аудиторные задания (А/з):

1) Укажите на координатной плоскости точки с координатами $A_1(1;1)$, $A_2(-1;1)$, $A_3(1;-1)$, $A_4(-1;-1)$.

2) Определите расстояние между точками $A_1(1,0,2)$ и $A_2(0,-1,3)$.

3) Даны векторы $\overline{a} = 3\overline{i} + 5\overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$. Найдите $2\overline{a} - 3\overline{b}$.

4) Найдите полярные координаты точки $A(2,2)$.

Домашние задания (Д/з):

1) Найдите прямоугольные декартовы координаты точки А, если её полярные координаты $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

2) Найдите расстояние между точками $A_1(1,1)$ и $A_2(-1,1)$.

3) Определите длины сторон треугольника с вершинами в точках $A(3,4)$, $B(-1,2)$, $C(2,1)$.

4) Найдите длину отрезка $|AB|$, если полярные координаты точек таковы: $A\left(1; -\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(2; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Системы координат. Векторы (Примеры)

Примеры:

1) Укажите на координатной плоскости точки с координатами $A_1(2;2)$, $A_2(-2;2)$, $A_3(2;-2)$, $A_4(-2;-2)$.

2) Определите расстояние между точками $A_1(2,0,4)$ и $A_2(0,-2,6)$.

3) Даны векторы $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 5\overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} - 3\overline{j} + 3\overline{k}$. Найдите $3\overline{a} - 2\overline{b}$.

4) Найдите полярные координаты точки $A(3,3)$.

5) Найдите прямоугольные декартовы координаты точки А, если её полярные координаты $r = 4$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

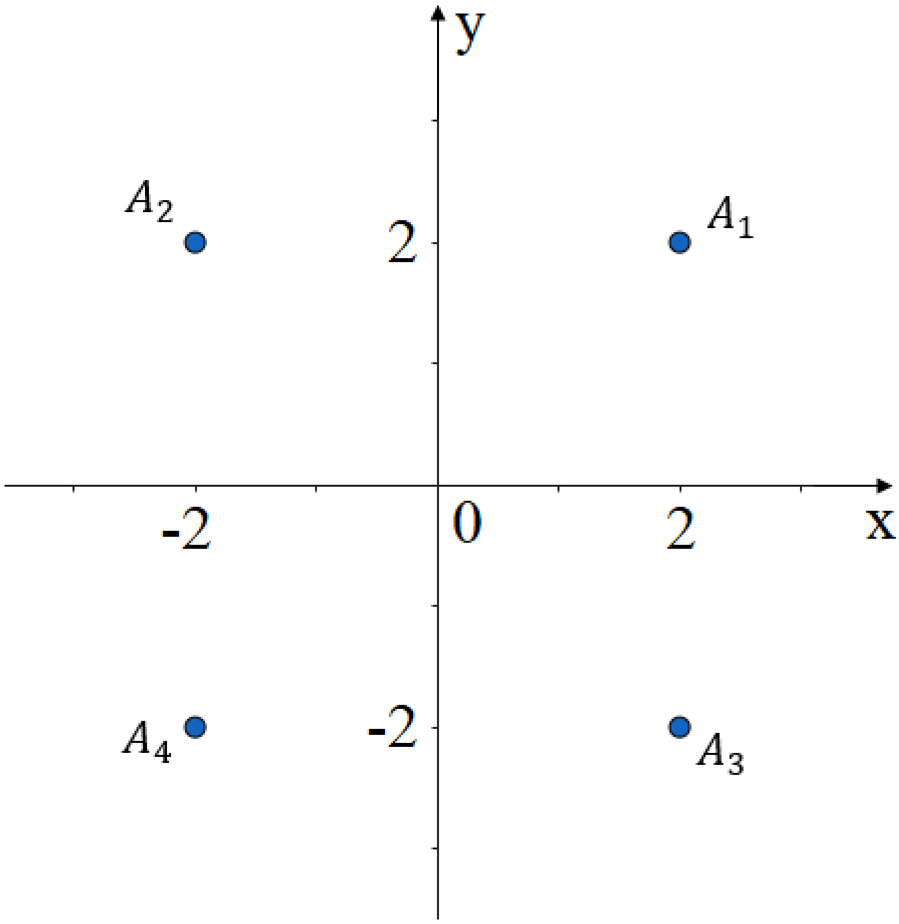
6) Найдите расстояние между точками $A_1(2,2)$ и $A_2(-2,2)$.

7) Определите длины сторон треугольника с вершинами в точках $A(4,3)$, $B(-2,1)$, $C(1,2)$.

8) Найдите длину отрезка $|AB|$, если полярные координаты точек таковы: $A\left(2; -\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(4; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение:

1. $A_1(2;2)$, $A_2(-2;2)$, $A_3(2;-2)$, $A_4(-2;-2)$



2. $A_1(2,0,4)$, $A_2(0,-2,6)$

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(0-2)^2 + (-2-0)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

3. $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 5\bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} - 3\bar{j} + 3\bar{k}$

$3\overline{a} - 2\overline{b} = 6\overline{i} + 9\overline{j} - 15\overline{k} - 6\overline{i} + 6\overline{j} - 6\overline{k} = 15\overline{j} - 21\overline{k}.$

4. $A(3,3)$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2};\ \ tg\varphi = \frac{3}{3} = 1;\ \ \varphi = \frac{\pi}{4}.$

5. $r = 4,\ \ \varphi = \frac{2\pi}{3}$

$x = rcos\varphi = 4cos\frac{2\pi}{3} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2;$ $\qquad y = rsin\varphi = 4sin\frac{2\pi}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3};$

$A\left(-2; 2\sqrt{3}\right).$

6. $A_1(2,2),\ \ A_2(-2,2)$

$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{4^2} = 4.$

7. $A(4,3), B(-2,1), C(1,2)$

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-2-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$

$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(1+2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$

$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(1-4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$

8. $A\left(2; -\frac{\pi}{2}\right),\ \ B\left(4; \frac{3\pi}{2}\right)$

$x_A = 2 \cdot cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0;\ \ y_A = 2 \cdot sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2;\ \ A(0;-2)$

$x_B = 4 \cdot cos\frac{3\pi}{2} = 0;\ \ y_B = 4 \cdot sin\frac{3\pi}{2} = -4;\ \ B(0;-4)$

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(0-0)^2 + \left(-4-(-2)\right)^2} = \sqrt{2^2} = 2.$

5.2 Алгебраический аппарат решения системы линейных уравнений

Используемый источник – Математика СПО [1], п.5.3.

Аудиторные задания (А/з):

1) Найдите сумму $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$.

2) Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

3) Вычислите определитель, разложив его по элементам первой строки: $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

4) Убедитесь, что $\begin{vmatrix} 6 & 14 & 28 \\ -7 & 5 & 10 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$, не «раскрывая» определитель.

Домашние задания (Д/з):

1) Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

2) Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1+cosx & 1+sinx & 1 \\ 1-sinx & 1+cosx & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

3) Докажите, что определитель второго порядка равен нулю тогда и только тогда, когда одна из его строк пропорциональна двум другим. То же самое – для столбцов.

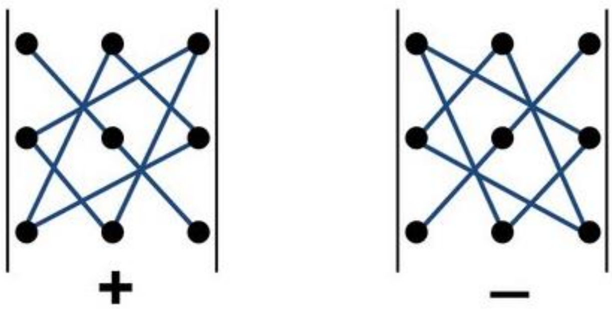
4) Решите с помощью определителей систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = 40 \end{cases}.$$

Указание:

Используемый источник – [4].

1) Вычисление определителя 3-его порядка по правилу треугольников:



$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1c_3a_2 - a_1c_2b_3.$$

2) Вычисление определителя через алгебраические дополнения

Определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки или столбца на их алгебраические дополнения, т.е.

(*) $D = a_1^{i_0}A_1^{i_0} + a_2^{i_0}A_2^{i_0} + \cdots + a_n^{i_0}A_n^{i_0}$, где i_0 – фиксировано.

Выражение (*) называют разложением определителя D по элементам строки с номером i_0.

<u>Минором</u> M_{ij} элемента a_{ij} матрицы $A_{n\times n}$ именуют определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца (т.е. строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}).

<u>Алгебраическим дополнением</u> A_{ij} элемента a_{ij} матрицы $A_{n\times n}$ является:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} – минор элемента a_{ij}.

3) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2.$

<u>Алгебраический аппарат решения системы линейных уравнений (Примеры)</u>

<u>Примеры</u>:

1) Найдите сумму $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$.

2) Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

3) Вычислите определитель, разложив его по элементам первой строки: $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

4) Убедитесь, что $\begin{vmatrix} 6 & 14 & 28 \\ 0 & 4 & 8 \\ -7 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0$, не «раскрывая» определитель.

5) Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

6) Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1-cosx & 1+sinx & 1 \\ 1-sinx & 1-cosx & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

7) Докажите, что определитель третьего порядка равен нулю тогда и только тогда, когда одна из его строк пропорциональна двум другим. То же самое – для столбцов.

8) Решите с помощью определителей систему:

$$\begin{cases} 4x+2y=7 \\ 3x+5y=20 \end{cases}.$$

<u>Решение</u>:

1. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+5 & 4+2 \\ 1+3 & 2-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot1\cdot3+2\cdot2\cdot4+1\cdot3\cdot3-2\cdot1\cdot1-5\cdot4\cdot3-2\cdot3\cdot3 =$

$-\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad = 15+16+9-2-60-18=-40.$

3. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -(12-12) -$

$3(30-42)+2(10-21)=0-3\cdot(-22)+2\cdot(-11)=66-22=44.$

4. $\begin{vmatrix} 6 & 14 & 28 \\ 0 & 4 & 8 \\ -7 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 6 & 14 & 28 \\ 0 & 4 & 8 \\ -7 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 14 & 14 \\ 0 & 4 & 4 \\ -7 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$ (поделили второй столбец на 2).

5.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\left(1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) + \left(1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -(4-6) + (7 - 2\cdot 2) = 2 + 3 = 5.$$

6. $\begin{vmatrix} 1-cosx & 1+sinx & 1 \\ 1-sinx & 1-cosx & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+sinx & 1 \\ 1-cosx & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1-cosx & 1 \\ 1-sinx & 1 \end{vmatrix} +$ $\begin{vmatrix} 1-cosx & 1+sinx \\ 1-sinx & 1-cosx \end{vmatrix} = 1 + sinx - 1 + cosx - (1 - cosx - 1 + sinx) + \big((1 - cosx)^2 - (1 - sin^2x)\big) = sinx + cosx + cosx - sinx + (1 - 2cosx + cos^2x - 1 + sin^2x) = 2cosx - 2cosx + 1 = 1.$

7. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{vmatrix} = aem + dhc + bgf - gec - dbm - ahf = a(em - hf) + d(hc - bm) + g(bf - ec)$

$em = hf;\quad hc = bm;\quad bf = ec$

$\frac{e}{h} = \frac{f}{m};\quad \frac{h}{b} = \frac{m}{c};\quad \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ – ч. т. д. (для строк).

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{vmatrix} = aem + dhc + bgf - gec - dbm - ahf = a(em - hf) + b(gf - dm) + c(dh - ge)$

$em = hf;\quad gf = dm;\quad dh = ge$

$\frac{e}{h} = \frac{f}{m};\quad \frac{g}{m} = \frac{d}{f};\quad \frac{d}{e} = \frac{g}{h}$ – ч. т. д. (для столбцов).

8. $\begin{cases} 4x + 2y = 7 \\ 3x + 5y = 20 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14;\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 35 - 40 = -5;\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 20 \end{vmatrix} = 80 - 21 = 59;$

$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{5}{14};\quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{59}{14}.$

5.3 Контрольная работа «Элементы линейной алгебры»

Используемый источник – Математика СПО [1], п.5.1-5.3.

Контрольная работа «Элементы линейной алгебры»

Аудиторные задания (А/з):

1) Найдите длину отрезка $|AB|$, если полярные координаты точек таковы: $A\left(1;\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(1;-\frac{\pi}{6}\right)$.

2) Даны две точки $A(-3;1;-1)$ и $B(2;-4;1)$. Выразите через орты вектор $\overline{AB}$ и вычислите его длину.

3) Найдите угол между векторами $\overline{a}(1;0)$, $\overline{c}(1;-2)$.

4) Вычислите скалярное произведение векторов $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$, если даны координаты точек $A(1;3)$, $B(2;0)$, $C(3;4)$.

Домашние задания (Д/з):

1) Решите с помощью определителей систему:

$$\begin{cases} 7x-5y=7 \\ x+2y=1 \end{cases}.$$

2) Решите с помощью определителей систему:

$$\begin{cases} 2x-3y+z-2=0 \\ x+5y-4z+5=0 \\ 4x+y-3z+4=0 \end{cases}.$$

3) Решите с помощью определителей систему:

$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ 3x-5y-z=1 \\ z-y=29 \end{cases}.$$

4) Решите систему:

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ x-y+z=1 \\ -x+z=2 \end{cases}.$$

Указание:

Используемый источник – [5].

Если определитель квадратной матрицы системы не равен нулю, то система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ – определитель матрицы системы, Δ_i – определитель матрицы системы, где вместо i-го столбца стоит столбец правых частей.

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2.$

Контрольная работа «Элементы линейной алгебры» (Подготовка)

1) Найдите длину отрезка $|AB|$, если полярные координаты точек таковы: $A\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(2; -\frac{\pi}{3}\right)$.

2) Даны две точки $A(-6; 2; -2)$ и $B(4; -8; 2)$. Выразите через орты вектор $\overline{AB}$ и вычислите его длину.

3) Найдите угол между векторами $\overline{a}(1; 0)$, $\overline{c}(1; -8)$.

4) Вычислите скалярное произведение векторов $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$, если даны координаты точек $A(2; 6)$, $B(4; 0)$, $C(6; 8)$.

5) Решите с помощью определителей систему:

$$\begin{cases} 6x - 5y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}.$$

6) Решите с помощью определителей систему:

$$\begin{cases} x - 3y + z - 2 = 0 \\ 2x + 5y - 4z + 5 = 0. \\ x + 4y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

7) Решите с помощью определителей систему:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 5x - 3y - z = 1. \\ 2z - y = 29 \end{cases}$$

8) Решите систему:

$$\begin{cases} x - y + z = 5 \\ x + y + z = 1. \\ x - z = 2 \end{cases}$$

<u>Решение</u>:

1. $A\left(2; \frac{\pi}{3}\right), B\left(2; -\frac{\pi}{3}\right).$

$x_A = 2 \cdot cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1;\quad y_A = 2 \cdot sin\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3};\quad A\left(1; \sqrt{3}\right)$

$x_B = 2 \cdot cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1;\qquad y_B = 2 \cdot sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3};$ $B\left(1; -\sqrt{3}\right)$

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(1-1)^2 + \left(-\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{3}.$

2. $A(-6; 2; -2), B(4; -8; 2)$

$\overline{AB} = \left(4 - (-6); -8 - 2; 2 - (-2)\right) = 10\bar{i} - 10\bar{j} + 4\bar{k};$

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{100 + 100 + 16} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}.$

3. $\bar{a}(1; 0), \bar{c}(1; -8)$

$cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{c}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{c}|} = \frac{1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1+64}} = \frac{1}{\sqrt{65}} = \frac{\sqrt{65}}{65};\quad \varphi = arccos\frac{\sqrt{65}}{65}.$

4. $A(2; 6), B(4; 0), C(6; 8)$

$\overline{AC} = (6 - 2; 8 - 6) = (4; 2);\quad \overline{AB} = (4 - 2; 0 - 6) = (2; -6);$

$\overline{AC} \cdot \overline{AB} = 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-6) = 8 - 12 = -4.$

5. $\begin{cases} 6x - 5y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 5 = 11;\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 15 = 17;$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 2 = 16;\quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{17}{11};\quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{16}{11}.$

6. $\begin{cases} x - 3y + z - 2 = 0 \\ 2x + 5y - 4z + 5 = 0 \\ x + 4y - 3z + 4 = 0 \end{cases}\quad \begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ 2x + 5y - 4z = -5 \\ x + 4y - 3z = -4 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 - 6 + 3 = -2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 5 & -4 \\ -4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 2 - 3 + 0 = -1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 3 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 9 + 6 = -3;$$

$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{2}$; $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0$; $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{3}{2}$.

7. $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 5x - 3y - z = 1. \\ 2z - y = 29 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -7 + 20 = 13;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 29 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 29 & 2 \end{vmatrix} = -35 + 62 = 27;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & 29 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 29 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 31 - 50 = -19;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 29 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 29 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -86 + 290 - 25 = 179;$$

$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{27}{13}$; $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{19}{13}$; $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{179}{13}$.

8. $\begin{cases} x - y + z = 5 \\ x + y + z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 1 - 1 = -4;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 2 - 2 - 1 = -10;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 + 5 - 1 + 5 - 2 = 8;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 5 + 2 = -2;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{8}{4} = -2; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

5.4 Элементы линейной алгебры в профессиональных задачах

Используемый источник – [2].

2.5. Векторное изображение синусоидальных ЭДС, напряжений и токов

Графическое построение синусоидальных величин в прямоугольных координатах является довольно трудоемкой операцией. Графическое сложение двух (или более) таких величин требует больших затрат времени, а хорошая точность при определении амплитуды суммарной величины и ее начальной фазы может быть достигнута лишь путем сложения очень большого числа мгновенных значений слагаемых. Значительно проще складывать две синусоидальные величины, изменяющиеся с одинаковой частотой, представив их вращающимися векторами.

В плоскости с осями координат OX и OY (рис. 5.1а) рассмотрим вращающийся с постоянной скоростью, равной угловой частоте ω, вектор $\boldsymbol{OA}$, длина которого равна амплитуде синусоидальной ЭДС $e = E_m sin(\omega t + \psi_e)$, т.е. $|\boldsymbol{OA}| = E_m$.

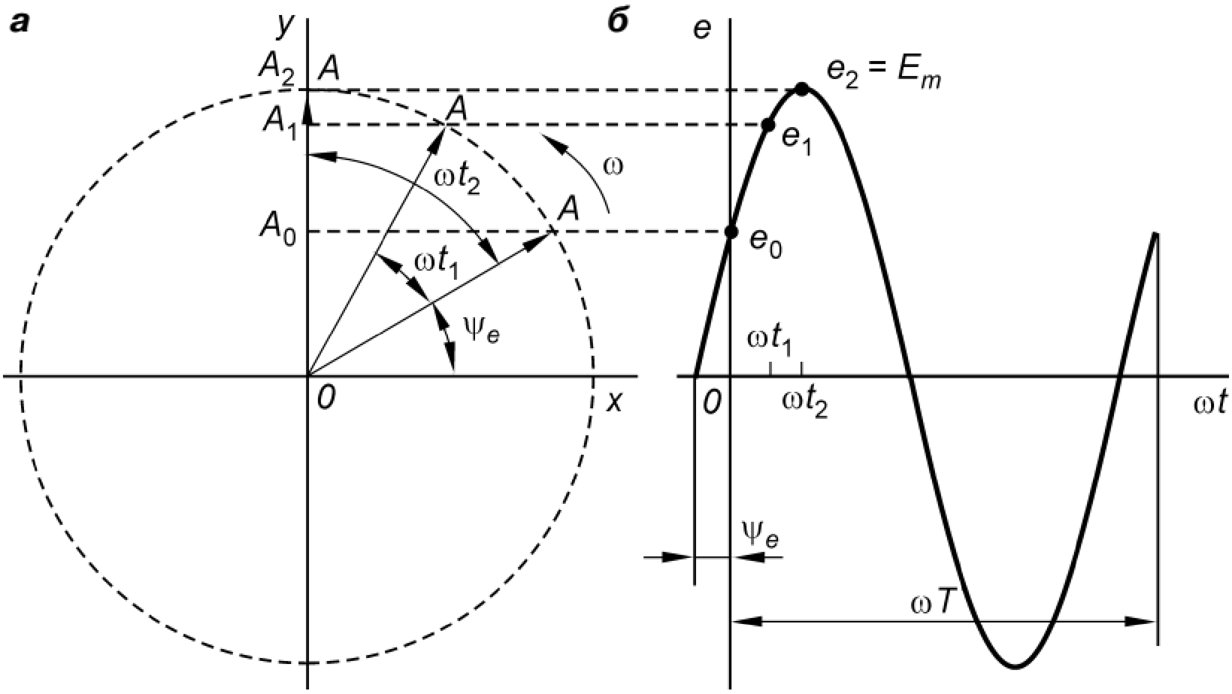


Рис. 5.1. Векторное изображение синусоидальных ЭДС:
а – вращающийся вектор; б – кривая изменения его проекции на ось OY

За положительное направление вращения вектора $\boldsymbol{OA}$ принимаем направление, противоположное вращению часовой стрелки, а угол поворота вектора отсчитываем от оси OX. В начальном положении (при $t = 0$) вектор $\boldsymbol{OA}$ повернут по отношению к оси OX на угол ψ_e.

Построим проекции вектора $\boldsymbol{OA}$ на ось OY (рис. 5.1б), которые изменяются по мере поворота вектора на угол ωt по отношению к начальному положению. В начальном положении проекция $OA_0 = OAsin\psi_e = E_m sin\psi_e = e_0$, т.е. равна мгновенному значению ЭДС при $t = 0$. Через некоторое время вектор $\boldsymbol{OA}$ повернется на угол $\omega t_1 + \psi_e$. Проекция его на ось OY: $OA_1 = OAsin(\omega t + \psi_e) = E_m sin(\omega t_1 + \psi_e) = e_1$, т.е. равна мгновенному значению ЭДС при $t = t_1$. При $t = t_2$ вектор $\boldsymbol{OA}$ направлен по оси OY и его проекция $OA = E_m = e_2$. При дальнейшем вращении вектора $\boldsymbol{OA}$ его проекции на ось OY начнут уменьшаться, затем станут отрицательными и т.д.

Таким образом, проекции на ось OY вектора, вращающегося с постоянной скоростью ω и имеющего длину, равную амплитуде ЭДС, изменяются по синусоидальному закону, т.е. представляют собой мгновенные значения синусоидальной ЭДС. Следовательно, справедливо и обратное: любую синусоидально изменяющуюся по времени величину можно изображать вращающимся вектором, длина которого равна амплитуде, а угловая скорость вращения – угловой частоте этой синусоидальной величины. Начальное положение вращающегося вектора определяется углом, равным начальной фазе синусоидальной величины и откладываемым от положительного направления оси OX в сторону, противоположную вращению часовой стрелки.

Векторами можно изображать синусоидальные ЭДС, напряжения, потенциалы и токи. В одних и тех же координатах OX и OY можно представить векторы всех ЭДС, действующих в данной электрической цепи, напряжений на всех участках этой цепи и токов во всех ее ветвях. Так как все ЭДС, напряжения и токи имеют одинаковую частоту, то изображающие их векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью. Их взаимное расположение на плоскости остается постоянным. Поэтому векторы на практике не вращают, а строят их, соблюдая углы между векторами, которые представляют собой углы сдвига фаз. Отказавшись от вращения векторов, можно строить векторы не только максимальных, но и действующих значений.

