Джамбеков А. М.

Математика для студентов колледжа
Часть 1.
Общеобразовательный цикл

2025

А. М. Джамбеков

Математика для студентов колледжа
Часть 1. Общеобразовательный цикл

Учебное пособие

Электронное текстовое издание

Санкт-Петербург
Наукоемкие технологии
2025

ISBN 978-5-907946-44-6

УДК 51.01
ББК 22.1
Д40

Автор-составитель:
Джамбеков Азамат Матифулаевич, кандидат технических наук, преподаватель математики
ГБПОУ АО «Астраханский колледж вычислительной техники»

Д40 Джамбеков А. М. Математика для студентов колледжа. Часть 1. Общеобразовательный цикл [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. М. Джамбеков. – СПб.: Наукоемкие технологии, 2025. – 281 с. – URL: http://publishing.intelgr.com/archive/matematika-dlya-studentov-kolledzha.pdf.

ISBN 978-5-907946-44-6

Учебное пособие составлено для студентов колледжа, обучающихся на базе основного общего образования. Содержит примеры выполнения задач, указания по выполнению и задания для аудиторной и домашней работы. Включает основные разделы курса математики общеобразовательного цикла.

УДК 51.01
ББК 22.1

ISBN 978-5-907946-44-6

Учебное издание

Джамбеков Азамат Матифулаевич

Математика для студентов колледжа. Часть 1. Общеобразовательный цикл

Учебное пособие

Электронное текстовое издание

Подписано к использованию 18.03.2025.
Объем издания – 4,9 Мб.

Издательство «Наукоемкие технологии»
ООО «Корпорация «Интел Групп»
https://publishing.intelgr.com
E-mail: publishing@intelgr.com
Тел.: +7 (812) 945-50-63
Интернет-магазин издательства
https://shop.intelgr.com/

ISBN 978-5-907946-44-6

9 785907 946446 >

Оглавление

РАЗДЕЛ 1. ПОВТОРЕНИЕ КУРСА МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

1.1 Цели и задачи изучения математики при освоении специальности (профессии)

Используемый источник – [1].

Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть – весьма реальный материал.

Математику, отвечающему на вопрос, чему равен объем цилиндра, не важно, из какого материала он сделан, какого он цвета и т.д.

Если физику интересуют реальные объекты, их физические свойства, геометрия – математика имеет дело с идеальными объектами.

Интересуясь количеством предметов, мощностью множества, математик совершенно игнорирует характер этих предметов.

Математика – это наука о специальных логических структурах, называемых математическими структурами, у которых описаны определенные отношения между элементами.

Под математической моделью понимается приближенное описание, отражение некоторых реальных явлений с помощью математических средств и символов.

Математическая модель того или иного явления с течением времени в связи с получением новых данных, разработкой более современных математических методов, изучением условий применения может существенно меняться.

Большой круг явлений в физике, химии, биологии, экономике достаточно адекватно описывается дифференциальными уравнениями, как обыкновенными, так и в частных производных.

Математика разрабатывает методы решения не только тех конкретных задач, для которых они созданы, но обобщает и усовершенствует методы для решения новых классов задач.

Иногда математика намного опережает время, и некоторые открытия ждут своего практического применения десятилетия, а то и столетия.

Тест «Цели и задачи изучения математики при освоении специальности (профессии)»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1._______ математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть – весьма реальный материал.

а) чистая; б) не чистая; в) специальная; г) не специальная.

2.___________, отвечающему на вопрос, чему равен объем цилиндра, не важно, из какого материала он сделан, какого он цвета и т.д.

а) не математику; б) математику; в) физику; г) не физику.

3.Если физику интересуют реальные объекты, их физические свойства, геометрия – математика имеет дело с __________ объектами.

а) не идеальными; б) абстрактными; в) идеальными; г) не абстрактными.

4.Интересуясь количеством предметов, мощностью множества, математик совершенно игнорирует __________ этих предметов.

а) не характер; б) мощность; в) не мощность; г) характер.

5.Математика – это наука о ___________ логических структурах, называемых математическими структурами, у которых описаны определенные отношения между элементами.

а) специальных; б) не специальных; в) конкретных; г) не конкретных.

6.Под математической моделью понимается _____________ описание, отражение некоторых реальных явлений с помощью математических средств и символов.

а) не приближенное; б) приближенное; в) точное; г) не точное.

7.Математическая модель того или иного явления с течением времени в связи с получением новых данных, разработкой более современных ______________ методов, изучением условий применения может существенно меняться.

а) не математических; б) аналитических; в) математических; г) не аналитических.

8.Большой круг явлений в физике, химии, биологии, экономике достаточно адекватно описывается дифференциальными __________, как обыкновенными, так и в частных производных.

а) не уравнениями; б) неравенствами; в) не неравенствами; г) уравнениями.

9.Математика разрабатывает методы решения не только тех конкретных задач, для которых они созданы, но _________ и усовершенствует методы для решения новых классов задач.

а) обобщает; б) не обобщает; в) не конкретизирует; г) конкретизирует.

10.Иногда математика намного опережает время, и некоторые открытия ждут своего ____________ применения десятилетия, а то и столетия.

а) теоретического; б) практического; в) не практического; г) не теоретического.

1.2 Функции, их свойства и графики

Используемый источник – Алгебра 9 класс [2], Глава 1.

1. Какая из функций является возрастающей, а какая – убывающей, если:

а) $y = 5x - 8$ (Пример); б) $y = -3x + 7$ (Пример);

в) $y = \dfrac{6}{x}$ (А/з); г) $y = -\dfrac{10}{x}$ (А/з).

24. Определите характер монотонности функции:

а) $y = \sqrt{-2x}$ (Пример); б) $y = -\sqrt{x-5}$ (Пример);

в) $y=\dfrac{1}{x+2}-\sqrt{x}$ (А/з); г) $y=\dfrac{1}{x^5}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (А/з);

д) $y=\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{x+4}$ (Д/з); е) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ (Д/з).

37. Является ли чётной или нечётной функция, заданная формулой:

а) $\varphi(x)=\dfrac{8}{x^2-3}$ (Пример); б) $\varphi(x)=\dfrac{9}{7x}$ (Д/з);

г) $\varphi(x)=x^2$, где $-1\le x\le 2$ (Пример); д) $\varphi(x)=x^3+x$, где $-3\le x\le 1$ (Д/з)?

Функции, их свойства и графики (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

1.а) $y=5x-8$;

$x_1=2, x_2=3$; $f(x_1)=f(2)=5\cdot 2-8=10-8=2$; $f(x_2)=f(3)=5\cdot 3-8=15-8=7$; $f(x_2)>f(x_1)\Rightarrow$ функция возрастающая.

1.б) $y=-3x+7$;

$x_1=0, x_2=2$; $f(x_1)=f(0)=-3\cdot 0+7=7$; $f(x_2)=f(2)=-3\cdot 2+7=-6+7=1$; $f(x_2)<f(x_1)\Rightarrow$ функция убывающая.

24.а) $y=\sqrt{-2x}$;

$-2x\ge 0$; $x\le 0$;

$x_1=-2$; $x_2=0$; $f(x_1)=f(-2)=\sqrt{-2\cdot(-2)}=\sqrt{4}=2$; $f(x_2)=f(0)=\sqrt{-2\cdot 0}=0$; $f(x_2)<f(x_1)\Rightarrow$ функция убывающая.

24.б) $y=-\sqrt{x-5}$;

$x-5\ge 0$; $x\ge 5$;

$x_1=5$; $x_2=6$; $f(x_1)=f(5)=-\sqrt{5-5}=0$; $f(x_2)=f(6)=\sqrt{6-5}=-1$; $f(x_2)<f(x_1)\Rightarrow$ функция убывающая.

37.а) $\varphi(x)=\frac{8}{x^2-3}$; $\varphi(-x)=\frac{8}{(-x)^2-3}=\frac{8}{x^2-3}=\varphi(x)$; $\varphi(-x)=\varphi(x)\Rightarrow$ функция чётная.

37.г) $\varphi(x) = x^2$, где $-1 \leq x \leq 2$; т.к. интервал несимметричный, функция не является ни чётной, ни нечётной.

Аудиторные задания (А/з): № 1 (в, г), № 24 (в, г).

Домашние задания (Д/з): № 24 (д, е), № 37 (б, д).

А/з, Д/з (подготовка):

$x_2 > x_1$ $f(x_2) > f(x_1)$ – функция возрастающая.

$x_2 > x_1$ $f(x_2) < f(x_1)$ – функция убывающая.

ОДЗ: $y = \frac{1}{ax+b}$ $ax + b \neq 0$; $ax \neq -b$; $x \neq -\frac{b}{a}$.

ОДЗ: $y = \sqrt{ax+b}$ $ax + b \geq 0$; $ax \geq -b$; $x \geq -\frac{b}{a}$.

x_1 и x_2 выбираются из ОДЗ.

$f(-x) = f(x)$ – функция чётная.

$f(-x) = -f(x)$ – функция нечётная.

$\begin{cases} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{cases}$ – функция не является ни чётной, ни нечётной.

1.3 Уравнения и неравенства с одной переменной

Используемый источник – Алгебра 9 класс, Глава 2 [2].

Решите неравенство:

268.

а) $x^2 - 11x + 24 < 0$ (Пример); б) $2x^2 + 11x - 6 > 0$ (Пример);

в) $-7x^2 - 6x + 1 \geq 0$ (А/з); г) $2{,}5x^2 + x + 0{,}1 > 0$ (А/з);

д) $-9x^2 + 12x - 4 > 0$ (Д/з); е) $0{,}1x^2 + x - 2{,}4 \leq 0$ (А/з).

269.

а) $6x^2 - x < 0$ (Пример); б) $7x^2 + 8 > 0$ (Пример);

в) $8x^2 \geq 11x$ (А/з); г) $x^2 < 5x$ (А/з);

д) $x^2 < 9$ (Д/з); е) $x^2 > 16$ (Д/з).

Уравнения и неравенства с одной переменной (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

268.а) $x^2 - 11x + 24 < 0;$

$x^2 - 11x + 24 = 0;\ x_1 = 3;\ x_2 = 8;\ x\epsilon(3; 8).$

268.б) $2x^2 + 11x - 6 > 0;$

$2x^2 + 11x - 6 = 0;\ D = 121 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 121 + 48 = 169;$

$x_1 = \frac{-11-13}{4} = \frac{-24}{4} = -6;\quad x_2 = \frac{-11+13}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};\quad x\epsilon(-\infty; -6) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$

269.а) $6x^2 - x < 0;$

$x(6x - 1) < 0;\ x\epsilon\left(0; \frac{1}{6}\right).$

269.б) $7x^2 + 8 > 0;\ x\epsilon R.$

Аудиторные задания (А/з): № 268 (в, г), № 269 (в, г).

Домашние задания (Д/з): № 268 (д, е), № 269 (д, е).

А/з, Д/з (подготовка):

1)

$\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ a > 0 \end{cases} \qquad ax^2 + bx + c = 0;$

x_1, x_2 – корни уравнения; $x\epsilon(x_1;\ x_2)$

x_0 – один корень; $x = \emptyset$

2)

$\begin{cases} ax^2 + bx + c > 0 \\ a > 0 \end{cases} \qquad ax^2 + bx + c = 0;$

x_1, x_2 – корни уравнения; $x\epsilon(-\infty;\ x_1) \cup (x_2; +\infty)$

x_0 – один корень; $x\epsilon(-\infty;\ +\infty)$

3)

$\begin{cases} ax^2 + bx + c \geq 0 \\ a > 0 \end{cases} \qquad ax^2 + bx + c = 0;$

x_1, x_2 – корни уравнения; $x\epsilon(-\infty;\ x_1] \cup [x_2;\ +\infty)$

x_0 – один корень; $x\epsilon(-\infty;\ +\infty)$

4)

$$\begin{cases} ax^2+bx+c\le 0 \\ a>0 \end{cases} \qquad ax^2+bx+c=0;$$

x_1, x_2 – корни уравнения; $x\epsilon[x_1; x_2]$

x_0 – один корень; $x=x_0$

1.4 Системы уравнений и системы неравенств с двумя переменными

Используемый источник – Алгебра 9 класс [2], Глава 3.

449. Какие из пар $(5;4)$, $(1;0)$, $(-5;-4)$ и $\left(-1;-\frac{2}{7}\right)$ являются решениями уравнения:

а) $x^2-y^2=0$ (Пример); б) $x^3-1=x^2y+6y$ (А/з)?

450. Найдите такие решения уравнения $xy^2-x^2y=12$, в которых:

а) значение *x* равно 3 (Пример); б) значение *y* равно -1 (А/з).

451. Определите степень уравнения:

а) $2y^2-3x^3+4x=2$ (Пример);

б) $5y^4-3y^3x^2+2x^3=0$ (Пример);

в) $(3x^2+x)\cdot(4x-y^2)=x$ (А/з);

г) $(5x+y)\cdot(5x-y)=0$ (А/з);

д) $(2y-x^2)^2=x\cdot(x^2+4xy+1)$ (Д/з);

е) $3xy=(y-x^3)\cdot(x^2+y)$ (Д/з).

466. Какая из пар $(2;-2)$ и $(1;2)$ является решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3xy-y^2+16=0, \\ x^2+2y^2-12=0; \end{cases}$ (Пример) б) $\begin{cases} 5x^3-3y^2=-7x, \\ (x+y)\cdot(y-x)=3x; \end{cases}$ (Д/з)?

540. Являются ли пары чисел $(2;-9)$, $(-1;30)$ и $(15;6)$ решениями неравенства:

а) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y-1>0$ (Пример); б) $-10x-y\ge-11$ (Д/з)?

Системы уравнений и системы неравенств с двумя переменными (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

449.а) $x^2 - y^2 = 0$;

$(5;4)$; $5^2 - 4^2 \neq 0$ – не является решением;

$(1;0)$; $1^2 - 0^2 \neq 0$ – не является решением;

$(-5;-4)$; $5^2 - 4^2 \neq 0$ – не является решением;

$\left(-1;-\frac{2}{7}\right)$; $1 - \frac{4}{49} \neq 0$ – не является решением.

450.а) $xy^2 - x^2y = 12$;

$x = 3$; $3y^2 - 9y = 12$; $y^2 - 3y = 4$; $y^2 - 3y - 4 = 0$;

$y_1 = -1$; $y_2 = 4$; $(3;-1)$; $(3;4)$ – решения уравнения.

451.а) $2y^2 - 3x^3 + 4x = 2$; третья степень.

451.б) $5y^4 - 3y^3x^2 + 2x^3 = 0$; 5 степень.

466.а) $\begin{cases} 3xy - y^2 + 16 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 12 = 0 \end{cases}$; $(2;-2)$; $(1;2)$

$(2;-2)$:

$\begin{cases} 3\cdot 2\cdot(-2) - (-2)^2 + 16 = 0 \\ 2^2 + 2\cdot(-2)^2 - 12 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -12 - 4 + 16 = 0 \\ 4 - 8 - 12 \neq 0 \end{cases}$

$(2;-2)$ – не является решением;

$(1;2)$:

$\begin{cases} 3\cdot 1\cdot 2 - 2^2 + 16 = 0 \\ 1^2 + 2\cdot 2^2 - 12 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 6 - 4 + 16 \neq 0 \\ 1 + 8 - 12 \neq 0 \end{cases}$

$(1;2)$ – не является решением.

540.а) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y - 1 > 0$; $(2;-9)$; $(-1;30)$; $(15;6)$

$(2;-9)$; $\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 9 - 1 > 0$; $1 + 3 - 1 > 0$;

$3 > 0$ – верно $\Rightarrow (2;-9)$ – является решением неравенства;

$(-1;30)$; $\frac{1}{2}\cdot(-1) - \frac{1}{3}\cdot 30 - 1 > 0$; $-\frac{1}{2} - 10 - 1 > 0$ – неверно $\Rightarrow (-1;30)$ – не является решением неравенства;

$(15;6)$; $\frac{1}{2}\cdot 15-\frac{1}{3}\cdot 6-1>0$; $\frac{15}{2}-2-1>0$;

$7{,}5-3>0$ – верно $\Rightarrow (15;6)$ – является решением неравенства.

Аудиторные задания (А/з): № 449 (б), № 450 (б), № 451 (в, г).

Домашние задания (Д/з): № 449 (б), № 450 (б), № 451 (в, г).

А/з, Д/з (подготовка):

$a_0x^ny^m+a_1x^{n-1}y^{m-1}+\dots+a_n=0$; $(n+m)$ – степень уравнения

$(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n)\cdot(b_0y^m+b_1y^{m-1}+\dots+b_m)=0$; $(n+m)$ – степень уравнения

1.5 Последовательности

Используемый источник – Алгебра 9 класс [2], Глава 4.

642. Найдите a_1, a_4, a_{100}, a_{k+1}, a_{2k} последовательности, заданной формулой:

а) $a_n=-0{,}3n+1$ (Пример); б) $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}$ (А/з);

в) $a_n=(-1)^{n+1}\cdot(n+1)$ (Пример); г) $a_n=\dfrac{(-1)^n\cdot 6}{n}$ (А/з).

644. Найдите первые шесть членов последовательности, заданной рекуррентным способом:

а) $c_1=13,\ c_{n+1}=c_n+2$ (Пример);

б) $c_1=-12,\ c_{n+1}=-3c_n$ (Д/з);

в) $c_1=6,\ c_{n+1}=n\cdot c_n$ (А/з);

г) $c_1=7,\ c_2=4,\ c_{n+1}=c_n+c_{n-1}\ (n\ge 2)$ (Пример);

д) $c_1=-3,\ c_2=-5,\ c_{n+1}=c_n\cdot c_{n-1}\ (n\ge 2)$ (А/з).

668. Исследуйте на монотонность последовательность (a_n), заданную формулой:

а) $a_n=-7^n$ (Пример); б) $a_n=\dfrac{5n+2}{n+4}$ (Пример);

в) $a_n = \dfrac{3n-1}{3n-7{,}5}$ (Д/з); г) $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 15}{n}$ (Пример);

д) $a_n = 0{,}4 \cdot n^2 + 1{,}2$ (Д/з); ж) $a_n = n^2 - 36n$ (Д/з).

Последовательности (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

642.а) $a_n = -0{,}3n + 1$;

$a_1 = -0{,}3 \cdot 1 + 1 = 0{,}7$; $a_4 = -0{,}3 \cdot 4 + 1 = -1{,}2 + 1 = -0{,}2$;

$a_{100} = -0{,}3 \cdot 100 + 1 = -30 + 1 = -29$; $a_{k+1} = -0{,}3 \cdot (k+1) + 1 = -0{,}3k - 0{,}3 + 1 = -0{,}3k + 0{,}7$; $a_{2k} = -0{,}3 \cdot 2k + 1 = -0{,}6k + 1$.

642.в) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot (n+1)$;

$a_1 = (-1)^{1+1} \cdot (1+1) = 2$; $a_4 = (-1)^{4+1} \cdot (4+1) = -5$;

$a_{100} = (-1)^{100+1} \cdot (100+1) = -101$; $a_{k+1} = (-1)^{k+2} \cdot (k+2) = (-1)^k \cdot (k+2)$; $a_{2k} = (-1)^{2k+1} \cdot (2k+1)$.

644.а) $c_1 = 13$; $c_{n+1} = c_n + 2$;

$c_2 = c_1 + 2 = 13 + 2 = 15$; $c_3 = c_2 + 2 = 15 + 2 = 17$;

$c_4 = c_3 + 2 = 17 + 2 = 19$; $c_5 = c_4 + 2 = 19 + 2 = 21$;

$c_6 = c_5 + 2 = 21 + 2 = 23$.

644.г) $c_1 = 7$; $c_2 = 4$; $c_{n+1} = c_n + c_{n-1} (\geq 2)$;

$c_3 = c_2 + c_1 = 4 + 7 = 11$; $c_4 = c_3 + c_2 = 11 + 4 = 15$;

$c_5 = c_4 + c_3 = 15 + 11 = 26$; $c_6 = c_5 + c_4 = 26 + 15 = 41$.

668.а) $a_n = -7^n$; $a_{n+1} = -7^{n+1} = -7 \cdot 7^n$; $a_{n+1} - a_n = -7 \cdot 7^n + 7^n = -6 \cdot 7^n$;

$a_{n+1} < a_n$ при любом $n \in N$; $a_n = -7^n$ – убывающая последовательность.

668.б) $a_n = \frac{5n+2}{n+4}$; $a_{n+1} = \frac{5n+7}{n+5}$; $a_{n+1} - a_n = \frac{5n+7}{n+5} - \frac{5n+2}{n+4} = \frac{(5n+7)(n+4)-(5n+2)(n+5)}{(n+5)(n+4)} = \frac{5n^2+27n+28-5n^2-27n-10}{(n+5)(n+4)} = \frac{18}{(n+5)(n+4)}$;

$a_{n+1} > a_n$ при любом $n \in N$; $a_n = \frac{5n+2}{n+4}$ – возрастающая последовательность.

668.г) $a_n = \frac{(-1)^n 15}{n}$; $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} 15}{n+1}$; $a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{n+1} 15}{n+1} - \frac{(-1)^n 15}{n} = \frac{-(-1)^n \cdot 15n - (-1)^n \cdot 15(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{(-1)^n \cdot (15n+15n+15)}{n(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (30n+15)}{n(n+1)} = \frac{15(-1)^{n+1} \cdot (2n+1)}{n(n+1)}$.

В зависимости от n разность $a_{n+1} - a_n$ может быть положительной или отрицательной. Значит, данная последовательность не является ни возрастающей, ни убывающей, т.е. не является монотонной.

Аудиторные задания (А/з): № 642 (б, г), № 644 (в, д).

Домашние задания (Д/з): № 644 (б), № 668 (в, д, ж).

1.6 Степени и корни

Используемый источник – Алгебра 9 класс [2], Глава 5.

908. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{0{,}125 \cdot 216}$ (Пример); б) $\sqrt[4]{256 \cdot 0{,}0016}$ (А/з);

в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$ (Пример); г) $\sqrt[4]{39\frac{1}{16}}$ (А/з);

д) $\sqrt[3]{21\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{3}$ (Д/з); е) $\sqrt[5]{1\frac{17}{32}} \cdot \sqrt[5]{\frac{32}{49}}$ (Д/з).

909. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{63} \cdot \sqrt[3]{147}$ (Пример); б) $\sqrt[4]{112} \cdot \sqrt[4]{343}$ (А/з);

в) $\sqrt[3]{8-\sqrt{56}} \cdot \sqrt[3]{8+\sqrt{56}}$ (Пример);

г) $\sqrt[4]{11+\sqrt{40}} \cdot \sqrt[4]{11-\sqrt{40}}$ (А/з).

910. Сравните числа:

а) $\sqrt[3]{11}$ и $\sqrt[6]{119}$ (Пример); б) $\sqrt[4]{27}$ и $\sqrt[3]{9}$ (Д/з);

в) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ и $\sqrt{\sqrt[3]{3}}$ (Пример); г) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$ и $\sqrt[3]{3}$ (Д/з).

Степени и корни (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

908.а) $\sqrt[3]{0{,}125 \cdot 216} = 0{,}5 \cdot 6 = 3.$

908.в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$

909.а) $\sqrt[3]{63} \cdot \sqrt[3]{147} = \sqrt[3]{7 \cdot 9} \cdot \sqrt[3]{49 \cdot 3} = \sqrt[3]{7 \cdot 3^2} \cdot \sqrt[3]{7^2 \cdot 3} =$ $\sqrt[3]{7^3 \cdot 3^3} = 7 \cdot 3 = 21.$

909.в) $\sqrt[3]{8 - \sqrt{56}} \cdot \sqrt[3]{8 + \sqrt{56}} = \sqrt[3]{\left(8 - \sqrt{56}\right) \cdot \left(8 + \sqrt{56}\right)} =$ $\sqrt[3]{64 - 56} = \sqrt[3]{8} = 2.$

910.а) $\sqrt[3]{11} = \sqrt[6]{11^2} = \sqrt[6]{121} > \sqrt[6]{119}.$

910.в) $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2} < \sqrt{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{3}.$

Аудиторные задания (А/з): № 908 (б, г), № 909 (б, г).

Домашние задания (Д/з): № 908 (д, е), № 910 (б, г).