Найдем сумму двух ЭДС, имеющих разные амплитуды и начальные фазы (рис. 5.2а):

$$e_1 = E_{1m} sin(\omega t + \psi_{e_1}); \;\; e_2 = E_{2m} sin(\omega t + \psi_{e_2}). \tag{5.1}$$

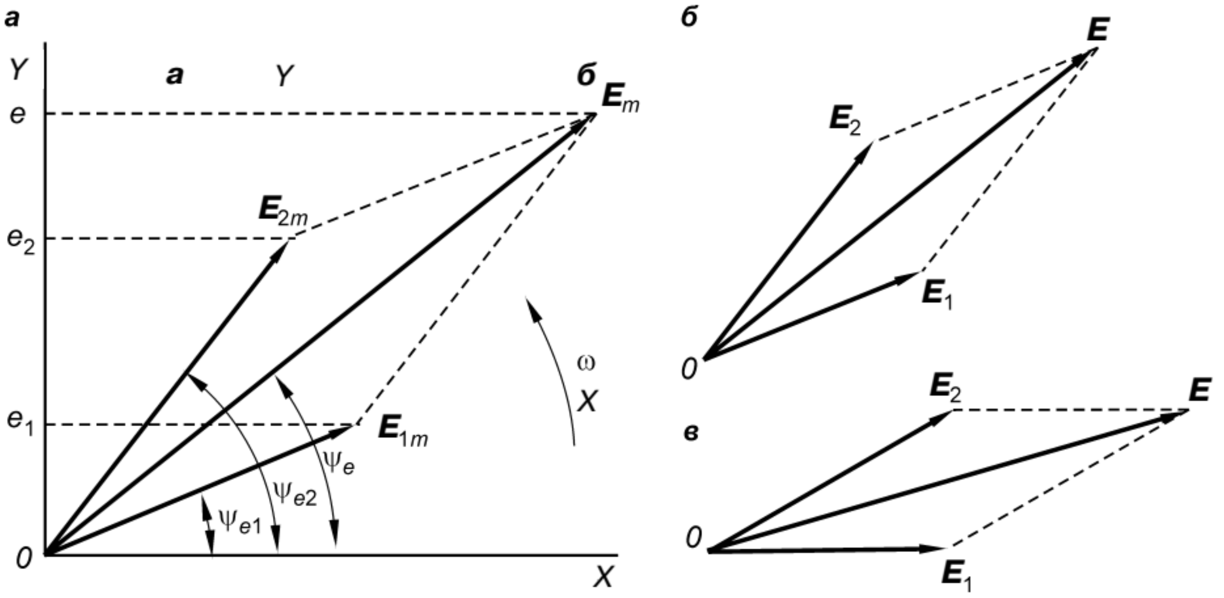


Рис. 5.2. Геометрическое сложение вращающихся векторов:
а – максимальных значений ЭДС; б – действующих значений ЭДС при произвольном расположении векторов; в – действующих значений ЭДС при расположении начального вектора $\boldsymbol{E_1}$ по горизонтальной линии

Проекции слагаемых векторов на ось OY равны мгновенным значениям e_1 и e_2 слагаемых ЭДС. Мгновенное значение суммарной ЭДС $e = e_1 + e_2$, т.е. равно сумме проекций слагаемых векторов на ось OY. Как известно, сумма проекций векторов на какую-либо из осей равна проекции их геометрической суммы на эту же ось. Следовательно, надо сложить геометрически (по правилу параллелограмма) векторы слагаемых ЭДС $\boldsymbol{E_{1m}}$ и $\boldsymbol{E_{2m}}$ и найти вектор суммарной ЭДС $\boldsymbol{E_m} = \boldsymbol{E_{1m}} + \boldsymbol{E_{2m}}$. Длина этого вектора равна амплитуде искомой ЭДС, а угол ψ_e между ним и осью OX равен ее начальной фазе. Определив амплитуду и начальную фазу, находим суммарную ЭДС:

$$e = E_m sin(\omega t + \psi_e).$$

Так как слагаемые ЭДС имеют одинаковую частоту ω, то такую же частоту будет иметь и суммарная ЭДС. Геометрическое сложение векторов действующих значений $\boldsymbol{E_1}$ и $\boldsymbol{E_2}$ тех же ЭДС показано на рис. 5.2б.

В связи с отсутствием необходимости вращения векторов отпадает необходимость в изображении осей координат. Интересуясь только взаимным расположением векторов, один из них можно проводить в любом направлении. Обычно начальный вектор для удобства располагают горизонтально (рис. 5.2в) или вертикально. При построении остальных векторов соблюдают их правильное взаимное положение.

Совокупность векторов ЭДС, напряжений и токов, являющихся изображениями ЭДС, напряжений и токов одинаковой частоты, действующих в какой-то электрической цепи, построенных с учетом их правильного взаимного расположения на плоскости, называют векторной диаграммой.

Для простейшей электрической цепи, состоящей из одного элемента, на зажимах которого действует напряжение $u = U_m sin(\omega t + \psi_u)$ и ток в котором $i = I_m sin(\omega t + \psi_i) = I_m sin(\omega t + \psi_u - \varphi)$ отстает по фазе на угол φ от напряжения, векторная диаграмма имеет вид, представленный на рис. 5.3.

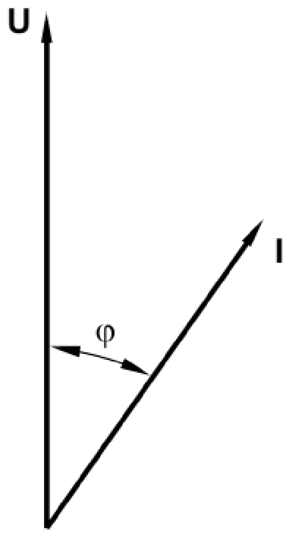


Рис. 5.3. Векторная диаграмма простейшей электрической цепи

Начальные фазы напряжения (ψ_u) и тока (ψ_i) на векторной диаграмме никак не изображаются, так как взаимное положение векторов полностью определяется разностью фаз $\varphi = \psi_u - \psi_i$.

Элементы линейной алгебры в профессиональных задачах

Аудиторные задания (А/з):

1) Исходя из рис. 5.2 (а) определить сумму векторов максимальных значений ЭДС $\overline{E_m}$, если вектор $\overline{E_{1m}} = (4; 1)$; $\overline{E_{2m}} = (3; 3)$.

2) Найти модуль полученного вектора суммы максимальных значений ЭДС $\overline{E_m}$.

3) Записать координаты вектора $\overline{E_m}$ в полярной системе координат.

4) Определить скалярное произведение векторов $\overline{E_{1m}} = (4; 1)$; $\overline{E_{2m}} = (3; 3)$.

Домашние задания (Д/з):

1) Исходя из рис. 5.2 (а) определить сумму векторов максимальных значений ЭДС $\overline{E_m}$, если вектор $\overline{E_{1m}} = (3; 1)$; $\overline{E_{2m}} = (2; 4)$.

2) Найти модуль полученного вектора суммы максимальных значений ЭДС $\overline{E_m}$.

3) Записать координаты вектора $\overline{E_m}$ в полярной системе координат.

4) Определить скалярное произведение векторов $\overline{E_{1m}} = (3; 1)$; $\overline{E_{2m}} = (2; 4)$.

Элементы линейной алгебры в профессиональных задачах (Примеры)

Примеры:

1) Исходя из рис. 5.2 (а) определить сумму векторов максимальных значений ЭДС $\overline{E_m}$, если вектор $\overline{E_{1m}} = (8; 2)$; $\overline{E_{2m}} = (6; 5)$.

2) Найти модуль полученного вектора суммы максимальных значений ЭДС $\overline{E_m}$.

3) Записать координаты вектора $\overline{E_m}$ в полярной системе координат.

4) Определить скалярное произведение векторов $\overline{E_{1m}} = (8;2)$; $\overline{E_{2m}} = (6;5)$.

<u>Решение</u>:

1. $\overline{E_{1m}} = (8;2)$; $\overline{E_{2m}} = (6;5)$

$\overline{E_m} = \overline{E_{1m}} + \overline{E_{2m}} = (8;2) + (6;5) = (8+6;2+5) = (14;7)$.

2. $\left|\overline{E_m}\right| = \sqrt{14^2 + 7^2} = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$.

3. $\overline{E_m} = (14;7)$

$\rho = \sqrt{14^2 + 7^2} = 7\sqrt{5}$; $\quad tg\varphi = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = arctg\,\frac{1}{2} \Rightarrow \overline{E_m}\left(7\sqrt{5}; arctg\,\frac{1}{2}\right)$.

4. $\overline{E_{1m}} = (8;2)$; $\overline{E_{2m}} = (6;5)$

$\overline{E_{1m}} \cdot \overline{E_{2m}} = (8;2) \cdot (6;5) = 8 \cdot 6 + 2 \cdot 5 = 48 + 10 = 58$.

РАЗДЕЛ 6. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

6.1 Понятие о стереометрии. Прямые и плоскости в аналитической геометрии

Используемый источник – Математика СПО [1], п.6.1-6.2.

Аудиторные задания (А/з):

1) Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью Ох угол $\frac{\pi}{4}$.

2) Постройте график прямой: $3x + 4y = 12$.

3) Определите, как расположена точка $A(3, 5)$ по отношению к прямой $y = 2x - 1$ (лежит на ней? Расположена ниже или выше?).

4) Определите угол между прямыми: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$.

Домашние задания (Д/з):

1) Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью Ох угол $\frac{\pi}{3}$.

2) Постройте график прямой: $3x - 4y = 0$.

3) Определите, как расположена точка $B(2, 7)$ по отношению к прямой $y = 2x - 1$ (лежит на ней? Расположена ниже или выше?).

4) Определите угол между прямыми: $\begin{cases} 5x - y + 7 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$.

Понятие о стереометрии. Прямые и плоскости в аналитической геометрии (Примеры)

Примеры:

1) Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью Ох угол $\frac{\pi}{6}$.

2) Постройте график прямой: $2x + 4y = 8$.

3) Постройте график прямой: $2x - 4y = 0$.

4) Определите, как расположена точка $A(1, 5)$ по отношению к прямой $y = 6x - 1$ (лежит на ней? Расположена ниже или выше?).

5) Определите, как расположена точка $B(2, 7)$ по отношению к прямой $y = 6x - 1$ (лежит на ней? Расположена ниже или выше?).

6) Определите угол между прямыми: $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \end{cases}$.

7) Определите угол между прямыми: $\begin{cases} 4x - y + 7 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$.

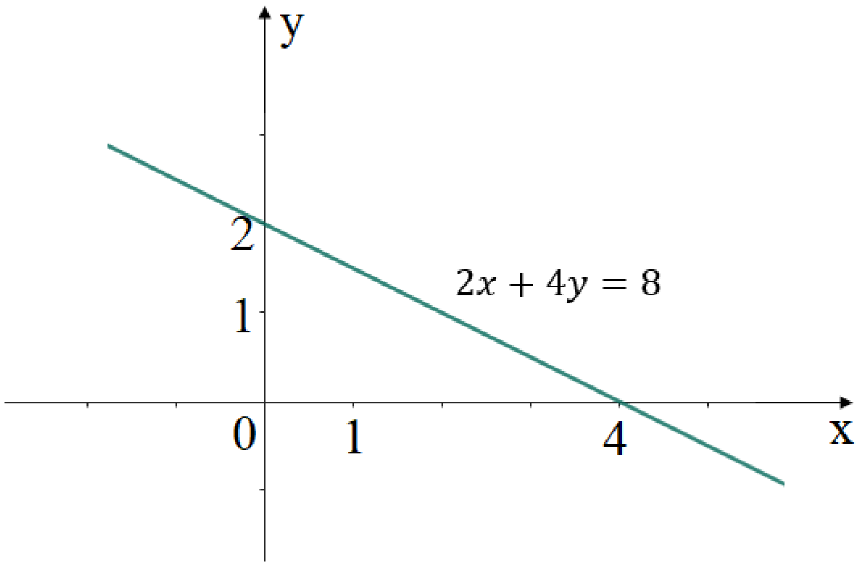
Решение:

1. $y - y_0 = k(x - x_0), \quad \varphi = \frac{\pi}{6},$

$k = tg\varphi = tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad x_0 = y_0 = 0; \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x.$

2. $2x + 4y = 8$

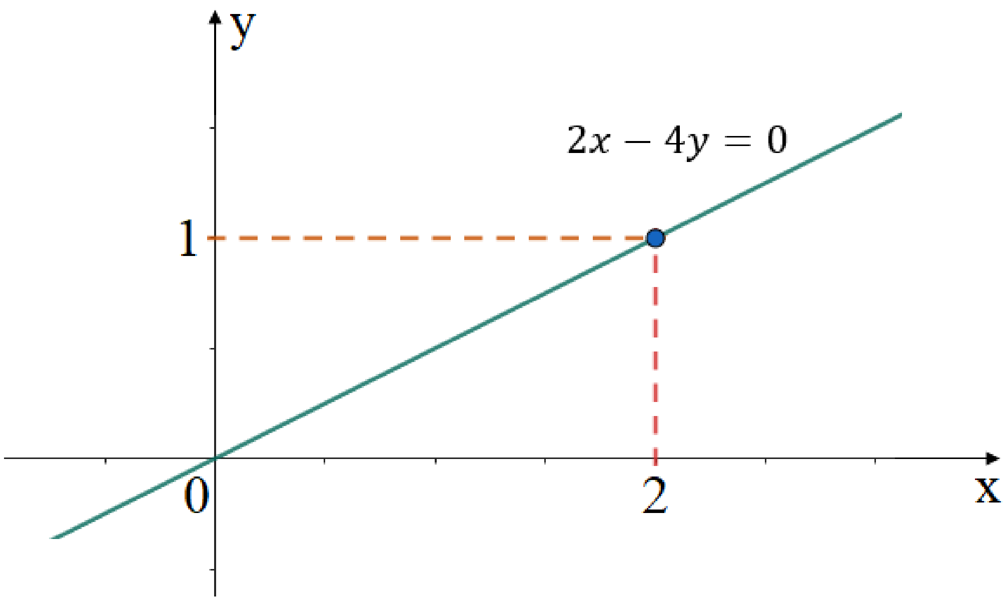
$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$



3. $2x - 4y = 0$

$y = \frac{1}{2}x$

x	0	2
y	0	1

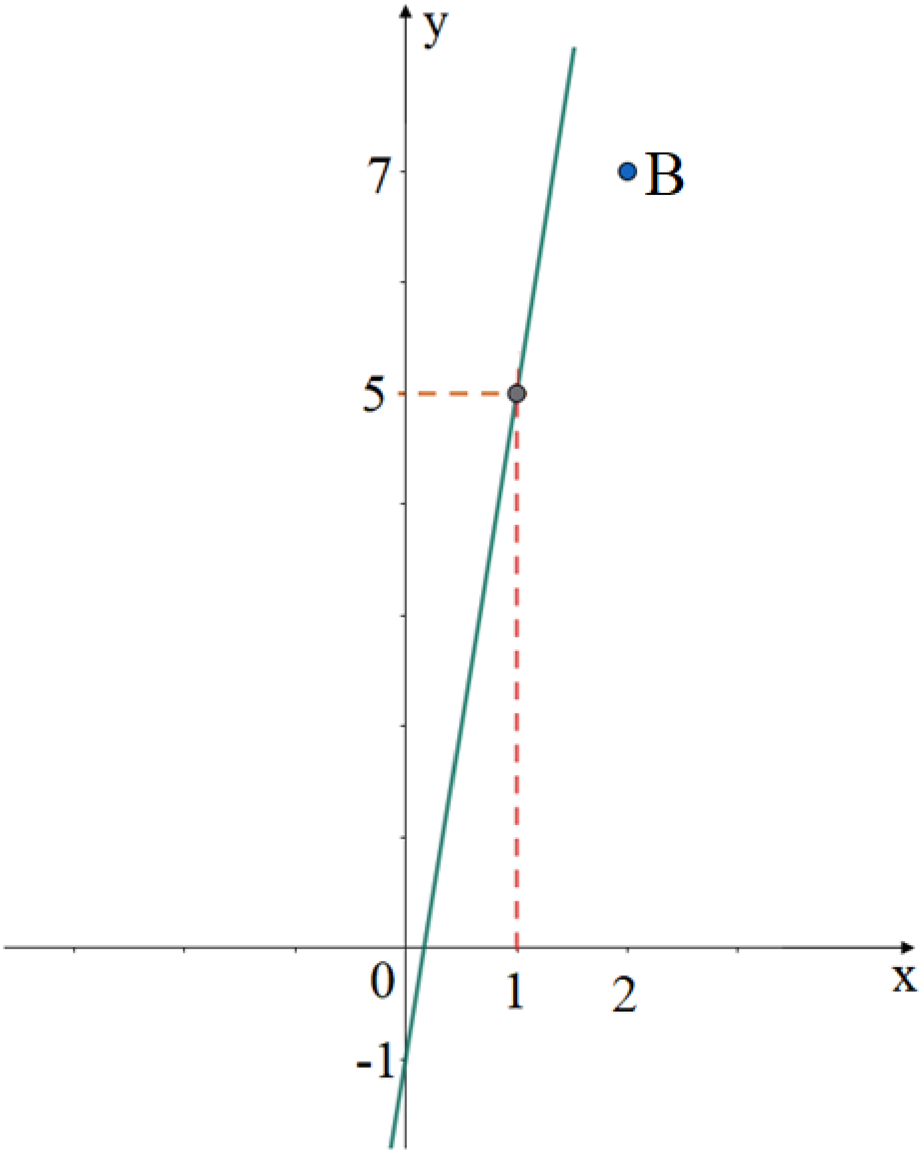


4. $A(1,5), \quad y = 6x - 1$

$x = 1; \quad y(1) = 5 \Rightarrow$ точка лежит <u>на прямой</u>.

5. $B(2,7), \quad y = 6x - 1$

x	0	1
y	-1	5



$y(2) = 11 > 7 \Rightarrow$ точка В лежит ниже прямой.

6. $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \end{cases}$

$k_2 = 3; \; k_1 = \frac{1}{3}; \; tg\beta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{1+1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}; \; \beta = arctg\,\frac{4}{3}.$

Угол между прямыми – размер наименьшего из углов, образованных этими прямыми.

7. $\begin{cases} 4x - y + 7 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4x + 7 \\ y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$

$k_2 = 4;\ k_1 = \frac{3}{2};\ tg\beta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \frac{4 - \frac{3}{2}}{1+6} = \frac{5}{14};\ \beta = arctg\,\frac{5}{14}.$

6.2 Кривые второго порядка.

Стереометрические фигуры в аналитической геометрии

Используемый источник – Математика СПО [1], п.6.3-6.4.

Аудиторные задания (А/з):

1) Напишите уравнение окружности с центром $C(-4, 3)$ и радиусом $R = 5$ и постройте её. Лежат ли на этой окружности точки $A(-1, 1)$, $B(3, 2)$, $O(0,0)$.

2) Постройте линию $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$, преобразовав уравнение к каноническому виду.

3) Укажите множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению $x^2 + 4y^2 + 8y + 5 = 0$.

4) Какое множество точек задается уравнением $x^2 + 2x + 5 = 0$?

Домашние задания (Д/з):

1) Напишите уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(1,2)$.

2) Определите вид линии $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$ и изобразите её.

3) Постройте кривую $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$.

4) Какое множество точек задается уравнением $x^2 + 2x + 6 = 0$?

Кривые второго порядка. Стереометрические фигуры в аналитической геометрии (Примеры)

Примеры:

1) Напишите уравнение окружности с центром $C(-3,4)$ и радиусом $R=4$ и постройте её. Лежат ли на этой окружности точки $A(-1,1)$, $B(3,2)$, $C(-3,8)$.

2) Постройте линию $4x^2+5y^2-8x+10y-91=0$, преобразовав уравнение к каноническому виду.

3) Укажите множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению $x^2+3y^2+7y+6=0$.

4) Какое множество точек задается уравнением $x^2+2x+7=0$?

5) Напишите уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(2,3)$.

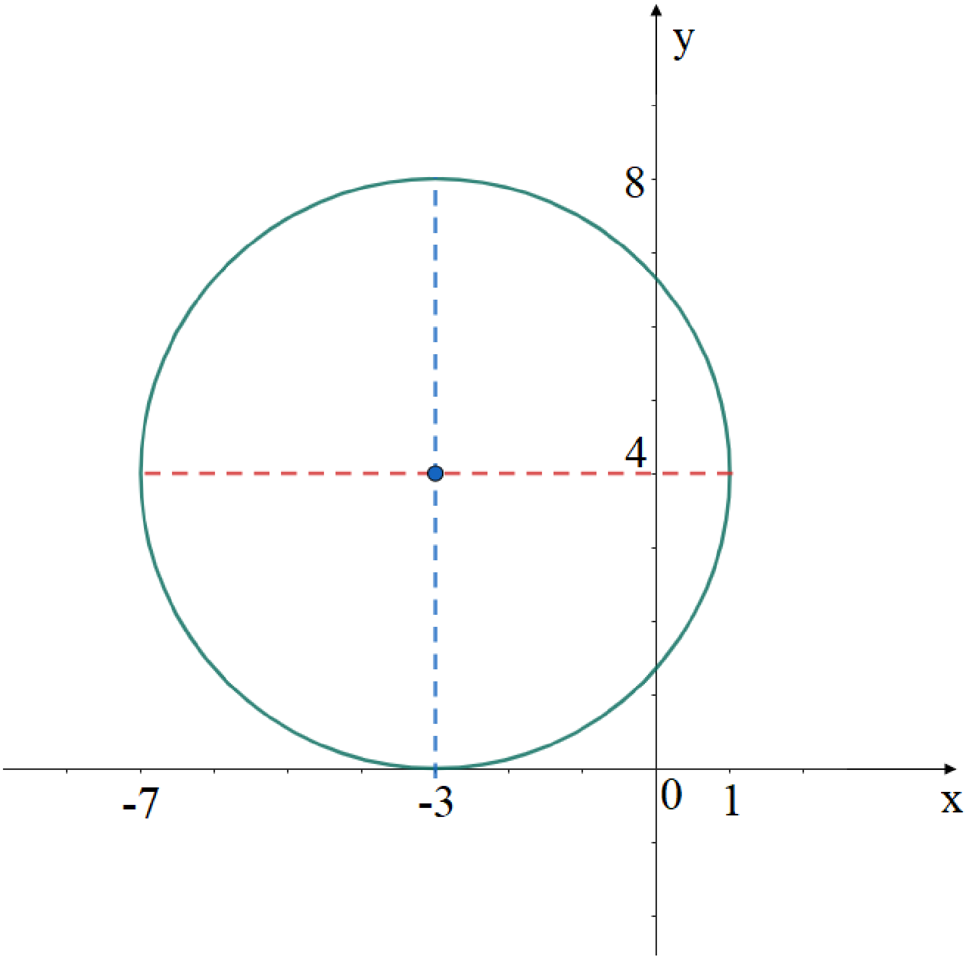
6) Определите вид линии $\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{81}y^2-x+\frac{4}{9}y-1=0$ и изобразите её.

7) Постройте кривую $4x^2-8x+3y-9=0$.

Решение:

1. $C(-3,4)$, $R=4$

$(x+3)^2+(y-4)^2=16$



$A(-1,1)$ $(-1+3)^2+(1-4)^2=4+9=13\neq 16 \Rightarrow A$ – не лежит;

$B(3,2)$ $(3+3)^2+(2-4)^2=36+4=40\neq 16 \Rightarrow B$ – не лежит;

$C(-3,8)$ $(-3+3)^2+(8-4)^2=0+16=16 \Rightarrow C$ – лежит.

2. $4x^2+5y^2-8x+10y-91=0;$

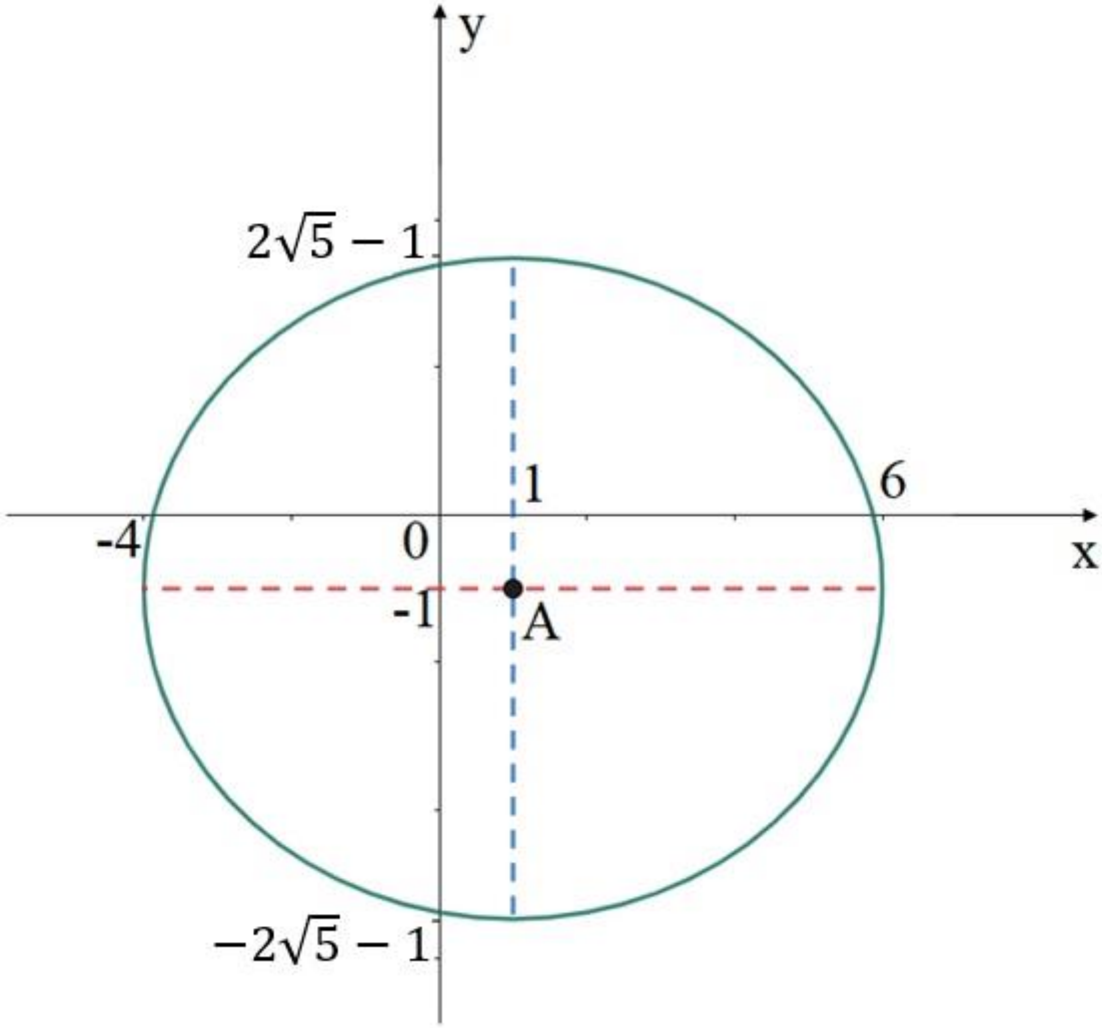
$4(x^2-2x+1)-4+5(y^2+2y+1)-5-91=0;$

$4(x-1)^2+5(y+1)^2=100;$

$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{20}=1$ – эллипс

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$ $A(1,-1)$ – центр; $a=5$ – большая полуось;

$b=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\approx 4{,}5$ – малая полуось



3. $x^2 + 3y^2 + 7y + 6 = 0$

$x^2 + 3\left(y^2 + \frac{7}{3}y + \frac{49}{36}\right) - \frac{49}{12} + 6 = 0;$

$x^2 + 3\left(y + \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{49}{12} - 6 = \frac{49-6\cdot 12}{12} = -\frac{23}{12}$ – пустое множество (мнимый эллипс).

4. $x^2 + 2x + 7 = 0$

$(x+1)^2 + 6 = 0;$

$(x+1)^2 = -6$ – пустое множество (мнимые прямые).

5. $A(2, 3)$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2;$ центр находится на биссектрисе $y = x$

$x_0 = y_0 = R$; $(x-R)^2 + (y-R)^2 = R^2$; $(2-R)^2 + (3-R)^2 = R^2$;

$4 - 4R + R^2 + 9 - 6R + R^2 = R^2$; $R^2 - 10R + 13 = 0$;

$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 25 - 13 = 12$; $R_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{5 \pm 2\sqrt{3}}{1} = 5 \pm 2\sqrt{3}$;

$R_1 = 5 - 2\sqrt{3} \approx 1{,}54$; $R_2 = 5 + 2\sqrt{3} \approx 8{,}46$;

$\left(x - 5 + 2\sqrt{3}\right)^2 + \left(y - 5 + 2\sqrt{3}\right)^2 = \left(5 - 2\sqrt{3}\right)^2$ или

$\left(x - 5 - 2\sqrt{3}\right)^2 + \left(y - 5 - 2\sqrt{3}\right)^2 = \left(5 + 2\sqrt{3}\right)^2$.

6. $\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{81}y^2 - x + \frac{4}{9}y - 1 = 0$;

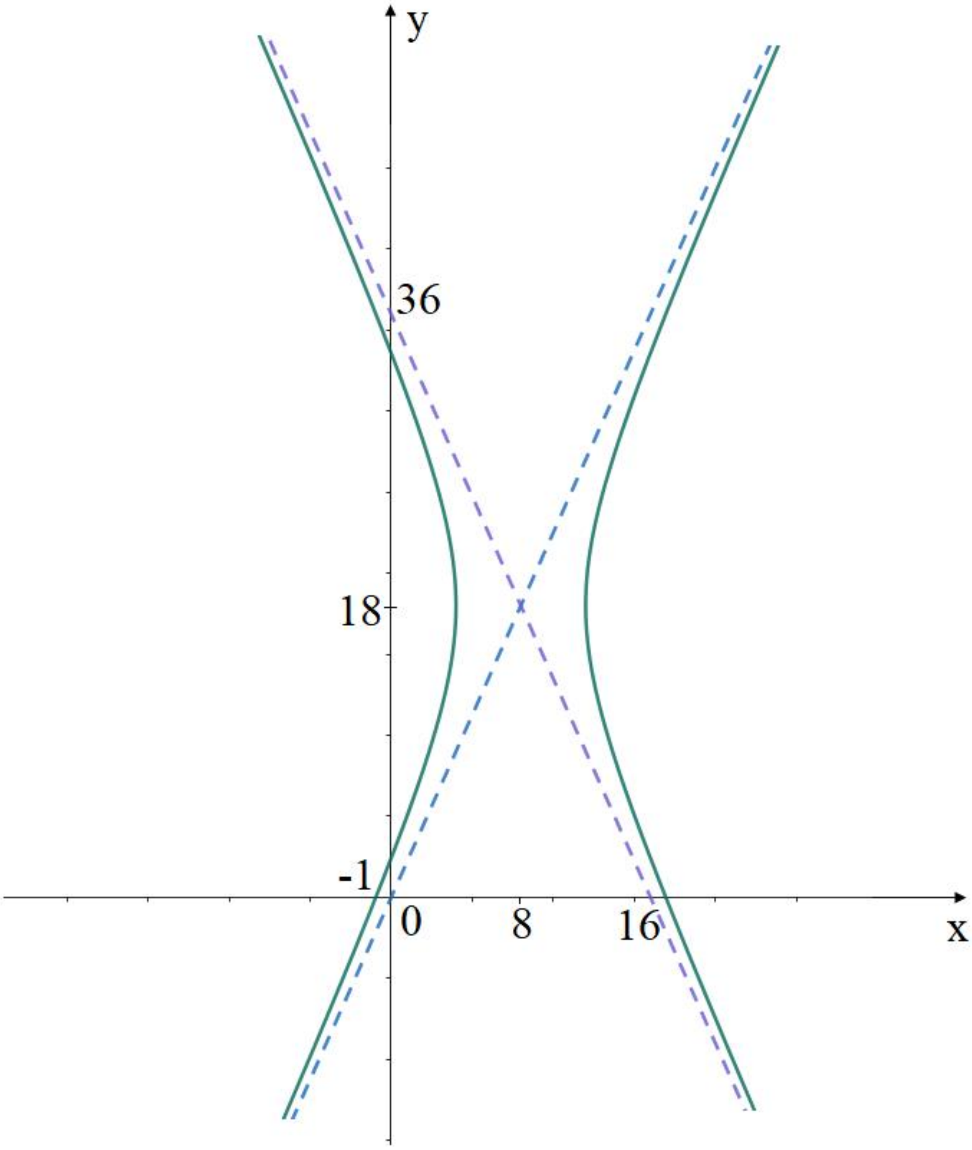
$\frac{1}{16}(x^2 - 16x + 64) - \frac{1}{81}(y^2 - 36y + 324) = 1$;

$\frac{1}{16}(x-8)^2 - \frac{1}{81}(y-18)^2 = 1$;

$\frac{(x-8)^2}{16} - \frac{(y-18)^2}{81} = 1$ – гипербола

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$; $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$ – асимптоты

$y - 18 = \pm\frac{9}{4}(x-8)$

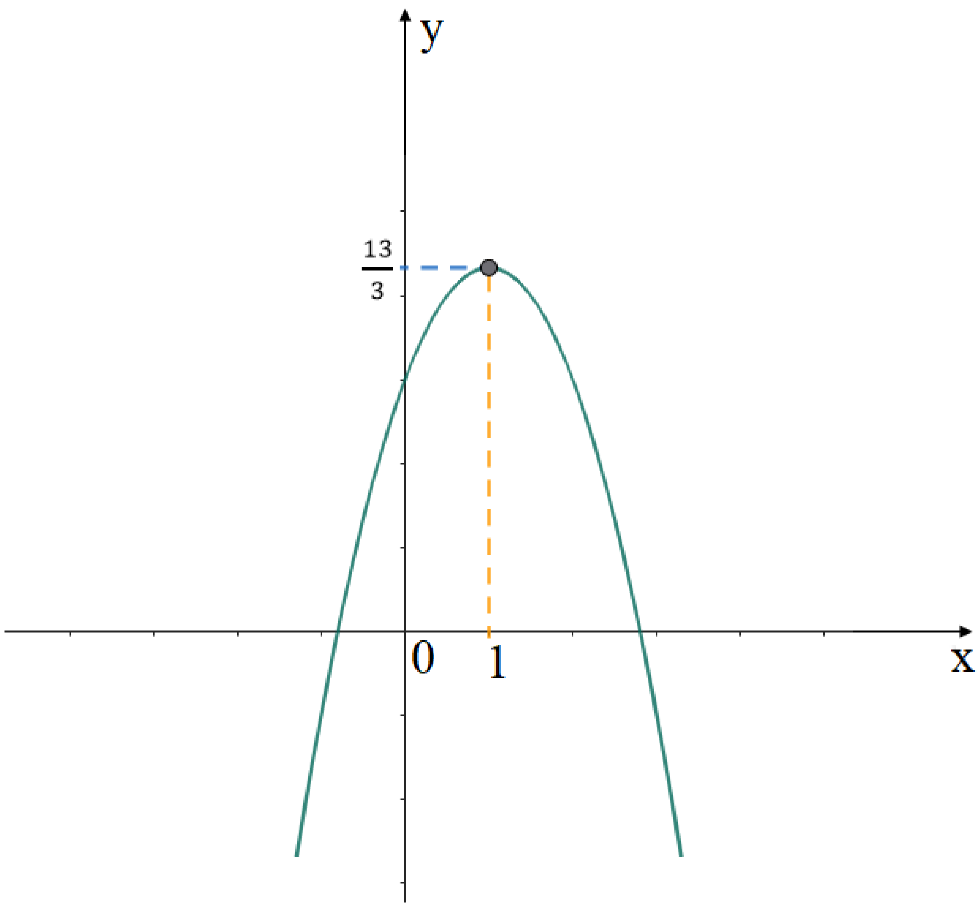


7. $4x^2 - 8x + 3y - 9 = 0;$

$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 3y - 9 = 0;$

$4(x-1)^2 + 3y = 13;$

$y = -\frac{4}{3}(x-1)^2 + \frac{13}{3}$ – парабола



6.3 Контрольная работа «Элементы аналитической геометрии»

Используемый источник – Математика СПО [1], п.6.1-6.4.

Контрольная работа «Элементы аналитической геометрии»

<u>Аудиторные задания (А/з)</u>:

1) Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью Ох угол $\frac{2\pi}{3}$.

2) Постройте график прямой: $2x - 5 = 0$.

3) Определите, как расположена точка $C(-1, -3)$ по отношению к прямой $y = 2x - 1$ (лежит на ней? Расположена ниже или выше?).

4) Определите угол между прямыми: $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$.

Домашние задания (Д/з):

1) Даны точки $A(-3,0)$ и $B(3,6)$. Напишите уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок AB.

2) Какое множество точек с координатами (x,y) удовлетворяет уравнению $x^2+4y^2-4x-8y+8=0$?

3) Какая линия задается уравнением $x^2-6x+8=0$?

4) Найдите центр и радиус сферы $x^2+y^2+z^2-3x+5y-4z=0$.

Контрольная работа «Элементы аналитической геометрии» (Подготовка)

1) Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью Ох угол $\frac{4\pi}{3}$.

2) Постройте график прямой: $3x-5=0$.

3) Определите, как расположена точка $C(-2,-3)$ по отношению к прямой $y=2x+1$ (лежит на ней? Расположена ниже или выше?).

4) Определите угол между прямыми: $\begin{cases}3x+y=0\\ y=4x-5\end{cases}$.

5) Даны точки $A(-4,0)$ и $B(4,7)$. Напишите уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок AB.

6) Какое множество точек с координатами (x,y) удовлетворяет уравнению $x^2+8y^2-8x-16y+24=0$?

7) Какая линия задается уравнением $x^2-8x+12=0$?

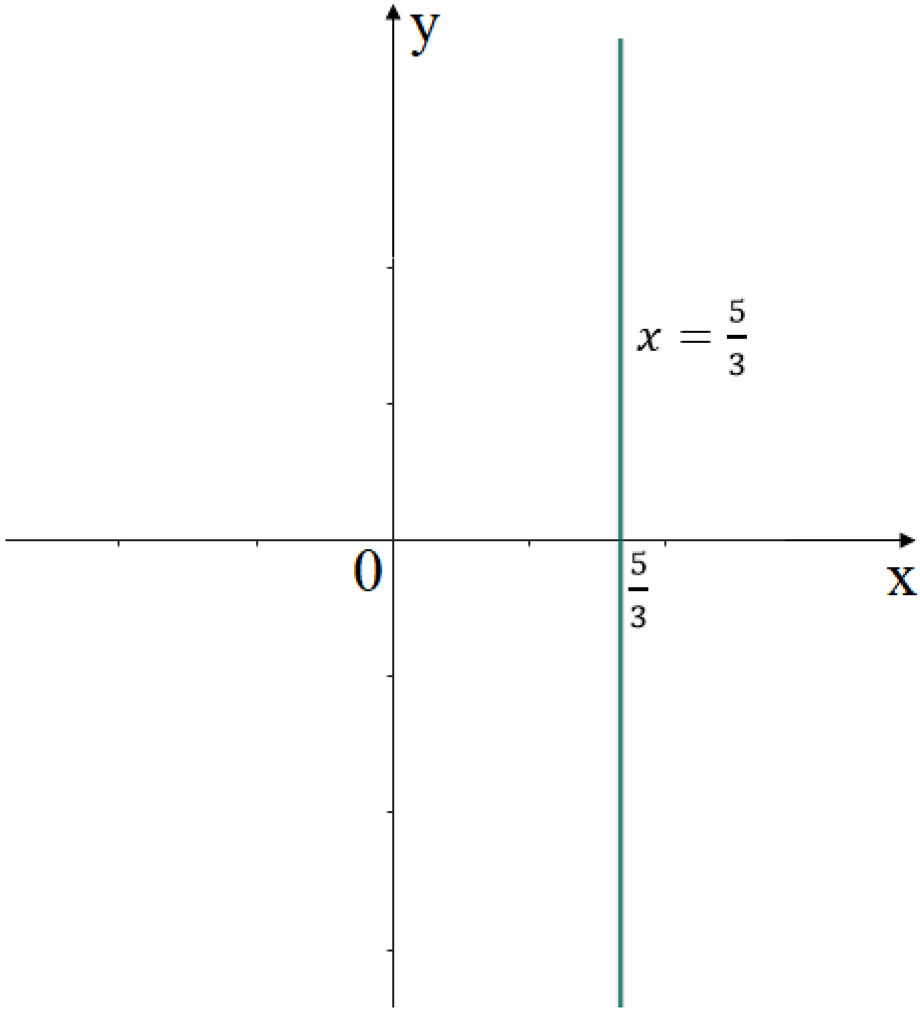
8) Найдите центр и радиус сферы $x^2+y^2+z^2-6x+10y-8z=0$.

Решение:

1. $y=kx, \quad k=tg\frac{4\pi}{3}=\sqrt{3}; \quad y=\sqrt{3}x.$

2. $3x-5=0$

$x=\frac{5}{3}$



3. $C(-2,-3), \quad y = 2x + 1$

$y(-2) = -3 \Rightarrow C$ лежит на прямой.

4. $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ y = 4x - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -3x \\ y = 4x - 5 \end{cases}$

$k_2 = 4; \;\; k_1 = -3; \;\; tg\beta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \frac{4+3}{1-3\cdot 4} = -\frac{7}{11}; \;\; \beta = -arctg\,\frac{7}{11}.$

5. $A(-4, 0), B(4, 7)$

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(4+4)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{64 + 49} = \sqrt{113}; \quad R = \frac{\sqrt{113}}{2}; \quad ; \quad R^2 = \frac{113}{4};$

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 0; \;\; y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5; \;\; x^2 + (y - 3{,}5)^2 = \frac{113}{4}.$

6. $x^2 + 8y^2 - 8x - 16y + 24 = 0$

$(x-4)^2 + 8(y-1)^2 = 0$ – точка $A(4; 1)$.

7. $x^2 - 8x + 12 = 0$

$(x-4)^2 = 4; \;\; \left.\begin{matrix} x - 4 = 2 & x = 6 \\ x - 4 = -2 & x = 2 \end{matrix}\right\}$ – прямые.

8. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10y - 8z = 0$

$(x-3)^2 - 9 + (y+5)^2 - 25 + (z-4)^2 - 16 = 0;$

$(x-3)^2 + (y+5)^2 + (z-4)^2 = 50;$

$A(3, -5, 4)$ – центр; $R = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ – радиус.

6.4 Элементы аналитической геометрии в профессиональных задачах

Используемый источник – [2].

2.5. Векторное изображение синусоидальных ЭДС, напряжений и токов

Графическое построение синусоидальных величин в прямоугольных координатах является довольно трудоемкой операцией. Графическое сложение двух (или более) таких величин требует больших затрат времени, а хорошая точность при определении амплитуды суммарной величины и ее начальной фазы может быть достигнута лишь путем сложения очень большого числа мгновенных значений слагаемых. Значительно проще складывать две синусоидальные величины, изменяющиеся с одинаковой частотой, представив их вращающимися векторами.

В плоскости с осями координат OX и OY (рис. 6.1а) рассмотрим вращающийся с постоянной скоростью, равной угловой частоте ω, вектор $\boldsymbol{OA}$, длина которого равна амплитуде синусоидальной ЭДС $e = E_m sin(\omega t + \psi_e)$, т.е. $|\boldsymbol{OA}| = E_m$.

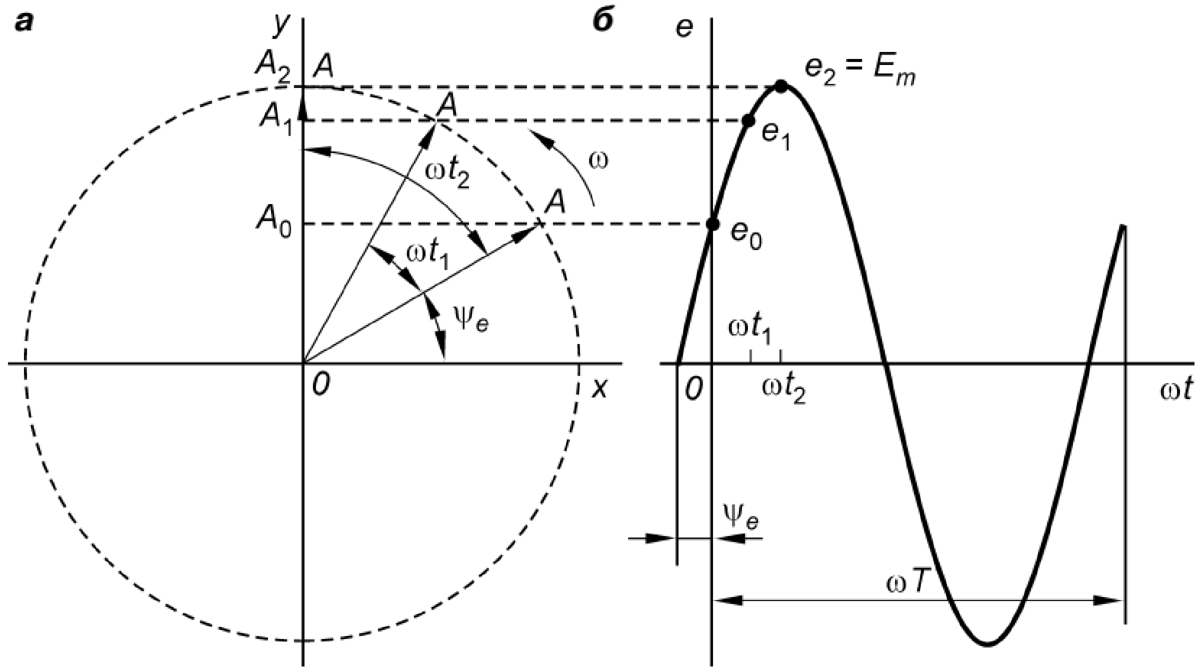


Рис. 6.1. Векторное изображение синусоидальных ЭДС:
а – вращающийся вектор; б – кривая изменения его проекции на ось OY

За положительное направление вращения вектора $\boldsymbol{OA}$ принимаем направление, противоположное вращению часовой стрелки, а угол поворота вектора отсчитываем от оси OX. В начальном положении (при $t = 0$) вектор $\boldsymbol{OA}$ повернут по отношению к оси OX на угол ψ_e.

Построим проекции вектора $\boldsymbol{OA}$ на ось OY (рис. 6.1б), которые изменяются по мере поворота вектора на угол ωt по отношению к начальному положению. В начальном положении проекция $OA_0 = OAsin\psi_e = E_m sin\psi_e = e_0$, т.е. равна мгновенному значению ЭДС при $t = 0$. Через некоторое время вектор $\boldsymbol{OA}$ повернется на угол $\omega t_1 + \psi_e$. Проекция его на ось OY: $OA_1 = OAsin(\omega t + \psi_e) = E_m sin(\omega t_1 + \psi_e) = e_1$, т.е. равна мгновенному значению ЭДС при $t = t_1$. При $t = t_2$ вектор $\boldsymbol{OA}$ направлен по оси OY и его проекция $OA = E_m = e_2$. При дальнейшем вращении вектора $\boldsymbol{OA}$ его проекции на ось OY начнут уменьшаться, затем станут отрицательными и т.д.

Таким образом, проекции на ось OY вектора, вращающегося с постоянной скоростью ω и имеющего длину, равную амплитуде ЭДС, изменяются по синусоидальному закону, т.е. представляют собой мгновенные значения синусоидальной ЭДС. Следовательно, справедливо и обратное: любую синусоидально изменяющуюся по времени величину можно изображать вращающимся вектором, длина которого равна амплитуде, а угловая скорость вращения – угловой частоте этой синусоидальной величины. Начальное положение вращающегося вектора определяется углом, равным начальной фазе синусоидальной величины и откладываемым от положительного направления оси OX в сторону, противоположную вращению часовой стрелки.

Векторами можно изображать синусоидальные ЭДС, напряжения, потенциалы и токи. В одних и тех же координатах OX и OY можно представить векторы всех ЭДС, действующих в данной электрической цепи, напряжений на всех участках этой цепи и токов во всех ее ветвях. Так как все ЭДС, напряжения и токи имеют одинаковую частоту, то изображающие их векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью. Их взаимное расположение на плоскости остается постоянным. Поэтому векторы на практике не вращают, а строят их, соблюдая углы между векторами, которые представляют собой углы сдвига фаз. Отказавшись от вращения векторов, можно строить векторы не только максимальных, но и действующих значений.

Элементы аналитической геометрии в профессиональных задачах

Аудиторные задания (А/з):

1) Исходя из рис. 6.1 (а) определить уравнение окружности, образованной вращением вектора $\overline{OA}$ синусоидальной ЭДС, если расстояние от начала координат (центра окружности) $O(0;0)$ до точки A_0 равно 2; $\frac{OA_0}{A_0A_2} = \frac{2}{5}$.

2) Из полученного уравнения определить координаты точек окружности с нулевой абсциссой.

3) Из полученного уравнения определить координаты точек окружности с нулевой ординатой.

4) Из полученного уравнения окружности получить уравнение данной окружности в полярных координатах.

Домашние задания (Д/з):

1) Исходя из рис. 6.1 (а) определить уравнение окружности, образованной вращением вектора $\overline{OA}$ синусоидальной ЭДС, если расстояние от начала координат (центра окружности) $O(0;0)$ до точки A_1 равно 5; $\frac{OA_1}{A_1A_2} = \frac{5}{6}$.

2) Из полученного уравнения определить координаты точек окружности с нулевой абсциссой.

3) Из полученного уравнения определить координаты точек окружности с нулевой ординатой.

4) Из полученного уравнения окружности получить уравнение данной окружности в полярных координатах.

Элементы аналитической геометрии в профессиональных задачах (Примеры)

Примеры:

1) Исходя из рис. 6.1 (а) определить уравнение окружности, образованной вращением вектора $\overline{OA}$ синусоидальной ЭДС, если расстояние от начала координат (центра окружности) $O(0;0)$ до точки A_0 равно 3; $\frac{OA_0}{A_0A_2} = \frac{3}{5}$.