А/з, Д/з (подготовка):

$\sqrt[n]{a+b} \cdot \sqrt[n]{a-b} = \sqrt[n]{(a+b)\cdot(a-b)} = \sqrt[n]{a^2 - b^2};$

$\sqrt[n]{a} \; ? \; \sqrt[m]{b}$ $\qquad \sqrt[nm]{a^m} > \sqrt[mn]{b^n}$ если $a^m > b^n$

$\sqrt[nm]{a^m} < \sqrt[mn]{b^n}$ если $a^m < b^n$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m};$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a};$

$\sqrt[n]{a^m \cdot b^p} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{p}{n}};$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};$

$\sqrt[n]{a^n} = a.$

1.7 Элементы комбинаторики и теории вероятностей

Используемый источник – Алгебра 9 класс [2], Глава 6.

1094. Сколько различных трёхцветных флагов с тремя горизонтальными полосами можно получить, используя красный, синий и белый цвета? (Пример)

1095. Сколькими способами можно расставить по этапам четырёх участниц эстафеты в беге 4×100 м? (А/з)

1111. Сколькими способами могут быть присуждены первая, вторая и третья премии 3 лицам из 10 соревнующихся? (Пример)

1112. На станции имеется 8 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда? (А/з)

1113. Сколькими способами можно изготовить трёхцветный флаг с горизонтальными полосами из материала, имеющего 5 различных цветов? (Д/з)

1141. В партии из 100 деталей отдел контроля обнаружил 5 нестандартных деталей. Какова частота появления нестандартных деталей? (Пример)

1142. На ученьях по стрельбе из пистолета частота поражения мишени оказалась равной 0,85. Сколько было попаданий в цель, если по мишени произведено 120 выстрелов? (Д/з)

Элементы комбинаторики и теории вероятностей (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

1094.

$P_n = n! \qquad n = 3$

перестановки

$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (флагов).

1111.

Число размещений, составленных из n элементов по k $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

$n = 10;\ k = 3;$

$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 90 \cdot 8 = 720.$

1141.

n – общее число испытаний; m – число появлений события A в результате проведенных n испытаний; $\frac{m}{n}$ – частота случайного события A

$m = 5$; $n = 100$; $\frac{m}{n} = \frac{5}{100} = 0{,}05$.

Аудиторные задания (А/з): № 1095, № 1112.

Домашние задания (Д/з): № 1113, № 1142.

А/з (подготовка):

1095.

$P_n = n!$ $n = 4$; P_n – ?

1112.

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $n = 8$; $k = 4$; A_8^4 – ?

Д/з (подготовка):

1113.

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $n = 5$; $k = 3$; A_5^3 – ?

1142.

$\frac{m}{n} = 0{,}85$; $n = 120$; m – ?

1.8 Тригонометрические функции и их свойства

Используемый источник – Алгебра 9 класс [2], Глава 7.

1286. Найдите значение каждой из тригонометрических функций α, если:

а) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (Пример); б) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ (А/з);

в) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$ (А/з); г) $\alpha = -\frac{7\pi}{4}$ (Д/з).

1287. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{3} \cdot \cos 30^0 + \sqrt{2} \cdot \sin 45^0$ (Пример); б) $\sqrt{3} \cdot \left(\sin 60^0 - tg30^0\right)$ (А/з);

в) $2\cdot\cos 60^0+3\cdot tg45^0$ (А/з); г) $\sqrt{3}\cdot\cos 0^0-2\cdot ctg30^0$ (Д/з);

д) $4\cdot\cos 30^0\cdot\sin 60^0$ (Д/з); е) $2\cdot tg60^0\cdot tg30^0$ (Д/з).

Тригонометрические функции и их свойства (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

1286.а) $\alpha=\frac{\pi}{4}$; $sin\alpha=sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\alpha=cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$tg\alpha=tg\frac{\pi}{4}=1$; $ctg\alpha=ctg\frac{\pi}{4}=1$.

1287.а) $\sqrt{3}\cdot cos30^0+\sqrt{2}\cdot sin45^0=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}+\frac{2}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5.$

Аудиторные задания (А/з): № 1286 (б, в), № 1287 (б, в).

Домашние задания (Д/з): № 1286 (г), № 1287 (г, д, е).

А/з, Д/з (подготовка):

α	$0^0(0)$	$30^0(\pi/6)$	$45^0(\pi/4)$	$60^0(\pi/3)$	$90^0(\pi/2)$	$120^0(2\pi/3)$
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
α	$135^0(3\pi/4)$	$150^0(5\pi/6)$	$180^0(\pi)$	$210^0(7\pi/6)$	$225^0(5\pi/4)$	$240^0(4\pi/3)$
$sin\alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	-1	$-\sqrt{3}$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

α	$270^0(3\pi/2)$	$300^0(5\pi/3)$	$315^0(7\pi/4)$	$330^0(11\pi/6)$	$360^0(2\pi)$	
$sin\alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	
$cos\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	
$tg\alpha$	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	
$ctg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-$	

1.9 Входной контроль

Входной контроль (Подготовка)

1. При каком значении x равны значения функций, заданных формулами: 1) $y = 0,7x + 14$ и $y = 0,2x - 1$; 2) $y = -0,5x + 2,5$ и $y = -4,2x - 0,7$.

2. Решите неравенство: 1) $\sqrt{(x-8)^2} \geq 1$; 2) $\sqrt{(4x+1)^2} < 7$.

3. Решите уравнение: 1) $(2x-7)^2 + (3y+2)^2 = 0$; 2) $|8x+16| + |y+4| = 0$.

4. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена. Вычислите a_3, a_5, a_6, если:

1) $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$; 2) $a_n = \left|-\frac{n-1}{n+1}\right|$.

Решение:

1.

1) $0,7x + 14 = 0,2x - 1$; $\quad 0,5x = -15$; $\quad x = -30$.

2) $-0,5x + 2,5 = -4,2x - 0,7$; $\quad 3,7x = -3,2$; $\quad x = -\frac{32}{37}$.

2.

1) $\sqrt{(x-8)^2} \geq 1$; $\quad |x-8| \geq 1$;

$\begin{cases} x-8 \geq 1; \\ x-8 \leq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 9; \\ x \leq 7. \end{cases}$ Ответ: $x \in (-\infty;7] \cup [9;+\infty)$.

2) $\sqrt{(4x+1)^2} < 7$; $|4x+1| < 7$; $-7 < 4x+1 < 7$; $-8 < 4x < 6$; $-2 < x < 1{,}5$. Ответ: $x \in \left(2; \frac{3}{2}\right)$ или $x \in (2; 1{,}5)$.

3.

1) $(2x-7)^2 + (3y+2)^2 = 0$; $2x-7=0$; $x = 3{,}5$;

$3y+2=0$; $y = -\frac{2}{3}$. Ответ: $x = 3{,}5$; $y = -\frac{2}{3}$.

2) $|8x+16| + |y+4| = 0$; $8x+16=0$; $x=-2$;

$y+4=0$; $y=-4$. Ответ: $x=-2$; $y=-4$.

4.

1) $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$; $a_3 = 4 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$; $a_5 = 4 \cdot 3^4 = 4 \cdot 81 = 324$; $a_6 = 4 \cdot 3^5 = 4 \cdot 243 = 972$. Ответ: $a_3 = 36$; $a_5 = 324$; $a_6 = 972$.

2) $a_n = \left|-\frac{n-1}{n+1}\right|$; $a_3 = \left|-\frac{3-1}{3+1}\right| = \frac{2}{4} = 0{,}5$; $a_5 = \left|-\frac{5-1}{5+1}\right| = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $a_6 = \left|-\frac{6-1}{6+1}\right| = \frac{5}{7}$. Ответ: $a_3 = 0{,}5$; $a_5 = \frac{2}{3}$; $a_6 = \frac{5}{7}$.

Входной контроль

1. При каком значении x равны значения функций, заданных формулами:

1) $y = 1{,}6 - 0{,}8x$ и $y = 2{,}4x + 1{,}2$; 2) $y = 5{,}5 + 1{,}3x$ и $y = 3{,}6 - 1{,}7x$.

2. Решите неравенство: 1) $\sqrt{(4-x)^2} \leq 3$; 2) $\sqrt{(0{,}2-6x)^2} > 5$.

3. Решите уравнение: 1) $(4x+5)^2 + (y-6)^2 = 0$; 2) $|3x-9| + |5y-15| = 0$.

4. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена. Вычислите a_3, a_5, a_6, если:

1) $a_n = 0{,}5 \cdot 2^{n+1}$; 2) $a_n = |n \cdot (1-n)|$.

1.10 Системы уравнений в профессиональных задачах

Используемые источники – [3, 4].

Система уравнений – это условие, состоящее в одновременном выполнении нескольких уравнений относительно нескольких (или одной) переменных.

Решить систему уравнений – значит найти не просто решение, а комплекты решений, то есть такие значения всех переменных, которые, будучи одновременно подставленными в систему, обращают каждое ее уравнение в тождество.

Идея графического метода заключается в построении графика для каждого уравнения системы в одной системе координат и нахождении точек их пересечения – решения системы.

Метод расщепления системы состоит в том, чтобы разложить одно из уравнений системы на множители.

Метод сложения состоит в том, чтобы, складывая либо вычитая два уравнения системы (их предварительно можно и часто нужно умножать на некоторый коэффициент), получить новое уравнение, которым заменить одно из уравнений первоначальной системы.

Методы деления и умножения состоят в том, чтобы, разделив либо умножив соответственно левые и правые части двух уравнений системы, получить новое уравнение, и заменить им одно из уравнений первоначальной системы.

Суть метода замены переменных состоит в замене какого-либо выражения (или выражений) в системе на новую переменную (или несколько переменных) так, чтобы вновь полученные уравнения стали более простыми.

Для определения токов в электрической схеме использовать правило преобразования параллельно и последовательно соединённых сопротивлений можно не всегда.

Системы уравнений в профессиональных задачах (Подготовка)

Задача. При расчете простой цепи постоянного тока получилась следующая система уравнений:

$$\begin{cases} 7{,}5I_1 + 2I_2 = 100; \\ 5I_1 - 10I_2 = 0. \end{cases}$$

Решите данную систему методом подстановки.

Решение:

$$\begin{cases} 5I_1 = 10I_2; \\ 2I_2 = 100 - 7{,}5I_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = 2I_2; \\ 2I_2 = 100 - 7{,}5I_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 17I_2 = 100; \\ I_1 = 2I_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} I_2 = \frac{100}{17}; \\ I_1 = \frac{200}{17}. \end{cases}$$

Тест «Системы уравнений в профессиональных задачах»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Система уравнений – это условие, состоящее в ________________ выполнении нескольких уравнений относительно нескольких (или одной) переменных.

а) не обязательном; б) обязательном; в) не одновременном; г) одновременном.

2.Решить систему уравнений – значит найти не просто решение, а ____________ решений, то есть такие значения всех переменных, которые, будучи одновременно подставленными в систему, обращают каждое ее уравнение в тождество.

а) не наборы; б) наборы; в) комплекты; г) не комплекты.

3.Идея графического метода заключается в построении графика для __________ уравнения системы в одной системе координат и нахождении точек их пересечения – решения системы.

а) не каждого; б) каждого; в) одного; г) не одного.

4.Метод расщепления системы состоит в том, чтобы разложить одно из уравнений системы на ___________.

а) множители; б) не множители; в) слагаемые; г) не слагаемые.

5.Метод сложения состоит в том, чтобы, складывая либо вычитая два уравнения системы (их предварительно можно и часто нужно умножать на некоторый коэффициент), получить новое уравнение, которым __________ одно из уравнений первоначальной системы.

а) не дополнить; б) не заменить; в) дополнить; г) заменить.

6.Методы деления и умножения состоят в том, чтобы, разделив либо умножив соответственно левые и правые части двух уравнений системы, получить новое уравнение, и __________ им одно из уравнений первоначальной системы.

а) не дополнить; б) не заменить; в) заменить; г) дополнить.

7.Суть метода замены переменных состоит в _________ какого-либо выражения (или выражений) в системе на новую переменную (или несколько переменных) так, чтобы вновь полученные уравнения стали более простыми.

а) не дополнении; б) замене; в) не замене; г) дополнении.

8.Для определения токов в электрической схеме использовать правило ______________ параллельно и последовательно соединённых сопротивлений можно не всегда.

а) преобразования; б) замещения; в) не преобразования; г) не замещения.

Задача «Системы уравнений в профессиональных задачах»

9.При расчете простой цепи постоянного тока получилась следующая система уравнений:

$$\begin{cases} 8{,}5I_1 + 3I_2 = 120; \\ 6I_1 - 18I_2 = 0. \end{cases}$$

Решите данную систему методом подстановки.

РАЗДЕЛ 2. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1 Аксиомы стереометрии. Способы задания прямых и плоскостей в пространстве

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 1, 2.

Тест «Аксиомы стереометрии»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Плоскостями называются ________, на которых выполняется планиметрия и для которых верны аксиомы стереометрии.

а) полуобъекты; б) объекты; в) фигуры; г) полуфигуры.

2.Через каждые ____ точки пространства проходит плоскость.

а) двадцать две; б) две; в) четыре; г) три.

3.Множество точек пространства __________.

а) не определено; б) бесконечно; в) конечно; г) определено.

4.Через _______ одну или две точки проходит плоскость (а не только через три).

а) каждую; б) любую; в) всякую; г) не всякую.

5.В пространстве через каждые ____ точки проходит прямая.

а) двадцать две; б) три; в) четыре; г) две.

6.Если ___ плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть их общая прямая.

а) двадцать две; б) три; в) две; г) четыре.

7.Две плоскости, имеющие общую точку и тем самым (по аксиоме 2) общую прямую, называются _____________.

а) скрещивающимися; б) пересекающимися; в) не пересекающимися; г) не скрещивающимися.

8.Если прямая проходит через ___ точки плоскости, то она лежит в этой плоскости.

а) две; б) три; в) двадцать две; г) четыре.

9.Расстояние между любыми _____ точками пространства одно и то же на всех плоскостях, содержащих эти точки.

а) несколькими; б) тремя; в) двумя; г) определенными.

10.Две фигуры называются _______, если существует соответствие между их точками, при котором расстояния между парами соответствующих точек равны.

а) параллельными; б) соответствующими; в) подобными; г) равными.

11.Плоскость, ограничивающую ____________, называют его границей.

а) пространство; б) полупространство; в) объект; г) полуобъект.

12.Каждая плоскость разбивает пространство на ____ полупространства, для которых она является общей границей.

а) два; б) три; в) четыре; г) двадцать два.

Тест «Способы задания прямых и плоскостей в пространстве»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Через любые ____ точки пространства проходит прямая, и притом только одна.

а) двадцать две; б) три; в) две; г) четыре.

2.В пространстве (как и на плоскости) ____ различные прямые не могут иметь более одной общей точки.

а) двадцать две; б) три; в) четыре; г) две.

3.Две прямые, имеющие единственную общую точку, называются _______________.

а) скрещивающимися; б) пересекающимися; в) не пересекающимися; г) не скрещивающимися.

4.Каждые ____ точки в пространстве служат концами единственного отрезка.

а) две; б) три; в) четыре; г) двадцать две.

5.Через ___ точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

а) двадцать две; б) две; в) четыре; г) три.

6.Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только ____.

а) две; б) три; в) одна; г) четыре.

7.Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только ____.

а) две; б) одна; в) три; г) четыре.

2.2 Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельное и центральное проектирования

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 3, 4.

Тест «Взаимное расположение двух прямых в пространстве»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек – ___________ прямые.

а) соответствующие; б) не параллельные; в) параллельные; г) не соответствующие.

2.Прямые лежат в одной плоскости и имеют общую точку – ____________ прямые.

а) соответствующие; б) не соответствующие; в) не пересекающиеся; г) пересекающиеся.

3.Прямые не лежат ни в одной плоскости. Такие прямые называются _______________.

а) соответствующими; б) скрещивающимися; в) не скрещивающимися; г) не соответствующими.

4.Параллельные прямые ______ плоскость, в которой они лежат.

а) задают; б) определяют; в) не задают; г) не определяют.

5.Если две прямые содержат ______ точки, не лежащие в одной плоскости, то они скрещиваются.

а) двадцать две; б) две; в) три; г) четыре.

6.Прямая, лежащая в плоскости, скрещивается с _____ прямой, пересекающей эту плоскость, но не данную прямую.

а) определенной; б) всякой; в) каждой; г) не всякой.

7.Через каждую точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, ____________ данной, и притом только одна.

а) не параллельная; б) параллельная; в) перпендикулярная; г) не перпендикулярная.

8.____ прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.

а) две; б) не две; в) три; г) не три.

9.Если плоскость пересекает одну из двух _________ прямых, то она пересекает и другую из них.

а) соответствующих; б) не соответствующих; в) не параллельных; г) параллельных.

Тест «Параллельное и центральное проектирования»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Проекцией фигуры *F* называется фигура *F'*, состоящая из проекций ____ точек фигуры *F*.

а) трех; б) не всех; в) всех; г) не трех.

2.Преобразование некоторой фигуры *F* состоит в том, что каждой ее точке *X* _______________ некоторая точка *X’*.

а) прикасается; б) не прикасается; в) не сопоставляется; г) сопоставляется.

3.Все точки *X’* образуют некоторую фигуру *F’*, и говорят, что фигура *F* _________ в фигуру *F’*.

а) не преобразуется; б) преобразуется; в) превращается; г) не превращается.

4.Проекцией прямой является прямая, а проекцией отрезка – ______.

а) отрезок; б) не отрезок; в) прямая; г) не прямая.

5.Проекции параллельных прямых параллельны или __________.

а) не перпендикулярны; б) перпендикулярны; в) не совпадают; г) совпадают.

6.Отношение проекций ______, лежащих на одной прямой, равно отношению самих отрезков.

а) прямых; б) не отрезков; в) отрезков; г) не прямых.

7.Если прямая *OX* пересекает α, то точка *X’* их пересечения называется _________ проекцией точки *X* на плоскость α из точки *O*.

а) не центральной; б) центральной; в) параллельной; г) не параллельной.

8.Изображение пространственных фигур на плоскости с помощью __________ проектирования называется перспективой.

а) центрального; б) не центрального; в) параллельного; г) не параллельного.

2.3 Существование и единственность. Построения. Перпендикулярность прямой и плоскости

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 5, 6.

Тест «Существование и единственность. Построения»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Если фигура имеет характерное свойство, определяющее, какие точки принадлежат фигуре, а какие ей не принадлежат, то о такой фигуре говорят, что она является множеством (или геометрическим ______) точек, обладающих данным свойством.

а) скоплением; б) пространством; в) полем; г) местом.

2.Множество (геометрическое ____) точек на плоскости, равноудаленных от двух точек *A* и *B*, – это серединный перпендикуляр отрезка *AB*.

а) скопление; б) пространство; в) место; г) поле.

3.Биссектриса выпуклого угла – это множество (геометрическое ___) точек угла, равноудаленных от сторон угла.

а) место; б) пространство; в) скопление; г) поле.

4.n-угольной призмой называется многогранник, две грани которого – основания призмы – равные n-угольники, а остальные n граней – _____________.

а) не параллелограммы; б) параллелограммы; в) ромбы; г) не ромбы.

5.Параллелепипед – это призма, в основании которой ____________.

а) не параллелограмм; б) ромб; в) параллелограмм; г) не ромб.

6.Прямоугольный параллелепипед – это параллелепипед, все грани которого _______________.

а) ромбы; б) не прямоугольники; в) не ромбы; г) прямоугольники.

7.Призма называется прямой, если все ее боковые грани – _______________.

а) не прямоугольники; б) прямоугольники; в) ромбы; г) не ромбы.

8.Прямая призма называется правильной, если ее основания – правильные ____________.

а) многоугольники; б) параллелограммы; в) прямоугольники; г) ромбы.

Тест «Перпендикулярность прямой и плоскости»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Прямая называется ____________ плоскости, если она пересекает эту плоскость и перпендикулярна ко всякой прямой в этой плоскости, проходящей через точку пересечения.

а) не параллельной; б) параллельной; в) не перпендикулярной; г) перпендикулярной.

2.Отрезок или луч перпендикулярен плоскости, если он лежит на прямой, _______________ этой плоскости.

а) не параллельной; б) перпендикулярной; в) не перпендикулярной; г) параллельной.

3.Если отрезок ____________ плоскости и его конец лежит в этой плоскости, то он называется перпендикуляром к данной плоскости.

а) параллелен; б) не перпендикулярен; в) перпендикулярен; г) не параллелен.

4.Отрезок, имеющий с плоскостью одну общую точку – конец отрезка, но не _____________ данной плоскости, называется наклонной к плоскости.

а) перпендикулярный; б) параллельный; в) не перпендикулярный; г) не параллельный.

5.Перпендикуляр короче наклонной, если они проведены из одной и той же точки к одной ________.

а) прямой; б) плоскости; в) фигуре; г) поверхности.

6.Перпендикуляр AB из точки A на плоскость α – __________ из отрезков, соединяющих точку A с точками плоскости α.

а) не наибольший; б) не кратчайший; в) кратчайший; г) наибольший.

7.Свойство перпендикуляра быть ________ отрезком является характерным свойством.

а) кратчайшим; б) не кратчайшим; в) наибольшим; г) не наибольшим.

8.Если AB – _______ отрезок от точки A до плоскости α, то AB – перпендикуляр к плоскости α.

а) не наибольший; б) наибольший; в) не кратчайший; г) кратчайший.

9.Высотой пирамиды называется длина перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды на _______ ее основания, а также сам перпендикуляр.

а) прямую; б) фигуру; в) плоскость; г) поверхность.

2.4 Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Связь между параллельностью прямых и перпендикулярностью прямой и плоскости

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 7, 8.

Тест «Признак перпендикулярности прямой и плоскости»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Прямая, ____________ двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости, перпендикулярна этой плоскости.

а) не параллельная; б) параллельная; в) не перпендикулярная; г) перпендикулярная.

2.Прямые, _____________ данной прямой в данной ее точке, лежат в одной плоскости и заполняют ее.

а) не параллельные; б) параллельные; в) перпендикулярные; г) не перпендикулярные.

Тест «Связь между параллельностью прямых и перпендикулярностью прямой и плоскости»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Две прямые, ____________ одной и той же плоскости, параллельны.

а) не параллельные; б) параллельные; в) не перпендикулярные; г) перпендикулярные.

2.Если одна из двух параллельных прямых ______________ плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

а) не параллельна; б) перпендикулярна; в) параллельна; г) не перпендикулярна.

2.5 Основные теоремы о взаимно перпендикулярных прямой и плоскости. Угол между плоскостями. Перпендикулярность плоскостей

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 9, 10.

Тест «Основные теоремы о взаимно перпендикулярных прямой и плоскости»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Через каждую точку проходит прямая, _______________ данной плоскости, и притом только одна.

а) не параллельная; б) параллельная; в) не перпендикулярная; г) перпендикулярная.

2.Через каждую точку проходит плоскость, _____________ данной прямой, и притом только одна.

а) не параллельная; б) перпендикулярная; в) параллельная; г) не перпендикулярная.

Тест «Угол между плоскостями. Перпендикулярность плоскостей»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Две пересекающиеся прямые образуют ___ пары вертикальных углов.

а) двадцать две; б) три; в) две; г) четыре.

2.Двугранным углом называют фигуру, которая состоит из двух _____________, имеющих общую граничную прямую и не лежащих в одной плоскости.

а) полуповерхностей; б) полуплоскостей; в) плоскостей; г) поверхностей.

3.Сами _____________ называют гранями двугранного угла, а их общую граничную прямую – его ребром.

а) полуповерхности; б) плоскости; в) поверхности; г) полуплоскости.

4.Угол между сторонами a, b называется ________ углом двугранного угла.

а) линейным; б) не линейным; в) квадратичным; г) не квадратичным.

5.Величина ___________ угла не зависит от выбора его вершины на ребре двугранного угла.

а) не линейного; б) линейного; в) квадратичного; г) не квадратичного.

6.Величиной двугранного угла называется величина его __________ угла.

а) квадратичного; б) не линейного; в) линейного; г) не квадратичного.

7.Углом между _____________ плоскостями называется величина меньшего из образованных ими двугранных углов.

а) скрещивающимися; б) не скрещивающимися; в) не пересекающимися; г) пересекающимися.

8.Прямая, лежащая в одной из двух взаимно ________________ плоскостей и перпендикулярная их общей прямой, перпендикулярна другой плоскости.

а) перпендикулярных; б) не перпендикулярных; в) не параллельных; г) параллельных.

9.Прямая, имеющая общую точку с одной из двух взаимно ___________ плоскостей и перпендикулярная другой плоскости, лежит в первой из них.

а) не параллельных; б) не перпендикулярных; в) перпендикулярных; г) параллельных.

10.Если две плоскости, _____________ третьей плоскости, пересекаются, то прямая их пересечения перпендикулярна третьей плоскости.

а) не перпендикулярные; б) перпендикулярные; в) параллельные; г) не параллельные.

11.Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то эти плоскости взаимно ______________.

а) не параллельны; б) не перпендикулярны; в) параллельны; г) перпендикулярны.

2.6 Параллельность плоскостей. Параллельность прямой и плоскости

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 11, 12.

Тест «Параллельность плоскостей»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, ______________.

а) не перпендикулярны; б) перпендикулярны; в) параллельны; г) не параллельны.

2.Если прямая перпендикулярна одной прямой из двух ____________ плоскостей, то она перпендикулярна и другой.

а) не перпендикулярных; б) перпендикулярных; в) не параллельных; г) параллельных.

3.Прямые, по которым две параллельные плоскости пересекают третью плоскость, _________.

а) параллельны; б) не параллельны; в) перпендикулярны; г) не перпендикулярны.

4.Если прямая пересекает одну из двух ___________ плоскостей, то она пересекает и другую из них.

а) не параллельных; б) параллельных; в) перпендикулярных; г) не перпендикулярных.

5.Через каждую точку, не лежащую в данной плоскости, проходит плоскость, __________ данной, и притом только одна.

а) не перпендикулярная; б) перпендикулярная; в) не параллельная; г) параллельная.

6.Две плоскости, параллельные третьей плоскости, __________.

а) перпендикулярны; б) не параллельны; в) параллельны; г) не перпендикулярны.

Тест «Параллельность прямой и плоскости»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в данной плоскости, но сама не содержится в данной плоскости, то она __________ этой плоскости.

а) не перпендикулярна; б) перпендикулярна; в) параллельна; г) не параллельна.

2.Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости __________.

а) не перпендикулярны; б) перпендикулярны; в) не параллельны; г) параллельны.

2.7 Ортогональное проектирование.
Расстояние между фигурами и параллельность

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 13, 14.

Тест «Ортогональное проектирование»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Если точка не лежит на данной прямой (плоскости), то ____________ проекцией точки на прямую (на плоскость) называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую (плоскость).

а) не диагональной; б) диагональной; в) ортогональной; г) не ортогональной.

2.Проекцией же фигуры F на плоскость α называется фигура F', состоящая из проекций _____ точек фигуры F на эту плоскость.

а) не всех; б) некоторых; в) трех; г) всех.

3.Наклонная к плоскости перпендикулярна прямой, лежащей в этой плоскости, тогда и только тогда, когда проекция наклонной ___________ этой прямой.

а) не параллельна; б) перпендикулярна; в) не перпендикулярна; г) параллельна.

4.Расстоянием от данной точки A до фигуры F называется расстояние от этой точки до ___________ к A точке фигуры F.

а) ближайшей; б) не ближайшей; в) не прилегающей; г) прилегающей.

5.Если точка A не принадлежит фигуре F, то отрезок AB – ___________ из всех отрезков AX, соединяющих точку A с точками фигуры F.

а) удаленный; б) не удаленный; в) не кратчайший; г) кратчайший.

Тест «Расстояние между фигурами и параллельность»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Расстоянием между _____ фигурами называется расстояние между ближайшими точками этих фигур (если такие точки есть).

а) определенными; б) несколькими; в) тремя; г) двумя.

2.Высота призмы – это расстояние между _________ ее оснований.

а) полуповерхностями; б) полуплоскостями; в) плоскостями; г) поверхностями.

2.8 Углы

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 15.

Тест «Углы»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Два луча a и b называются сонаправленными, если они _____________ некоторой плоскости α и лежат с одной стороны от нее.

а) не перпендикулярны; б) перпендикулярны; в) параллельны; г) не параллельны.

2.Два луча, сонаправленные с третьим лучом, ______________.

а) не параллельны; б) не сонаправлены; в) сонаправлены; г) параллельны.

3.Если даны луч p и точка A, то из точки A можно провести ___________ луч q, сонаправленный с лучом p.

а) определенный; б) не определенный; в) не единственный; г) единственный.

4.Углы, стороны которых соответственно ____________, равны.

а) сонаправлены; б) не сонаправлены; в) не параллельны; г) параллельны.

5.Углом между плоскостью и наклонной к ней прямой называется ____ φ между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.

а) величина; б) параметр; в) угол; г) расстояние.

2.9 Контрольная работа «Прямые и плоскости в пространстве»

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 1-15.

Контрольная работа «Прямые и плоскости в пространстве»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

§ 1. *Аксиомы стереометрии*

1.Плоскостями называются ________, на которых выполняется планиметрия и для которых верны аксиомы стереометрии.

а) полуобъекты; б) объекты; в) фигуры; г) полуфигуры.

2.Через каждые ____ точки пространства проходит плоскость.

а) двадцать две; б) две; в) четыре; г) три.

§ 2. *Способы задания прямых и плоскостей в пространстве*

3.Через любые ____ точки пространства проходит прямая, и притом только одна.

а) двадцать две; б) три; в) две; г) четыре.

4.В пространстве (как и на плоскости) ____ различные прямые не могут иметь более одной общей точки.

а) двадцать две; б) три; в) четыре; г) две.

§ 3. *Взаимное расположение двух прямых в пространстве*

5.Прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек – ___________ прямые.

а) соответствующие; б) не параллельные; в) параллельные; г) не соответствующие.

6.Прямые лежат в одной плоскости и имеют общую точку – ____________ прямые.

а) соответствующие; б) не соответствующие; в) не пересекающиеся; г) пересекающиеся.

§ 4. *Параллельное и центральное проектирования*

7.Проекцией фигуры F называется фигура F', состоящая из проекций ____ точек фигуры F.

а) трех; б) не всех; в) всех; г) не трех.

8.Преобразование некоторой фигуры F состоит в том, что каждой ее точке X ______________ некоторая точка X'.

а) прикасается; б) не прикасается; в) не сопоставляется; г) сопоставляется.

§ 5. *Существование и единственность. Построения*

9.Если фигура имеет характерное свойство, определяющее, какие точки принадлежат фигуре, а какие ей не принадлежат, то о такой фигуре говорят, что она является множеством (или геометрическим ______) точек, обладающих данным свойством.

а) скоплением; б) пространством; в) полем; г) местом.

10.Множество (геометрическое ____) точек на плоскости, равноудаленных от двух точек A и B, – это серединный перпендикуляр отрезка AB.

а) скопление; б) пространство; в) место; г) поле.

§ 6. *Перпендикулярность прямой и плоскости*

11.Прямая называется ____________ плоскости, если она пересекает эту плоскость и перпендикулярна ко всякой прямой в этой плоскости, проходящей через точку пересечения.

а) не параллельной; б) параллельной; в) не перпендикулярной; г) перпендикулярной.

12.Отрезок или луч перпендикулярен плоскости, если он лежит на прямой, _______________ этой плоскости.

а) не параллельной; б) перпендикулярной; в) не перпендикулярной; г) параллельной.

§ 7. *Признак перпендикулярности прямой и плоскости*

13.Прямая, ____________ двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости, перпендикулярна этой плоскости.

а) не параллельная; б) параллельная; в) не перпендикулярная; г) перпендикулярная.

14.Прямые, _____________ данной прямой в данной ее точке, лежат в одной плоскости и заполняют ее.

а) не параллельные; б) параллельные; в) перпендикулярные; г) не перпендикулярные.

§ 8. *Связь между параллельностью прямых и перпендикулярностью прямой и плоскости*

15.Две прямые, ____________ одной и той же плоскости, параллельны.

а) не параллельные; б) параллельные; в) не перпендикулярные; г) перпендикулярные.

16.Если одна из двух параллельных прямых ______________ плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

а) не параллельна; б) перпендикулярна; в) параллельна; г) не перпендикулярна.

§ 9. *Основные теоремы о взаимно перпендикулярных прямой и плоскости*

17.Через каждую точку проходит прямая, _______________ данной плоскости, и притом только одна.

а) не параллельная; б) параллельная; в) не перпендикулярная; г) перпендикулярная.

18.Через каждую точку проходит плоскость, ____________ данной прямой, и притом только одна.

а) не параллельная; б) перпендикулярная; в) параллельная; г) не перпендикулярная.

§ 10. *Угол между плоскостями. Перпендикулярность плоскостей*

19.Две пересекающиеся прямые образуют ___ пары вертикальных углов.

а) двадцать две; б) три; в) две; г) четыре.

20.Двугранным углом называют фигуру, которая состоит из двух ____________, имеющих общую граничную прямую и не лежащих в одной плоскости.

а) полуповерхностей; б) полуплоскостей; в) плоскостей; г) поверхностей.

§ 11. *Параллельность плоскостей*

21.Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, ____________.

а) не перпендикулярны; б) перпендикулярны; в) параллельны; г) не параллельны.

22.Если прямая перпендикулярна одной прямой из двух ____________ плоскостей, то она перпендикулярна и другой.

а) не перпендикулярных; б) перпендикулярных; в) не параллельных; г) параллельных.

§ 12. *Параллельность прямой и плоскости*

23.Если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в данной плоскости, но сама не содержится в данной плоскости, то она __________ этой плоскости.

а) не перпендикулярна; б) перпендикулярна; в) параллельна; г) не параллельна.

24.Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости __________.

а) не перпендикулярны; б) перпендикулярны; в) не параллельны; г) параллельны.

§ 13. *Ортогональное проектирование*

25.Если точка не лежит на данной прямой (плоскости), то ____________ проекцией точки на прямую (на плоскость) называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую (плоскость).

а) не диагональной; б) диагональной; в) ортогональной; г) не ортогональной.

26.Проекцией же фигуры F на плоскость α называется фигура F', состоящая из проекций _____ точек фигуры F на эту плоскость.

а) не всех; б) некоторых; в) трех; г) всех.

§ 14. *Расстояние между фигурами и параллельность*

27.Расстоянием между _____ фигурами называется расстояние между ближайшими точками этих фигур (если такие точки есть).

а) определенными; б) несколькими; в) тремя; г) двумя.

28.Высота призмы – это расстояние между _________ ее оснований.

а) полуповерхностями; б) полуплоскостями; в) плоскостями; г) поверхностями.

§ 15. *Углы*

29.Два луча a и b называются сонаправленными, если они _____________ некоторой плоскости α и лежат с одной стороны от нее.

а) не перпендикулярны; б) перпендикулярны; в) параллельны; г) не параллельны.

30.Два луча, сонаправленные с третьим лучом, ______________.

а) не параллельны; б) не сонаправлены; в) сонаправлены; г) параллельны.

2.10 Прямые и плоскости в профессиональных задачах

Используемый источник – [6].

Прямая на комплексном чертеже может быть задана двумя точками либо точкой и направлением, когда одна из точек удалена в бесконечность.

Прямая, не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется прямой общего положения.

Относительно плоскостей проекций прямая может занимать частное положение, если она параллельна или перпендикулярна какой-либо плоскости проекций.

Линии уровня – это прямые, параллельные какой-либо плоскости проекций.

Фронтальная и горизонтальная проекции профильной прямой уровня находятся на одной линии связи, поэтому эта пара проекций не определяет положение прямой.

Проецирующие прямые – это прямые, перпендикулярные какой-либо плоскости проекций.

Горизонтально-проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций.

Фронтально-проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций.

Профильно-проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций, на которую проецируется в точку.

Натуральную величину углов наклона прямой к плоскостям проекций и натуральную величину отрезка прямой можно определить способом прямоугольного треугольника.

Угол между прямой и плоскостью проекций, на которой выполняют построения, определяется как угол между гипотенузой и катетом, которым является проекция отрезка.

Точка может принадлежать прямой, если проекции точки принадлежат одноимённым проекциям прямой.

Точка может конкурировать с какой-либо точкой прямой.

Прямые в пространстве могут быть параллельными, пересекающимися и скрещивающимися.

Если прямые параллельны в пространстве, то на комплексном чертеже параллельны их одноимённые проекции.

Если прямые пересекаются в пространстве, то на комплексном чертеже одноимённые проекции этих прямых пересекаются в точках, расположенных на одной линии связи.

Скрещивающиеся прямые не параллельны и не пересекаются между собой (не имеют общих точек).

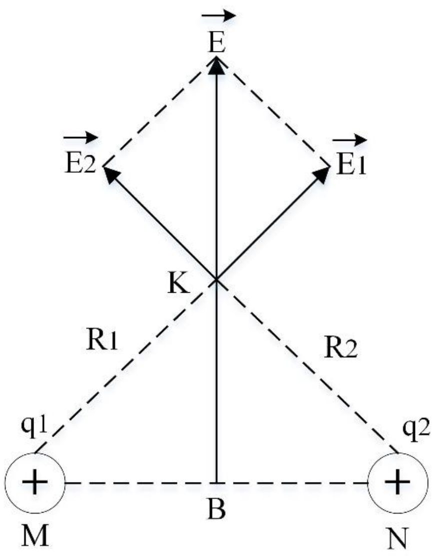
Точки пересечения одноимённых проекций скрещивающихся прямых не лежат на одной линии связи.

В частном случае прямые могут пересекаться или скрещиваться под прямым углом.

Две прямые проецируются во взаимно перпендикулярные на горизонтальную плоскость проекций, если одна из них горизонталь, на фронтальную плоскость проекций, если одна из них - фронталь.

Задача «Прямые и плоскости в профессиональных задачах» (Подготовка)

Пример. Два заряда (см. рисунок) $q_1 = q_2 = 8 \cdot 10^{-11}$ Кл расположены в воздухе на расстоянии 14 см в точках M и N соответственно. Определить напряженность поля в точке K, если она находится на перпендикуляре KB к прямой MN и отрезки MB=BN=KB.



Рисунок

Решение.

На основании равенства прямоугольных треугольников $\Delta MBK = \Delta BNK$ и согласно теореме Пифагора расстояния до точки K

$$R_1 = R_2 = \sqrt{(MB)^2 + (BK)^2} = \sqrt{7^2 + 7^2} = 9{,}9 \text{ см} = 0{,}099 \text{ м}.$$

Учитывая, что заряды находятся в воздухе ($\varepsilon_a = \varepsilon_0$), находим

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi {R_1}^2 \varepsilon_a} = \frac{8 \cdot 10^{-11}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}099^2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 73 \ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Поскольку $R_1 = R_2$ и $q_1 = q_2$, то $E_1 = E_2 = 73 \ \frac{\text{В}}{\text{м}}$.

Результирующий вектор напряженности поля в точке K определяется из условия, что вектор E_1 перпендикулярен вектору E_2

$$E = \sqrt{{E_1}^2 + {E_2}^2} = \sqrt{73^2 + 73^2} = 103{,}2 \ \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Тест «Прямые и плоскости в профессиональных задачах»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Прямая на комплексном чертеже может быть задана ______ точками либо точкой и направлением, когда одна из точек удалена в бесконечность.

а) не двумя; б) не тремя; в) тремя; г) двумя.

2.Прямая, не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется прямой _______ положения.

а) не общего; б) не частного; в) общего; г) частного.

3.Относительно плоскостей проекций прямая может занимать __________ положение, если она параллельна или перпендикулярна какой-либо плоскости проекций.

а) не общее; б) частное; в) общее; г) не частное.

4.Линии уровня – это прямые, ____________ какой-либо плоскости проекций.

а) параллельные; б) не параллельные; в) перпендикулярные; г) не перпендикулярные.

5.Фронтальная и горизонтальная проекции профильной прямой уровня находятся на одной линии ______, поэтому эта пара проекций не определяет положение прямой.

а) не уровня; б) не связи; в) уровня; г) связи.

6.Проецирующие прямые – это прямые, _____________ какой-либо плоскости проекций.

а) не параллельные; б) не перпендикулярные; в) перпендикулярные; г) параллельные.

7.Горизонтально-проецирующая прямая – прямая, _____________ горизонтальной плоскости проекций.

а) не параллельная; б) перпендикулярная; в) не перпендикулярная; г) параллельная.

8.Фронтально-проецирующая прямая – прямая, _____________ фронтальной плоскости проекций.

а) перпендикулярная; б) не параллельная; в) не перпендикулярная; г) параллельная.

9.Профильно-проецирующая прямая – прямая, _____________ профильной плоскости проекций, на которую проецируется в точку.

а) параллельная; б) не параллельная; в) не перпендикулярная; г) перпендикулярная.

10.Натуральную величину углов наклона прямой к плоскостям проекций и натуральную величину отрезка прямой можно определить способом ____________ треугольника.

а) не равнобедренного; б) не прямоугольного; в) прямоугольного; г) равнобедренного.

11.Угол между прямой и плоскостью проекций, на которой выполняют построения, определяется как _____ между гипотенузой и катетом, которым является проекция отрезка.

а) не угол; б) угол; в) разница; г) не разница.

12.Точка может принадлежать прямой, если проекции точки принадлежат ______________ проекциям прямой.

а) одноимённым; б) не одноимённым; в) разноимённым; г) не разноимённым.

13.Точка может _______________ с какой-либо точкой прямой.

а) не взаимодействовать; б) не конкурировать; в) взаимодействовать; г) конкурировать.

14.Прямые в пространстве могут быть _____________, пересекающимися и скрещивающимися.

а) секущими; б) не секущими; в) параллельными; г) не параллельными.

15.Если прямые параллельны в пространстве, то на комплексном чертеже параллельны их ____________ проекции.

а) не одноимённые; б) одноимённые; в) разноимённые; г) не разноимённые.

16.Если прямые пересекаются в пространстве, то на комплексном чертеже ______________ проекции этих прямых пересекаются в точках, расположенных на одной линии связи.

а) одноимённые; б) не одноимённые; в) разноимённые; г) не разноимённые.

17.______________ прямые не параллельны и не пересекаются между собой (не имеют общих точек).

а) не случайные; б) не скрещивающиеся; в) случайные; г) скрещивающиеся.

18.Точки пересечения одноимённых проекций _____________ прямых не лежат на одной линии связи.

а) не случайных; б) не скрещивающихся; в) скрещивающихся; г) случайных.

19.В ________ случае прямые могут пересекаться или скрещиваться под прямым углом.

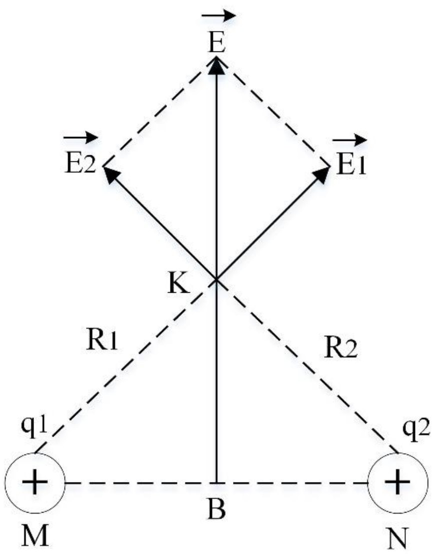
а) не частном; б) частном; в) общем; г) не общем.

20.Две прямые проецируются во взаимно перпендикулярные на _____________ плоскость проекций, если одна из них горизонталь, на фронтальную плоскость проекций, если одна из них - фронталь.

а) горизонтальную; б) не горизонтальную; в) вертикальную; г) не вертикальную.

Задача «Прямые и плоскости в профессиональных задачах»

21.Два заряда (см. рисунок) $q_1 = q_2 = 10 \cdot 10^{-11}$ Кл расположены в воздухе на расстоянии 20 см в точках *M* и *N* соответственно. Определить напряженность поля в точке *K*, если она находится на перпендикуляре *KB* к прямой *MN* и отрезки *MB*=*BN*=*KB*.



Рисунок

РАЗДЕЛ 3. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.1 Метод координат

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 29.

Тест «Метод координат»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Координатами вообще называют _______, определяющие положение точки.

а) числа; б) не числа; в) элементы; г) не элементы.

2.Расстояние между точками равно корню __________ из суммы квадратов разностей их координат.

а) не квадратному; б) квадратному; в) кубическому; г) не кубическому.

3.Применение координат и алгебраических методов к исследованию геометрических объектов и к решению геометрических задач составляет раздел геометрии, называемый _____________ геометрией.

а) не экспериментальной; б) не аналитической; в) аналитической; г) экспериментальной.

4.Через ________ координат геометрия и алгебра, соединяясь и взаимодействуя, дают богатые плоды, которые они не могли бы дать, оставаясь разделёнными.

а) не способ; б) не метод; в) способ; г) метод.

Задача «Метод координат»

5.Даны точки $A(-1; 1; -1)$ и $B(0; -1; 0)$. Найти расстояние между точками A и B.

Задача «Метод координат» (Подготовка)

Даны точки $A(-1;2;3)$ и $B(-1;\ 2;-3)$. Найти расстояние между точками A и B.

Решение:

В прямоугольных координатах расстояние между точками $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ выражается формулой

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-1-(-1))^2+(2-2)^2+(-3-3)^2} = \sqrt{6^2} = 6.$$

3.2 Векторы

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 30.

Тест «Векторы»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Векторами называются величины, которые характеризуются не только ___________ значением при выбранной единице измерения, но и направлением.

а) не численным; б) количественным; в) численным; г) не количественным.

2.__________ значение вектора называется его модулем или абсолютной величиной.

а) численное; б) не численное; в) количественное; г) не количественное.

3.__________ вектор – его модуль равен нулю, а направления он не имеет.

а) не единичный; б) не нулевой; в) единичный; г) нулевой.

4.__________ отрезком называется отрезок, у которого указан порядок концов: первый называется началом, второй – концом.

а) не направленным; б) направленным; в) противонаправленным; г) сонаправленным.

5.Два вектора, сонаправленные с третьим вектором, ____________.

а) сонаправлены; б) не сонаправлены; в) противонаправлены; г) не противонаправлены.

6.Ненулевые векторы называются равными, если их длины равны и они ____________.

а) противонаправлены; б) не сонаправлены; в) сонаправлены; г) не противонаправлены.

7.Два вектора, равные третьему вектору, ______.

а) не равны; б) равны; в) параллельны; г) не параллельны.

8.От ______ точки в пространстве можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

а) определенной; б) единственной; в) одной; г) любой.

9.Два вектора называются ____________ (или параллельными), если изображающие их направленные отрезки параллельны или лежат на одной прямой.

а) компланарными; б) не коллинеарными; в) коллинеарными; г) не компланарными.

10.О двух параллельных, но несонаправленных _________ векторах говорят, что они направлены противоположно.

а) ненулевых; б) нулевых; в) единичных; г) бесконечных.

11.Базисом на прямой является любой _________ вектор.

а) бесконечный; б) нулевой; в) единичный; г) ненулевой.

12.Базисом на плоскости является _____ пара неколлинеарных векторов.

а) определенная; б) любая; в) одна; г) единственная.

13.Векторы называются ____________, если существует плоскость, которой параллельны все эти векторы.

а) компланарными; б) не коллинеарными; в) коллинеарными; г) не компланарными.

14.Базисом в пространстве является _____ тройка некомпланарных векторов.

а) определенная; б) любая; в) одна; г) единственная.

3.3 Координаты и векторы

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 31.

Тест «Координаты и векторы»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Координаты вектора, отложенного от произвольной точки, равны ________ соответствующих координат его конца и начала.

а) полуразности; б) сумме; в) разности; г) полусумме.

2.При сложении векторов их ____________ координаты складываются.

а) не определенные; б) не соответствующие; в) определенные; г) соответствующие.

3.При умножении вектора на число его координаты _________ на это число.

а) умножаются; б) не умножаются; в) делятся; г) не делятся.

4.Векторы ____________ (коллинеарны) тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

а) не равны; б) параллельны; в) равны; г) не параллельны.

5.Скалярным произведением двух _________ векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

а) бесконечных; б) нулевых; в) единичных; г) ненулевых.

6.Углом между двумя __________ векторами называется величина образуемого ими угла, когда они отложены от одной точки.

а) бесконечными; б) нулевыми; в) ненулевыми; г) единичными.