2) Из полученного уравнения определить координаты точек окружности с нулевой абсциссой.

3) Из полученного уравнения определить координаты точек окружности с нулевой ординатой.

4) Из полученного уравнения окружности получить уравнение данной окружности в полярных координатах.

Решение:

1. $OA_0 = 3$; $\frac{OA_0}{A_0A_2} = \frac{3}{5}$; $\frac{3}{A_0A_2} = \frac{3}{5}$; $A_0A_2 = 5$; $OA_2 = R = 3 + 5 = 8$;

$x^2 + y^2 = 64.$

2. $x = 0; \quad y = \pm 8; \quad A_1(0; -8); \quad A_2(0; 8).$

3. $y = 0; \quad x = \pm 8; \quad A_3(-8; 0); \quad A_4(8; 0).$

4. $r = 8.$

РАЗДЕЛ 7. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

7.1 Определение производной функции, ее смысл. Вычисление производных. Дифференциал. Приближение функции многочленом

Используемый источник – Математика СПО [1], п.7.1-7.3.

Аудиторные задания (А/з):

1) Найдите производную от функции: $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$.

2) Продифференцируйте функцию: $y = ln\,x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}$.

3) Вычислите производную: $y = (x+1)^{100}$.

4) Найдите производную второго порядка от функции: : $y = sin^2 x$.

Домашние задания (Д/з):

1) Найдите производную от функции: $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$.

2) Продифференцируйте функцию: $y = x \cdot 2^{3x+x^2}$.

3) Вычислите производную: $y = \left(x + \sqrt[3]{x}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$.

4) Найдите производную второго порядка от функции: : $y = tgx$.

Определение производной функции, ее смысл. Вычисление производных. Дифференциал. Приближение функции многочленом (Подготовка)

Формулы дифференцирования

1. $c' = 0, c = const$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(a^x)' = a^x \cdot lna$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(log_a x)' = \frac{1}{xlna}$

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

10. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

11. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

15. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

16. $(shx)' = chx$

17. $(chx)' = -shx$

18. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$

19. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Определение производной функции, ее смысл. Вычисление производных. Дифференциал. Приближение функции многочленом (Примеры)

Примеры:

1) Найдите производную от функции: $y = \frac{x^4}{4} - 3x^3 + 5x^2 - 6x + 7.$

2) Продифференцируйте функцию: $y = log_2 x - \frac{4}{x} - \frac{1}{5x^2}$.

3) Вычислите производную: $y = (2x+3)^{50}$.

4) Найдите производную второго порядка от функции: : $y = cos^2 x$.

5) Найдите производную от функции: $y = \frac{9}{\sqrt[5]{x}} - \frac{8}{\sqrt[4]{x}}$.

6) Продифференцируйте функцию: $y = 2x \cdot 2^{4x+x^3}$.

7) Вычислите производную: $y = \left(x^2 + \sqrt[5]{x}\right)\left(\frac{5}{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)$.

8) Найдите производную второго порядка от функции: : $y = ctgx$.

Решение:

1. $y = \frac{x^4}{4} - 3x^3 + 5x^2 - 6x + 7$

$y' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - 3 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 2x - 6 = x^3 - 9x^2 + 10x - 6.$

2. $y = log_2 x - \frac{4}{x} - \frac{1}{5x^2}$

$y' = \frac{1}{xln2} + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{5x^3}.$

3. $y = (2x+3)^{50}$

$y' = 50 \cdot (2x+3)^{49} \cdot 2 = 100 \cdot (2x+3)^{49}$

4. $y = cos^2 x$

$y' = 2cosx \cdot (-sinx) = -sin2x;\ \ y'' = -cos2x \cdot 2 = -2cos2x.$

5. $y = \frac{9}{\sqrt[5]{x}} - \frac{8}{\sqrt[4]{x}}$

$y' = 9 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}} - 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}} = -\frac{9}{5\sqrt[5]{x^6}} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^5}}.$

6. $y = 2x \cdot 2^{4x+x^3}$

$y' = 2 \cdot 2^{4x+x^3} + 2x \cdot 2^{4x+x^3} \cdot ln2 \cdot (4+3x^2) = 2^{4x+x^3+1} \cdot \big(1 + x \cdot ln2 \cdot (4+3x^2)\big).$

7. $y = \left(x^2 + \sqrt[5]{x}\right)\left(\frac{5}{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)$

$y' = \left(2x + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^6}}\right)\left(\frac{5}{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right) + \left(x^2 + \sqrt[5]{x}\right)\left(-\frac{5}{x^2} - \frac{6}{5\sqrt[5]{x}}\right) = 10 + 2\sqrt[5]{x^4} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^{11}}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^7}}.$

8. $y = ctgx$

$y' = -\frac{1}{sin^2x}$; $y'' = \frac{2}{sin^3x} \cdot (-cosx) = -\frac{2cosx}{sin^3x}$.

7.2 Исследование функций методами дифференциального исчисления. Понятие о дифференцировании функций нескольких переменных. Представление функций рядами

Используемый источник – Математика СПО [1], п.7.4-7.6.

Аудиторные задания (А/з):

1) Исследуйте функцию на монотонность: $y = x^5 - 5x$.

2) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ на отрезке $[-5; 4]$.

3) Исследуйте функцию на выпуклость и вогнутость $y = (x-1)^4 \cdot (3x+7)$.

4) Исследуйте функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Домашние задания (Д/з):

1) Исследуйте функцию на монотонность: $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 2$.

2) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = sin^2x + cosx - \frac{1}{2}$.

3) Исследуйте функцию на выпуклость и вогнутость $y = \frac{x^2+4}{x}$.

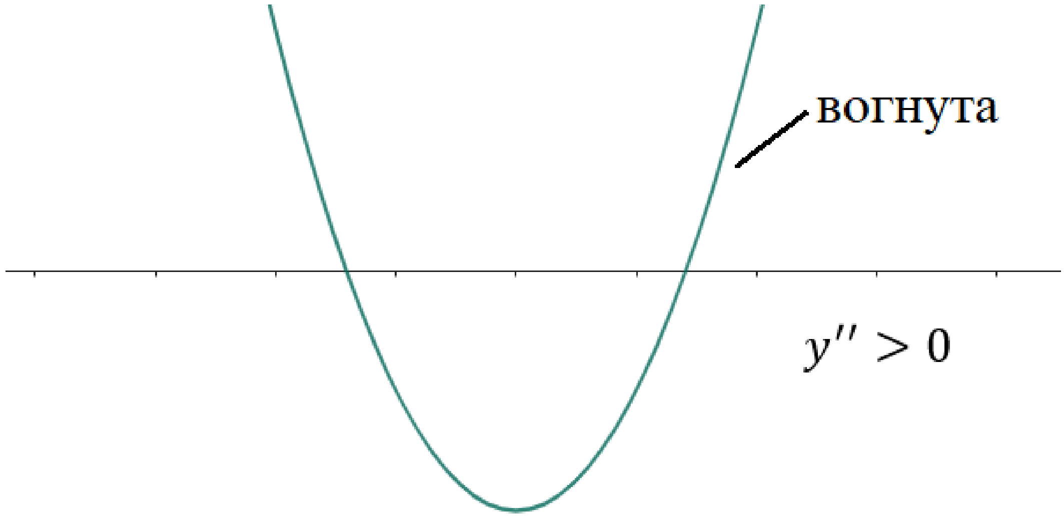
4) Исследуйте функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба $y = x^4 - 6x^2 + 5$.

Указание:

Используемый источник – [6].

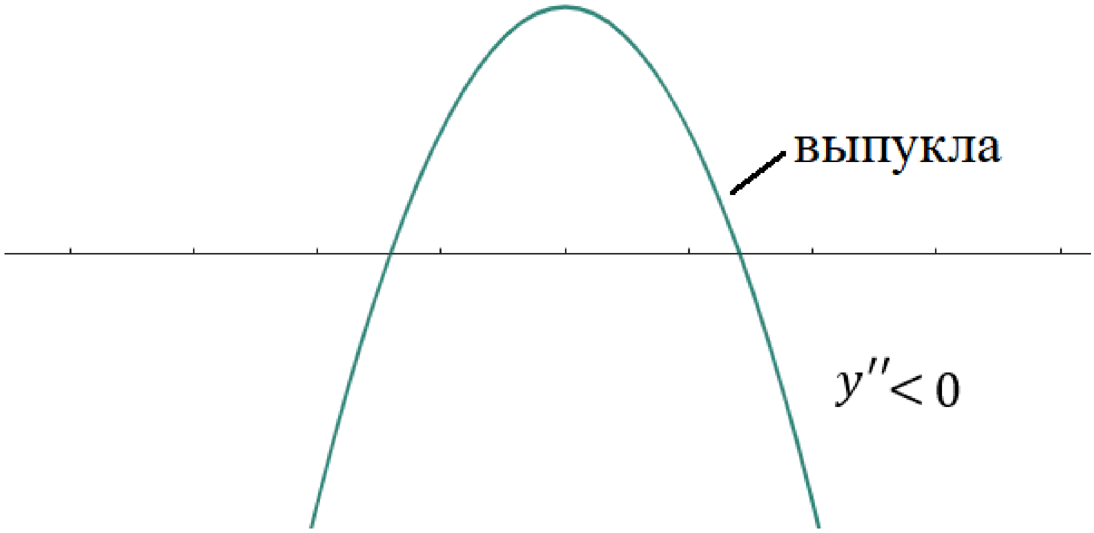
1) <u>Вогнутость</u> – свойство графика функции $y = f(x)$ (кривой), заключающееся в том, что каждая дуга кривой лежит не выше своей хорды.

Если $f''(x) > 0$ для $\forall x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ называется вогнутой на интервале (a, b).



2) <u>Выпуклость</u> – свойство графика функции $y = f(x)$ (кривой), заключающееся в том, что каждая дуга кривой лежит не ниже своей хорды.

Если $f''(x) < 0$ для $\forall x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ называется выпуклой на интервале (a, b).



3) Точка, при переходе через которую функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называется <u>точкой перегиба</u>.

<u>Исследование функций методами дифференциального исчисления. Понятие о дифференцировании функций нескольких переменных. Представление функций рядами (Примеры)</u>

<u>Примеры</u>:

1) Исследуйте функцию на монотонность: $y = x^6 - 3x$.

2) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = 4x^3 + 3x^2 - 18x + 12$ на отрезке $[-4; 5]$.

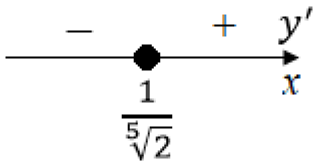
3) Исследуйте функцию на выпуклость и вогнутость $y = (x-2)^5 \cdot (2x+5)$.

4) Исследуйте функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба $y = x^3 - 2x^2 + 1$.

<u>Решение</u>:

1. $y = x^6 - 3x$

$y' = 6x^5 - 3 = 0;\ x^5 = \frac{1}{2};\ x = \frac{1}{\sqrt[5]{2}};\ y' = 3(2x^5 - 1)$



$\left(-\infty; \frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right]$ – убывает; $\left[\frac{1}{\sqrt[5]{2}}; +\infty\right)$ – возрастает.

2. $y = 4x^3 + 3x^2 - 18x + 12, \quad [-4; 5]$

$y' = 12x^2 + 6x - 18 = 0; \quad 2x^2 + x - 3 = 0; \quad D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25;$

$x_1 = \frac{-1-5}{24} = -\frac{6}{24} = -\frac{1}{4};\ x_2 = \frac{-1+5}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6};\ x_1 = -\frac{1}{4}; x_2 = \frac{1}{6} \in [-4; 5]$

$y(-4) = 4 \cdot (-4)^3 + 3 \cdot (-4)^2 - 18 \cdot (-4) + 12 = -256 + 48 + 72 + 12 = -124;$

$y\left(-\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 18 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 12 = -\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{9}{2} + 12 = \frac{1}{8} + \frac{9}{2} + 12 = \frac{1+36+96}{8} = \frac{133}{8} = 16\frac{5}{8};$

$y\left(\frac{1}{6}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 18 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + 12 = \frac{4}{216} + \frac{3}{36} - 3 + 12 = \frac{1}{54} + \frac{1}{12} + 9 = \frac{2+9+972}{108} = \frac{983}{108} = 9\frac{11}{108}$;

$y(5) = 4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 - 18 \cdot 5 + 12 = 4 \cdot 125 + 3 \cdot 25 - 90 + 12 = 497$;

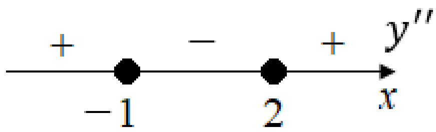
$y(-4) = -124$ – наименьшее; $y(5) = 497$ – наибольшее.

3. $y = (x-2)^5 \cdot (2x+5)$

$y' = 5 \cdot (x-2)^4 \cdot (2x+5) + (x-2)^5 \cdot 2 = (x-2)^4 \cdot (10x + 25 + 2x - 4) = (x-2)^4 \cdot (12x + 21) = 3 \cdot (x-2)^4 \cdot (4x+7)$

$y'' = 3 \cdot [4 \cdot (x-2)^3 \cdot (4x+7) + (x-2)^4 \cdot 4] = 12 \cdot (x-2)^3 \cdot (4x + 7 + x - 2) = 12 \cdot (x-2)^3 \cdot (5x+5) = 60 \cdot (x-2)^3 \cdot (x+1)$

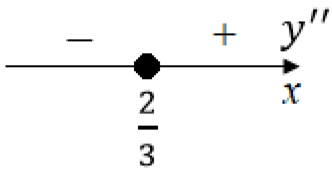
$y'' = 0;\ \ x = 2;\ \ x = -1$



$(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ – вогнута; $[-1; 2]$– выпукла.

4. $y = x^3 - 2x^2 + 1$

$y' = 3x^2 - 4x;\ \ y'' = 6x - 4 = 0;\ \ x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.



$\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$ – выпукла; $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$– вогнута.

$x = \frac{2}{3}$ – точка перегиба.

7.3 Контрольная работа «Производная и ее приложения»

Используемый источник – Математика СПО [1], п.7.4-7.6.

Контрольная работа «Производная и ее приложения»

Аудиторные задания (А/з):

1) Найдите производную от функции: $y = \frac{x}{1-4x}$.

2) Продифференцируйте функцию: $y = \frac{cosx}{1+2sinx}$.

3) Вычислите производную: $y = x^2 + 2^x$.

4) Найдите производную второго порядка от функции: : $y = \sqrt{1+x^2}$.

Домашние задания (Д/з):

1) Исследуйте функцию на монотонность: $y = \frac{e^x}{x}$.

2) Найдите все значения x, для каждого из которых функция $y = 6cos2x + 6sinx - 2$ принимает наибольшее значение.

3) Исследуйте функцию на выпуклость и вогнутость: $y = x - lnx$.

4) Исследуйте функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

Контрольная работа «Производная и ее приложения» (Подготовка)

1) Найдите производную от функции: $y = \frac{x}{1-3x}$.

2) Продифференцируйте функцию: $y = \frac{sinx}{1+2cosx}$.

3) Вычислите производную: $y = x^3 + 3^x$.

4) Найдите производную второго порядка от функции: : $y = \sqrt{1+x^3}$.

5) Исследуйте функцию на монотонность: $y = \frac{e^x}{x^2}$.

6) Найдите все значения x, для каждого из которых функция $y = 5cos2x + 4sinx - 3$ принимает наибольшее значение.

7) Исследуйте функцию на выпуклость и вогнутость: $y = x^2 - 3lnx$.

8) Исследуйте функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба $y = \frac{3x}{1+x^3}$.

Решение:

1. $y = \frac{x}{1-3x}$

$y' = \frac{1-3x-x\cdot(-3)}{(1-3x)^2} = \frac{1}{(1-3x)^2}$.

2. $y = \frac{sinx}{1+2cosx}$

$y' = \frac{cosx\cdot(1+2cosx)-sinx\cdot(-2sinx)}{(1+2cosx)^2} = \frac{2+cosx}{(1+2cosx)^2}$.

3. $y = x^3 + 3^x$

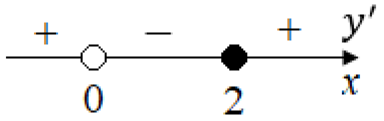
$y' = 3x^2 + 3^x \cdot ln3$.

4. $y = \sqrt{1 + x^3}$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x^3}} \cdot 3x^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$; $\quad y'' = \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{2x\sqrt{1+x^3} - x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^3}} \cdot 3x^2}{1+x^3}\right] = \frac{3}{4} \cdot \frac{4x(1+x^3)-3x^4}{\sqrt{1+x^3}(1+x^3)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4x^4+4x-3x^4}{\sqrt{(1+x^3)^3}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^4+4x}{\sqrt{(1+x^3)^3}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{x(x^3+4)}{\sqrt{(1+x^3)^3}}$.

5. $y = \frac{e^x}{x^2}$

$y' = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x \cdot (x-2)}{x^3}$; $\quad y' = 0 \;\; x = 2; \quad x \neq 0$



$(-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$ – возрастает; $\quad (0; 2]$ – убывает.

6. $y = 5cos2x + 4sinx - 3$

$y' = -10sin2x + 4cosx = -20sinxcosx + 4cosx$; $\quad y' = 0$;

$4cosx(1 - 5sinx) = 0$; $\; cosx = 0$; $\; x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;

$sinx = \frac{1}{5}$; $x = (-1)^k arcsin\frac{1}{5} + \pi k, k \in Z$;

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $y = 5 \cdot (-1) + (\pm 4) - 3 = \left[\begin{matrix} -4 \\ -12 \end{matrix}\right.$ – наименьшее

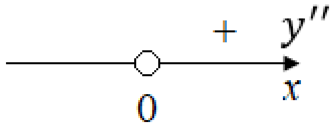
$sinx = \frac{1}{5}$; $y = 5 \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{25}\right) + \frac{4}{5} - 3 = \frac{23}{5} + \frac{4}{5} - 3 = \frac{27-15}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$ –

наибольшее $\Rightarrow x = (-1)^k arcsin\frac{1}{5} + \pi k, k \in Z$.

7. $y = x^2 - 3lnx$.

$y' = 2x - \frac{3}{x}$; $y'' = 2 + \frac{3}{x^2}$; $y'' = 0$ $\frac{3}{x^2} = -2$ $\emptyset$

ОДЗ: $x > 0$



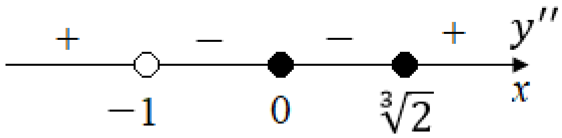
$(0; +\infty)$ – вогнута.

8. $y = \frac{3x}{1+x^3}$

$y' = 3 \cdot \left(\frac{1+x^3-x\cdot 3x^2}{(1+x^3)^2}\right) = \frac{3(1-2x^3)}{(1+x^3)^2}$; $y'' = 3 \cdot \left[\frac{-6x^2(1+x^3)^2-(1-2x^3)2(1+x^3)3x^2}{(1+x^3)^4}\right] =$

$-18x^2 \cdot (1 + x^3) \cdot \frac{1+x^3+1-2x^3}{(1+x^3)^4} = -\frac{18x^2(2-x^3)}{(1+x^3)^3} = \frac{18x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3}$;

$y'' = 0$; $x = 0$; $x = \sqrt[3]{2}$; $x \neq -1$



$\left(-\infty; -1\right) \cup \left[\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$ – вогнута; $\left(-1; \sqrt[3]{2}\right]$ – выпукла.

$x = \sqrt[3]{2}$ – точка перегиба.

7.4 Производная и ее приложения в профессиональных задачах

Используемый источник – [2].

1.5. Энергетические соотношения в цепях постоянного тока

Уравнение баланса мощностей электрической цепи имеет вид:

$$P_1 = P_2 + P_п, \quad (7.1)$$

где $P_1 = EI$ – мощность источника ЭДС (источника электроэнергии); $P_2 = UI$ – мощность энергии, потребляемой электроприемником; $P_п = R_{вт} I^2$ – мощность потерь энергии в источнике ЭДС.

Записав выражение для мощности P_2 электроприемника, получим зависимость мощности приемника от его сопротивления R при $E = const$ и $R_{вт} = const$:

$$P_2 = UI = RI^2 = \frac{E^2 R}{(R+R_{вт})^2}. \qquad (7.2)$$

Мощность P_2 в режиме холостого хода, когда $I = 0$, и в режиме короткого замыкания, когда $U = 0$, равна нулю. Следовательно, зависимость $P_2(I)$ при изменении тока I от 0 до $I_к$ имеет максимум. Для определения условий, при которых эта мощность будет наибольшей ($P_2 = P_{2max}$), воспользуемся уравнением (7.1):

$$P_2 = P_2 - P_п = EI - R_{вт} I^2.$$

Приравняв к нулю производную dP_2/dI, т.е.

$$\frac{dP_2}{dI} = E - 2R_{вт} I = 0,$$

получим

$$I = \frac{E}{2R_{вт}} = I_с = 0{,}5 I_к.$$

Таким образом, максимальная мощность потребляемой электроэнергии имеет место при согласованном режиме, когда $R = R_{вт}$. С учетом этого равенства из формулы (7.2) определим значение мощности P_{2max} или мощности $P_{2с}$ при согласованном режиме:

$$P_{2max} = P_{2с} = \frac{E^2 R_{вт}}{(2R_{вт})^2} = \frac{E^2}{2R_{вт}}.$$

Мощность $P_{1с}$ источника электроэнергии в согласованном режиме

$$P_{1с} = EI_с = \frac{E^2}{2R_{вт}}.$$

Наибольшую мощность источник электроэнергии развивает при коротком замыкании, когда ток достигает наибольшего значения. В этом случае $P_{1max} =$

$EI_к = E^2/R_{вт}$. Мощность источника в согласованном режиме в два раза меньше его максимальной мощности.

Коэффициент полезного действия (КПД) источника электроэнергии в согласованном режиме

$$\eta_с = P_{2с}/P_{1с} = 0{,}5.$$

Из-за такого низкого значения КПД, обусловленного большими потерями мощности и энергии в источнике питания и сетях, согласованный режим в промышленных установках не применяют.

Однако этот режим имеет преимущество перед другими режимами, заключающееся в том, что при $E = const$ мощность приемника достигает наибольшего значения. Поэтому согласованный режим применяют в цепях с малыми токами (схемы автоматики, электрических измерений, связи и т.д.), в которых КПД не имеет решающего значения.

Зависимости P_1, P_2, $P_п$ и η от тока в цепи показаны на рис. 7.1.

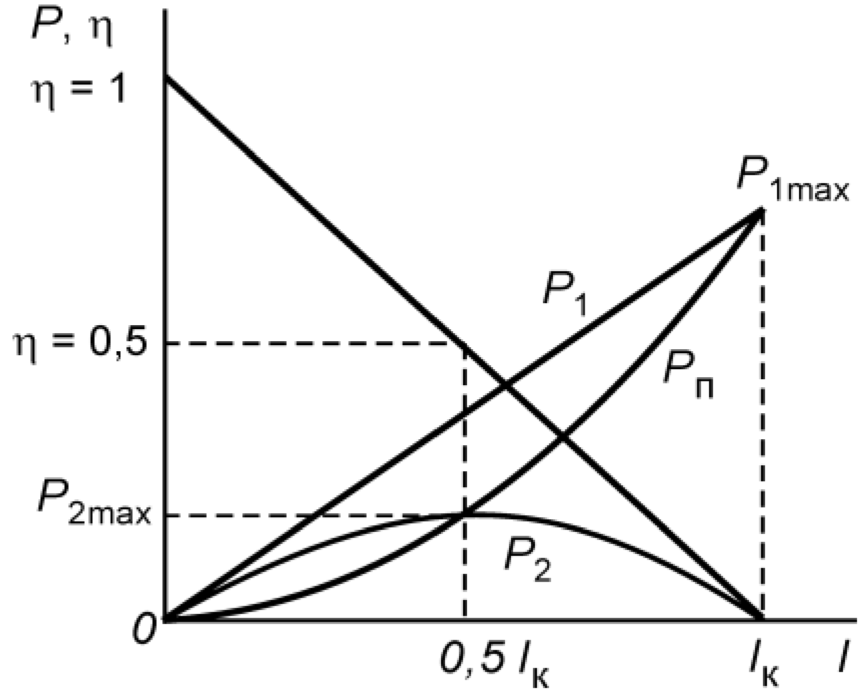


Рис. 7.1. Энергетические зависимости в цепях постоянного тока

При их построении принималось во внимание, что $E = const$ и $R_{вт} = const$. Зависимость $P_1(I) = EI$ имеет линейный характер. Мощность потерь энергии в источнике параболически зависит от тока, причем при токе короткого замывания она имеет максимальное значение:

$$P_{\text{п}} = R_{\text{вт}} I_k^2 = R_{\text{вт}} \left(\frac{E}{R_{\text{вт}}}\right)^2 = \frac{E^2}{R_{\text{вт}}} = P_{1max}.$$

Мощность электроприемника P_{2max} имеет наибольшее значение при согласованном режиме, т.е. при $I = 0{,}5 I_{\text{к}}$.