7.Угол между векторами _________ от выбора той точки, от которой они откладываются.

а) сильно зависит; б) не зависит; в) зависит; г) слабо зависит.

8.Скалярное произведение векторов равно ______ произведений их одноименных координат.

а) сумме; б) полуразности; в) разности; г) полусумме.

Задачи «Координаты и векторы»

9.Сложить два вектора $\overline{a} = (-1; 3; 8)$ и $\overline{b} = (4; -2; 0)$.

10.Вычислить произведение $2\overline{a}$, если $\overline{a} = (-1; 3; 8)$.

11.Вычислить скалярное произведение векторов $\overline{a} = (-1; 3; 8)$, $\overline{b} = (4; -2; 0)$.

12.Найти косинус угла между векторами $\overline{a} = (-1; 3; 8)$ и $\overline{b} = (4; -2; 0)$.

13.Найти расстояние от точки $P(-4; 2; 1)$ до плоскости α, заданной уравнением:

$-x + y - 2z + 2 = 0.$

Задачи «Координаты и векторы» (Подготовка)

1.Сложить два вектора $\overline{a} = (4; -1; 2)$ и $\overline{b} = (1; 3; -2)$.

2.Вычислить произведение $3\overline{a}$, если $\overline{a} = (4; -1; 2)$.

3.Вычислить скалярное произведение векторов $\overline{a} = (4; -1; 2)$, $\overline{b} = (1; 3; -2)$.

4.Найти косинус угла между векторами $\overline{a} = (4; -1; 2)$ и $\overline{b} = (1; 3; -2)$.

5.Найти расстояние от точки $P(-3; -1; 1)$ до плоскости α, заданной уравнением:

$2x + 3y - z - 1 = 0.$

Решение:

1. $\overline{a} = (x_a; y_a; z_a)$; $\overline{b} = (x_b; y_b; z_b)$; $\overline{a} + \overline{b} = (x_a + x_b; y_a + y_b; z_a + z_b)$;

$\overline{a} = (4; -1; 2)$; $\overline{b} = (1; 3; -2)$; $\overline{a} + \overline{b} = (4 + 1; -1 + 3; 2 - 2) = (5; 2; 0)$.

2. $\overline{a} = (x_a; y_a; z_a)$; k – число; $k\overline{a} = (kx_a; ky_a; kz_a)$;

$\overline{a} = (4; -1; 2)$; $k = 3$; $3\overline{a} = (3 \cdot 4; 3 \cdot (-1); 3 \cdot 2) = (12; -3; 6)$.

3. $\overline{a} = (x_a; y_a; z_a)$; $\overline{b} = (x_b; y_b; z_b)$; $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$ – скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$; $\overline{a} = (4; -1; 2)$; $\overline{b} = (1; 3; -2)$;

$\overline{a} \cdot \overline{b} = 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-2) = 4 - 3 - 4 = -3$.

4. $\overline{a} = (x_a; y_a; z_a)$; $\overline{b} = (x_b; y_b; z_b)$; $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$;

$|\overline{a}| = \sqrt{(x_a)^2 + (y_a)^2 + (z_a)^2}$ – длина вектора $\overline{a}$;

$|\overline{b}| = \sqrt{(x_b)^2 + (y_b)^2 + (z_b)^2}$ – длина вектора $\overline{b}$;

$cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$ – косинус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

$\overline{a} = (4; -1; 2)$; $\overline{b} = (1; 3; -2)$; $\overline{a} \cdot \overline{b} = -3$ (из предыдущей задачи);

$|\overline{a}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}$;

$|\overline{b}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$;

$cos\varphi = \frac{-3}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-3}{7 \cdot \sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{14}$.

5. $P(x_0; y_0; z_0)$ – точка; $Ax + By + Cz + D = 0$ – плоскость α;

$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ – расстояние от точки P до плоскости α;

$P(-3; -1; 1)$; $x_0 = -3$; $y_0 = -1$; $z_0 = 1$;

α: $2x + 3y - z - 1 = 0$; $A = 2$; $B = 3$; $C = -1$; $D = -1$;

$d = \frac{|2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{|-6 - 3 - 1 - 1|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{|-11|}{\sqrt{14}} = \frac{11\sqrt{14}}{14}$.

3.4 Контрольная работа «Координаты и векторы в пространстве»

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 29-31.

Контрольная работа «Координаты и векторы в пространстве»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

§ 29. *Метод координат*

1.Расстояние между точками равно корню __________ из суммы квадратов разностей их координат.

а) не квадратному; б) квадратному; в) кубическому; г) не кубическому.

2.Применение координат и алгебраических методов к исследованию геометрических объектов и к решению геометрических задач составляет раздел геометрии, называемый _____________ геометрией.

а) не экспериментальной; б) не аналитической; в) экспериментальной; г) аналитической.

§ 30. *Векторы*

3.Векторами называются величины, которые характеризуются не только ___________ значением при выбранной единице измерения, но и направлением.

а) не численным; б) количественным; в) численным; г) не количественным.

4.__________ значение вектора называется его модулем или абсолютной величиной.

а) численное; б) не численное; в) количественное; г) не количественное.

§ 31. *Координаты и векторы*

5.Координаты вектора, отложенного от произвольной точки, равны ________ соответствующих координат его конца и начала.

а) полуразности; б) сумме; в) разности; г) полусумме.

6.При сложении векторов их ____________ координаты складываются.

а) не определенные; б) не соответствующие; в) определенные; г) соответствующие.

Выполните задания:

7. Каковы координаты вектора $\overline{AB}$ и его длина, если:

1) $A(1,-1,2)$, $B(0,1,1)$; 2) $A(1,-2,2)$, $B(-1,1,3)$.

8. Даны векторы $\overline{a} = (2,-1,0)$ и $\overline{b} = (3,-1,-2)$. Какие координаты имеют векторы:

1) $2\overline{a}$; 2) $\overline{b} - \overline{a}$.

9. Пусть $\overline{a} = (-1,2,-3)$, $\overline{b} = (2,-1,0)$. Вычислите: 1) $(-2\overline{a}) \cdot \overline{b}$; 2) $\overline{a} \cdot \left(\frac{1}{2}\overline{b}\right)$.

10. Пусть $\overline{a} = (1,-2,0)$, $\overline{b} = (0,2,-1)$. Вычислите: 1) $\left|\overline{b}\right|$; 2) $|2\overline{a}|$.

Контрольная работа «Координаты и векторы в пространстве» (Подготовка)

1. Каковы координаты вектора $\overline{AB}$ и его длина, если:

1) $A(-1,1,-1)$, $B(0,-1,0)$; 2) $A(-1,2,3)$, $B(-1,2,-3)$.

2. Даны векторы $\overline{a} = (2,-1,0)$ и $\overline{b} = (3,-1,-2)$. Какие координаты имеют векторы:

1) $-\overline{b}$; 2) $2\overline{a} - 4\overline{b}$.

3. Пусть $\overline{a} = (-1,2,-3)$, $\overline{b} = (2,-1,0)$. Вычислите: 1) $\overline{a} \cdot \overline{b}$; 2) $(-3\overline{a}) \cdot (2\overline{b})$.

4. Пусть $\overline{a} = (1,-2,0)$, $\overline{b} = (0,2,-1)$. Вычислите: 1) $|\overline{a}|$; 2) $\left|-\frac{1}{2}\overline{b}\right|$.

Решение:

1.1) $\overline{AB} = \big(0-(-1), -1-1, 0-(-1)\big) = (1,-2,1)$;

$\left|\overline{\mathrm{A}B}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$;

2) $\overline{\mathrm{A}B} = (-1 - (-1), 2 - 2, -3 - 3) = (0, 0, -6)$;

$\left|\overline{\mathrm{A}B}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-6)^2} = \sqrt{6} = 6$.

2.1) $-\overline{b} = (-3, 1, 2)$; 2) $2\overline{a} - 4\overline{b} = 2(2, -1, 0) - 4(3, -1, -2) = (4, -2, 0) - (12, -4, -8) = \big(4 - 12, -2 - (-4), 0 - (-8)\big) = (-8, 2, 8)$.

3.1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = (-1,2,-3) \cdot (2,-1,0) = -1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 = -2 - 2 + 0 = -4$;

2) $(-3\overline{a}) \cdot \big(2\overline{b}\big) = [-3(-1,2,-3)] \cdot [2(2,-1,0)] = (3,-6,9) \cdot (4,-2,0) = 3 \cdot 4 - 6 \cdot (-2) + 9 \cdot 0 = 12 + 12 = 24$.

4.1) $|\overline{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 4 + 0} = \sqrt{5}$;

2) $\left|-\frac{1}{2}\overline{b}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{b}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{0 + 4 + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

<u>Формулы</u>:

1. $\overline{\mathrm{A}B}$; $A(x_1; y_1; z_1)$; $B(x_2; y_2; z_2)$; $\overline{\mathrm{A}B} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$;

$\left|\overline{\mathrm{A}B}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ – длина вектора $\overline{\mathrm{A}B}$ (или модуль).

2. $\overline{b}(x; y; z)$; $k\overline{b}(kx; ky; kz)$; $m\overline{a} + n\overline{b}$; $\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)$; $\overline{b} = (x_2; y_2; z_2)$;

$m\overline{a} + n\overline{b} = (mx_1 + nx_2; my_1 + ny_2; mz_1 + nz_2)$.

3. $\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)$; $\overline{b} = (x_2; y_2; z_2)$; $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$ – скалярное произведение векторов;

$(m\overline{a}) \cdot \big(n\overline{b}\big) = mx_1 \cdot nx_2 + my_1 \cdot ny_2 + mz_1 \cdot nz_2 = mn(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = mn\big(\overline{a} \cdot \overline{b}\big)$.

4. $\left|k\overline{b}\right| = k\left|\overline{b}\right|$.

3.5 Векторное пространство в профессиональных задачах

Используемый источник – [7].

В современной электроэнергетике используют в основном переменный синусоидальный ток.

В настоящее время почти вся электрическая энергия вырабатывается в виде энергии переменного тока.

Основными преимуществами переменного тока по сравнению с постоянным являются возможность более простого преобразования напряжения и передачи энергии с минимальными потерями.

Генераторы и двигатели переменного тока имеют более простое устройство, надёжнее в работе и проще в эксплуатации по сравнению с машинами постоянного тока.

Синусоидальный ток – это периодический ток, изменяющийся во времени по закону синуса.

Периодом T называют интервал времени, за который ток совершает одно полное колебание.

Мгновенное значение синусоидального тока изменяется с течением времени от нуля до максимального значения, поэтому использовать в расчётах электрических цепей такую величину неудобно.

Удобнее использовать для характеристики переменного тока какое-нибудь его свойство, не зависящее от его направления.

Действующее значение синусоидального тока определяется как среднее квадратичное за период.

Действующее значение синусоидального тока меньше его амплитуды в $\sqrt{2}$ раз.

Номинальные токи и напряжения электротехнических устройств определяются, как правило, по их действующим значениям.

Приборы электромагнитной, электродинамической и других систем показывают именно действующие значения токов и напряжений.

Графически синусоидальный ток удобно интерпретировать графически в виде вектора, вращающегося в декартовой системе координат.

Удобство векторных диаграмм заключается в том, что все вектора токов и напряжений электрической цепи синусоидального тока вращаются с одинаковой угловой скоростью, поэтому их взаимное расположение друг относительно друга с течением времени не изменяется.

Тест «Векторное пространство в профессиональных задачах»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.В современной электроэнергетике используют в основном переменный ____________ ток.

а) не гармонический; б) гармонический; в) не синусоидальный; г) синусоидальный.

2.В настоящее время почти вся электрическая энергия вырабатывается в виде энергии ____________ тока.

а) не переменного; б) постоянного; в) переменного; г) не постоянного.

3.Основными преимуществами ____________ тока по сравнению с постоянным являются возможность более простого преобразования напряжения и передачи энергии с минимальными потерями.

а) не переменного; б) переменного; в) постоянного; г) не постоянного.

4.Генераторы и двигатели _____________ тока имеют более простое устройство, надёжнее в работе и проще в эксплуатации по сравнению с машинами постоянного тока.

а) переменного; б) не переменного; в) постоянного; г) не постоянного.

5.Синусоидальный ток – это ____________ ток, изменяющийся во времени по закону синуса.

а) не постоянный; б) не периодический; в) постоянный; г) периодический.

6.Периодом Т называют интервал _________, за который ток совершает одно полное колебание.

а) не параметра; б) не времени; в) времени; г) параметра.

7.___________ значение синусоидального тока изменяется с течением времени от нуля до максимального значения, поэтому использовать в расчётах электрических цепей такую величину неудобно.

а) не мгновенное; б) мгновенное; в) текущее; г) не текущее.

8.Удобнее использовать для характеристики _____________ тока какое-нибудь его свойство, не зависящее от его направления.

а) переменного; б) не переменного; в) постоянного; г) не постоянного.

9.Действующее значение синусоидального тока определяется как среднее _____________ за период.

а) не кубическое; б) не квадратичное; в) кубическое; г) квадратичное.

10.Действующее значение синусоидального тока ________ его амплитуды в $\sqrt{2}$ раз.

а) не меньше; б) не больше; в) меньше; г) больше.

11.Номинальные токи и напряжения электротехнических устройств определяются, как правило, по их ____________ значениям.

а) не действующим; б) действующим; в) максимальным; г) не максимальным.

12.Приборы электромагнитной, электродинамической и других систем показывают именно _______________ значения токов и напряжений.

а) действующие; б) не действующие; в) максимальные; г) не максимальные.

13.Графически синусоидальный ток удобно интерпретировать графически в виде ___________, вращающегося в декартовой системе координат.

а) не ротора; б) не вектора; в) ротора; г) вектора.

14.Удобство векторных диаграмм заключается в том, что все вектора токов и напряжений электрической цепи синусоидального тока вращаются с ___________ угловой скоростью, поэтому их взаимное расположение друг относительно друга с течением времени не изменяется.

а) не разной; б) не одинаковой; в) одинаковой; г) разной.

Задача «Векторное пространство в профессиональных задачах»

15.Построить векторную диаграмму напряжений и указать на ней начальные фазы, если $\psi_1 < \psi_2$.

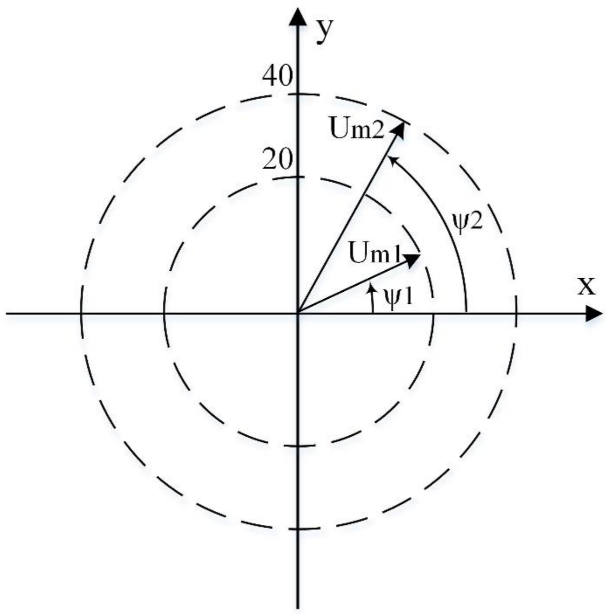
$u_1 = 30sin(\omega t + \psi_1)$; $u_2 = 60sin(\omega t + \psi_2)$.

Задача «Векторное пространство в профессиональных задачах» (Подготовка)

<u>Задача</u>. Построить векторную диаграмму напряжений и указать на ней начальные фазы, если $\psi_1 < \psi_2$.

$u_1 = 20sin(\omega t + \psi_1)$; $u_2 = 40sin(\omega t + \psi_2)$.

<u>Решение</u> (рисунок).

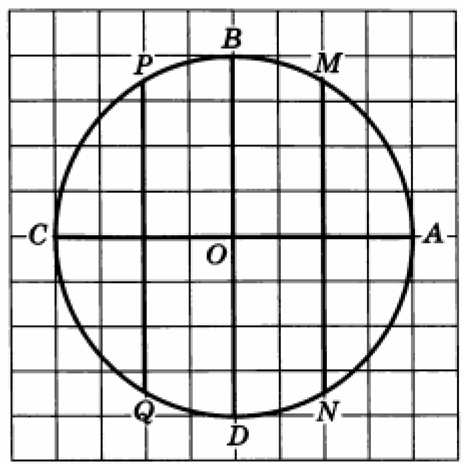


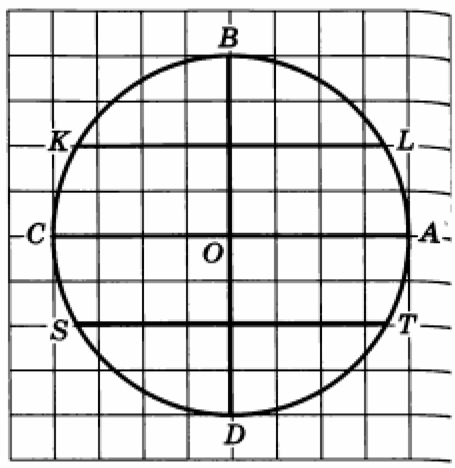
Рисунок

РАЗДЕЛ 4. ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

4.1 Числовая окружность

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 11.





Найдите на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

11.6.

а) $\frac{\pi}{2}$ (Пример); б) $-\pi$ (А/з); в) 4π (Д/з).

11.7.

а) $\frac{\pi}{6}$ (Пример); б) $-\frac{\pi}{3}$ (А/з).

11.8.

а) $\frac{10\pi}{3}$ (Пример); в) $\frac{31\pi}{6}$ (А/з); г) $-\frac{19\pi}{3}$ (Д/з).

11.15. Найдите на числовой окружности все точки $M(t)$, соответствующие заданной формуле (во всех формулах предполагается, что $n \in Z$):

а) $t = 2\pi n$ (Пример); б) $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$ (А/з);

в) $t = \pi n$ (Д/з); г) $t = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ (Д/з).

Числовая окружность (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

11.6.а) $\frac{\pi}{2} - B$.

11.7.а) $\frac{\pi}{6} - L$.

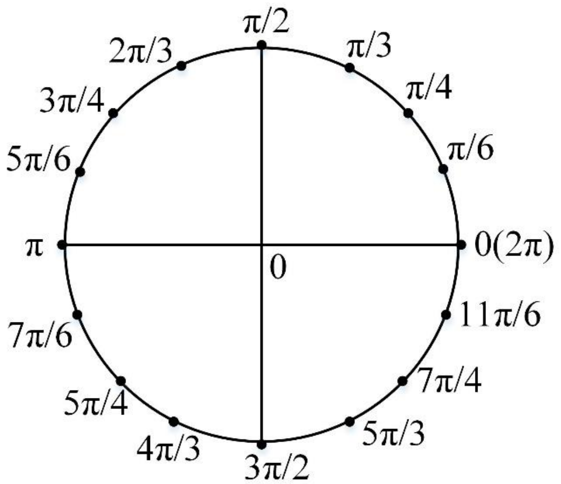
11.8.а) $\frac{10\pi}{3} - Q$.

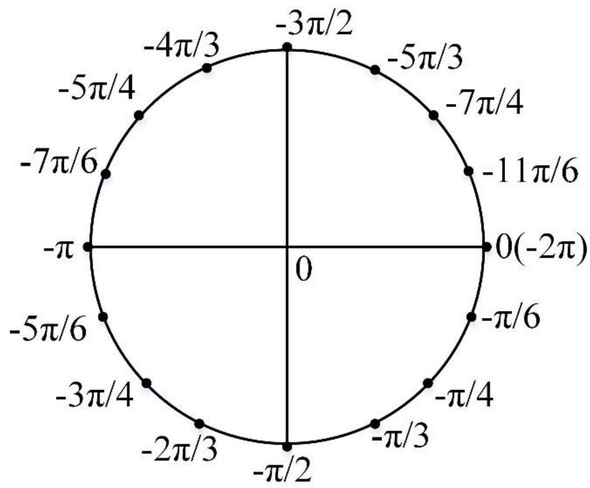
11.15.а) $t = 2\pi n - A$.

Аудиторные задания (А/з): № 11.6 (б), № 11.7 (б), № 11.8 (б), № 11.15 (б).

Домашние задания (Д/з): № 11.6 (в), № 11.8 (г), № 11.15 (в, г).

А/з, Д/з (подготовка):





$M(t) = M(t + 2\pi k), k\epsilon Z.$

$M(2\pi k) = M(0), k\epsilon Z\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

$M(t)$ – точка числовой окружности, соответствующая числу t.

4.2 Числовая окружность на координатной плоскости

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 12.

Найдите декартовы координаты заданной точки:

12.1.

а) $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (Пример); б) $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (А/з);

в) $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (А/з); г) $M\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ (Д/з).

12.2.

а) $M(-3\pi)$ (Пример); б) $M\left(\frac{11\pi}{4}\right)$ (А/з);

в) $M\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ (Д/з); г) $M\left(\frac{31\pi}{2}\right)$ (Д/з).

12.3.

а) $M\left(-\frac{41\pi}{6}\right)$ (Пример); б) $M(117\pi)$ (А/з);

в) $M\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$ (Д/з).

Числовая окружность на координатной плоскости (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

12.1.а) $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

12.2.а) $M(-3\pi) = (-1; 0)$.

12.3.а) $M\left(-\frac{41\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Аудиторные задания (А/з): № 12.1 (б, в), № 12.2 (б), № 12.3 (б).

Домашние задания (Д/з): № 12.1 (г), № 12.2 (в, г), № 12.3 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

Точка окружности	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Точка окружности	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	

y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	
Точка окружности	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\pi$
x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
y	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Точка окружности	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{6}$	-2π	
x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	

4.3 Синус и косинус. Тангенс и котангенс

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 13.

Вычислите $\sin t$ и $\cos t$, если:

13.1.

а) $t = 0$ (Пример); б) $t = \frac{\pi}{2}$ (А/з); в) $t = \frac{3\pi}{2}$ (Д/з).

13.2.

а) $t = \frac{5\pi}{6}$ (Пример); б) $t = \frac{5\pi}{4}$ (А/з); в) $t = \frac{7\pi}{6}$ (Д/з).

13.3.

а) $t = \frac{13\pi}{6}$ (Пример); б) $t = -\frac{8\pi}{3}$ (А/з); в) $t = \frac{23\pi}{6}$ (Д/з).

13.4. Вычислите:

а) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ (Пример);

б) $\cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{2}$ (А/з);

в) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\cos(-\pi)+\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ (Д/з).

Синус и косинус. Тангенс и котангенс (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

13.1.а) $t = 0$;

$sint = sin0 = 0$; $cost = cos0 = 1$.

13.2.а) $t = \frac{5\pi}{6}$;

$sint = sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $cost = cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13.3.а) $t = \frac{13\pi}{6}$;

$sint = sin\frac{13\pi}{6} = sin\left(\frac{12\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) = sin\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right) = sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;

$cost = cos\frac{13\pi}{6} = cos\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right) = cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

13.4.а) $sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + cos\frac{\pi}{3} + cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + cos\frac{\pi}{3} + cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}$.

Аудиторные задания (А/з): № 13.1 (б), № 13.2 (б), № 13.3 (б), № 13.4 (б).

Домашние задания (Д/з): № 13.1 (в), № 13.2 (в), № 13.3 (в), № 13.4 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

Если $M(t) = M(x; y)$, то $x = cost$, $y = sint$.

$sin(-t) = -sint$; $cos(-t) = cost$.

$sin(t+2\pi k) = sint$; $cos(t+2\pi k) = cost$.

4.4 Тригонометрические функции числового аргумента

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 14.

Упростите выражение:

14.1.

а) $1-\sin^2 t$ (Пример); б) $\cos^2 t-1$ (А/з);

в) $1-\cos^2 t$ (А/з); г) $\sin^2 t-1$ (Д/з).

14.2.

а) $(1-\sin t)(1+\sin t)$ (Пример); б) $\cos^2 t+1-\sin^2 t$ (А/з);

в) $(1-\cos t)(1+\cos t)$ (А/з); г) $\sin^2 t+2\cos^2 t-1$ (Д/з).

14.3.

а) $\dfrac{1}{\cos^2 t}-1$ (Пример); б) $\dfrac{1-\sin^2 t}{\cos^2 t}$ (Д/з); в) $1-\dfrac{1}{\sin^2 t}$ (Д/з).