Так как для КПД справедливо следующее равенство

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1 - P_{\text{п}}}{P_1} = 1 - \frac{R_{\text{вт}} I^2}{EI} = 1 - \frac{I}{I_{\text{к}}},$$

то зависимость $\eta(I)$ является линейной. При номинальном режиме КПД много выше, чем при согласованном режиме. Для большинства промышленных источников электроэнергии при номинальном режиме $\eta = 0{,}8 \ldots 0{,}9$. Следовательно, $I_{\text{ном}} = (0{,}1 \ldots 0{,}2) I_{\text{к}}$, т.е. номинальный ток во много раз меньше тока короткого замыкания.

Производная и ее приложения в профессиональных задачах

Аудиторные задания (А/з):

1) Исходя из формулы (7.2) определите производную мощности электроприемника P_2 как функции по R при постоянных E и $R_{\text{вт}}$ ($E = 2$ (В), $R_{\text{вт}} = 1$ (Ом)).

2) На основе полученной производной исследуйте на монотонность функцию $P_2(R)$.

3) На основе полученной производной исследуйте на экстремум функцию $P_2(R)$.

4) На основе полученной производной исследуйте на выпуклость, вогнутость и точки перегиба функцию $P_2(R)$.

Домашние задания (Д/з):

1) Исходя из формулы (7.2) определите производную мощности электроприемника P_2 как функции по R при постоянных E и $R_{\text{вт}}$ ($E = 3$ (В), $R_{\text{вт}} = 2$ (Ом)).

2) На основе полученной производной исследуйте на монотонность функцию $P_2(R)$.

3) На основе полученной производной исследуйте на экстремум функцию $P_2(R)$.

4) На основе полученной производной исследуйте на выпуклость, вогнутость и точки перегиба функцию $P_2(R)$.

Производная и ее приложения в профессиональных задачах (Примеры)

Примеры:

1) Исходя из формулы (7.2) определите производную мощности электроприемника P_2 как функции по R при постоянных E и $R_{\text{вт}}$ ($E = 4$ (В), $R_{\text{вт}} = 3$ (Ом)).

2) На основе полученной производной исследуйте на монотонность функцию $P_2(R)$.

3) На основе полученной производной исследуйте на экстремум функцию $P_2(R)$.

4) На основе полученной производной исследуйте на выпуклость, вогнутость и точки перегиба функцию $P_2(R)$.

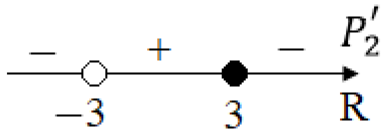
Решение:

1. $P_2 = \frac{E^2 R}{(R+R_{\text{вт}})^2}$

$$\frac{dP_2}{dR} = E^2 \cdot \left[\frac{(R+R_{\text{вт}})^2 - 2R(R+R_{\text{вт}})}{(R+R_{\text{вт}})^4}\right] = E^2 \cdot \left[\frac{R_{\text{вт}} - R}{(R+R_{\text{вт}})^3}\right] = -E^2 \cdot \frac{R - R_{\text{вт}}}{(R+R_{\text{вт}})^3}.$$

$E = 4,\ R_{\text{вт}} = 3 \quad \frac{dP_2}{dR} = -16 \cdot \frac{R-3}{(R+3)^3};\quad P_2 = \frac{16R}{(R+3)^2}$

2. $\frac{dP_2}{dR} = 0;\ R = 3,\ R \neq -3$

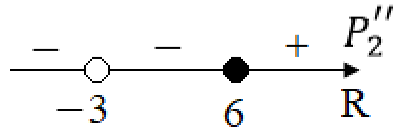


$P_2(R)$ – убывает на $(-\infty; -3) \cup [3; +\infty)$; возрастает на $(-3; 3]$.

3. $R = 3$ – максимум функции $P_2(R)$; $P_2(3) = \frac{16\cdot 3}{(3+3)^2} = \frac{16\cdot 3}{36} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ (Вт).

4. $\frac{d^2P_2}{dR^2} = -E^2 \cdot \left[\frac{(R+R_{\text{вт}})^3 - 3(R-R_{\text{вт}})(R+R_{\text{вт}})^2}{(R+R_{\text{вт}})^6}\right] = -E^2 \cdot \left[\frac{R+R_{\text{вт}}-3R+3R_{\text{вт}}}{(R+R_{\text{вт}})^4}\right] = E^2 \cdot \left[\frac{2R-4R_{\text{вт}}}{(R+R_{\text{вт}})^4}\right] = 2E^2 \cdot \frac{R-2R_{\text{вт}}}{(R+R_{\text{вт}})^4};\ E = 4;\ R_{\text{вт}} = 3;\ \frac{d^2P_2}{dR^2} = 32 \cdot \frac{R-6}{(R+3)^4}$

$\frac{d^2P_2}{dR^2} = 0;\ R = 6,\ R \neq -3$



$(-\infty; -3) \cup (-3; 6]$ – выпукла; $[6; +\infty)$ – вогнута.

$R = 6$ – точка перегиба, $P_2(6) = \frac{16\cdot 6}{(6+3)^2} = \frac{16\cdot 6}{81} = \frac{32}{27}$ (Вт).

РАЗДЕЛ 8. ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

8.1 Неопределенный интеграл. Определенный интеграл

Используемый источник – Математика СПО [1], п.8.1-8.2.

Аудиторные задания (А/з):

1) Найти интеграл: $\int x\sqrt{x}dx$.

2) Найти интеграл, используя метод подстановки: $\int \frac{xdx}{x^2-1}$.

3) Проинтегрируйте рациональную функцию: $\int \frac{dx}{(x-1)^4}$.

4) Найти интеграл, используя метод неопределенных коэффициентов: $\int \frac{x+2}{x(x-3)}dx$.

Домашние задания (Д/з):

1) Найти интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$.

2) Найти интеграл, используя метод подстановки: $\int \frac{dx}{4x^2+1}$.

3) Проинтегрируйте рациональную функцию: $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$.

4) Найти интеграл, используя метод неопределенных коэффициентов: $\int \frac{dx}{x^3-x}$.

Неопределенный интеграл. Определенный интеграл (Подготовка)

Формулы интегрирования

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$

3. $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1, x > 0$

4. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int sinxdx = -cosx + C$

8. $\int cosxdx = sinx + C$

9. $\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C$

10. $\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C, |x| < |a|$

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$

13. «Высокий» логарифм: $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, |x| \neq a$

14. «Длинный» логарифм: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

1) $\int f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)dx = \int f(t)\,dt$ – формула замены переменной (метод подстановки) $t = \varphi(x)$, $x = \psi(t)$, $\psi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную (т.е. непрерывно дифференцируема).

Используемый источник – [7].

2) Алгоритм интегрирования рациональной дроби (метод неопределенных коэффициентов).

1.Если дробь неправильная, надо выделить целую часть рациональной дроби, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочлена на многочлен, т.е. представить в виде:

$\frac{P_k(x)}{Q_n(x)} = M(x) + \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $M(x)$ – многочлен, а $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – правильная рациональная дробь.

2.Знаменатель разложим на простейшие сомножители:

$Q_n(x) = (x-a)^k \ldots (x-b)^r (x^2+px+q)^l \ldots (x^2+px+q)^s$, где многочлены (x^2+px+q) не имеют действительных корней.

3.Представим дробь в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l},$$

где $A_1, A_2, \dots, M_1, M_2, \dots$ – неопределенные коэффициенты, которые надо найти.

4.Приведем все дроби в разложении к общему знаменателю и приравняем числители в обеих частях равенства.

5.Составим систему уравнений, используя равенство многочленов, стоящих в числителе, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x.

6.Решим систему уравнений, находя некоторые коэффициенты методом частных решений, полагая равным действительным корням знаменателя.

7.Подставим найденные коэффициенты в разложение дроби. Проинтегрируем простейшие дроби.

Неопределенный интеграл. Определенный интеграл (Примеры)

Примеры:

1) Найти интеграл: $\int x\sqrt[5]{x}dx$.

2) Найти интеграл, используя метод подстановки: $\int \frac{2xdx}{1-x^2}$.

3) Проинтегрируйте рациональную функцию: $\int \frac{dx}{(x-1)^5}$.

4) Найти интеграл, используя метод неопределенных коэффициентов: $\int \frac{x+5}{(x+1)(x+6)}dx$.

Решение:

1. $\int x\sqrt[5]{x}dx = \int x^{\frac{6}{5}}dx = \frac{x^{\frac{11}{5}}}{11/5} + C = \frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}} + C.$

2. $\int \frac{2xdx}{1-x^2}$

$x = sint;\ dx = costdt;\ t = arcsinx$

$\int \frac{2xdx}{1-x^2} = 2\int \frac{sintcostdt}{cos^2t} = 2\int \frac{sintdt}{cost} = -2\int \frac{d(cost)}{cost} = -2ln|cost| + C =$ $-2ln|cos(arcsinx)| + C;$

$cos(arcsinx) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \int \frac{2xdx}{1-x^2} = -2ln\sqrt{1-x^2} + C = 2ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right) + C.$

3. $\int \frac{dx}{(x-1)^5} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^4} + C.$

4. $\int \frac{x+5}{(x+1)(x+6)} dx$

$\frac{x+5}{(x+1)(x+6)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+6};\ x + 5 = A(x+6) + B(x+1);$

$\begin{array}{l|l} x & 1 = A + B \\ x^0 & 5 = 6A + B \end{array} \quad \begin{cases} A = 1 - B \\ 5 = 6 - 6B + B \end{cases} \quad \begin{cases} 5B = 1 \\ A = 1 - B \end{cases} \quad \begin{cases} B = \frac{1}{5} \\ A = \frac{4}{5} \end{cases} \quad \frac{x+5}{(x+1)(x+6)} = \frac{4}{5} \cdot$

$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x+6};$

$\int \frac{x+5}{(x+1)(x+6)} dx = \frac{4}{5} \cdot ln|x+1| + \frac{1}{5} \cdot ln|x+6| + C.$

8.2 Приложения определенных интегралов

Используемый источник – Математика СПО [1], п.8.3.

Аудиторные задания (А/з):

1) Вычислите определенный интеграл: $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx.$

2) Вычислите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$y = -x^2, y + x + 2 = 0.$

3) Вычислите длину дуги кривой:

$y = lncosx$ (от $x = \frac{2\pi}{3}$ до $x = \frac{4\pi}{3}$). (Применить формулу «высокого» логарифма: $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, |x| \neq a$).

4) Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями:

$xy = -2;\ x = 1;\ x = 2;\ y = 0$ (вокруг оси Ox).

Домашние задания (Д/з):

1) Вычислите определенный интеграл: $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx.$

2) Вычислите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$y = \frac{16}{x^2}, y = 17 - x^2$ $(x > 0, y > 0)$.

3) Вычислите длину дуги кривой:

$y = lnsinx$ (от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$).

4) Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями:

$x = y^2;\ x = 1;\ y = 0$ (вокруг осей Ox и Oy).

Указание:

1) $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ – формула Ньютона-Лейбница.

$F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

2) Пусть функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$, причем $f_1(x) \leq f_2(x)$ для любого значения x из $[a, b]$. Тогда площадь фигуры G, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, вычисляется по формуле

$$S(G) = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx.$$

3) $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}dx$ – длина дуги кривой $y = f(x)$ между точками a и b.

4) $V_{ox} = \pi \int_a^b y^2 dx$ – объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f_1(x)$.

$V_{oy} = \pi \int_c^d x^2 dy$ – объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $x = f_2(y)$.

Приложения определенных интегралов (Примеры)

Примеры:

1) Вычислите определенный интеграл: $\int_0^5 e^{\frac{x}{9}}dx$.

2) Вычислите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$y = -2x^2, y - x + 3 = 0.$

3) Вычислите длину дуги кривой:

$y = lncosx$ (от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{3}$). (Применить формулу «высокого» логарифма: $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, |x| \neq a$).

4) Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями:

$xy = 3;\ x = 2;\ x = 5;\ y = 0$ (вокруг оси Ox).

<u>Решение</u>:

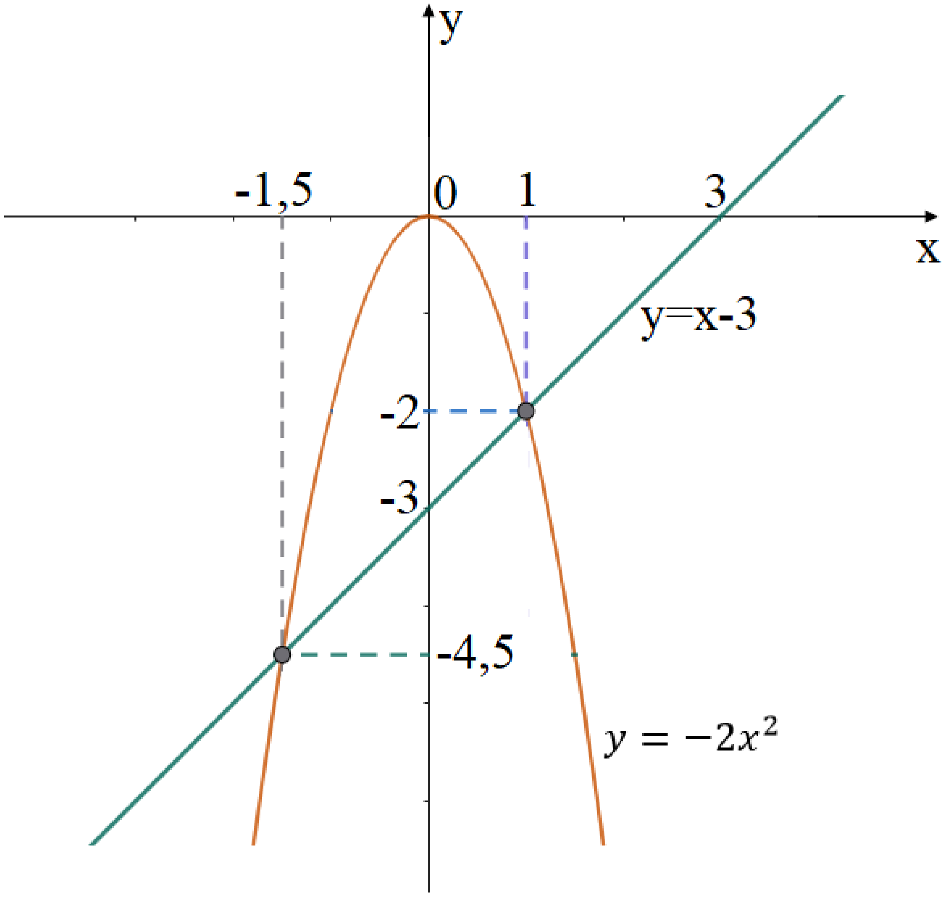
1. $\int_0^5 e^{\frac{x}{9}} dx = 9 \cdot e^{\frac{x}{9}}\Big|_0^5 = 9 \cdot \left(e^{\frac{5}{9}} - e^0\right) = 9 \cdot \left(\sqrt[9]{e^5} - 1\right).$

2. $y = -2x^2, y - x + 3 = 0$

$-2x^2 = x - 3;\ 2x^2 + x - 3 = 0;\ D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25;$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{25}}{4} = -\frac{3}{2} = -1{,}5;\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{25}}{4} = 1;$

$y(-1{,}5) = -2 \cdot (-1{,}5)^2 = -4{,}5;\ y(1) = -2 \cdot 1^2 = -2.$



$$S = \int_{-1,5}^{1}[-2x^2 - (x-3)]dx = \int_{-1,5}^{1}(-2x^2 - x + 3)dx = \left(-\frac{2x^2}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_{-1,5}^{1} = \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 3\right) - \left(-\frac{2(-1,5)^2}{3} - \frac{(-1,5)^2}{2} + 3\cdot(-1,5)\right) = -\frac{7+18}{6} - \left(\frac{6,75}{6} - \frac{2,25}{2} - 4,5\right) = \frac{11}{6} - \frac{27}{12} + \frac{9}{8} + \frac{9}{2} = \frac{44-54+27+108}{24} = \frac{125}{24}.$$

3. $y = lncosx$ (от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{3}$)

$$y' = -\frac{sinx}{cosx} = -tgx$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+tg^2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{cosx} =$$

$$\left| \begin{matrix} cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ t = tg\frac{x}{2}, t_1 = 0, t_2 = \sqrt{3} \end{matrix} \right| = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2dt(1+t^2)}{(1+t^2)(1-t^2)} = 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1-t^2} = 2\cdot\frac{1}{2}ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Big|_0^{\sqrt{3}} = ln\left|\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right| - ln1 = ln\left|\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right|.$$

4. $xy = 3;\ x = 2;\ x = 5;\ y = 0$ (вокруг оси Ox).

$V_{ox} = \pi \int_a^b y^2(x)dx = \pi \int_2^5 \frac{9}{x^2} dx = -\frac{9\pi}{x}\Big|_2^5 = -9\pi\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) = 9\pi \cdot \frac{3}{10} = \frac{27\pi}{10} = 2{,}7\pi.$

8.3 Контрольная работа «Интеграл и его приложения»

Используемый источник – Математика СПО [1], п.8.1-8.2.

Контрольная работа «Интеграл и его приложения»

Аудиторные задания (А/з):

1) Найти интеграл: $\int(2sinx + 3cosx)dx.$

2) Найти интеграл, используя метод подстановки: $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$

3) Проинтегрируйте рациональную функцию: $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7}dx.$

4) Найти интеграл, используя метод неопределенных коэффициентов: $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}.$

Домашние задания (Д/з):

1) Вычислите определенный интеграл: $\int_{-2}^{3}(2x^3 - x^2 - 5)dx.$

2) Вычислите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$y = sinx, y = cosx, x = 0, x = \frac{\pi}{4}.$

3) Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой

$y = x^3$ от точки $x = 0$ до точки $x = \frac{1}{2}.$

4) Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями:

$y = sinx;\ y = 0\ ;\ x = \frac{\pi}{2}$ (вокруг оси Ox).

Указание:

$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$ – площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох дуги кривой $y = f(x)$ то точки $x = a$ до точки $x = b$.

Контрольная работа «Интеграл и его приложения» (Подготовка)

1) Найти интеграл: $\int(5sinx + 7cosx)dx$.

2) Найти интеграл, используя метод подстановки: $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$.

3) Проинтегрируйте рациональную функцию: $\int \frac{x-3}{x^2-6x+8}dx$.

4) Найти интеграл, используя метод неопределенных коэффициентов: $\int \frac{dx}{x(x+2)^2}$.

5) Вычислите определенный интеграл: $\int_{-3}^{2}(3x^4 - x^3 - 4x - 1)dx$.

6) Вычислите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$y = sinx, y = cosx, x = 0, x = \frac{\pi}{3}$.

7) Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох дуги кривой

$y = 2x^3$ от точки $x = 0$ до точки $x = \frac{1}{3}$.

8) Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной указанными линиями:

$y = cosx;\ y = 0\ ;\ x = \frac{\pi}{4}$ (вокруг оси Ох).

Решение:

1. $\int(5sinx + 7cosx)dx = 5\int sinxdx + 7\int cosxdx = -5cosx + 7sinx + C.$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{4dx}{\sqrt{9-16x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x)}{\sqrt{9-16x^2}} = \frac{1}{4}arcsin\frac{4x}{2} + C.$

3. $\int \frac{x-3}{x^2-6x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-6)dx}{x^2-6x+8} = \frac{1}{2}ln|x^2 - 6x + 8| + C.$

4. $\int \frac{dx}{x(x+2)^2}$

$\frac{1}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+2}$; $1 = A(x+2)^2 + Bx + Cx(x+2)$;

$$\begin{array}{r|c} x^2 & 0 = A + C \\ x & 0 = 4A + B + 2C \\ x^0 & 1 = 4A \end{array} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ C = -\frac{1}{4} \\ B = -4A - 2C \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ C = -\frac{1}{4} \\ B = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

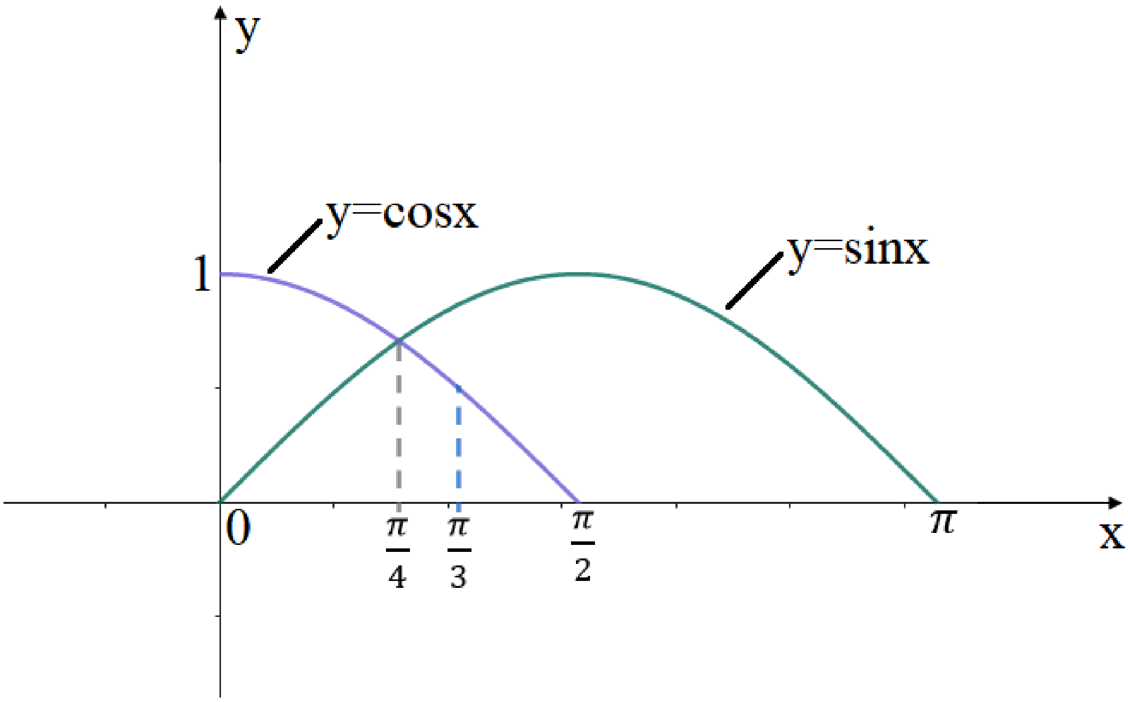
$\frac{1}{x(x+2)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+2}$;

$\int \frac{dx}{x(x+2)^2} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{(x+2)^2} - \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{4} ln|x| + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{1}{4} ln|x+2| + C$.

5. $\int_{-3}^{2} (3x^4 - x^3 - 4x - 1)dx = \left(\frac{3x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - 2x^2 - x\right)\Big|_{-3}^{2} = \left(\frac{3 \cdot 32}{5} - 4 - 8 - 2\right) - \left(-\frac{729}{5} - \frac{81}{4} - 18 + 3\right) = 165 + 1 + 20{,}25 = 186{,}25.$

6. $y = sinx, y = cosx, x = 0, x = \frac{\pi}{3}$

$sinx = cosx$; $tgx = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$



$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (cosx - sinx)dx = (sinx + cosx)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$

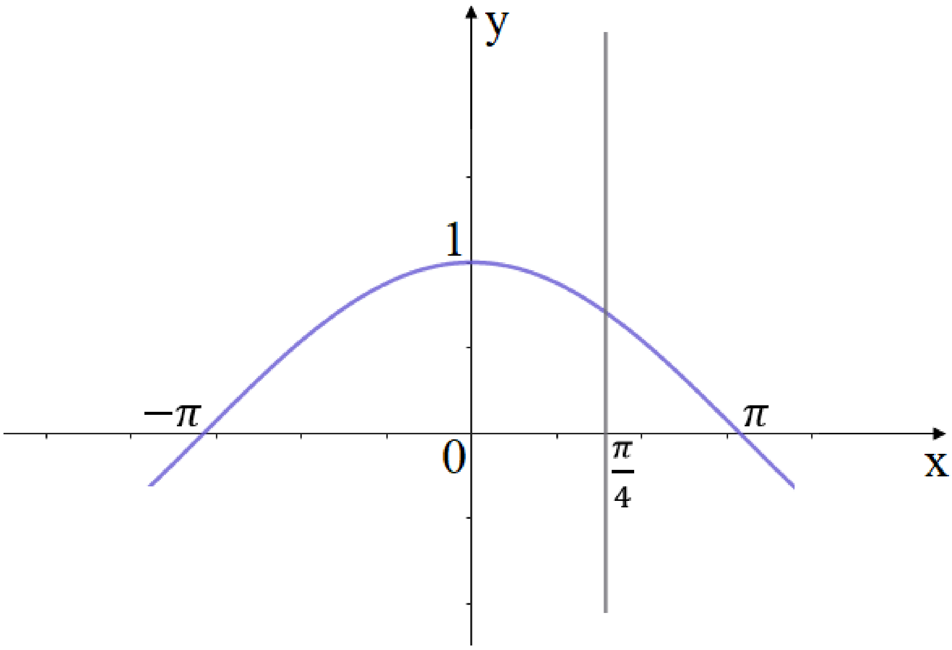
7. $y = 2x^3, \ x = 0, \ x = \frac{1}{3}$

$y' = 6x^2$

$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx = 2\pi \int_0^{\frac{1}{3}} 2x^3\sqrt{1+36x^4}dx =$

$\frac{\pi}{36}\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+36x^4}d(1+36x^4) = \frac{\pi}{36}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+36x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{54}\cdot\left[\left(1+36\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{\pi}{54}\cdot\left[\left(1+\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{\pi}{54}\cdot\left[\left(\frac{13}{9}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{\pi}{54}\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^3 - 1\right) = \frac{\pi}{54}\cdot\left(\frac{13\sqrt{13}}{27} - 1\right) = \frac{13\sqrt{13}-27}{1458}\pi.$

8. $y = cosx;\ \ y = 0\ ;\ \ x = \frac{\pi}{4}$ (вокруг оси Ox).



$V_{ox} = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2xdx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+cos2x)dx = \frac{\pi}{2}\cdot\left(x+\frac{sin2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi+2}{4} = \frac{\pi(\pi+2)}{8}.$

8.4 Интеграл и его приложения в профессиональных задачах

Используемый источник – [2].

2.3. Действующие и средние значения синусоидальных ЭДС, напряжения и тока

Как постоянный, так и синусоидальный токи используются для совершения какой-либо работы, в процессе которой электроэнергия преобразуется в другие виды энергии (тепловую, механическую и т.д.). Для количественной оценки синусоидального тока (ЭДС и напряжения), который в течение времени непрерывно периодически изменяется, используют значение постоянного тока, эквивалентное значению синусоидального тока по совершаемой работе. Такое значение будет действующим для синусоидального тока.

Действующим значением синусоидального тока называют такое значение постоянного тока, при котором в одном и том же резисторе с сопротивлением R за время одного периода T выделяется столько же теплоты, сколько при синусоидальном токе.

При синусоидальном токе $i = I_m sin\omega t$ количество теплоты Q_-, выделяемое в резисторе R за время T,

$$Q_{\sim} = \int_0^T i^2 R dt,$$

а при постоянном токе

$$Q_- = RI^2 T,$$

Согласно определению, $Q_- = Q_{\sim}$, тогда

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}. \quad (8.1)$$

Таким образом, действующее значение синусоидального тока является его среднеквадратичным значением за время, равное одному периоду.

Чтобы найти соотношение между максимальным и действующим значениями синусоидального тока, надо вычислить интеграл в (8.1):

$$\int_0^T i^2 dt = I_m^2 \int_0^T sin^2\omega t dt = I_m^2 \int_0^T \frac{dt}{2} - I_m^2 \int_0^T \frac{cos2\omega t}{2} dt.$$

Так как $\int_0^T cos2\omega t dt = 0$, получаем

$$\int_0^T i^2 dt = \frac{I_m^2}{2}\int_0^T dt = \frac{I_m^2 T}{2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (2.5), получим

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707 I_m. \tag{8.2}$$

Аналогично, действующие значения ЭДС и напряжений равны соответственно

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707 E_m. \tag{8.3}$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707 U_m. \tag{8.4}$$

Действующие значения синусоидальных величин в $\sqrt{2}$ раз меньше их амплитудных значений. Для периодических величин, изменяющихся по другому закону, это соотношение будет другим. Действующие значения синусоидального тока, ЭДС и напряжения обозначают прописной буквой без индексов, как постоянный ток, ЭДС и напряжение.

В большинстве электроизмерительных приборов, измеряющих ток и напряжение, используется принцип теплового или электродинамического эффекта. Поэтому они всегда показывают действующее значение, зная которое можно вычислить амплитуду по формулам (8.2)–(8.4). Так, например, если вольтметр показывает 220 В синусоидального напряжения, то амплитуда этого напряжения равна $\sqrt{2} \cdot 220 = 311$ В.

Под средним значением синусоидальной величины понимают ее среднеарифметическое значение. Если определять среднее значение синусоидальных величин за период, то оно будет равно нулю, так как положительная и отрицательная полуволны синусоидальных кривых совпадают по форме. Поэтому среднее значение синусоидального тока, ЭДС и напряжения определяют за полпериода.

За среднее значение синусоидального тока принимают такое значение постоянного тока, при котором за полпериода переносится такой же электрический заряд, что и при синусоидальном токе.

Согласно этому можно написать

$$I_{\text{ср}} \frac{T}{2} = \int_0^{T/2} idt, \qquad (8.5)$$

где $I_{\text{ср}}$ – среднее значение тока.

Для синусоидального тока $i = I_m sin\omega t$ получим

$$\int_0^{T/2} idt = I_m \int_0^{T/2} sin\omega tdt = \frac{I_m T}{\pi}.$$

Подставляя это выражение в (2.9), имеем

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} I_m = 0{,}637 I_m.$$

Аналогично, для ЭДС и напряжения

$$E_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} E_m = 0{,}637 E_m; \quad U = \frac{2}{\pi} U_m = 0{,}637 U_m.$$

Как и следовало ожидать, среднее значение меньше действующего. Отношение действующего значения к среднему называют коэффициентом формы периодической кривой. Для синусоидальной кривой коэффициент формы

$$k_{\text{ф}} = \frac{I}{I_{\text{ср}}} \cong 1{,}11.$$

Для периодической кривой, имеющей прямоугольную форму, $I = I_{\text{ср}} = I_m$ и $k_{\text{ф}} = 1$. Чем больше коэффициенты формы кривой отличается от единицы, тем больше кривая отличается от прямоугольной формы, т.е. имеет более «пиковый» характер.

Интеграл и его приложения в профессиональных задачах

Аудиторные задания (А/з):

1) Из формулы (8.1) получить формулу для определения квадрата действующего значения синусоидального тока I^2.

2) По полученной формуле определить квадрат действующего значения синусоидального тока I^2 при $T = 5\pi$, $i = 2sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$, затем найти само действующее значение I $(I > 0)$.

Домашние задания (Д/з):

1) Из формулы (8.5) получить формулу для определения среднего значения синусоидального тока $I_{ср}$.

2) По полученной формуле определить среднее значение синусоидального тока $I_{ср}$ при $T = \frac{\pi}{2}$, $i = 3cos\left(4t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Интеграл и его приложения в профессиональных задачах (Примеры)

Примеры:

1) Из формулы (8.1) получить формулу для определения произведения квадрата действующего значения синусоидального тока I^2 и периода T (I^2T).

2) По полученной формуле определить квадрат действующего значения синусоидального тока I^2 при $T = 6\pi,\ i = 3sin\left(4t + \frac{3\pi}{2}\right)$, затем найти само действующее значение I ($I > 0$).

3) Из формулы (8.5) получить формулу для определения произведения среднего значения синусоидального тока $I_{ср}$ и периода T.

4) По полученной формуле определить среднее значение синусоидального тока $I_{ср}$ при $T = \frac{\pi}{3}$, $i = 4cos\left(5t - \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение:

1. $I^2 \cdot T = \int_0^T i^2 dt.$

2. $T = 6\pi, i = 3sin\left(4t + \frac{3\pi}{2}\right)$

$i^2 = 9 \cdot sin^2\left(4t + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{9}{2} \cdot \big(1 - cos(8t + 3\pi)\big)$

$I^2 \cdot 6\pi = \frac{9}{2} \cdot \int_0^{6\pi}\big(1 - cos(8t + 3\pi)\big)dt = \frac{9}{16} \cdot \int_0^{6\pi}\big(1 - cos(8t + 3\pi)\big)d(8t + 3\pi) = \frac{9}{16} \cdot [(8t + 3\pi)|_0^{6\pi} - sin(8t + 3\pi)|_0^{6\pi}] = \frac{9}{16} \cdot [(51\pi - 3\pi) - 0] = 27\pi \Rightarrow$

$I^2 = \frac{9}{2}$,

$I = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$

3. $I_{\text{ср}} \cdot T = 2\int_0^{T/2} i dt.$

4. $T = \frac{\pi}{3}, i = 4cos\left(5t - \frac{\pi}{3}\right)$

$\int_0^{T/2} i dt = \int_0^{\pi/6} 4cos\left(5t - \frac{\pi}{3}\right) dt = \frac{4}{5} sin\left(5t - \frac{\pi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{4}{5} \cdot \left[sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) - sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{4}{5} \cdot \left(sin\frac{\pi}{2} + sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{5} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

$I_{\text{ср}} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} i dt = \frac{2}{\pi/3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{24}{5\pi} \cdot \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{24(2+\sqrt{3})}{10\pi} = \frac{12(2+\sqrt{3})}{5\pi}.$

РАЗДЕЛ 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

9.1 Понятие о дифференциальном уравнении. Простейшие уравнения первого порядка

Используемый источник – Математика СПО [1], п.9.1-9.2.

Аудиторные задания (А/з):

1) Найдите общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными: $y' = 6x^3$.

2) Проинтегрируйте дифференциальное уравнение и постройте интегральную кривую, проходящую через данную точку: $ydx + xdy = 0$; $A(-2, -4)$.

3) Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $\frac{y}{y'} = lny$ при $x = 2$, $y = 1$.

4) Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $(0, 2)$, тангенс угла наклона которой во всякой точке равен $\frac{1}{3y^2}$.

Домашние задания (Д/з):

1) Найдите общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными: $y' = 1 + \frac{1}{y^2}$.

2) Проинтегрируйте дифференциальное уравнение и постройте интегральную кривую, проходящую через данную точку: $x^2y' + y^2 = 0$; $A(1, -1)$.

3) Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $2y'\sqrt{x} = y$ при $x = 4$, $y = 1$.

4) Тело движется со скоростью, которая в каждый момент времени t определяется по формуле $V = 5t^2 - 2$ (м/с). Найдите закон движения тела и путь, пройденный телом за 3 с от начала движения.

Указание:

Используемый источник – [8].

1) $M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$ – уравнения с разделяющимися переменными.

$\int \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = -\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx$ – интегрирование уравнения с разделяющимися переменными.

2) Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется решение $y = \varphi(x, C)$, зависящее от одной произвольной постоянной C.

3) Частным решением называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$, если в последнем произвольной постоянной C придать определенное значение $C = C_0$.

Понятие о дифференциальном уравнении. Простейшие уравнения первого порядка (Примеры)

Примеры:

1) Найдите общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными: $y' = 7x^4$.

2) Проинтегрируйте дифференциальное уравнение и постройте интегральную кривую, проходящую через данную точку: $y^2dx + x^2dy = 0$; $A(-4, -2)$.

3) Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $\frac{y^2}{y'} = x$ при $x = 1, y = 1$.

4) Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $(1, -2)$, тангенс угла наклона которой во всякой точке равен $\frac{1}{3x^2}$.

5) Тело движется со скоростью, которая в каждый момент времени t определяется по формуле $V = 3t^2 + 4$ (м/с). Найдите закон движения тела и путь, пройденный телом за 5 с от начала движения.

Решение:

1. $y' = 7x^4$,

$\frac{dy}{dx} = 7x^4;\ y = 7 \cdot \frac{x^5}{5} + C.$

2. $y^2dx + x^2dy = 0$; $A(-4, -2)$

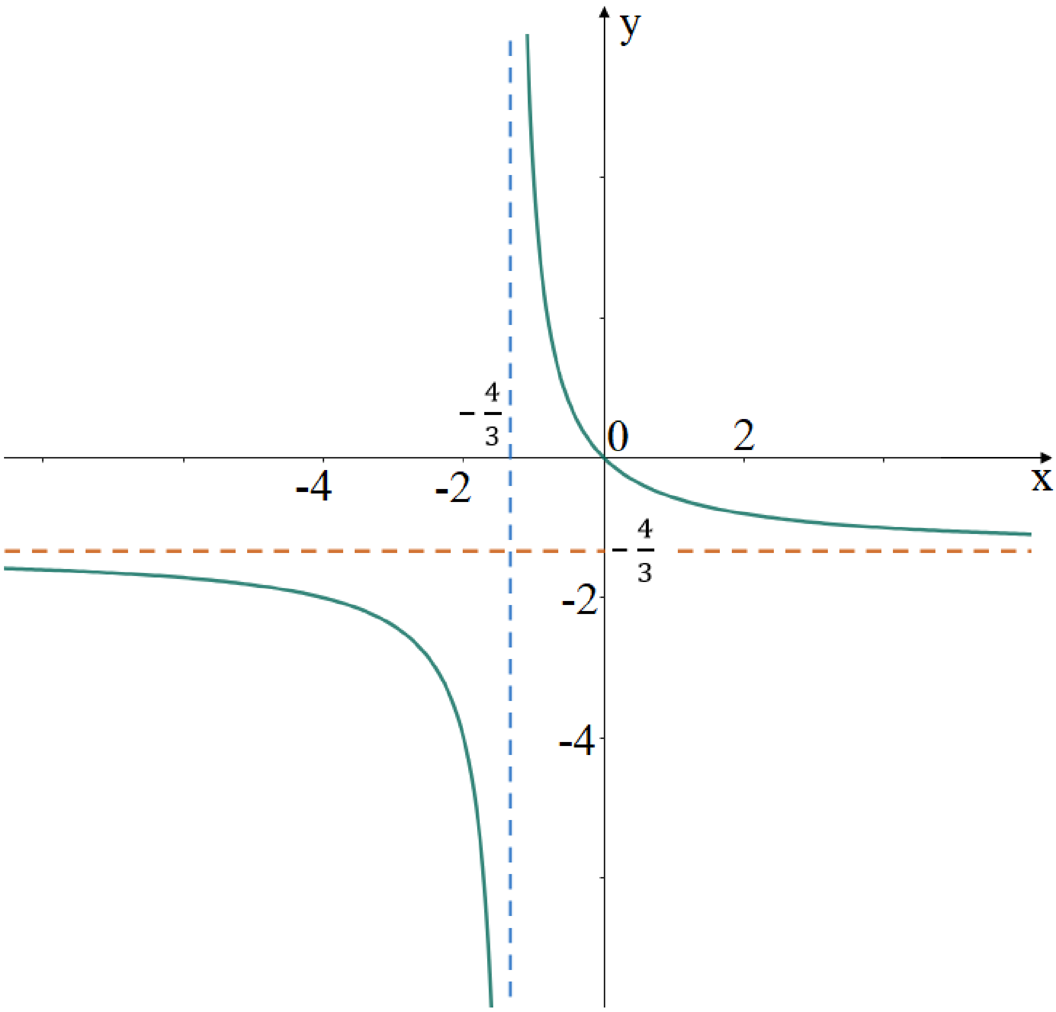
$y^2dx = -x^2dy;\ \int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{dx}{x^2};\ -\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + C = \frac{1+Cx}{x};\ y = -\frac{x}{1+Cx}$

$-2 = -\frac{-4}{1-4C};\ 1 - 4C = -2;\ 4C = 3;\ C = \frac{3}{4};\ y = -\frac{x}{1+\frac{3}{4}x}$

$x = -\frac{4}{3}$ – вертикальная асимптота;

$y = kx + b;$ $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{1+\frac{3}{4}x}\right) = 0;$ $b = \lim\limits_{x\to\infty}(y - kx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{x}{1+\frac{3}{4}x}\right) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{3}{4}}\right) = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}$ – горизонтальная асимптота.

x	-4	-2	0	1	2
y	-2	-4	0	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{4}{5}$



3. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x}$; $\frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{x}$; $\int\frac{dy}{y^2}=\int\frac{dx}{x}$; $-\frac{1}{y}=ln|xC|$; $y=-\frac{1}{ln|xC|}$; $1=-\frac{1}{lnC}$; $lnC=-1$;

$C=e^{-1}=\frac{1}{e}$; $-\frac{1}{y}=ln\left|\frac{x}{e}\right|=ln|x|-1$; $y=\frac{1}{1-ln|x|}$.

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x^2}$; $A(1,-2)$;

$y=\int\frac{dx}{3x^2}=-\frac{1}{3x}+C$; $x=1$; $y=-2$; $-2=-\frac{1}{3}+C$; $C=-2+\frac{1}{3}=\frac{1-6}{3}=-\frac{5}{3}$;

$y=-\frac{1}{3x}-\frac{5}{3}=-\frac{1+5x}{3x}$.

5. $V=3t^2+4$;

$x(t)=\int vdt=\int(3t^2+4)dt=3\cdot\frac{t^3}{3}+4t+C=t^3+4t+C$;

$S=\int_0^5 vdt=(t^3+4t)|_0^5=125+4\cdot5=145$ (м).

9.2 Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка

Используемый источник – Математика СПО [1], п.9.3.

Аудиторные задания (А/з):

1) Найдите общее решение линейного дифференциального: $y' - \frac{3y}{x} = x$.

2) Найти частное решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях: $t^2 \frac{ds}{dt} = 2ts - 3$ при $t = -1$, $s = 1$.

3) Решите дифференциальное уравнение: $y'' - 4y' + 3y = 0$.

4) Проинтегрируйте уравнение: $y'' = 2sinxcos^2x - sin^3x$.

Домашние задания (Д/з):

1) Найдите общее решение линейного дифференциального: $xy' - y = x^2cosx$.

2) Найти частное решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях: $y' - \frac{y}{x} = 3x$ при $x = 1$, $y = 3$.

3) Решите дифференциальное уравнение: $y'' + 3y' + 2y = 0$.

4) Решите задачу Коши для уравнения $y'' = \frac{1}{cos^2x}$, если при $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{ln2}{2}$, $y' = 1$.

Указание:

1) $y' + P(x)y = Q(x)$ – линейное ДУ 1-ого порядка

$y = uv$; $y' = u'v + uv'$ – метод Бернулли

$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$; $u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$; решается $v' = -P(x)v$;

полученное $v(x)$ без константы интегрирования подставляется в уравнение $u'v = Q(x)$;

находится $u(x)$ с константой интегрирования; затем записывается общее решение $y = uv$.

2) $y'' + py' + q = 0$ – однородное ДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами.

$p, q \in R$; $k^2 + pk + q = 0$ – характеристическое уравнение; k_1, k_2 – корни характеристического уравнения.

а) если $k_1, k_2 \in R$; $k_1 \neq k_2$, $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ – общее решение ДУ;

б) если $k_1, k_2 \in R$; $k_1 = k_2$ (например, при $D = 0$), $y = (C_1 + C_2 x)e^{k_1 x}$ – общее решение ДУ;

в) если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексные числа (например, при $D < 0$), $y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)$ – общее решение ДУ.

<u>Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка (Примеры)</u>

<u>Примеры</u>:

1) Найдите общее решение линейного дифференциального: $y' - \frac{y}{x} = x^3$.

2) Найти частное решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях: $t^2 \frac{ds}{dt} = 5ts - 4$ при $t = -1$, $s = 1$.

3) Решите дифференциальное уравнение: $y'' - 5y' + 4y = 0$.

4) Проинтегрируйте уравнение: $y'' = 2cosx sin^2 x - cos^3 x$.

5) Решите задачу Коши для уравнения $y'' = \frac{1}{sin^2 x}$, если при $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 2ln2$, $y' = 2$.

<u>Решение</u>:

1. $y' - \frac{y}{x} = x^3$,

$y = uv$; $y' = u'v + uv'$; $u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x^3$; $u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x^3$;

$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$; $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$; $ln|v| = ln|x|$; $v = x$; $\frac{du}{dx} \cdot x = x^3$; $\frac{du}{dx} = x^2$; $u = \frac{x^3}{3} + C$;

$y = uv = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)x.$

2. $t^2\frac{ds}{dt} = 5ts - 4, t = -1, s = 1$

$s = uv;\quad s' = u'v + uv';\quad t^2(u'v + uv') - 5tuv = -4;\quad t^2u'v + t^2uv' - 5tuv = -4;$

$t^2u'v + u(t^2v' - 5tv) = -4;\quad t^2\frac{dv}{dt} = 5tv;\quad \int\frac{dv}{v} = 5\int\frac{dt}{t};\quad ln|v| = 5ln|t|;$ $v = t^5;$

$t^2\cdot\frac{du}{dt}\cdot t^5 = -4;\ \frac{du}{dt} = -\frac{4}{t^7};\ u = -4\cdot\frac{1}{(-6)\cdot t^6} + C = \frac{2}{3t^6} + C;$

$s = uv = \left(\frac{2}{3t^6} + C\right)t^5;\quad t = -1,\ s = 1;\quad 1 = \left(\frac{2}{3} + C\right)\cdot(-1);\quad C + \frac{2}{3} = -1;$ $C = -\frac{5}{3};$

$s = \left(\frac{2}{3t^6} - \frac{5}{3}\right)t^5.$

3. $y'' - 5y' + 4y = 0$

$k^2 - 5k + 4 = 0;\ k_1 = 1; k_2 = 4;\ y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} = C_1e^x + C_2e^{4x}.$

4. $y'' = 2cosxsin^2x - cos^3x$

$y' = \int(2cosxsin^2x - cos^3x)dx = 2\int cosxsin^2xdx - \int cos^3xdx = 2\int sin^2xd(sinx) - \int(1 - sin^2x)d(sinx) = \frac{2}{3}sin^3x - sinx + \frac{1}{3}sin^3x + C_1 = sin^3x - sinx + C_1;$

$y = \int(sin^3x - sinx + C_1)dx = \int sin^3xdx - \int sinxdx + C_1x = -\int(1 - cos^2x)d(cosx) + cosx + C_1x = \frac{1}{3}cos^3x - cosx + cosx + C_1x + C_2 = \frac{cos^3x}{3} + C_1x + C_2.$

5. $y'' = \frac{1}{sin^2x}, x = \frac{\pi}{4}, y = 2ln2, y' = 2$

$y' = \int\frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C_1;\qquad y = \int(-ctgx + C_1)dx = -\int\frac{cosx}{sinx}dx + C_1x = -\int\frac{d(sinx)}{sinx} + C_1x = -ln|sinx| + C_1x + C_2$

$x = \frac{\pi}{4},\ y = 2ln2,\ y' = 2;\quad 2 = -1 + C_1;\quad C_1 = 3;\quad 2ln2 = -ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + C_1\frac{\pi}{4} + C_2;$

$2ln2 = -\left(-\frac{1}{2}ln2\right) + \frac{3\pi}{4} + C_2;$ $C_2 = \frac{3}{2}ln2 - \frac{3\pi}{4};$ $y = -ln|sinx| + 3x + 1{,}5ln2 - 0{,}75\pi.$

9.3 Контрольная работа «Дифференциальные уравнения»

Используемый источник – Математика СПО [1], п.9.1-9.3.

Контрольная работа «Дифференциальные уравнения»

Аудиторные задания (А/з):

1) Найдите общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными: $y' = 3^{x+y}$.

2) Проинтегрируйте дифференциальное уравнение и постройте интегральную кривую, проходящую через данную точку: $y' = \sqrt[3]{y^2}$; $A(0, 1)$.

3) Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y' = (2y + 1)ctgx$ при $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

4) Определите кривую, проходящую через точку $A(-1, 1)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен квадрату ординаты точки касания.

Домашние задания (Д/з):

1) Найдите общее решение линейного дифференциального: $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$.

2) Найти частное решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях: $y' - \frac{y}{xlnx} = xlnx$ при $x = e, y = \frac{1}{2}e^2$.