Тригонометрические функции числового аргумента (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

14.1.а) $1-sin^2t=cos^2t.$

14.2.а) $(1-sint)(1+sint)=1-sin^2t=cos^2t.$

14.3.а) $\frac{1}{cos^2t}-1=\frac{1-cos^2t}{cos^2t}=\frac{sin^2t}{cos^2t}=tg^2t.$

Аудиторные задания (А/з): № 14.1 (б, в), № 14.2 (б, в).

Домашние задания (Д/з): № 14.1 (г), № 14.2 (г), № 14.3 (б, в).

А/з, Д/з (подготовка):

$sin^2t+cos^2t=1;$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2;$

$tgt=\frac{sint}{cost};$ $ctgt=\frac{cost}{sint};$

$a-b=-(b-a).$

4.5 Тригонометрические функции углового аргумента

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 15.

Переведите из градусной меры в радианную:

15.1.

а) 120^0 (Пример); б) 220^0 (А/з); в) 300^0 (Д/з).

15.2.

а) 210^0 (Пример); б) 150^0 (А/з); в) 330^0 (Д/з).

Переведите из радианной меры в градусную:

15.3.

а) $\frac{3\pi}{4}$ (Пример); б) $\frac{11\pi}{3}$ (А/з); в) $\frac{6\pi}{5}$ (Д/з).

15.4.

а) $\frac{5\pi}{8}$ (Пример); б) $\frac{7\pi}{12}$ (А/з); в) $\frac{11\pi}{12}$ (Д/з).

Тригонометрические функции углового аргумента (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

15.1.а) $120^0 = \frac{\pi \cdot 120}{180} = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$.

15.2.а) $210^0 = \frac{\pi \cdot 210}{180} = \frac{21\pi}{18} = \frac{7\pi}{6}$.

15.3.а) $\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180^0}{4} = 135^0$.

15.4.а) $\frac{5\pi}{8} = \frac{5 \cdot 180^0}{8} = \frac{5 \cdot 45^0}{2} = \frac{225^0}{2} = 112{,}5^0$.

Аудиторные задания (А/з): № 15.1 (б), № 15.2 (б), № 15.3 (б), № 15.4 (б).

Домашние задания (Д/з): № 15.1 (в), № 15.2 (в), № 15.3 (в), № 15.4 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$\alpha^0 = \frac{\pi \cdot \alpha}{180}$;

$k \cdot \pi = k \cdot 180^0$.

4.6 Функции y=sin x, y=cos x, их свойства и графики

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 16.

Найдите значение функции:

16.1.

а) $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$ при $x=\frac{4\pi}{3}$ (Пример);

б) $y=-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ при $x=-\frac{\pi}{2}$ (А/з);

в) $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$ при $x=\frac{7\pi}{6}$ (Д/з);

г) $y=-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ при $x=-\frac{15\pi}{4}$ (Д/з).

16.2. $y=\frac{1}{\cos x}$, если:

а) $x=\frac{2\pi}{3}$ (Пример);

б) $x=\frac{11\pi}{6}$ (А/з).

16.3. $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$, если:

а) $x=-\frac{\pi}{2}$ (Пример);

б) $x=\frac{\pi}{4}$ (А/з).

16.4. Не выполняя построения, ответьте на вопрос, принадлежит ли графику функции $y=\sin x$ точка с координатами:

а) $\left(-\frac{\pi}{2};-1\right)$ (Пример);

б) $\left(\frac{\pi}{2};\frac{1}{2}\right)$ (А/з);

в) $(\pi;1)$ (Д/з);

г) $\left(\frac{3\pi}{2};-1\right)$ (Д/з)?

Функции y=sin x, y=cos x, их свойства и графики (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

16.1.а) $y = 2sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ при $x = \frac{4\pi}{3}$;

$y\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2sin\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2sin\left(\frac{8\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2sin\frac{7\pi}{6} + 1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -1 + 1 = 0.$

16.2.а) $y = \frac{1}{cosx}$, если $x = \frac{2\pi}{3}$;

$y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{cos\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2.$

16.3.а) $y = 2cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$, если $x = -\frac{\pi}{2}$;

$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 2cos\left(-\frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 2cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) - 1 = 2cos\frac{3\pi}{4} - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 = -\sqrt{2} - 1.$

16.4.а) $y = sinx,$ $\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$;

$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -sin\frac{\pi}{2} = -1 \Rightarrow$ да, принадлежит.

Аудиторные задания (А/з): № 16.1 (б), № 16.2 (б), № 16.3 (б), № 16.4 (б).

Домашние задания (Д/з): № 16.1 (в, г), № 16.4 (в, г).

4.7 Построение графика функции y=mf(x)

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 17.

Постройте график функции:

17.3.

а) $y = 2\sin x$ (Пример);

б) $y = 3\cos x$ (А/з);

в) $y = -\sin x$ (Д/з).

17.4.

а) $y = -2\sin x$ (Пример);

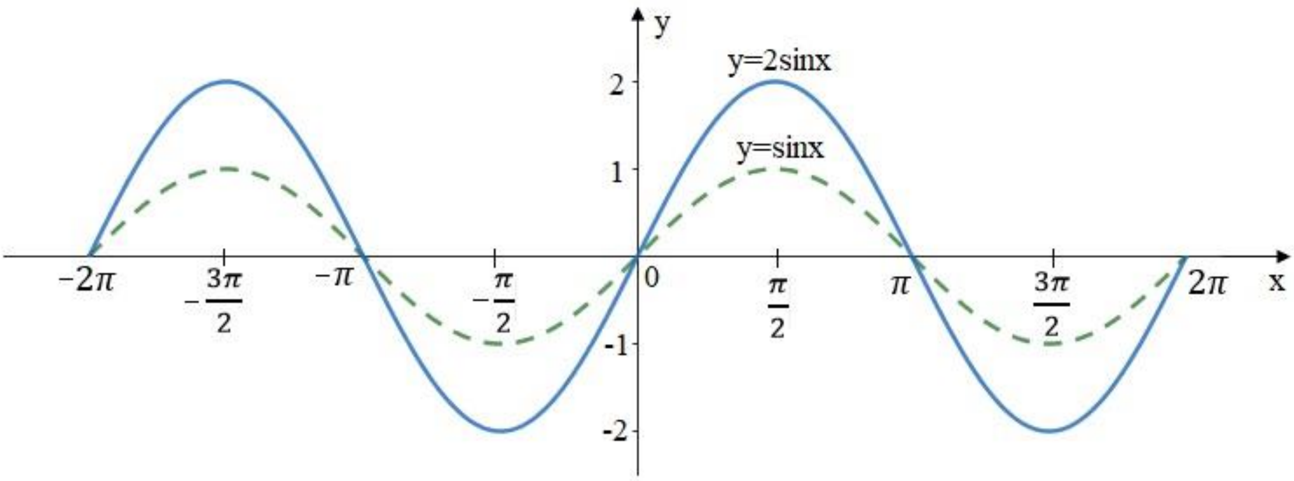
б) $y = -3\cos x$ (А/з);

в) $y = 1{,}5\sin x$ (Д/з).

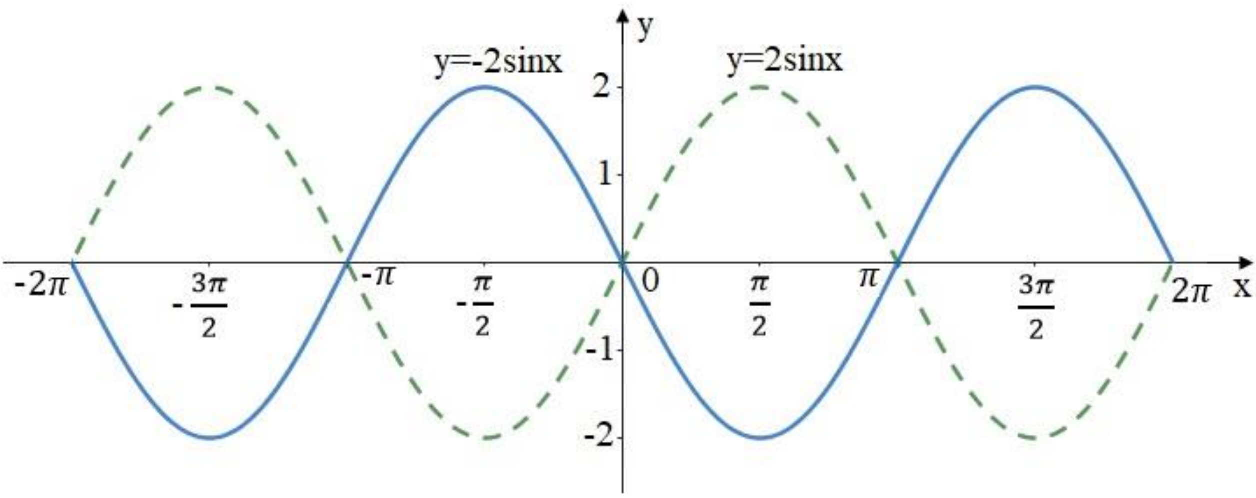
Построение графика функции y=mf(x) (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

17.3.а) $y = 2sinx$.



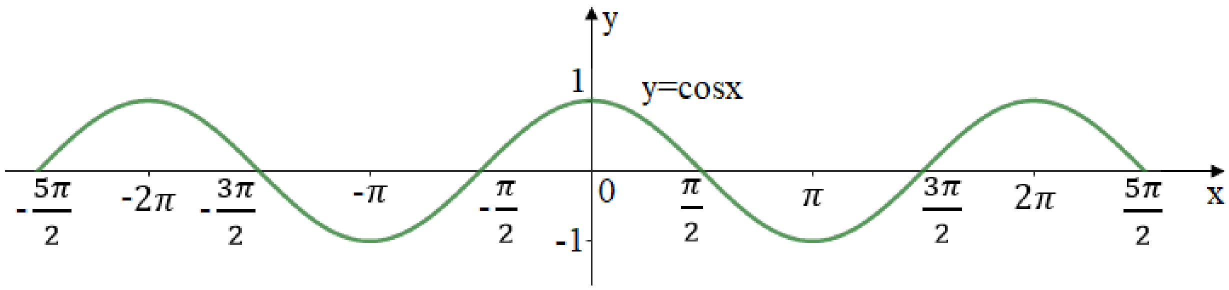
17.4.а) $y = -2sinx$.

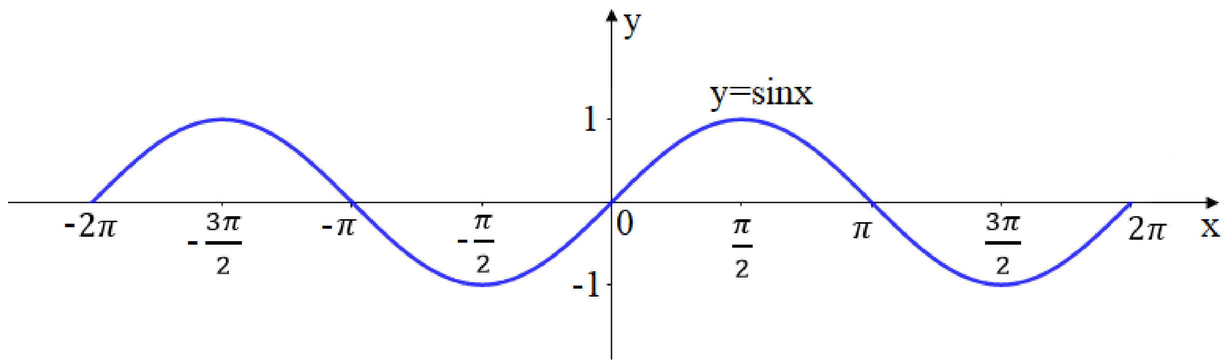


Аудиторные задания (А/з): № 17.3 (б), № 17.4 (б).

Домашние задания (Д/з): № 17.3 (в), № 17.4 (в).

А/з, Д/з (подготовка):





$y = f(x)$;

$y = mf(x)$ – растяжение от оси x с коэффициентом m;

$y = -mf(x)$ – растянутый график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси x;

$y = -f(x)$ – график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси x.

4.8 Построение графика функции y=f(kx)

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 18.

Постройте график функции:

18.2.

а) $y = \sin\frac{x}{3}$ (Пример); б) $y = \cos 2x$ (Пример);

в) $y = \cos\frac{x}{2}$ (А/з); г) $y = \sin 3x$ (А/з).

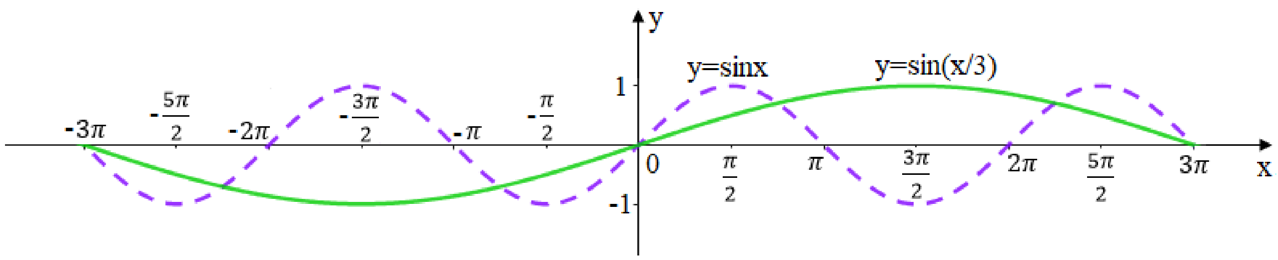
18.3.

а) $y = \sin\frac{x}{2}$ (Д/з); г) $y = \cos 3x$ (Д/з).

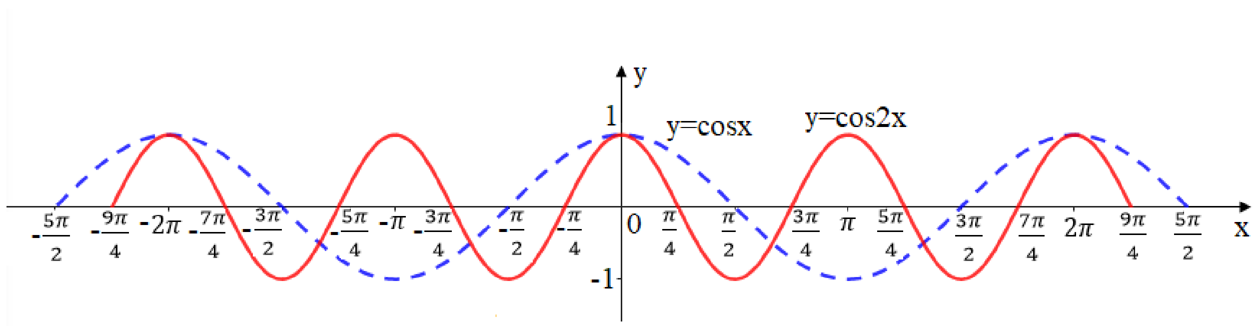
<u>Построение графика функции y=f(kx) (Примеры, А/з, Д/з)</u>

<u>Примеры</u>:

18.2.а) $y = sin\frac{x}{3}$.



18.2.б) $y = cos2x$.



<u>Аудиторные задания (А/з)</u>: № 18.2 (в, г).

Домашние задания (Д/з): № 18.3 (а, г).

А/з, Д/з (подготовка):

$y = f(x)$;

$y = f(\frac{x}{k})$ – растяжение от оси y с коэффициентом k;

$y = f(kx)$ – сжатие к оси y с коэффициентом k.

4.9 График гармонического колебания

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 19.

Постройте график функции:

19.1.

а) $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (Пример); б) $y = \cos\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ (А/з).

19.2.

а) $y = -2\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ (Пример); б) $y = -2\sin 3\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (А/з).

19.3.

б) $y = -\cos\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (Д/з).

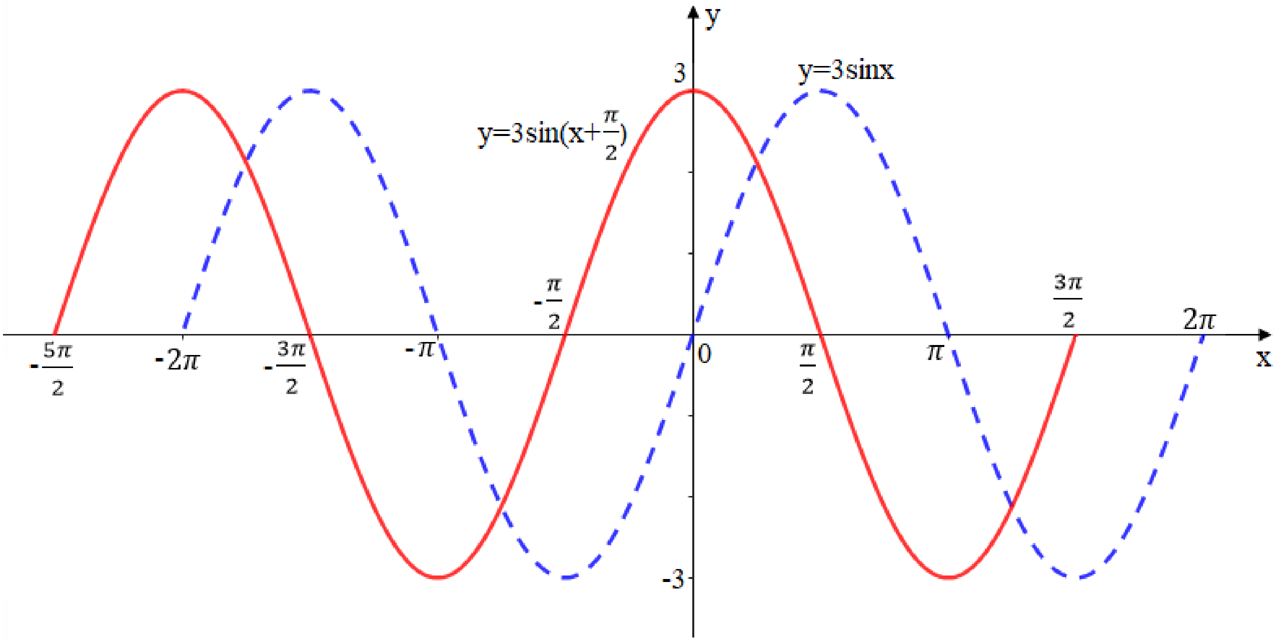
19.4.

б) $y = 3\sin\frac{1}{3}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ (Д/з).

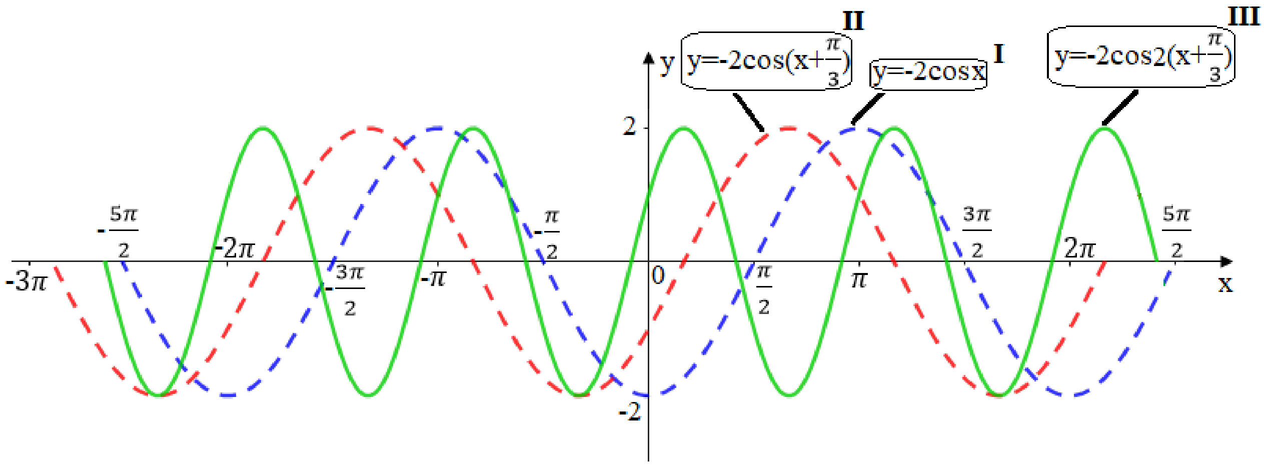
График гармонического колебания (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

19.1.а) $y = 3sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.



19.2.а) $y = -2cos2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.



Аудиторные задания (А/з): № 19.1 (б), № 19.2 (б).

Домашние задания (Д/з): № 19.3 (б), № 19.4 (б).

А/з, Д/з (подготовка):

$y = f\left[\frac{1}{k}(x + \varphi)\right]$; $\qquad f = \{sin; cos\}$.

$y = f(x)$ – исходная функция

1) растянуть от оси ординат с коэффициентом k;

2) растянутую полуволну сдвинуть вдоль оси абсцисс на φ влево.

$y = -q \cdot f[k(x+\varphi)]$; $\qquad f = \{sin; cos\}$.

1) сжать к оси ординат с коэффициентом k;

2) растянуть от оси абсцисс с коэффициентом q;

3) сжатую и растянутую полуволну сдвинуть вдоль оси абсцисс на φ влево;

4) график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси x.

4.10 Функции y=tg x, y=ctg x, их свойства и графики

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 20.

20.1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = tgx$ на заданном промежутке:

а) на интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ (Пример);

б) на полуинтервале $\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$ (А/з);

в) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right]$ (А/з);

г) на полуинтервале $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ (Д/з).

20.2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = ctgx$ на заданном промежутке:

а) на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ (Пример);

б) на полуинтервале $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ (А/з);

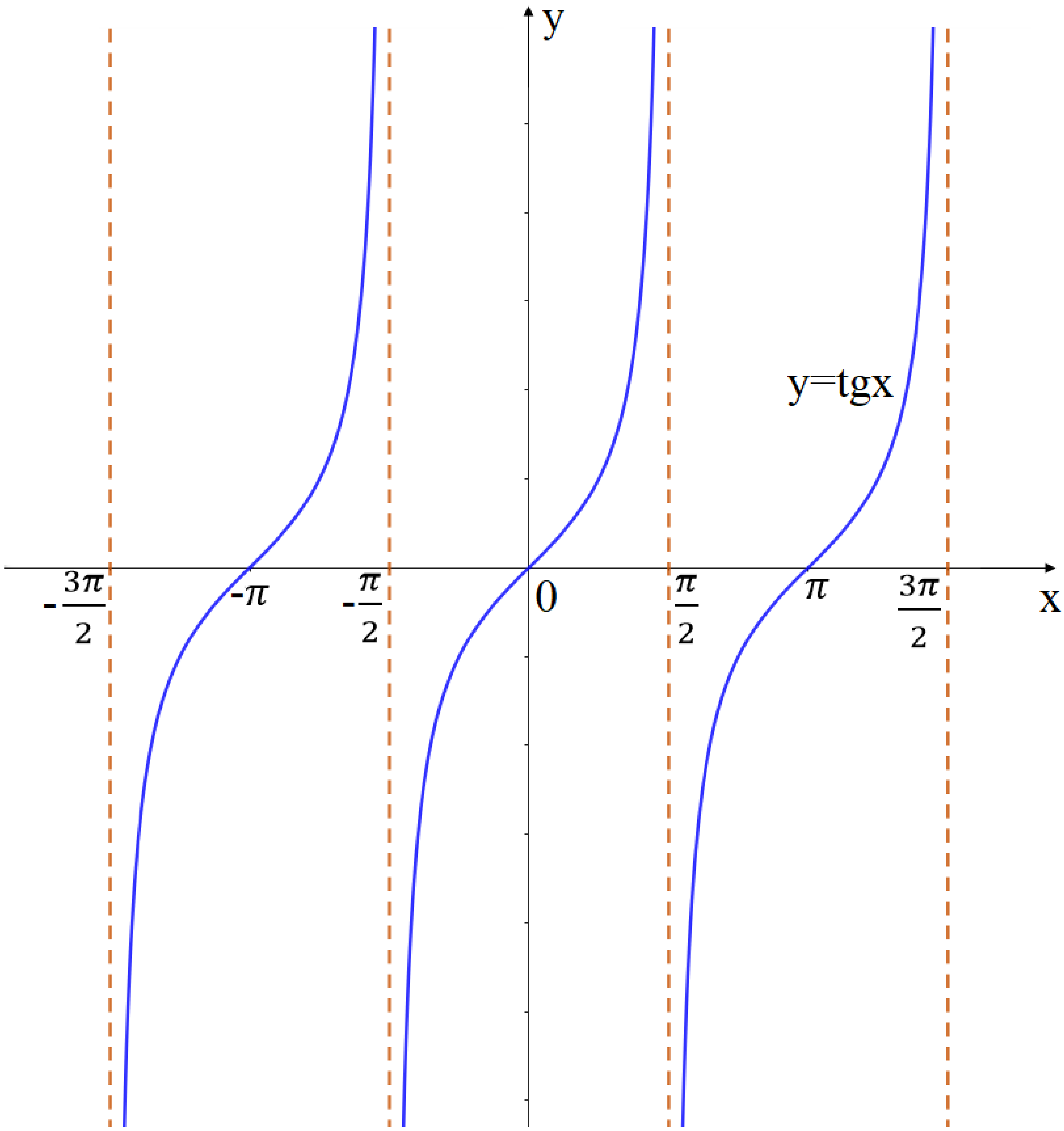
в) на интервале $(-\pi; 0)$ (Д/з);

г) на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right]$ (Д/з).