3) Решите дифференциальное уравнение: $y'' - 4y' + 13y = 0$.

4) Ускорение движущейся прямолинейно точки изменяется по закону $a = 8t - 2$. Найдите уравнение её движения, если в момент $t = 3$ с её скорость $V = 6$ м/с и пусть $S = 15$ м.

Контрольная работа «Дифференциальные уравнения» (Подготовка)

1) Найдите общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными: $y' = 4^{x-y}$.

2) Проинтегрируйте дифференциальное уравнение и постройте интегральную кривую, проходящую через данную точку: $y' = \sqrt[5]{y^2}$; $A(1,1)$.

3) Найдите частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y' = (3y+2)tgx$ при $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{1}{3}$.

4) Определите кривую, проходящую через точку $A(1,-1)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен кубу ординаты точки касания.

5) Найдите общее решение линейного дифференциального: $y' + \frac{y}{x} = e^{x^2}$.

6) Найти частное решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях: $y' + \frac{y}{xlnx} = -xln^{-1}x$ при $x = e$, $y = e^2$.

7) Решите дифференциальное уравнение: $y'' - 3y' + 9y = 0$.

8) Ускорение движущейся прямолинейно точки изменяется по закону $a = 7t - 3$. Найдите уравнение её движения, если в момент $t = 4$ с её скорость $V = 8$ м/с и пусть $S = 20$ м.

Решение:

1. $y' = 4^{x-y}$; $y' = 4^x \cdot 4^{-y}$; $\frac{dy}{dx} = 4^x \cdot 4^{-y}$; $\int 4^y dy = \int 4^x dx$; $\frac{4^y}{ln4} = \frac{4^x}{ln4} + \frac{C}{ln4}$;

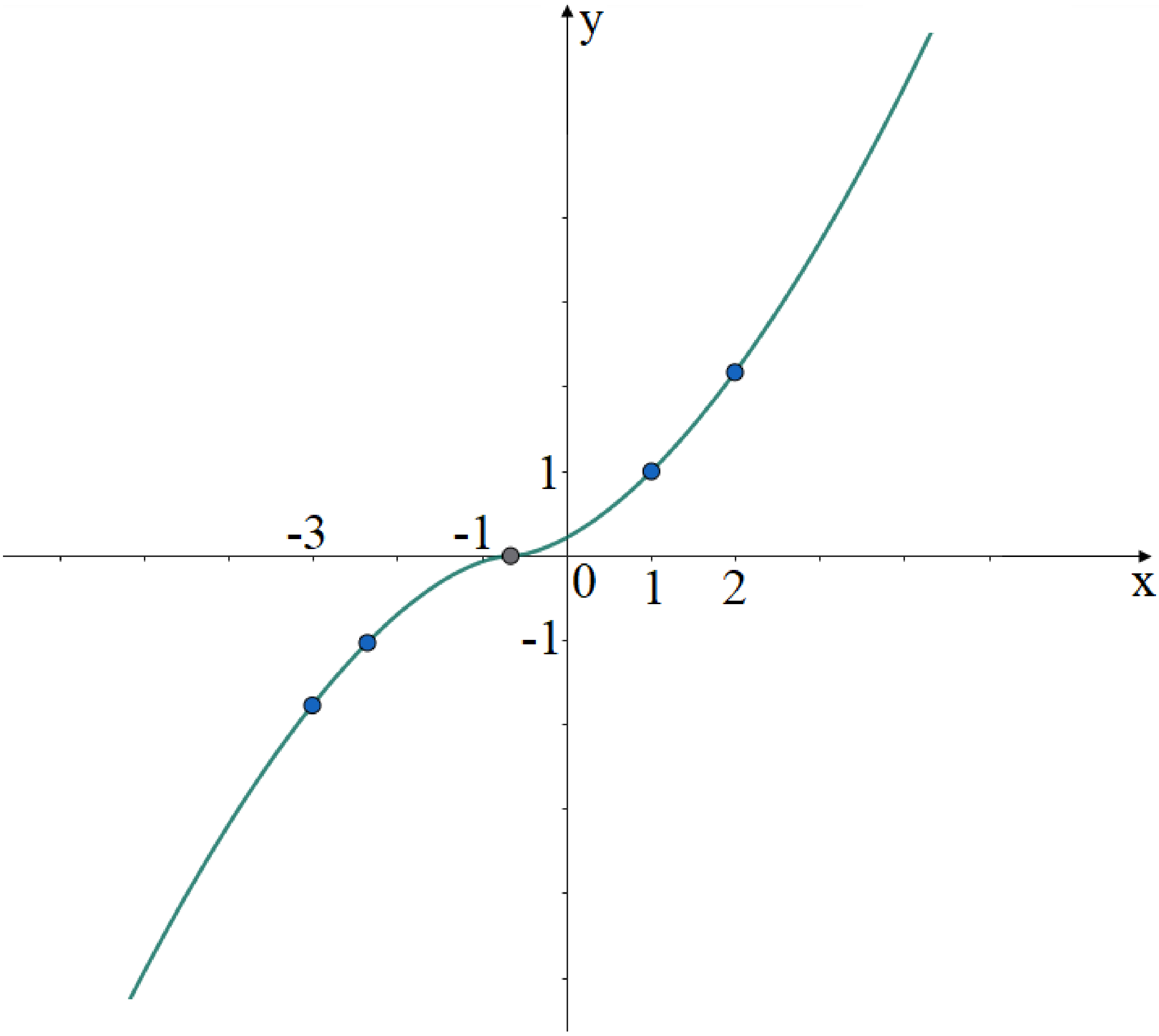
$4^y = 4^x + C$; $y = \log_4(4^x + C)$.

2. $y' = \sqrt[5]{y^2}$; $A(1,1)$

$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{5}}$; $\int \frac{dy}{y^{\frac{2}{5}}} = \int dx$; $\frac{5}{3}\sqrt[5]{y^3} = x + C$; $\frac{5}{3} = 1 + C$; $C = \frac{2}{3}$; $\frac{5}{3}\sqrt[5]{y^3} = x + \frac{2}{3}$;

$\sqrt[5]{y^3} = \frac{3}{5}\left(x + \frac{2}{3}\right)$; $y = \left[\frac{3}{5}\left(x + \frac{2}{3}\right)\right]^{\frac{5}{3}}$;

x	-3	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	2
y	$\approx -1,35$	-1	0	1	$\approx 2,19$



3. $y' = (3y + 2)tgx$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{1}{3}$

$\frac{dy}{dx} = (3y+2)tgx;$ $\int \frac{dy}{3y+2} = \int \frac{sinxdx}{cosx};$ $\frac{1}{3} ln|3y+2| = -ln|cosx| + lnC;$ $\frac{1}{3} ln3 = -ln\frac{1}{\sqrt{2}} + lnC;$ $\frac{1}{3} ln3 = -\left(-\frac{1}{2} ln2\right) + lnC;$ $lnC = \frac{1}{3} ln3 - \frac{1}{2} ln2 = ln\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}\right);$ $C = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}};$ $\frac{1}{3} ln|3y+2| = -ln|cosx| + ln\left|\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}\right|;$ $ln\left|(3y+2)^{\frac{1}{3}}\right| = ln\left|\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}cosx}\right|;$ $(3y+2)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}cosx};$ $3y+2 = \frac{3}{(\sqrt{2}cosx)^3};$

$3y = \frac{3}{(\sqrt{2}cosx)^3} - 2;$ $y = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{(\sqrt{2}cosx)^3} - 2\right);$ $y = \frac{1}{(\sqrt{2}cosx)^3} - \frac{2}{3}.$

4. $A(1,-1);$ $y' = y^3;$ $\frac{dy}{dx} = y^3;$ $\int \frac{dy}{y^3} = \int dx;$ $-\frac{1}{2y^2} = x + C;$ $-\frac{1}{2} = 1 + C;$ $C = -\frac{3}{2};$

$-\frac{1}{2y^2} = x - \frac{3}{2};$ $\frac{1}{2y^2} = \frac{3}{2} - x;$ $2y^2 = \frac{2}{3-2x};$ $y^2 = \frac{1}{3-2x};$ $y = \sqrt{\frac{1}{3-2x}}.$

5. $y' + \frac{y}{x} = e^{x^2};$

$y = uv;$ $y' = u'v + uv';$ $u'v + uv' + \frac{uv}{x} = e^{x^2};$ $u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = e^{x^2};$

$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x};$ $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x};$ $ln|v| = -ln|x|;$ $v = \frac{1}{x};$ $\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x} = e^{x^2};$ $\frac{du}{dx} = e^{x^2} \cdot x;$ $u = \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C;$ $y = uv = \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C\right) \cdot \frac{1}{x}.$

6. $y' + \frac{y}{xlnx} = -xln^{-1}x, x = e, y = e^2$

$y = uv;$ $y' = u'v + uv';$ $u'v + uv' + \frac{uv}{xlnx} = -xln^{-1}x;$ $u'v + u\left(v' + \frac{v}{xlnx}\right) = -xln^{-1}x;$

$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{xlnx};$ $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{xlnx};$ $ln|v| = -ln|lnx|;$ $v = \frac{1}{lnx} = ln^{-1}x;$

$\frac{du}{dx} \cdot ln^{-1}x = -xln^{-1}x;$ $\frac{du}{dx} = -x;$ $u = -\frac{x^2}{2} + C;$

$y = uv = \left(-\frac{x^2}{2} + C\right) ln^{-1}x;$ $e^2 = -\frac{e^2}{2} + C;$ $C = \frac{3}{2} e^2;$ $y = \left(\frac{3}{2} e^2 - \frac{x^2}{2}\right) ln^{-1}x.$

7. $y'' - 3y' + 9y = 0$

$k^2 - 3k + 9 = 0$; $D = 9 - 4 \cdot 9 = 9 - 36 = -27$; $k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{-27}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{27} i}{2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{3} i}{2}$;

$y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)$; $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$; $y = e^{\frac{3}{2}x}\left(C_1 cos\frac{3\sqrt{3}}{2}x + C_2 sin\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)$.

8. $a = 7t - 3,\ t = 4,\ V = 8,\ S = 20$ м

$v = \int a dt = \int (7t - 3) dt = \frac{7t^2}{2} - 3t + C_1$; $8 = \frac{7}{2} \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + C_1$; $8 = 7 \cdot 8 - 12 + C_1$;

$C_1 = -36$; $v = \frac{7t^2}{2} - 3t - 36$;

$x = \int v dt = \int \left(\frac{7t^2}{2} - 3t - 36\right) dt = \frac{7t^3}{6} - \frac{3t^2}{2} - 36t + C_2$; $20 = \frac{7}{6} \cdot 4^3 - \frac{3}{2} \cdot 4^2 - 36 \cdot 4 + C_2$; $C_2 = 20 - \frac{7}{6} \cdot 64 + \frac{3}{2} \cdot 16 + 36 \cdot 4 = 20 - \frac{7}{3} \cdot 32 + 24 + 144 = 188 - \frac{7 \cdot 32}{3} = \frac{340}{3}$;

$x = \frac{7t^3}{6} - \frac{3t^2}{2} - 36t + \frac{340}{3}$.

9.4 Дифференциальные уравнения в профессиональных задачах

Используемый источник – [2].

2.9. Электрическая цепь с индуктивным элементом

Индуктивностью L теоретически обладают все проводники с током. Но в некоторых случаях эта индуктивность так мала, что ею вполне можно пренебречь. Значительна индуктивность у обмоток или катушек, состоящих из большого числа витков провода. Индуктивность возрастает, если созданный током обмотки магнитный поток замыкается по пути с малым магнитным сопротивлением (например, по стальному сердечнику), вследствие чего магнитный поток увеличивается.

Рассмотрим идеальную катушку с постоянной индуктивностью L, т.е. такую катушку, активное сопротивление которой равно нулю.

Пусть к цепи с индуктивностью L (рис. 9.1а) приложено синусоидальное напряжение $u = U_m sin\omega t$. Под действием этого напряжения в цепи индуктивной катушки возникает ток i. Этот ток создает магнитный поток Ф, который согласно закону электромагнитной индукции индуцирует в катушке ЭДС самоиндукции:

$$e_L = -w\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}, \quad (9.1)$$

где w – число витков катушки.

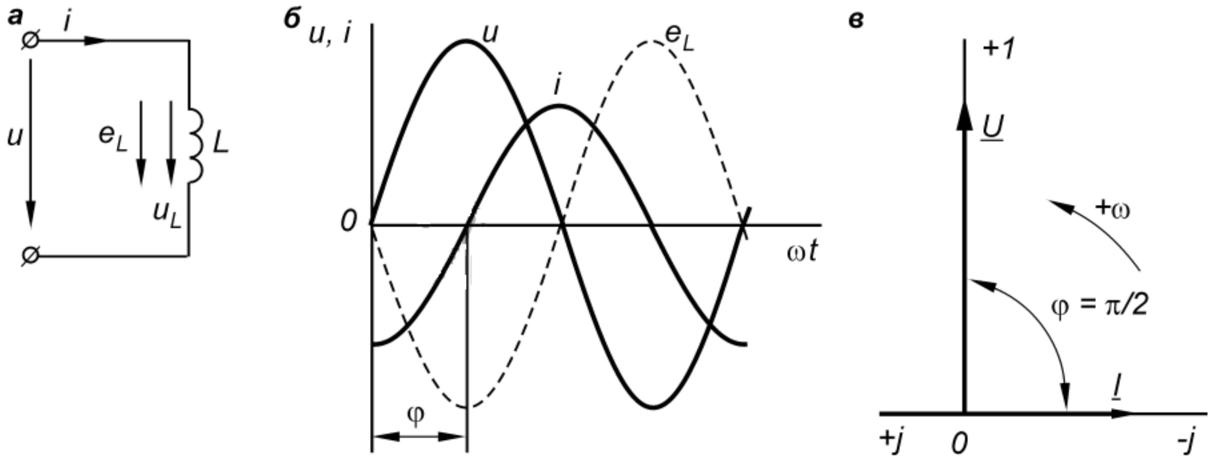


Рис. 9.1. Электрическая схема с индуктивностью L: а – схема; б – изменение ЭДС самоиндукции, напряжения и тока; в – векторная диаграмма

Знак минус согласно принципу электромагнитной инерции, сформулированному Э. Х. Ленцем, указывает на то, что ЭДС самоиндукции e_L всегда имеет такое направление, при котором она препятствует изменению магнитного потока или тока в цепи.

На рис. 9.1а показаны условные положительные направления тока i в цепи и падения напряжения u_L на элементе с индуктивностью L. Условное положительное направление ЭДС e_L выбирают из условия, что ее действительное направление в любой момент времени противоположно направлению u_L ($u_L = -e_L$).

По второму закону Кирхгофа имеем $u - u_L = 0$, а с учетом того, что $u_L = -e_L$, получаем

$$u + e_L = 0. \quad (9.2)$$

Чтобы получить это уравнение на основании (9.1б), условное положительное направление e_L следует всегда принимать совпадающим с положительным направлением тока.

Так как $u = U_m sin\omega t$, а e_L определяется из (9.1), уравнение (9.2) принимает вид

$$U_m sin\omega t - L\frac{di}{dt} = 0, \text{ или } \frac{di}{dt} = \frac{U_m}{L} sin\omega t.$$

Решая это уравнение, получим выражение для тока в цепи (так как до включения цепи при $t = 0$ ток в цепи отсутствовал, то постоянная интегрирования равна нулю):

$$i = \frac{U_m}{L}\int sin\omega t dt = -\frac{U_m}{\omega L} cos\omega t = \frac{U_m}{\omega L} sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Так как амплитуда тока

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}, \tag{9.3}$$

то окончательное выражение для тока имеет вид

$$i = I_m sin(\omega t - \pi/2).$$

Видно, что в цепи с индуктивностью ток также изменяется по синусоидальному закону и отстает по фазе от напряжения на $\pi/2$ (рис. 9.1б).

Величину ωL в формуле (9.3), имеющую размерность сопротивления, обозначают X_L и называют индуктивным сопротивлением:

$$X_L = \omega L = 2\pi f L. \tag{9.4}$$

Индуктивное сопротивление прямо пропорционально частоте и индуктивности.

С учетом формулы (9.3) получаем

$$I_m = U_m/X_L.$$

Для действующих значений напряжения и тока

$$I = U/X_L. \tag{9.5}$$

Так как согласно (2.22) ЭДС самоиндукции численно равна напряжению на элементе с индуктивностью, то, используя формулу (9.5), имеем

$$X_L I = U = E_L. \tag{9.6}$$

Видно, что индуктивное сопротивление является коэффициентом пропорциональности между током и ЭДС самоиндукции.

В общем случае напряжению u и производной di/dt от синусоидального тока соответствуют комплексные числа

$$u \to U_m e^{j(\omega t+\psi_u)} = \underline{U}_m e^{j\omega t},\ \frac{di}{dt} \to j\omega I_m e^{j(\omega t+\psi_i)} = j\omega \underline{I}_m e^{j\omega t}.$$

Подставив последние выражения в уравнение

$$u_L = -e_L = L\frac{di}{dt}$$

и сократив все его члены на $\sqrt{2}e^{j\omega t}$, получим уравнения связи для комплексных напряжения $\underline{U}_L$ и тока $\underline{I}$, называемые законом Ома в комплексной форме:

$$\underline{U}_L = j\omega L\underline{I} = jX_L\underline{I},\ \underline{I} = \frac{\underline{U}}{jX_L} = -jB_L\underline{U}, \qquad (9.7)$$

где $B_L = 1/X_L = 1/\omega L$ – реактивная индуктивная проводимость.

Если принять начальную фазу напряжения $\psi_u = 0$, то $\underline{U} = U$ и комплексный ток с учетом уравнений (9.5) и (9.7)

$$\underline{I} = \frac{U}{jX_L} = -jI = Ie^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

На векторной диаграмме (рис. 9.1в) вектор напряжения, имеющий начальную фазу, равную нулю, отложен по вещественной оси, а вектор тока, имеющий начальную фазу $\psi_i = -\pi/2$, – в отрицательном направлении мнимой оси. Сдвиг фаз между напряжением и током в цепи с индуктивностью $\varphi = \pi/2$.

Дифференциальные уравнения в профессиональных задачах

Аудиторные задания (А/з):

1) Из формулы (9.1) получите дифференциальное уравнение, позволяющее найти магнитный поток Ф, если $\mathrm{w} = 4$; $e_L = t^3 + t$.

2) Найдите общее решение данного дифференциального уравнения.

3) Найдите частное решение данного дифференциального уравнения, если $\Phi(0) = -1$.

Домашние задания (Д/з):

1) Из формулы (9.1) получите дифференциальное уравнение, позволяющее найти ток i, если $L = 6$; $e_L = 3t^2 + 4t$.

2) Найдите общее решение данного дифференциального уравнения.

3) Найдите частное решение данного дифференциального уравнения, если $i(0) = 1$.

Дифференциальные уравнения в профессиональных задачах (Примеры)

Примеры:

1) Из формулы (9.1) получите дифференциальное уравнение, позволяющее найти магнитный поток Ф, если $\mathrm{w} = 5$; $e_L = t^4 + t^2$.

2) Найдите общее решение данного дифференциального уравнения.

3) Найдите частное решение данного дифференциального уравнения, если $\Phi(0) = 1$.

4) Из формулы (9.1) получите дифференциальное уравнение, позволяющее найти ток i, если $L = 7$; $e_L = 4t^3 + 5t$.

5) Найдите общее решение данного дифференциального уравнения.

6) Найдите частное решение данного дифференциального уравнения, если $i(0) = -1$.

Решение:

1. $e_L = -5\frac{d\Phi}{dt}$; $t^4 + t^2 = -5\frac{d\Phi}{dt}$.

2. $\int d\Phi = -\frac{1}{5}\int (t^4 + t^2)dt$; $\Phi(t) = -\frac{1}{5}\left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right) + C$.

3. $\Phi(0) = 1$; $C = 1$; $\Phi(t) = -\frac{1}{5}\left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right) + 1$.

4. $e_L = -7\frac{di}{dt}$; $4t^3 + 5t = -7\frac{di}{dt}$.

5. $\frac{di}{dt} = -\frac{1}{7}(4t^3 + 5t)$; $i(t) = -\frac{1}{7}\int (4t^3 + 5t)dt = -\frac{1}{7}\left(t^4 + \frac{5t^2}{2}\right) + C$.

6. $i(0) = -1$; $C = -1$; $i(t) = -\frac{1}{7}\left(t^4 + \frac{5t^2}{2}\right) - 1$.

РАЗДЕЛ 10. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

10.1 Понятие вероятности случайных событий. Случайные величины. Простейшие теоремы о вероятностях случайных событий

Используемый источник – Математика СПО [1], п.10.1-10.2.

Аудиторные задания (А/з):

1) Вычислите: $\frac{6!-5!}{4!}$.

2) Сколькими способами можно расставить 6 книг на полке?

3) Из шести книг надо выбрать три. Сколькими способами это можно сделать?

4) Сколькими способами можно разместить 6 детей на 6-ти местной карусели с неразличимыми местами?

Домашние задания (Д/з):

1) Вычислите: $\frac{6!}{3!+4!}$.

2) Из восьми сотрудников в июле могут пойти в отпуск три человека. Сколькими способами это можно сделать?

3) В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий сыграно в турнире?

4) Сколькими способами можно выставить дозор из трех солдат и одного офицера, если есть 80 солдат и 3 офицера?

Указание:

1) Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называется факториалом числа n и записывается $n!$ (читается как «эн факториал»).

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n,\ \ 0! = 1.$

2) Размещением из n элементов по m элементов ($m \leq n$) называется упорядоченная выборка элементов m из данного множества элементов n.

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ – число размещений.

3) Размещения по n элементов из n называются перестановками из n элементов.

$P_n = n!$ – число перестановок.

4) Сочетанием из n элементов по m элементов ($m \leq n$) называется выборка элементов m из данного неупорядоченного множества.

$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$ – число сочетаний.

Понятие вероятности случайных событий. Случайные величины. Простейшие теоремы о вероятностях случайных событий (Примеры)

Примеры:

1) Вычислите: $\frac{5!-4!}{3!+2!}$.

2) Сколькими способами можно расставить 5 книг на полке?

3) Из пяти книг надо выбрать две. Сколькими способами это можно сделать?

4) Сколькими способами можно разместить 5 детей на 5-ти местной карусели с неразличимыми местами?

5) Из девяти сотрудников в августе могут пойти в отпуск четыре человека. Сколькими способами это можно сделать?

6) В шахматном турнире принимали участие 14 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий сыграно в турнире?

7) Сколькими способами можно выставить дозор из четырех солдат и двух офицеров, если есть 78 солдат и 6 офицеров?

Решение:

1. $\frac{5!-4!}{3!+2!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2-4\cdot3\cdot2}{3\cdot2+2} = \frac{(5\cdot4-4)\cdot6}{8} = \frac{16\cdot6}{8} = 12.$

2. $P_n = n!;\ n = 5;\ P_5 = 5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2 = 120.$

3. $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!};\ \ n = 5;\ k = 2;\ C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot3!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{2\cdot3\cdot2} = 10.$

4. Пронумеруем стулья и детей. На стул № 1 можно посадить любого из 5 детей, на стул № 2 – любого из оставшихся 4 детей, и так далее. Общее количество способов

$5\cdot4\cdot3\cdot2 = 5! = 120.$

5. $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!};\ n = 9;\ k = 4;\ C_9^4 = \frac{9!}{4!\cdot5!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5!}{4\cdot3\cdot2\cdot5!} = 126.$

6. $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!};\ n = 14;\ k = 2;\ C_{14}^2 = \frac{14!}{2!\cdot12!} = \frac{14\cdot13\cdot12!}{2\cdot12!} = 7\cdot13 = 91.$

7. Солдат в дозор можно выбрать

$C_{78}^4 = \frac{78!}{4!\cdot74!} = \frac{78\cdot77\cdot76\cdot75\cdot74!}{4\cdot3\cdot2\cdot74!} = 1426425$ способами,

а офицеров $C_6^2 = \frac{6!}{2!\cdot4!} = \frac{6\cdot5\cdot4!}{2\cdot4!} = 15$ способами. Т.к. с каждой командой из солдат может пойти любой офицер, то всего имеется $C_{78}^4\cdot C_6^2 = 1426425\cdot15 = 21396375$ способов.

10.2 Простейшие характеристики законов распределения. Простейшие понятия математической статистики

Используемый источник – Математика СПО [1], п.10.3-10.4.

Аудиторные задания (А/з):

1) Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x	2	4	5	6
p	0,3	0,1	0,2	0,4

Постройте многоугольник (полигон) распределения.

2) Напишите биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений герба при двух бросках монеты.

3) Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 1 \\ \frac{x-1}{2}, \text{ если } 1 \le x \le 3. \\ 1, \text{ если } x > 3 \end{cases}$$

Вычислите вероятности попаданий случайной величины X в интервалы $(1{,}5; 2{,}5)$ и $(2{,}5; 3{,}5)$.

Домашние задания (Д/з):

1) Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x	2	3	6	7
p	0,4	0,2	0,1	0,3

Постройте многоугольник (полигон) распределения.

2) В партии из шести деталей имеется четыре стандартные. Наудачу отобраны три детали. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

3) Случайная величина X подчиняется закону с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0 \\ a(3x - x^2), \text{ при } 0 \le x \le 3. \\ 0, \text{ при } x > 3 \end{cases}$$

Найдите коэффициент a. Постройте график распределения плотности. Определите вероятность попадания X в промежуток $(1; 2)$.

Указание:

Используемый источник – [9].

1) Дискретной случайной величиной называется случайная величина, которая в результате испытания принимает отдельные значения с определенными вероятностями.

2) Биномиальным называется распределение количества «успехов» в последовательности из n независимых случайных экспериментов, таких, что вероятность «успеха» в каждом из них постоянна и равна p.

$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k},\ k = 0,1,2, \dots, n$ – формула Бернулли.

3) Функция распределения случайной величины X определяется по формуле $F(x) = P(X < x)$. Это неубывающая функция, принимающая значения от 0 до 1. Если задана плотность распределения $f(x)$, то функция распределения выражается как интеграл от плотности

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Простейшие характеристики законов распределения. Простейшие понятия математической статистики (Примеры)

Примеры:

1) Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x	3	4	6	8
p	0,2	0,3	0,4	0,1

Постройте многоугольник (полигон) распределения.

2) Напишите биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений герба при трех бросках монеты.

3) Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 2 \\ \frac{x-2}{4}, \text{ если } 2 \leq x \leq 6. \\ 1, \text{ если } x > 6 \end{cases}$$

Вычислите вероятности попаданий случайной величины X в интервалы $(3; 5)$ и $(5; 7)$.

4) В партии из восьми деталей имеется пять стандартных. Наудачу отобраны четыре детали. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

5) Случайная величина X подчиняется закону с плотностью

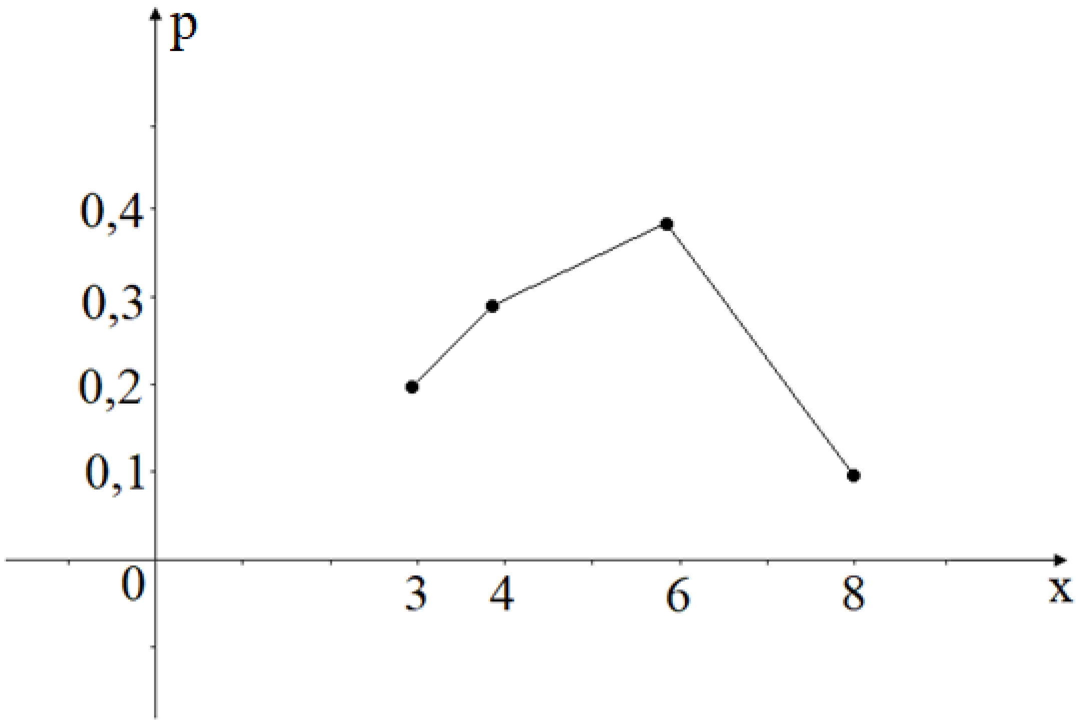
$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0 \\ a(4x - x^2), \text{ при } 0 \leq x \leq 4. \\ 0, \text{ при } x > 4 \end{cases}$$

Найдите коэффициент a. Постройте график распределения плотности. Определите вероятность попадания X в промежуток $(1; 3)$.

Решение:

1.

x	3	4	6	8
p	0,2	0,3	0,4	0,1



2. $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ – формула Бернулли;

$p = 0{,}5$ – вероятность выпадения «герба»; $q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ – вероятность выпадения «решки». Случайная величина X – число появлений «герба», принимает значения: 0, 1, 2, 3.

$P(X = 0) = C_3^0 \cdot p^0 \cdot q^3 = \frac{3!}{0! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$;

$P(X = 1) = C_3^1 \cdot p \cdot q^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$;

$P(X = 2) = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$;

$P(X = 3) = C_3^3 \cdot p^3 \cdot q^0 = \frac{3!}{3! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$.

x	0	1	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. $P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 2 \\ \frac{x-2}{4}, \text{ если } 2 \le x \le 6. \\ 1, \text{ если } x > 6 \end{cases}$$

$P(3;5) = F(5) - F(3) = \frac{5-2}{4} - \frac{3-2}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$

$P(5;7) = F(7) - F(5) = 1 - \frac{5-2}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$

4. Случайная величина X – число стандартных деталей среди отобранных деталей – имеет следующие возможные значения:

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4.$

Найдем вероятности возможных значений X по формуле $P(X = k) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$, где $N = 8$ – число деталей в партии; $n = 5$ – число стандартных деталей в партии; $m = 4$ – число отобранных деталей; k – число стандартных деталей среди отобранных.

$$P(X = 1) = \frac{C_5^1 \cdot C_3^3}{C_8^4} = \frac{\frac{5!}{1!\cdot 4!}\cdot\frac{3!}{3!\cdot 0!}}{\frac{8!}{4!\cdot 4!}} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5} = \frac{1}{14};$$

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2 \cdot C_3^2}{C_8^4} = \frac{\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!}}{\frac{8!}{4!\cdot 4!}} = \frac{\frac{5\cdot 4}{2}\cdot 3}{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2}} = \frac{30\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5} = \frac{3}{7} = \frac{6}{14};$$

$$P(X = 3) = \frac{C_5^3 \cdot C_3^1}{C_8^4} = \frac{\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{3!}{1!\cdot 2!}}{\frac{8!}{4!\cdot 4!}} = \frac{\frac{5\cdot 4}{2}\cdot 3}{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2}} = \frac{3}{7} = \frac{6}{14};$$

$$P(X = 4) = \frac{C_5^4 \cdot C_3^0}{C_8^4} = \frac{\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot\frac{3!}{0!\cdot 3!}}{\frac{8!}{4!\cdot 4!}} = \frac{1}{14}.$$

x	1	2	3	4
p	$\frac{1}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{1}{14}$

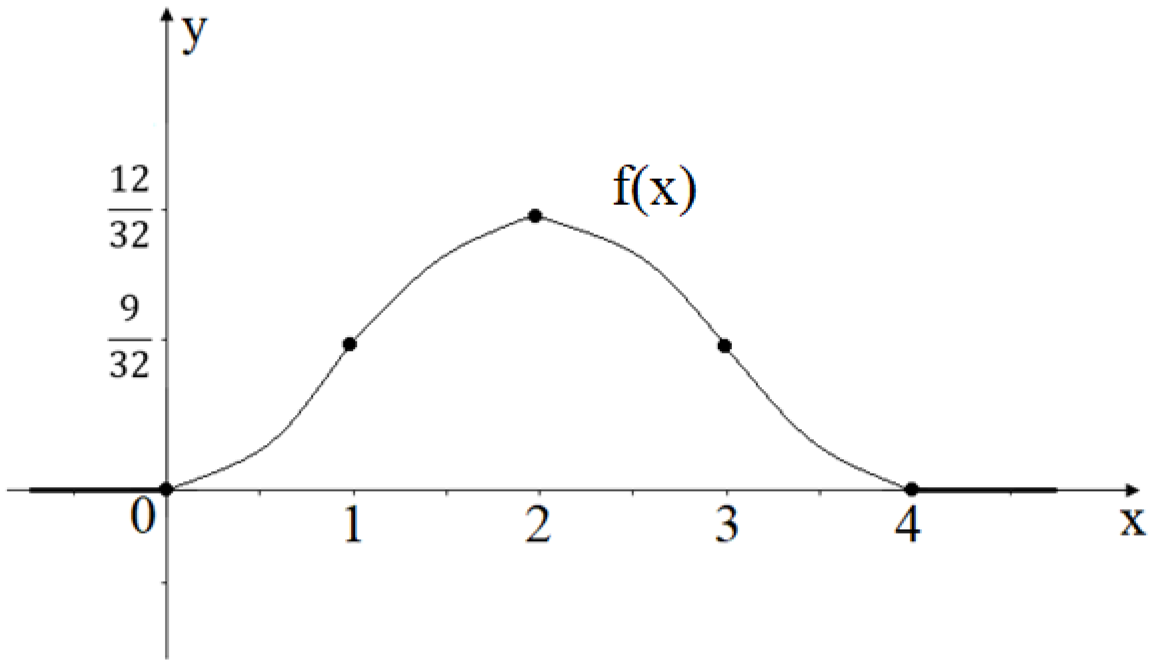
5. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0 \\ a(4x - x^2), \text{ при } 0 \le x \le 4 \\ 0, \text{ при } x > 4 \end{cases}$

$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx = \int_0^4 a(4x - x^2)dx = a\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = a\left(32 - \frac{64}{3}\right) = a \cdot \frac{32 \cdot 3 - 64}{3} = \frac{32}{3}a = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{32}.$

$P(1;3) = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 \frac{3}{32}(4x - x^2)dx = \frac{3}{32}\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^3 = \frac{3}{32} \cdot \left((18 - 9) - \left(2 - \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{3}{32} \cdot \left(9 - \frac{5}{3}\right) = \frac{3 \cdot 22}{32 \cdot 3} = \frac{22}{32} = \frac{11}{16}.$

$y = f(x)$

x	0	1	2	3	4
y	0	$\frac{9}{32}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{9}{32}$	0



10.3 Контрольная работа «Элементы теории вероятностей и математической статистики»

Используемый источник – Математика СПО [1], п.10.3-10.4.

Контрольная работа «Элементы теории вероятностей и математической статистики»

Аудиторные задания (А/з):

1) Вычислите: $\frac{4!\cdot 6!}{8!}$.

2) Сколькими способами можно расставить на полке четыре различные книги по алгебре и три различные книги по геометрии с учетом их порядка, чтобы все книги по геометрии стояли подряд?

3) По цели произведено 20 выстрелов, причем зарегистрировано 18 попаданий. Найдите относительную частоту попаданий в цель.

Домашние задания (Д/з):

1) Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x	10	15	20
p	0,1	0,7	0,2

Постройте многоугольник (полигон) распределения.

2) Стрелок делает по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Постройте ряд распределения числа попаданий.

3) Случайная величина X задана функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 2 \\ (x-2)^2, \text{ если } 2 \le x \le 3. \\ 1, \text{ если } x > 3 \end{cases}$$

Вычислите вероятности попаданий случайной величины X в интервалы $(1; 2{,}5)$ и $(2{,}5; 3{,}5)$.

Контрольная работа «Элементы теории вероятностей и математической статистики» (Подготовка)

1) Вычислите: $\frac{3!\cdot 5!}{7!}$.

2) Сколькими способами можно расставить на полке три различные книги по алгебре и две различные книги по геометрии с учетом их порядка, чтобы все книги по геометрии стояли подряд?

3) По цели произведено 25 выстрелов, причем зарегистрировано 20 попаданий. Найдите относительную частоту попаданий в цель.

4) Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x	15	20	25
p	0,2	0,5	0,3

Постройте многоугольник (полигон) распределения.

5) Стрелок делает по мишени четыре выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4. Постройте ряд распределения числа попаданий.

6) Случайная величина X задана функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 3 \\ (x-3)^2, \text{ если } 3 \le x \le 5. \\ 1, \text{ если } x > 5 \end{cases}$$

Вычислите вероятности попаданий случайной величины X в интервалы $(2; 4)$ и $(4; 6)$.

Решение:

1. $\frac{3!\cdot 5!}{7!} = \frac{3\cdot 2\cdot 5!}{7\cdot 6\cdot 5!} = \frac{1}{7}$.

2. Рассмотрим сначала расстановку на полке трех книг по алгебре и одного блока книг по геометрии: количество вариантов такой расстановки определим по формуле перестановок:

$n_1 = P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$

В то же время внутри блока две книги по геометрии могут быть расставлены

$n_2 = P_2 = 2! = 2$ способами.

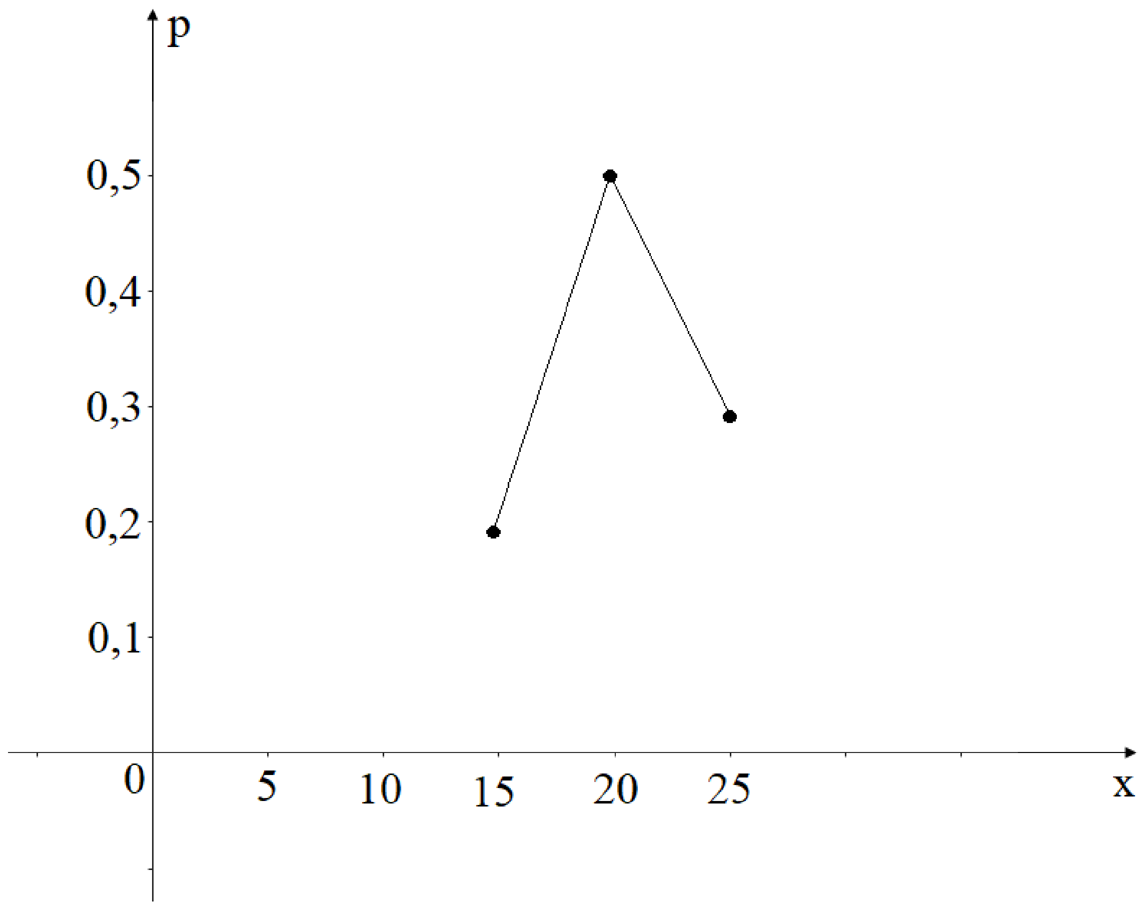
По правилу произведения получаем искомое число способов расстановки книг:

$n = n_1 \cdot n_2 = 24 \cdot 2 = 48.$

3. $\frac{20}{25} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$

4.

x	15	20	25
p	0,2	0,5	0,3



5. Случайная величина X – число попаданий в мишень при 4-х выстрелах – распределена по биномиальному закону, её возможные значения: 0, 1, 2, 3, 4.

$P(X=0)=C_4^0\cdot p^0\cdot q^4=0{,}6^4=0{,}1296;$

$P(X=1)=C_4^1\cdot p^1\cdot q^3=\frac{4!}{1!\cdot3!}\cdot0{,}4\cdot0{,}6^3=4\cdot0{,}4\cdot0{,}6^3=0{,}3456;$

$P(X=2)=C_4^2\cdot p^2\cdot q^2=\frac{4!}{2!\cdot2!}\cdot0{,}4^2\cdot0{,}6^2=\frac{4\cdot3}{2}\cdot0{,}4^2\cdot0{,}6^2=0{,}3456;$

$P(X=3)=C_4^3\cdot p^3\cdot q=\frac{4!}{3!\cdot1!}\cdot0{,}4^3\cdot0{,}6=4\cdot0{,}4^3\cdot0{,}6=0{,}1536;$

$P(X=4)=C_4^4\cdot p^4\cdot q^0=\frac{4!}{4!\cdot0!}\cdot0{,}4^4\cdot0{,}6^0=0{,}4^4=0{,}0256.$

Ряд распределения:

x	0	1	2	3	4
p	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

6. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 3 \\ (x-3)^2, \text{ если } 3 \le x \le 5 \\ 1, \text{ если } x > 5 \end{cases}$

$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 3 \\ 2(x-3), \text{ если } 3 \le x \le 5 \\ 0, \text{ если } x > 5 \end{cases}$

$P(2;4) = F(4) - F(2) = (4-3)^2 - 0 = 1.$

$P(4;6) = F(6) - F(4) = 1 - (4-3)^2 = 1 - 1 = 0.$

10.4 Элементы теории вероятностей и математической статистики в профессиональных задачах

Используемый источник – [10].

Элементы теории вероятностей и математической статистики в профессиональных задачах

Аудиторные задания (А/з):

1) В низковольтных электрических сетях 0,4 кВ в течение четырех часов с дискретностью $\Delta t = 15$ мин производились измерения величины тока нагрузки $I_{\text{нагр}}$ (табл. 10.1). Какова вероятность того, что за период измерений величина $I_{\text{нагр}}$ не превысила 14 А.

Таблица 10.1

Часовые интервалы	Величина тока нагрузки, А			
10:00 – 11:00	13	15	14	20
11:00 – 12:00	9	14	12	16
12:00 – 13:00	17	24	13	14
13:00 – 14:00	13	9	7	11

2) По результатам измерения параметра тока I в течение часа с дискретностью 10 минут (табл. 10.2) вычислить основные статистические характеристики: $M(x)$, $D(x)$, $\sigma(x)$.

Таблица 10.2

№ измерения	1	2	3	4	5	6
I, А	10	5	4	8	6	2

<u>Домашние задания (Д/з)</u>:

1) В низковольтных электрических сетях 0,4 кВ в течение четырех часов с дискретностью $\Delta t = 15$ мин производились измерения величины тока нагрузки $I_{нагр}$ (табл. 10.3). Какова вероятность того, что за период измерений величина $I_{нагр}$ не превысила 13 А.

Таблица 10.3

Часовые интервалы	Величина тока нагрузки, А			
10:00 – 11:00	13	15	14	20
11:00 – 12:00	9	14	12	16
12:00 – 13:00	17	24	13	14
13:00 – 14:00	13	9	7	11

2) По результатам измерения параметра тока I в течение часа с дискретностью 10 минут (табл. 10.4) вычислить основные статистические характеристики: $M(x)$, $D(x)$, $\sigma(x)$.

Таблица 10.4

№ измерения	1	2	3	4	5	6
I, А	12	6	8	2	6	5

Элементы теории вероятностей и математической статистики в профессиональных задачах (Примеры)

Примеры:

1) В низковольтных электрических сетях 0,4 кВ в течение четырех часов с дискретностью $\Delta t = 15$ мин производились измерения величины тока нагрузки $I_{\text{нагр}}$ (табл. 10.5). Какова вероятность того, что за период измерений величина $I_{\text{нагр}}$ не превысила 12 А.

Таблица 10.5

Часовые интервалы	Величина тока нагрузки, А			
10:00 – 11:00	13	15	14	20
11:00 – 12:00	9	14	12	16
12:00 – 13:00	17	24	13	14
13:00 – 14:00	13	9	7	11

2) По результатам измерения параметра тока I в течение часа с дискретностью 10 минут (табл. 10.6) вычислить основные статистические характеристики: $M(x)$, $D(x)$, $\sigma(x)$.

Таблица 10.6

№ измерения	1	2	3	4	5	6
I, А	11	14	9	12	13	10

Решение:

1. $\sum P(A) = \frac{m_A}{n}$ – статистическая вероятность события A (относительная частота);

$n = 4 \times 4 = 16$ – общее число испытаний; $I_{\text{нагр}} \leq 12$

$\sum P\left(I_{\text{нагр}}\right) = \frac{m_{10-11}+m_{11-12}+m_{12-13}+m_{13-14}}{n} = \frac{0+2+0+3}{16} = \frac{5}{16} = 0{,}3125.$

2. $M(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ – математическое ожидание;

$D(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(x)]^2$ – дисперсия;

$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$ – среднеквадратическое отклонение (электрический стандарт);

$M(I) = \frac{1}{6}(11 + 14 + 9 + 12 + 13 + 10) = 11{,}5$ [A].

$D(I) = \frac{1}{6-1}((11 - 11{,}5)^2 + (14 - 11{,}5)^2 + (9 - 11{,}5)^2 + (12 - 11{,}5)^2 + (13 - 11{,}5)^2 + (10 - 11{,}5)^2) = \frac{1}{5}(0{,}25 + 6{,}25 + 6{,}25 + 0{,}25 + 2{,}25 + 2{,}25) = \frac{1}{5} \cdot 17{,}5 = 3{,}5$ [A^2].

$\sigma(I) = \sqrt{3{,}5} \approx 1{,}87$ [A].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пехлецкий И.Д. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / И.Д. Пехлецкий. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 320 с.
2. Иванов И.И. Электротехника и основы электроники: учебник для СПО / И.И. Иванов, Г.И. Соловьев, В.Я. Фролов. – Санкт-Петербург: Лань, 2021. – 736 с.
3. Как найти НОД. URL: https://izamorfix.ru/matematika/arifmetika/kak_nayti_nod.html (дата обращения: 25.03.2025).
4. Свойства определителей. Обратная матрица. URL: https://toehelp.ru/theory/math/lecture13/lecture13.html?ysclid=m8ot8rrq7h751958537 (дата обращения: 25.03.2025).
5. Метод Крамера. URL: https://www.webmath.ru/poleznoe/formules_5_4.php (дата обращения: 25.03.2025).
6. Выпуклость и вогнутость. URL: https://gufo.me/dict/bse/Выпуклость_и_вогнутость (дата обращения: 25.03.2025).
7. Интегрирование рациональных дробей. URL: https://uchitu.ru/articles/priem-razlozheniya-podyntegralnogo-vyrazheniya-i-vydeleniya-polnogo-kvadrata.html?ysclid=m8oujvdpm725863548 (дата обращения: 25.03.2025).
8. Задача Коши. Теорема о существовании решения. URL: https://studfile.net/preview/9532335/page:2/ (дата обращения: 25.03.2025).
9. Дискретные случайные величины. URL: https://greysoft.gitbooks.io/theory-of-probability/content/docs/razdel1/lection7.html (дата обращения: 25.03.2025).
10. Курбацкий В.Г. Прикладные задачи теории вероятностей и случайных процессов: методические указания для практических занятий студентов / В. Г. Курбацкий. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2013. – 37с.