Функции y=tg x, y=ctg x, их свойства и графики (Примеры, А/з, Д/з)

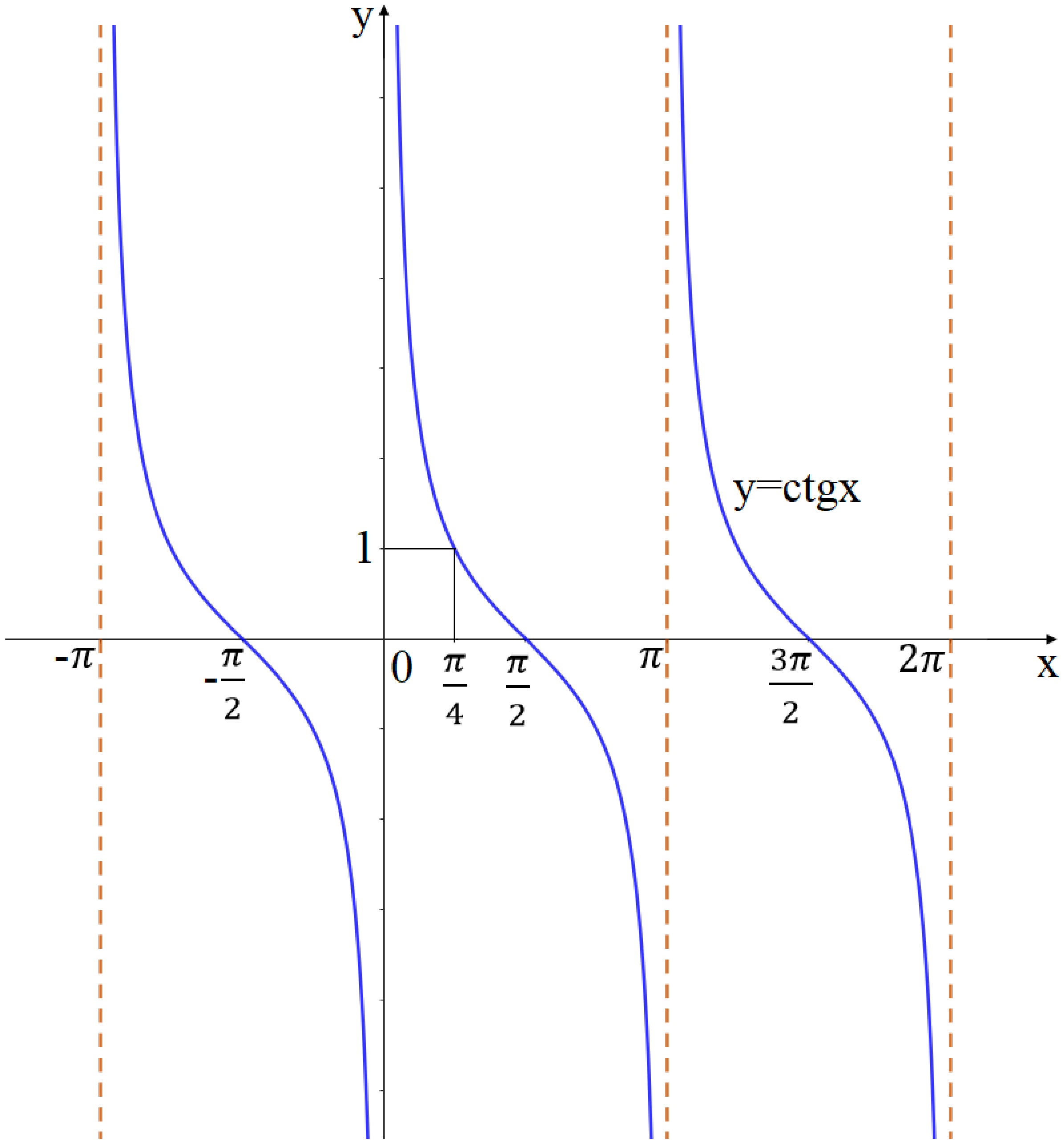
Примеры:

20.1.а) $y = tgx,$ $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$;



$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ – нет наименьшего и наибольшего значений.

20.2.а) $y = ctgx,\qquad \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right];$



$\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$:

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ – наибольшее значение;

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ – наименьшее значение.

Аудиторные задания (А/з): № 20.1 (б, в), № 20.2 (б).

Домашние задания (Д/з): № 20.1 (г), № 20.2 (в, г).

А/з, Д/з (подготовка):

$(a;b)$ – на интервале $y = tgx$, $y = ctgx$ не имеют наименьшего и наибольшего значений.

$[a;b)$, $(a;b]$ – на полуинтервалах $y = tgx$, $y = ctgx$ имеют наименьшее и наибольшее значение, соответствующее «нестрогой» границе ([,]) (за исключением асимптот).

$[a;b]$ – на отрезке $y = tgx$, $y = ctgx$ имеют наименьшее и наибольшее значения; если значение «нестрогой» границы соответствует асимптоте $y = tgx$, $y = ctgx$, то нет наибольшего или наименьшего значения.

Для $y = tgx$ $\quad x = \pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{3\pi}{2}; \pm\frac{5\pi}{2}; \dots$ – асимптоты.

Для $y = ctgx$ $\quad x = \pm\pi; \pm2\pi; \pm3\pi; \dots$ – асимптоты.

4.11 Обратные тригонометрические функции

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 21.

Вычислите:

21.1.

а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Пример);

б) $\arcsin 1$ (А/з);

в) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Д/з).

21.13.

а) $\arccos 0$ (Пример);

б) $\arccos 1$ (А/з);

в) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Д/з).

21.31.

а) $arctg1$ (Пример);

б) $arctg\left(-\sqrt{3}\right)$ (А/з);

в) $arctg\sqrt{3}$ (Д/з).

21.32.

а) $arcctg\frac{\sqrt{3}}{3}$ (Пример);

б) $arcctg1$ (А/з);

в) $arcctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ (Д/з).

Обратные тригонометрические функции (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

21.1.а) $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

21.13.а) $arccos0=\frac{\pi}{2}$.

21.31.а) $arctg1=\frac{\pi}{4}$.

21.32.а) $arcctg\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$.

Аудиторные задания (А/з): № 21.1 (б), № 21.13 (б), № 21.31 (б), № 21.32 (б).

Домашние задания (Д/з): № 21.1 (в), № 21.13 (в), № 21.31 (в), № 21.32 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

Если $|a|\le 1$, то $arcsina=t \Leftrightarrow \begin{cases} sint=a \\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$; $sin(arcsina)=a$.

Если $|a|\le 1$, то $arccosa=t \Leftrightarrow \begin{cases} cost=a \\ 0\le t\le\pi\end{cases}$; $cos(arccosa)=a$.

$arctga=t \Leftrightarrow \begin{cases} tgt=a \\ -\frac{\pi}{2}< t<\frac{\pi}{2}\end{cases}$; $tg(arctga)=a$.

$arcctga=t \Leftrightarrow \begin{cases} ctgt=a \\ 0< t<\pi\end{cases}$; $ctg(arcctga)=a$.

$-\frac{\pi}{2}\le arcsinx\le\frac{\pi}{2}$; $arcsin(-x)=-arcsinx$.

$0 \le arccosx \le \pi$; $\quad arccos(-x) = \pi - arccosx.$

$-\frac{\pi}{2} < arctgx < \frac{\pi}{2}$; $\quad arctg(-x) = -arctgx.$

$0 < arcctgx < \pi$; $\quad arcctg(-x) = \pi - arcctgx.$

4.12 Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 22.

Решите уравнение:

22.1.

а) $\cos x = \frac{1}{2}$ (Пример);

б) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (А/з);

в) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Д/з).

22.8.

а) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Пример);

б) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (А/з);

в) $\sin x = 1$ (Д/з).

22.17.

а) $tgx = 1$ (Пример);

б) $tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (А/з);

в) $tgx = -1$ (Д/з).

22.19.

а) $ctgx = 1$ (Пример);

б) $ctgx = \sqrt{3}$ (А/з);

в) $ctgx = 0$ (Д/з).

Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

22.1.а) $cosx = \frac{1}{2}$;

$x = \pm arccos\frac{1}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

22.8.а) $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x = (-1)^k \cdot arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k, k\epsilon Z$; $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k, k\epsilon Z.$

22.17.а) $tgx = 1$;

$x = arctg1 + \pi k, k\epsilon Z$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z.$

22.19.а) $ctgx = 1$;

$x = arcctg1 + \pi k, k\epsilon Z$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z.$

Аудиторные задания (А/з): № 22.1 (б), № 22.8 (б), № 21.17 (б), № 22.19 (б).

Домашние задания (Д/з): № 22.1 (в), № 22.8 (в), № 21.17 (в), № 22.19 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

Если $|a| \leq 1$, то уравнение $cost = a$ имеет решения:

$\boxed{t = \pm arccosa + 2\pi k, k\epsilon Z}$

Если $|a| \leq 1$, то уравнение $sint = a$ имеет решения:

$\boxed{t = (-1)^k \cdot arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k, k\epsilon Z}$

Решение уравнения $tgx = a$ имеет вид: $\boxed{x = arctga + \pi k, k\epsilon Z}$

Решение уравнения $ctgx = a$ имеет вид: $\boxed{x = arcctga + \pi k, k\epsilon Z}$

Если $cost = 0$, то $t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z.$

Если $cost = 1$, то $t = 2\pi k, k\epsilon Z.$

Если $cost = -1$, то $t = \pi + 2\pi k, k\epsilon Z.$

Если $sint = 0$, то $t = \pi k, k\epsilon Z.$

Если $sint = 1$, то $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

Если $sint = -1$, то $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

4.13 Методы решения тригонометрических уравнений

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 23.

Решите уравнение:

23.1.

а) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$ (Пример);

б) $3\sin^2 2x + 10\sin 2x + 3 = 0$ (Д/з);

в) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$ (А/з).

23.2.

а) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ (Пример);

б) $2\cos^2 3x - 5\cos 3x - 3 = 0$ (Д/з);

в) $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$ (А/з).

23.4.

а) $3tg^2 x + 2tgx - 1 = 0$ (Пример);

б) $ctg^2 2x - 6ctg 2x + 5 = 0$ (Д/з);

в) $2tg^2 x + 3tgx - 2 = 0$ (А/з).

Методы решения тригонометрических уравнений (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

23.1.а) $3sin^2x - 5sinx - 2 = 0;$

$sinx = t;\ 3t^2 - 5t - 2 = 0;\ \ D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49;$

$t_1 = \frac{5-7}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3};$ $\qquad t_2 = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2;$

$-1 \le sinx \le 1;\quad -1 \le t \le 1;\qquad t_1 = -\frac{1}{3}$ – удовлетворяет условию;

$t_2 = 2$ – не удовлетворяет условию;

$sinx = -\frac{1}{3};\qquad x = (-1)^k \cdot arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k, k\epsilon Z;$

$x = (-1)^{k+1} \cdot arcsin\frac{1}{3} + \pi k, k\epsilon Z.$

23.2.а) $6cos^2x + cosx - 1 = 0;$

$cosx = t;\quad 6t^2 + t - 1 = 0;\ \ D = 1 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 25;$

$t_1 = \frac{-1-5}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$; $t_2 = \frac{-1+5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$;

$-1 \le cosx \le 1$; $-1 \le t \le 1$; $t_1 = -\frac{1}{2}$ – удовлетворяет условию;

$t_2 = \frac{1}{3}$ – удовлетворяет условию;

$cosx = -\frac{1}{2}$; $x = \pm arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k\epsilon Z$;

$x = \pm\left(\pi - arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k\epsilon Z$; $x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k, k\epsilon Z$;

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z$;

$cosx = \frac{1}{3}$; $x = \pm arccos\frac{1}{3} + 2\pi k, k\epsilon Z.$

23.4.а) $3tg^2x + 2tgx - 1 = 0$;

$tgx = t$; $3t^2 + 2t - 1 = 0$; $D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$;

$t_1 = \frac{-2-4}{6} = -1$; $t_2 = \frac{-2+4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;

$tgx = -1$; $x = arctg(-1) + \pi k, k\epsilon Z$; $x = -arctg1 + \pi k, k\epsilon Z$;

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z$;

$tgx = \frac{1}{3}$; $x = arctg\frac{1}{3} + \pi k, k\epsilon Z.$

Аудиторные задания (А/з): № 23.1 (в), № 23.2 (в), № 23.4 (в).

Домашние задания (Д/з): № 23.1 (б), № 23.2 (б), № 23.4 (б).

А/з, Д/з (подготовка):

$asin^2(kx) + bsin(kx) + c = 0$;

$sin(kx) = t$; $at^2 + bt + c = 0$;

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $t_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

$-1 \le sin(kx) \le 1$; $-1 \le t \le 1$ – проверка условия для $t_1; t_2 \Rightarrow$ определить t, удовлетворяющее условию (одно или два, или нет корней);

$sin(kx) = t$; $kx = (-1)^n \cdot arcsint + \pi n, n\epsilon Z$;

$x = \frac{1}{k} \cdot (-1)^n \cdot arcsint + \frac{\pi n}{k}, n\epsilon Z.$

$acos^2(kx) + bcos(kx) + c = 0$;

$-1 \le cos(kx) \le 1;$ $\quad -1 \le t \le 1$ – проверка условия для $t_1; t_2 \Rightarrow$ определить t, удовлетворяющее условию (одно или два, или нет корней);

$cos(kx) = t;$ $\quad kx = \pm arccost + 2\pi n, n\epsilon Z;$

$x = \pm \frac{1}{k} \cdot arccost + \frac{2\pi n}{k}, n\epsilon Z.$

$atg^2(kx) + btg(kx) + c = 0;$

$tg(kx) = t;$ $\quad kx = arctgt + \pi n, n\epsilon Z;$ $\quad x = \frac{1}{k} \cdot arctgt + \frac{\pi n}{k}, n\epsilon Z.$

4.14 Синус и косинус суммы и разности аргументов

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 24.

24.1. Представив 105^0 как сумму $60^0 + 45^0$, вычислите:

а) $\sin 105^0$ (Пример); б) $\cos 105^0$ (А/з).

24.2. Вычислите:

а) $\sin 15^0$ (А/з); б) $\cos 15^0$ (Пример).

Упростите выражение:

24.3.

б) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \frac{1}{2}\sin\alpha$ (Пример); г) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$ (А/з).

24.4.

а) $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) - \frac{1}{2}\cos\alpha$ (Д/з); б) $\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ (Д/з).

24.5.

а) $\cos(\alpha - \beta) - \cos\alpha\cos\beta$ (Пример); б) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ (А/з);

в) $\sin\alpha\sin\beta - \sin(\alpha - \beta)$ (Д/з); г) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ (Д/з).

Синус и косинус суммы и разности аргументов (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

24.1.а) $sin105^0 = sin(60^0 + 45^0) = sin60^0cos45^0 + cos60^0sin45^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$.

24.2.б) $cos15^0 = cos(60^0 - 45^0) = cos60^0cos45^0 + sin60^0sin45^0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.

24.3.б) $sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \frac{1}{2}sin\alpha = sin\frac{\pi}{3}cos\alpha + cos\frac{\pi}{3}sin\alpha - \frac{1}{2}sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}cos\alpha + \frac{1}{2}sin\alpha - \frac{1}{2}sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}cos\alpha.$

24.5.а) $cos(\alpha - \beta) - cos\alpha \cdot cos\beta = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta - cos\alpha \cdot cos\beta = sin\alpha \cdot sin\beta.$

Аудиторные задания (А/з): № 24.1 (б), № 24.2 (а), № 24.3 (г), № 24.5 (б).

Домашние задания (Д/з): № 24.4 (а, б), № 24.5 (в, г).

А/з, Д/з (подготовка):

$sin(x + y) = sinx \cdot cosy + cosx \cdot siny$;

$sin(x - y) = sinx \cdot cosy - cosx \cdot siny$;

$cos(x + y) = cosx \cdot cosy - sinx \cdot siny$;

$cos(x - y) = cosx \cdot cosy + sinx \cdot siny.$

4.15 Тангенс суммы и разности аргументов

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 25.

Вычислите:

25.1.

а) $tg15^0$ (Пример); б) $tg75^0$ (А/з);

в) $tg105^0$ (А/з); г) $tg165^0$ (Д/з).

25.2.

а) $\frac{tg25^0 + tg20^0}{1 - tg25^0 \cdot tg20^0}$ (Пример);

б) $\frac{1 - tg70^0 \cdot tg65^0}{tg70^0 + tg65^0}$ (А/з);

в) $\frac{tg9^0 + tg51^0}{1 - tg9^0 \cdot tg51^0}$ (Д/з);

г) $\frac{1 + tg54^0 \cdot tg9^0}{tg54^0 - tg9^0}$ (Д/з).

Тангенс суммы и разности аргументов (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

25.1.а) $tg15^0 = tg(60^0 - 45^0) = \frac{tg60^0 - tg45^0}{1 + tg60^0 tg45^0} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$

25.2.а) $\frac{tg25^0 + tg20^0}{1 - tg25^0 tg20^0} = tg(25^0 + 20^0) = tg45^0 = 1.$

Аудиторные задания (А/з): № 25.1 (б, в), № 25.2 (б).

Домашние задания (Д/з): № 25.1 (г), № 25.2 (в, г).

А/з, Д/з (подготовка):

$tg(x + y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx \cdot tgy};$

$tg(x - y) = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx \cdot tgy}.$

4.16 Формулы приведения

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 26.

Упростите выражение:

26.1.

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ (Пример);

б) $\cos(2\pi - t)$ (А/з);

в) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)$ (Д/з).

26.2.

а) $\sin(\pi - t)$ (Пример);

б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right)$ (А/з);

в) $\cos(2\pi + t)$ (Д/з).

26.3.

а) $\cos(90^0 - \alpha)$ (Пример);

б) $\sin(360^0 - \alpha)$ (А/з);

в) $\sin(270^0 + \alpha)$ (Д/з).

26.4.

а) $tg(90^0 - \alpha)$ (Пример);

б) $ctg(180^0 - \alpha)$ (А/з);

в) $tg(270^0 + \alpha)$ (Д/з).

Формулы приведения (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

26.1.а) $sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = cost.$

26.2.а) $sin(\pi - t) = sint.$

26.3.а) $cos(90^0 - \alpha) = sin\alpha.$

26.4.а) $tg(90^0 - \alpha) = ctg\alpha.$

Аудиторные задания (А/з): № 26.1 (б), № 26.2 (б), № 26.3 (б), № 26.4 (б).

Домашние задания (Д/з): № 26.1 (в), № 26.2 (в), № 26.3 (в), № 26.4 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

1) если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\pi + t$, $\pi - t$, $2\pi + t$ или $2\pi - t$, то наименование тригонометрической функции следует сохранить;

2) если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\frac{\pi}{2}+t$, $\frac{\pi}{2}-t$, $\frac{3\pi}{2}+t$ или $\frac{3\pi}{2}-t$, то наименование тригонометрической функции следует изменить (на родственное);

3) перед полученной функцией от аргумента t надо поставить тот знак, который имела бы преобразуемая функция при условии, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Это правило используется и в тех случаях, когда аргумент задан в градусах, т.е. когда в качестве аргумента тригонометрической функции выступает выражение вида $90^0+\alpha$, $90^0-\alpha$, $180^0+\alpha$ и т.д.

I		II	
$\pi+\alpha$	$180^0+\alpha$	$\pi/2+\alpha$	$90^0+\alpha$
$\pi-\alpha$	$180^0-\alpha$	$\pi/2-\alpha$	$90^0-\alpha$
$2\pi+\alpha$	$360^0+\alpha$	$3\pi/2+\alpha$	$270^0+\alpha$
$2\pi-\alpha$	$360^0-\alpha$	$3\pi/2-\alpha$	$270^0-\alpha$

$0 < t < 90^0$.

4.17 Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 27.

Упростите выражение:

27.1.

а) $\dfrac{\sin 2t}{\cos t}-\sin t$ (Пример);

б) $\dfrac{\sin 6t}{\cos^2 3t}$ (А/з);

в) $\cos^2 t-\cos 2t$ (Д/з).

27.2.

а) $\dfrac{\sin 40^0}{\sin 20^0}$ (Пример);

б) $\dfrac{\cos 80^0}{\cos 40^0 + \sin 40^0}$ (А/з);

в) $\dfrac{\sin 100^0}{2\cos 50^0}$ (Д/з).

Вычислите:

27.3.

а) $2\sin 15^0 \cos 15^0$ (Пример);

б) $\left(\cos 75^0 - \sin 75^0\right)^2$ (А/з);

в) $\cos^2 15^0 - \sin^2 15^0$ (Д/з).

27.4.

а) $2\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}$ (Пример);

б) $\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}$ (А/з);

в) $\cos^2\dfrac{\pi}{8} - \sin^2\dfrac{\pi}{8}$ (Д/з).

Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

27.1.а) $\frac{sin2t}{cost} - sint = \frac{2sintcost}{cost} - sint = 2sint - sint = sint.$

27.2.а) $\frac{sin40^0}{sin20^0} = \frac{2sin20^0cos20^0}{sin20^0} = 2cos20^0.$

27.3.а) $2sin15^0cos15^0 = sin30^0 = \frac{1}{2} = 0{,}5.$

27.4.а) $2sin\frac{\pi}{8}cos\frac{\pi}{8} = sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Аудиторные задания (А/з): № 27.1 (б), № 27.2 (б), № 27.3 (б), № 27.4 (б).

Домашние задания (Д/з): № 27.1 (в), № 27.2 (в), № 27.3 (в), № 27.4 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$sin2t = 2sintcost$;

$cos2t = cos^2t - sin^2t = 2cos^2t - 1 = 1 - 2sin^2t$;

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$;

$sin^2t + cos^2t = 1$;

$sintcost = \frac{1}{2}sin2t$;

$cos^2\frac{t}{2} = \frac{1+cost}{2}$;

$sin^2\frac{t}{2} = \frac{1-cost}{2}$;

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

4.18 Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 28.

Представьте в виде произведения:

28.1.

а) $\sin 40^0 + \sin 16^0$ (Пример); б) $\sin 20^0 - \sin 40^0$ (А/з);

в) $\sin 10^0 + \sin 50^0$ (А/з); г) $\sin 52^0 - \sin 36^0$ (Д/з).

28.2.

а) $\cos 15^0 + \cos 45^0$ (Пример); б) $\cos 46^0 - \cos 74^0$ (А/з);

в) $\cos 20^0 + \cos 40^0$ (Д/з); г) $\cos 75^0 - \cos 15^0$ (Д/з).

28.3.

а) $\sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{10}$ (Пример);

б) $\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}$ (А/з);

в) $\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{7}$ (Д/з).

Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

28.1.а) $sin40^0 + sin16^0 = 2sin\frac{40^0+16^0}{2}cos\frac{40^0-16^0}{2} = 2sin28^0cos12^0$.

28.2.а) $cos15^0 + cos45^0 = 2cos\frac{15^0+45^0}{2}cos\frac{15^0-45^0}{2} = 2cos30^0cos(-15^0) = \sqrt{3}cos15^0$.

28.3.а) $sin\frac{\pi}{5} - sin\frac{\pi}{10} = 2sin\frac{\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{10}}{2}cos\frac{\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{10}}{2} = 2sin\frac{\pi}{20}cos\frac{3\pi}{20}$.

Аудиторные задания (А/з): № 28.1 (б, в), № 28.2 (б), № 28.3 (б).

Домашние задания (Д/з): № 28.1 (г), № 28.2 (в, г), № 28.3 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$sinx + siny = 2sin\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2}$;

$sinx - siny = 2sin\frac{x-y}{2}cos\frac{x+y}{2}$;

$cosx + cosy = 2cos\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2}$;

$cosx - cosy = -2sin\frac{x+y}{2}sin\frac{x-y}{2}$.

4.19 Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 29.

Представьте в виде суммы:

29.1.

а) $\sin 23^0 \cdot \sin 32^0$ (Пример);

б) $\cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{8}$ (А/з);

в) $\sin 14^0 \cdot \cos 16^0$ (Д/з);

г) $2 \cdot \sin\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{5}$ (Пример).

29.2.

а) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$ (Пример);

б) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$ (А/з);

в) $\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)$ (Д/з);

г) $2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$ (А/з).

29.3.

а) $\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)$ (Пример);

б) $\sin(60^0+\alpha)\cdot\sin(60^0-\alpha)$ (А/з);

в) $\sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)$ (Д/з);

г) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ (Д/з).

Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

29.1.а) $sin23^0 sin32^0=\frac{cos(23^0-32^0)-cos(23^0+32^0)}{2}=\frac{cos(-9^0)-cos55^0}{2}=\frac{cos9^0-cos55^0}{2}$.

29.1.г) $2sin\frac{\pi}{8}cos\frac{\pi}{5}=2\frac{sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{5}\right)+sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{5}\right)}{2}=sin\frac{13\pi}{40}+sin\left(-\frac{3\pi}{40}\right)=sin\frac{13\pi}{40}-sin\frac{3\pi}{40}$.

29.2.а) $sin(\alpha+\beta)sin(\alpha-\beta)=\frac{cos(\alpha+\beta-\alpha+\beta)-cos(\alpha+\beta+\alpha-\beta)}{2}=\frac{cos2\beta-cos2\alpha}{2}$.

29.3.а) $cos\alpha\cdot sin(\alpha+\beta)=sin(\alpha+\beta)\cdot cos\alpha=\frac{sin(\alpha+\beta+\alpha)+sin(\alpha+\beta-\alpha)}{2}=\frac{sin(2\alpha+\beta)+sin\beta}{2}$.

Аудиторные задания (А/з): № 29.1 (б), № 29.2 (б, г), № 29.3 (б).

Домашние задания (Д/з): № 29.1 (в), № 29.2 (в), № 29.3 (в, г).

А/з, Д/з (подготовка):

$sinx \cdot cosy = \frac{sin(x+y)+sin(x-y)}{2}$;

$cosx \cdot cosy = \frac{cos(x+y)+cos(x-y)}{2}$;

$sinx \cdot siny = \frac{cos(x-y)-cos(x+y)}{2}$.

4.20 Преобразование выражения Asinx+Bcosx к виду Csin(x+t)

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 30.

Преобразуйте данное выражение к виду $C\sin(x+t)$:

30.1.

а) $\sqrt{3}\sin x+\cos x$ (Пример); б) $\sin x+\sqrt{3}\cos x$ (А/з);

в) $\sin x-\cos x$ (А/з); г) $2\sin x-\sqrt{12}\cos x$ (Д/з).

30.2.

а) $3\sin x+4\cos x$ (Пример); б) $5\cos x-12\sin x$ (А/з);

в) $7\sin x-24\cos x$ (Д/з); г) $8\cos x+15\sin x$ (Д/з).

Преобразование выражения Asinx+Bcosx к виду Csin(x+t) (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

30.1.а) $\sqrt{3}sinx + cosx = \sqrt{3+1} \cdot sin(x+t) = 2sin(x+t) = 2(sinx \cdot cost + cosx \cdot sint) = 2 \cdot sinx \cdot cost + 2 \cdot cosx \cdot sint$;

$$\left.\begin{matrix} \sqrt{3}sinx=2\cdot sinx\cdot cost \ \Rightarrow \ \sqrt{3}=2cost \ \Rightarrow \ cost=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ cosx=2\cdot cosx\cdot sint \ \Rightarrow \ 1=2sint \ \Rightarrow \ sint=\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow t=\frac{\pi}{6};$$

$\sqrt{3}sinx + cosx = 2sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

30.2.а) $3sinx + 4cosx = \sqrt{9+16} \cdot sin(x+t) = 5sin(x+t) = 5(sinx \cdot cost + cosx \cdot sint) = 5 \cdot sinx \cdot cost + 5 \cdot cosx \cdot sint$;

$$\left.\begin{array}{l} 3sinx{=}5{\cdot}sinx{\cdot}cost \;\Rightarrow\; 3{=}5cost \;\Rightarrow\; cost{=}\frac{3}{5}{=}0{,}6 \\ 4cosx{=}5{\cdot}cosx{\cdot}sint \;\Rightarrow\; 4{=}5sint \;\Rightarrow\; sint{=}\frac{4}{5}{=}0{,}8 \end{array}\right\} \Rightarrow t = arccos0{,}6 =$$

$arcsin0{,}8$;

$3sinx + 4cosx = 5sin(x + arcsin0{,}8)$.

Аудиторные задания (А/з): № 30.1 (б, в), № 30.2 (б).

Домашние задания (Д/з): № 30.1 (г), № 30.2 (в, г).

А/з, Д/з (подготовка):

$Asinx + Bcosx = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot sin(x + t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot (sinx \cdot cost + cosx \cdot sint) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot sinx \cdot cost + \sqrt{A^2 + B^2} \cdot cosx \cdot sint$;

$$\left.\begin{array}{l} Asinx{=}\sqrt{A^2{+}B^2}{\cdot}sinx{\cdot}cost{\Rightarrow}A{=}\sqrt{A^2{+}B^2}{\cdot}cost{\Rightarrow}cost{=}\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ Bcosx{=}\sqrt{A^2{+}B^2}{\cdot}cosx{\cdot}sint{\Rightarrow}B{=}\sqrt{A^2{+}B^2}{\cdot}sint{\Rightarrow}sint{=}\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow t =$$

$arccos\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = arcsin\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$;

$Asinx + Bcosx = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot sin\left(x + arcsin\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$.

4.21 Методы решения тригонометрических уравнений (продолжение)

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 31.

Решите уравнение:

31.1.

а) $\sin(x-1)=\cos(x+2)$ (Пример);

б) $\sin(3x+3)=\cos(x-1)$ (А/з);

в) $\sin(2x-2)=\cos(x+3)$ (Д/з).

31.2.

а) $\sin x \cdot \sin 5x = \cos 4x$ (Пример);

б) $\cos x \cdot \cos 5x = \cos 6x$ (А/з);

в) $\sin x \cdot \sin 4x = \cos 3x$ (Д/з).

Методы решения тригонометрических уравнений (продолжение)

(Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

31.1.а) $sin(x-1)=cos(x+2)$;

$sinx\cdot cos1-cosx\cdot sin1=cosx\cdot cos2-sinx\cdot sin2$;

$tgx\cdot cos1-sin1=cos2-tgx\cdot sin2$;

$(cos1+sin2)\cdot tgx=sin1+cos2$;

$tgx=\frac{sin1+cos2}{sin2+cos1}$; $\quad x=arctg\left(\frac{sin1+cos2}{sin2+cos1}\right)+\pi k, k\epsilon Z.$

31.2.а) $sinx\cdot sin5x=cos4x$;

$\frac{cos(x-5x)-cos(x+5x)}{2}=cos4x$; $\quad \frac{cos(-4x)-cos6x}{2}=cos4x$;

$cos4x-cos6x=2cos4x$; $\quad cos4x+cos6x=0$;

$2cos\frac{4x+6x}{2}cos\frac{4x-6x}{2}=0$; $\quad 2cos5xcos(-x)=0$;

$2cos5xcosx=0$;

$cos5x=0$; $\quad 5x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\epsilon Z$; $\quad x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}, k\epsilon Z$;

$cosx=0$; $\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\epsilon Z.$

Аудиторные задания (А/з): № 31.1 (б), № 31.2 (б).

Домашние задания (Д/з): № 31.1 (в), № 31.2 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$sin(\alpha\pm\beta)=sin\alpha\cdot cos\beta\pm cos\alpha\cdot sin\beta$; $\quad cos(\alpha\pm\beta)=cos\alpha\cdot cos\beta\mp sin\alpha\cdot sin\beta$;

$sin\alpha\cdot sin\beta=\frac{cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)}{2}$; $\quad cos\alpha\cdot cos\beta=\frac{cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)}{2}$;

$cos\alpha+cos\beta=2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\quad cos\alpha-cos\beta=-2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$cost=0,\ t=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\epsilon Z$; $\quad cost=1,\ t=2\pi k, k\epsilon Z$;

$cost=-1,\ t=\pi+2\pi k, k\epsilon Z$; $\quad sint=0,\ t=\pi k, k\epsilon Z$;

$sint=1,\ t=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z$; $\quad sint=-1,\ t=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z.$

4.22 Контрольная работа «Основы тригонометрии. Тригонометрические функции»

Контрольная работа «Основы тригонометрии. Тригонометрические функции» (Подготовка)

1.Вычислите: 1) $tg\frac{5\pi}{6}$; 2) $ctg\frac{7\pi}{4}$.

2.Упростите выражение:

1) $\frac{\sin^2 t-1}{\cos^2 t-1}+tgt\cdot ctgt$; 2) $cos^2t-\sin^2 t\cdot\left(ctg^2t+1\right)$.

3.По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

1) $\sin t=\frac{5}{13}, 0<t<\frac{\pi}{2}$; 2) $\sin t=-0{,}28, \pi<t<\frac{3\pi}{2}$.

4.Вычислите: 1) $\arccos\frac{1}{2}-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arccos(-\frac{1}{2})+\arccos\frac{1}{2}$.

5.Решите уравнение: 1) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x=-\frac{1}{2}$.

<u>Решение</u>:

1.1) $tg\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$; **2)** $ctg\frac{7\pi}{4}=-1$.

2.1) $\frac{sin^2t-1}{cos^2t-1}+tgt\cdot ctgt=\frac{-(1-sin^2t)}{-(1-cos^2t)}+1=\frac{-cos^2t}{-sin^2t}+1=ctg^2t+1=\frac{1}{sin^2t}$;

2) $cos^2t-sin^2t\cdot(ctg^2t+1)=cos^2t-sin^2t\cdot\frac{1}{sin^2t}=cos^2t-1=-(1-cos^2t)=-sin^2t$.

3.1) $sint=\frac{5}{13},\ 0<t<\frac{\pi}{2}$;

$0<t<\frac{\pi}{2}$ – I четверть $\Rightarrow cost>0; tgt>0; ctgt>0$;

$cost=\sqrt{1-sin^2t}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{12}{13}$;

$tgt=\frac{sint}{cost}=\frac{5/13}{12/13}=\frac{5}{12}$; $ctgt=\frac{1}{tgt}=\frac{12}{5}$;

2) $sint = -0{,}28,\ \pi < t < \frac{3\pi}{2}$;

$\pi < t < \frac{3\pi}{2}$ – III четверть $\Rightarrow cost < 0; tgt > 0; ctgt > 0$;

$cost = -\sqrt{1-(-0{,}28)^2} = -\sqrt{1-0{,}0784} = -\sqrt{0{,}9216} = -0{,}96$;

$tgt = \frac{sint}{cost} = \frac{-0{,}28}{-0{,}96} = \frac{0{,}07}{0{,}24} = \frac{7}{24}$; $\qquad ctgt = \frac{1}{tgt} = \frac{24}{7}$.

4.1) $arccos\frac{1}{2} - arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$;

2) $arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + arccos\frac{1}{2} = \left(\pi - arccos\frac{1}{2}\right) + arccos\frac{1}{2} = \pi.$

5.1) $sinx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$x = (-1)^k \cdot arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, k\epsilon Z$; $\qquad x = (-1)^{k+1} \cdot arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, k\epsilon Z$;

$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, k\epsilon Z$;

2) $sinx = -\frac{1}{2}$;

$x = (-1)^k \cdot arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k, k\epsilon Z$;$x = (-1)^{k+1} \cdot arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k\epsilon Z$;

$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z.$

Контрольная работа «Основы тригонометрии. Тригонометрические функции»

1.Вычислите: 1) $tg\frac{5\pi}{4}$; 2) $ctg\frac{4\pi}{3}$.

2.Упростите выражение: 1) $\frac{\cos^2 t - ctg^2 t}{\sin^2 t - tg^2 t}$; 2) $ctg^2 t - \left(\sin^{-2} t - 1\right)$.

3.По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций: 1) $\sin t = \frac{4}{5}, \frac{\pi}{2} < t < \pi$; 2) $\sin t = -0{,}6, -\frac{\pi}{2} < t < 0$.

4.Вычислите: 1) $\arccos(-1) + \arccos 0$; 2) $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.Решите уравнение: 1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = -1$.

4.23 Тригонометрические функции в профессиональных задачах

Используемый источник – [7].

Напряжение на резисторе и ток, проходящий через резистор, имеют начальную фазу, или совпадают по фазе – они одновременно достигают своих амплитудных значений и соответственно одновременно проходят через ноль.

Среднее значение мгновенной мощности за период называется активной мощностью и измеряется в ваттах.

Индуктивная катушка как элемент схемы замещения реальной цепи синусоидального тока даёт возможность учитывать при расчёте явление самоиндукции и накопление энергии в её магнитном поле.

Непрерывное изменение во времени тока вызывает появление в витках катушки ЭДС самоиндукции.

Амплитуду колебания мгновенной мощности в цепи с катушкой называют реактивной (индуктивной) мощностью.

Реактивную мощность измеряют в Вар (вольт-ампер реактивный).

Включение конденсатора в цепь переменного тока не вызывает разрыва цепи, т.к. ток в цепи всё время поддерживается за счёт заряда и разряда конденсатора.

Амплитуду колебания мгновенной мощности в цепи с конденсатором называют реактивной (ёмкостной) мощностью и измеряется в Вар.

Тест «Тригонометрические функции в профессиональных задачах»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Напряжение на резисторе и ток, проходящий через резистор, имеют начальную фазу, или совпадают по фазе – они одновременно достигают своих амплитудных значений и соответственно одновременно проходят через _____.

а) не единицу; б) ноль; в) не ноль; г) единицу.

2.Среднее значение мгновенной мощности за период называется __________ мощностью и измеряется в ваттах.

а) не пассивной; б) не активной; в) активной; г) пассивной.

3.Индуктивная катушка как элемент схемы замещения реальной цепи _____________ тока даёт возможность учитывать при расчёте явление самоиндукции и накопление энергии в её магнитном поле.

а) синусоидального; б) не синусоидального; в) гармонического; г) не гармонического.

4.___________ изменение во времени тока вызывает появление в витках катушки ЭДС самоиндукции.

а) не периодическое; б) не непрерывное; в) периодическое; г) непрерывное.

5.___________ колебания мгновенной мощности в цепи с катушкой называют реактивной (индуктивной) мощностью.

а) не фазу; б) не амплитуду; в) амплитуду; г) фазу.

6.Реактивную мощность измеряют в Вар (вольт-ампер ___________).

а) не реактивный; б) реактивный; в) активный; г) не активный.

7.Включение конденсатора в цепь _____________ тока не вызывает разрыва цепи, т.к. ток в цепи всё время поддерживается за счёт заряда и разряда конденсатора.

а) не переменного; б) постоянного; в) не постоянного; г) переменного.

8.____________ колебания мгновенной мощности в цепи с конденсатором называют реактивной (ёмкостной) мощностью и измеряется в Вар.

а) амплитуду; б) не амплитуду; в) не фазу; г) фазу.

Задача «Тригонометрические функции в профессиональных задачах»

9.Написать уравнение ЭДС e_2, которая изменяется в противофазе с ЭДС e_1, если начальная фаза $\psi_1=30^0$, а амплитуда E_{m2}=200 В.

Задача «Тригонометрические функции в профессиональных задачах» (Подготовка)

Задача. Написать уравнение ЭДС e_2, которая изменяется в противофазе с ЭДС e_1, если начальная фаза $\psi_1=60^0$, а амплитуда E_{m2}=100 В.

Решение:

$e_2 = E_{m2}sin(\omega t + \psi_1 + 180^0) = 100sin(\omega t + 60^0 + 180^0) = 100sin(\omega t + 240^0)$.

РАЗДЕЛ 5. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

5.1 Комплексные числа и арифметические операции над ними

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 32.

32.15. Вычислите $az_1 + bz_2$, если:

а) $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 1 - i,\ a = 2,\ b = -1$ (Пример);

б) $z_1 = 1 + i,\ z_2 = -1 + 2i,\ a = -4,\ b = -5$ (А/з);

в) $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 1 - i,\ a = -2,\ b = 3$ (Д/з).

32.16. Известно, что число $az_1 + z_2,\ a \in R$, является число мнимым. Найдите a, если:

а) $z_1 = 3 + i,\ z_2 = 6 - i$ (Пример);

б) $z_1 = 12 - 13i,\ z_2 = 3i$ (А/з);

в) $z_1 = 8 + 3i,\ z_2 = -1 - 2i$ (Д/з).

32.17. Известно, что число $z_1 + az_2,\ a \in R$, является действительным. Найдите a, если:

а) $z_1 = 3 + i,\ z_2 = 6 - i$ (Пример);

б) $z_1 = 12 - 13i,\ z_2 = (3 + i)^2$ (А/з);

в) $z_1 = 8 + 3i,\ z_2 = -1 - 2i$ (Д/з).

32.19. Вычислите:

а) $i \cdot (1 + i)$ (Пример); б) $i \cdot (-3 + 2i)$ (А/з); в) $(4 - 3i) \cdot i$ (Д/з).

<u>Комплексные числа и арифметические операции над ними (Примеры, А/з, Д/з)</u>

<u>Примеры</u>:

32.15.а) $az_1 + bz_2$ – ?

$z_1 = 1 + i$; $z_2 = 1 - i$; $a = 1$; $b = -1$;

$az_1 + bz_2 = 2(1 + i) - (1 - i) = 2 + 2i - 1 + i = 1 + 3i.$

32.16.а) $az_1 + z_2,\ a\epsilon R$, чисто мнимое число, a – ?

$z_1 = 3 + i;$ $\quad z_2 = 6 - i;$

$az_1 + z_2 = a(3 + i) + 6 - i = (3a + 6) + (a - 1)i;$

$3a + 6 = 0;$ $\quad 3a = -6;$ $\quad a = -2.$

32.17.а) $z_1 + az_2,\ a\epsilon R,$ действительное число, a – ?

$z_1 = 3 + i;$ $\quad z_2 = 6 - i;$

$z_1 + az_2 = 3 + i + a(6 - i) = (3 + 6a) + (1 - a)i;$ $\quad a = 1.$

32.19.а) $i(1 + i) = i + i^2 = i - 1.$

Аудиторные задания (А/з): № 32.15 (б), № 32.16 (б), № 32.17 (б), № 32.19 (б).

Домашние задания (Д/з): № 32.15 (в), № 32.16 (в), № 32.17 (в), № 32.19 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$z = a + bi;$

$a = 0;\ z = bi$ – чисто мнимое число;

$b = 0;\ z = a$ – действительное число;

i – мнимая единица; $\quad i^2 = -1;\ \ i \cdot i = i^2 = -1;$

$z_1 = a_1 + b_1 i;$ $\quad z_2 = a_2 + b_2 i;$

$mz_1 + nz_2 = m(a_1 + b_1 i) + n(a_2 + b_2 i) = (ma_1 + na_2) + (mb_1 + nb_2)i;$

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i;$

$z = a + bi;$ $\quad k \cdot z = k \cdot (a + bi) = ka + (kb)i;$

$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2 = (a^2 - b^2) + (2ab)i.$

5.2 Комплексные числа и координатная плоскость

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 33.

33.13. Изобразите на координатной плоскости числа $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = -1 + 3i$, а также числа:

а) $3z_1$ (Пример); б) $-2z_2$ (А/з); в) $z_1 + z_2$ (Д/з).

33.14. Изобразите на координатной плоскости числа $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -5 + 2i$, а также числа:

а) $\overline{z_1}$ (Пример); б) $-\overline{3z_2}$ (А/з); в) $\overline{z_1 + z_2}$ (Д/з).

33.15. Изобразите на координатной плоскости числа $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = 1 - 3i$, а также числа:

а) $\frac{1}{3}z_1$ (Пример); б) $-\frac{2}{3}z_2$ (А/з); в) $z_1 - z_2$ (Д/з).

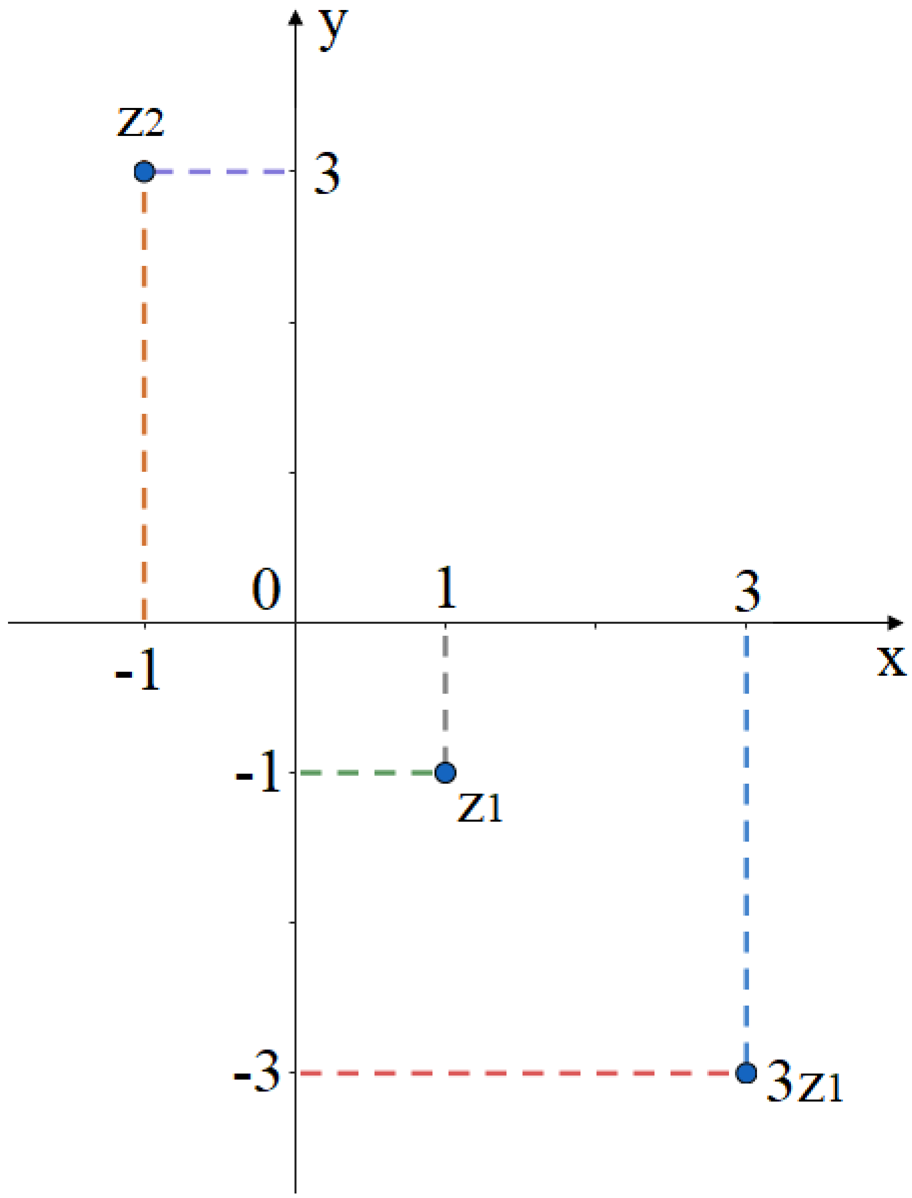
33.16. Изобразите на координатной плоскости числа $z_1 = -2 + 3i$ и $z_2 = 5 - 2i$, а также числа:

а) $\overline{\frac{1}{3}z_1}$ (Пример); б) $-\overline{\frac{1}{5}z_2}$ (А/з); в) $\overline{z_1 - z_2}$ (Д/з).

Примеры:

33.13.а) $z_1 = 1 - i,\ z_2 = -1 + 3i;$

$3z_1 = 3(1 - i) = 3 - 3i.$



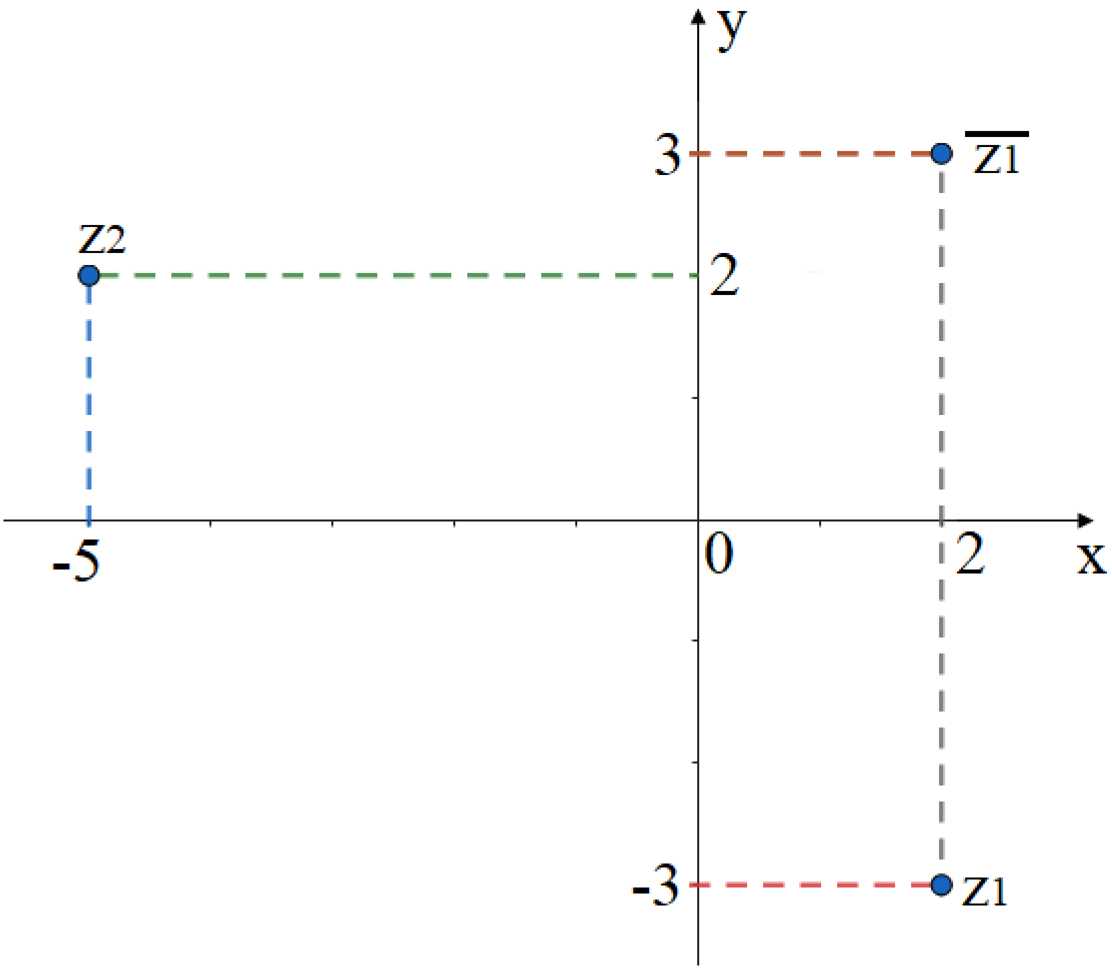
33.14.а) $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = -5 + 2i;$

$\overline{z_1}$ – число, сопряженное z_1;

$\overline{z_1} = 2 + 3i;$

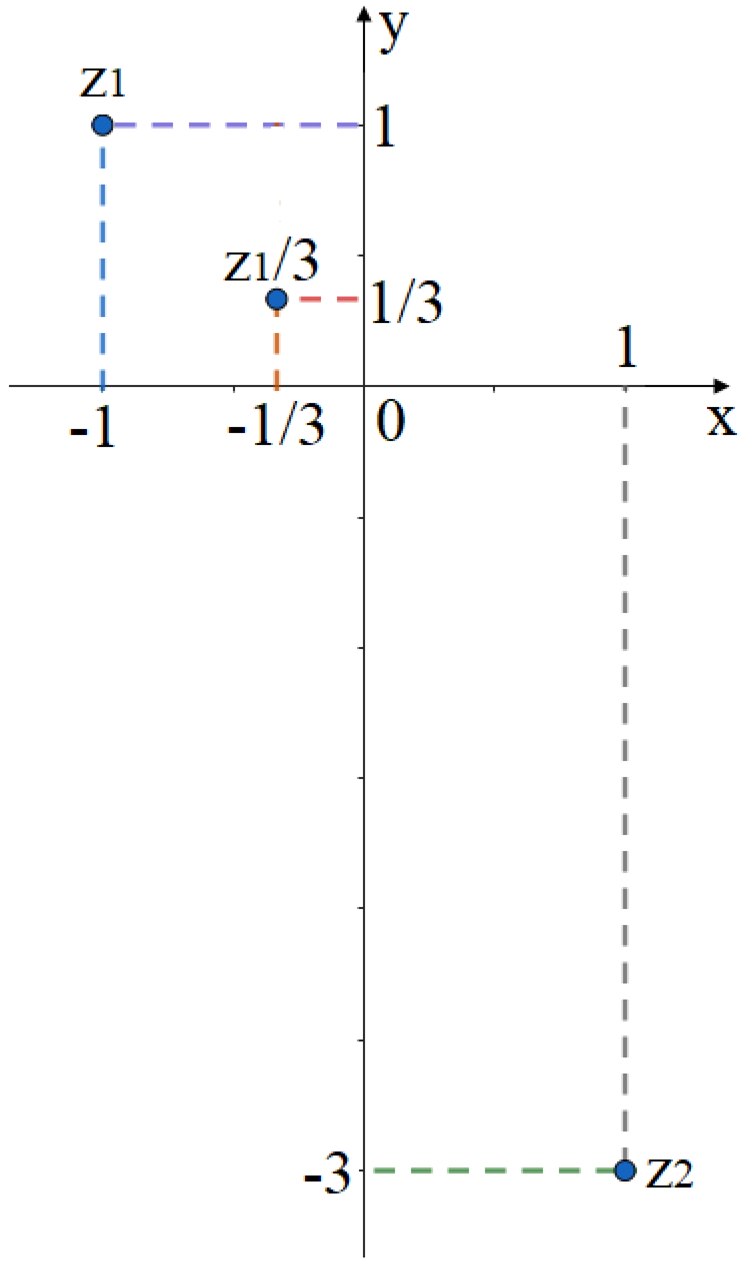
$z = a + bi,\ \overline{z} = a - bi;$

$\overline{z}$ – число, сопряженное z.



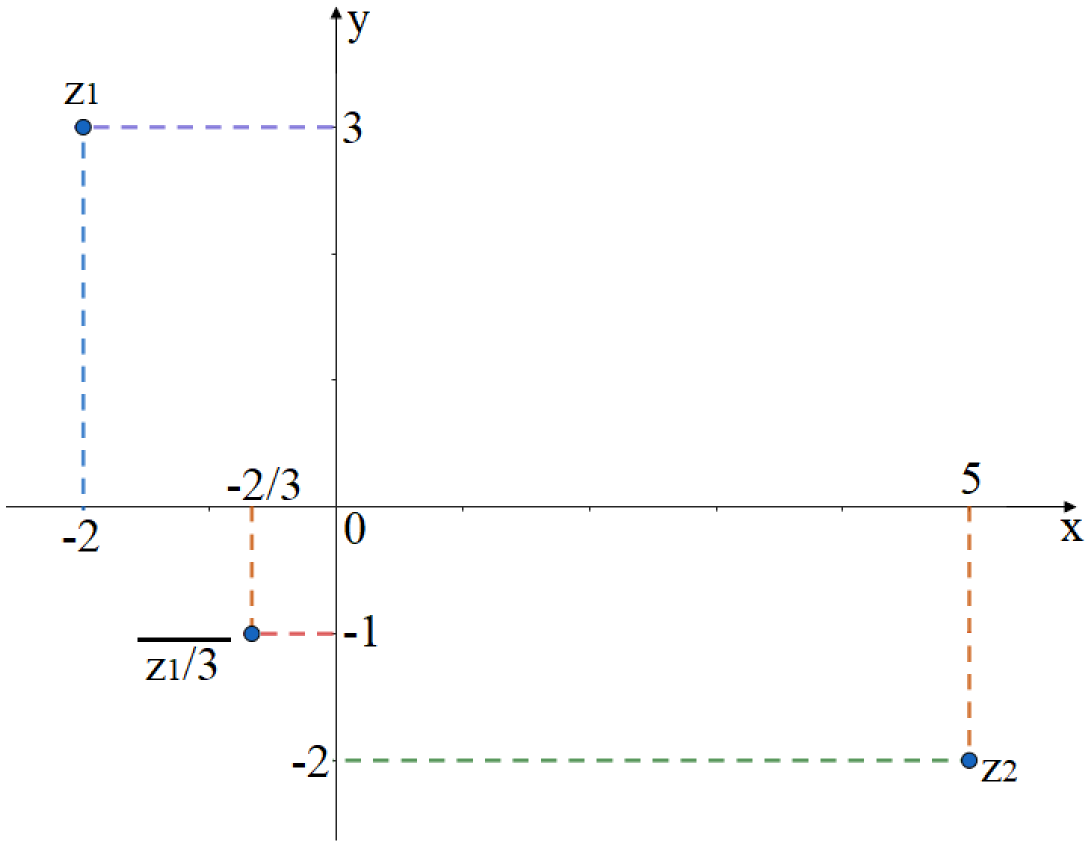
33.15.a) $z_1 = -1 + i,\ z_2 = 1 - 3i;$

$\frac{1}{3}z_1 = \frac{1}{3}(-1 + i) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i.$



33.16.а) $z_1 = -2 + 3i,\ z_2 = 5 - 2i;$

$\overline{\frac{1}{3}z_1} = \overline{\frac{1}{3}(-2+3i)} = \overline{-\frac{2}{3}+i} = -\frac{2}{3} - i.$



Аудиторные задания (А/з): № 33.13 (б), № 33.14 (б), № 33.15 (б), № 33.16 (б).

Домашние задания (Д/з): № 33.13 (в), № 33.14 (в), № 33.15 (в), № 33.16 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$z_1 = a_1 + b_1 i; \quad z_2 = a_2 + b_2 i;$

$\overline{mz_1 + nz_2} = \overline{m(a_1 + b_1 i) + n(a_2 + b_2 i)} = \overline{(ma_1 + na_2) + (mb_1 + nb_2)i} = (ma_1 + na_2) - (mb_1 + nb_2)i.$

5.3 Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 34.

Найдите модуль комплексного числа:

34.1.

а) $6-8i$ (Пример); в) $i\cdot(2+i)$ (А/з); г) $(3-i)\cdot(2+i)$ (Д/з).

34.2.

а) $\frac{2}{i}$ (Пример); б) $-\frac{3}{i}$ (А/з); в) $\frac{1+i}{i}$ (Д/з).

34.16. Изобразите на комплексной плоскости множество всех тех чисел, аргумент которых равен:

а) $\frac{\pi}{4}$ (Пример); б) $\frac{3\pi}{4}$ или $-\frac{\pi}{4}$ (А/з); в) $-\frac{3\pi}{4}$ (Д/з).

34.22. Запишите комплексное число в стандартной тригонометрической форме:

а) $4+4i$ (Пример); б) $1-i$ (А/з); в) $-2+2i$ (Д/з).

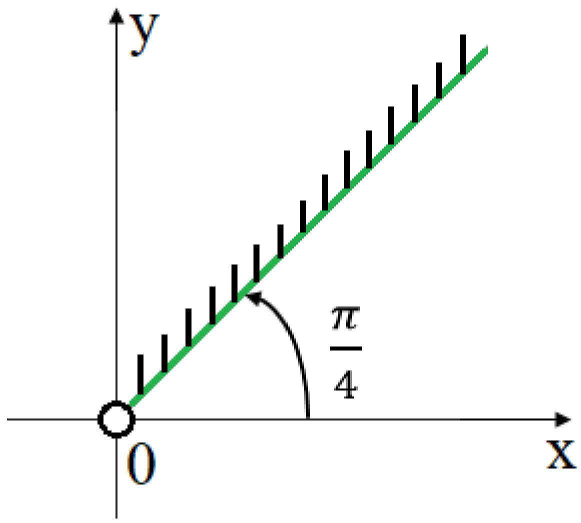
<u>Тригонометрическая форма записи комплексного числа (Примеры, А/з, Д/з)</u>

<u>Примеры</u>:

34.1.а) $6-8i$; $|z|=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10.$

34.2.а) $\frac{2}{i}=\frac{2i}{i^2}=-2i$; $|z|=2.$

34.16.а) $\frac{\pi}{4}$.



34.22.а) $4 + 4i$;

$|z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$;

$4 + 4i = 4\sqrt{2}\left(\frac{4}{4\sqrt{2}} + \frac{4}{4\sqrt{2}}i\right) = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$;

$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right) = |z|(cos\alpha + isin\alpha)$;

$cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\quad sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

$cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$;

$4 + 4i = 4\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$.

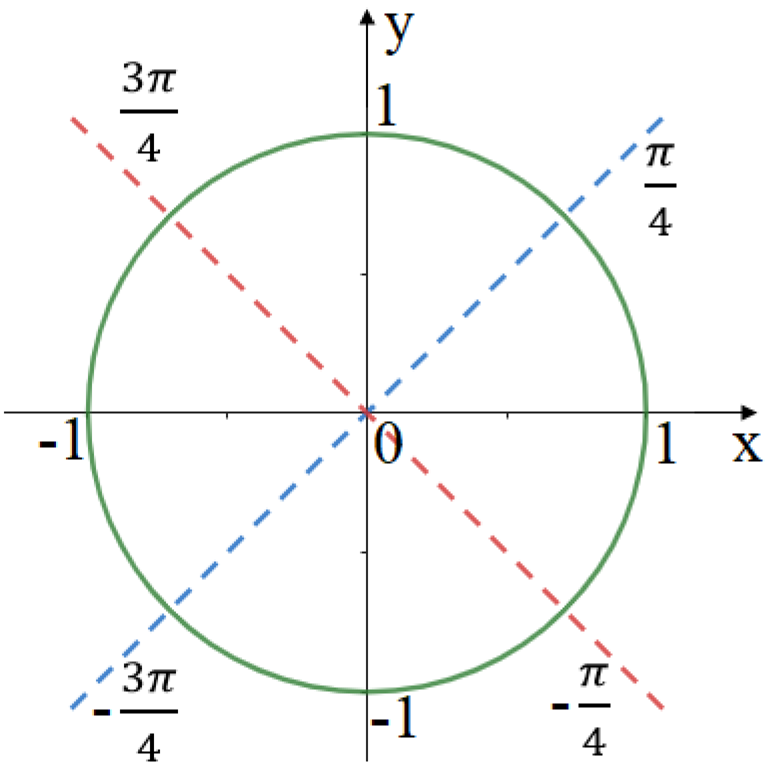
Аудиторные задания (А/з): № 34.1 (в), № 34.2 (б), № 34.16 (б), № 34.22 (б).

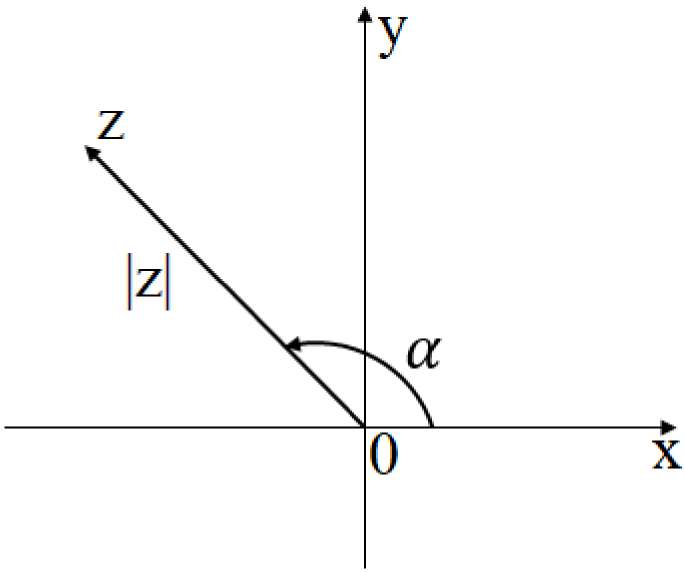
Домашние задания (Д/з): № 34.1 (г), № 34.2 (в), № 34.16 (в), № 34.22 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$z = a + bi$; $\qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа z;

$\frac{a+bi}{i} = \frac{(a+bi)i}{i^2} = -(a + bi)i = -(ai + bi^2) = -(ai - b) = b - ai.$





$z = |z|(cos\alpha + isin\alpha)$ – тригонометрическая форма записи комплексного числа z;

$\alpha \epsilon (-\pi; \pi]$; $\alpha = argz$ – аргумент числа z;

$|z| = \rho$ – модуль числа z.

5.4 Комплексные числа и квадратные уравнения

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 35.

Решите уравнение:

35.7.

а) $z^2 - 2z + 2 = 0$ (Пример);

б) $z^2 + 4z + 5 = 0$ (А/з);

в) $z^2 - 6z + 25 = 0$ (Д/з).

35.8.

а) $z^2 - z + 2{,}5 = 0$ (Пример);

б) $z^2 + 3z + 8{,}5 = 0$ (А/з);

в) $z^2 - 5z + 6{,}5 = 0$ (Д/з).

35.13. Вычислите:

а) $\sqrt{15 + 8i}$ (Пример); в) $\sqrt{24 - 7i}$ (А/з); г) $\sqrt{40 + 9i}$ (Д/з).

35.14. Изобразите на комплексной плоскости число z и множество $\sqrt{z}$, если:

б) $|z| = 4,\ \arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}$ (Пример);

в) $|z| = 9,\ \arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$ (А/з);

г) $|z| = 0{,}25,\ \arg(z) = -\dfrac{2\pi}{3}$ (Д/з).

<u>Комплексные числа и квадратные уравнения (Примеры, А/з, Д/з)</u>

<u>Примеры</u>:

35.7.а) $z^2 - 2z + 2 = 0$; $D = 4 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$;

$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$.

35.8.а) $z^2 - z + 2{,}5 = 0$; $2z^2 - 2z + 5 = 0$; $D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 4 - 40 = -36$; $z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{4} = \frac{2 \pm 6i}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} i$.

35.13.а) $\sqrt{15+8i}$;

$$\boxed{\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\cdot\frac{b}{|b|}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right), b\neq 0;}$$

$\sqrt{15+8i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{225+64}+15}{2}}+i\cdot\frac{8}{8}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{225+64}-15}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{289}+15}{2}}+ i\sqrt{\frac{\sqrt{289}-15}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{17+15}{2}}+i\sqrt{\frac{17-15}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{32}{2}}+i\sqrt{\frac{2}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{16}+i\right)=\pm(4+ i)$.

35.14.б) $|z|=4,\ arg(z)=-\frac{\pi}{2}$.

Алгоритм извлечения квадратного корня из комплексного числа z

1.Найти модуль ρ и аргумент α этого числа.

2.Провести окружность радиусом $\sqrt{\rho}$ с центром в начале координат.

3.Провести через начало координат прямую под углом $\frac{\alpha}{2}$ к положительному направлению оси абсцисс.

4.Две точки пересечения проведенных окружности и прямой дают ответ.

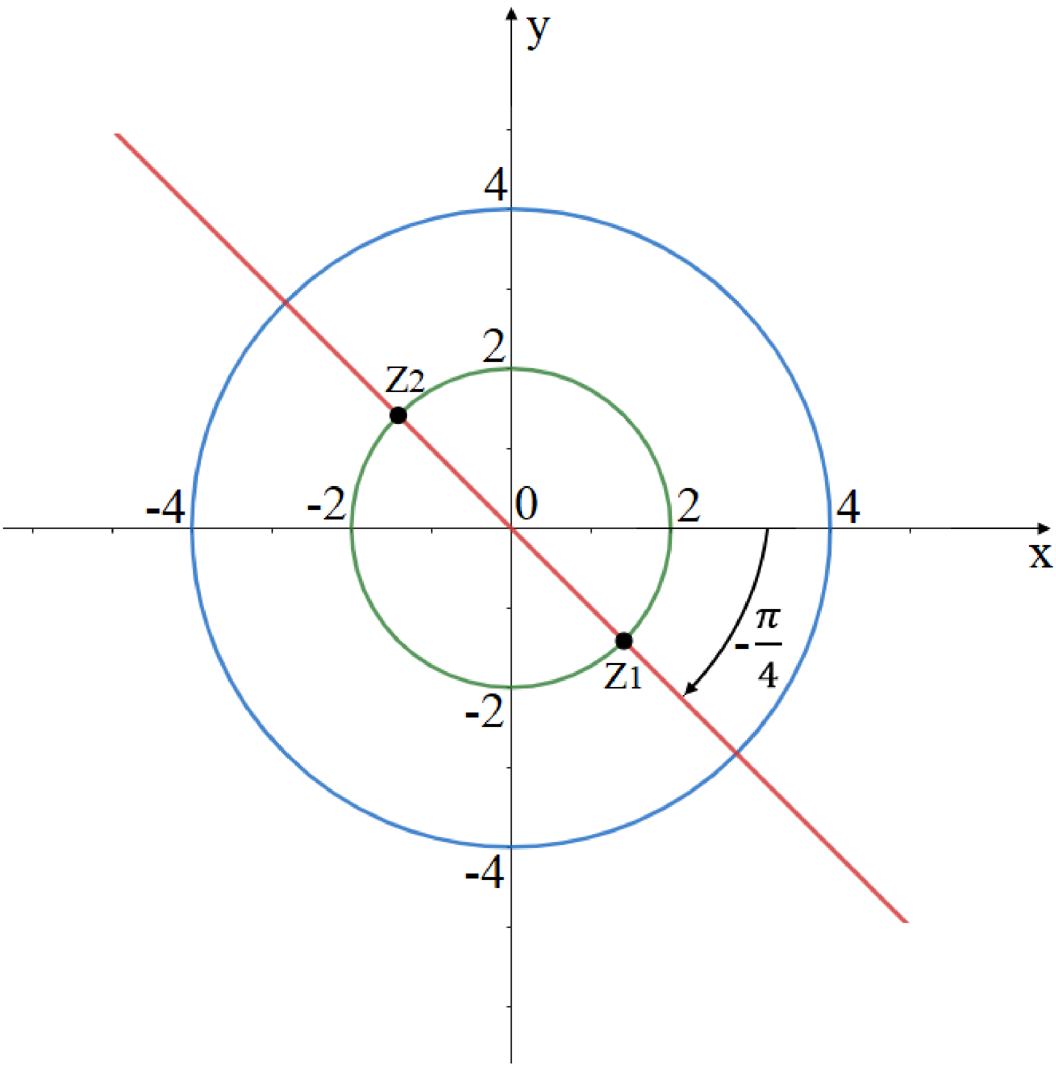
$z=|z|\cdot\left(cos\left(arg(z)\right)+isin\left(arg(z)\right)\right)=\rho(cos\alpha+isin\alpha)$;

$z=4\cdot\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=4\cdot(0-i)=-4i$;

$$\boxed{\sqrt{\rho(cos\alpha+isin\alpha)}=\pm\sqrt{\rho}\left(cos\frac{\alpha}{2}+isin\frac{\alpha}{2}\right);}$$

$\sqrt{z}=\pm\sqrt{4}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\pm2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

$z_1=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; $z_2=-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}+ i\sqrt{2}$.



<u>Аудиторные задания (А/з)</u>: № 35.7 (б), № 35.8 (б), № 35.13 (в), № 35.14 (в).

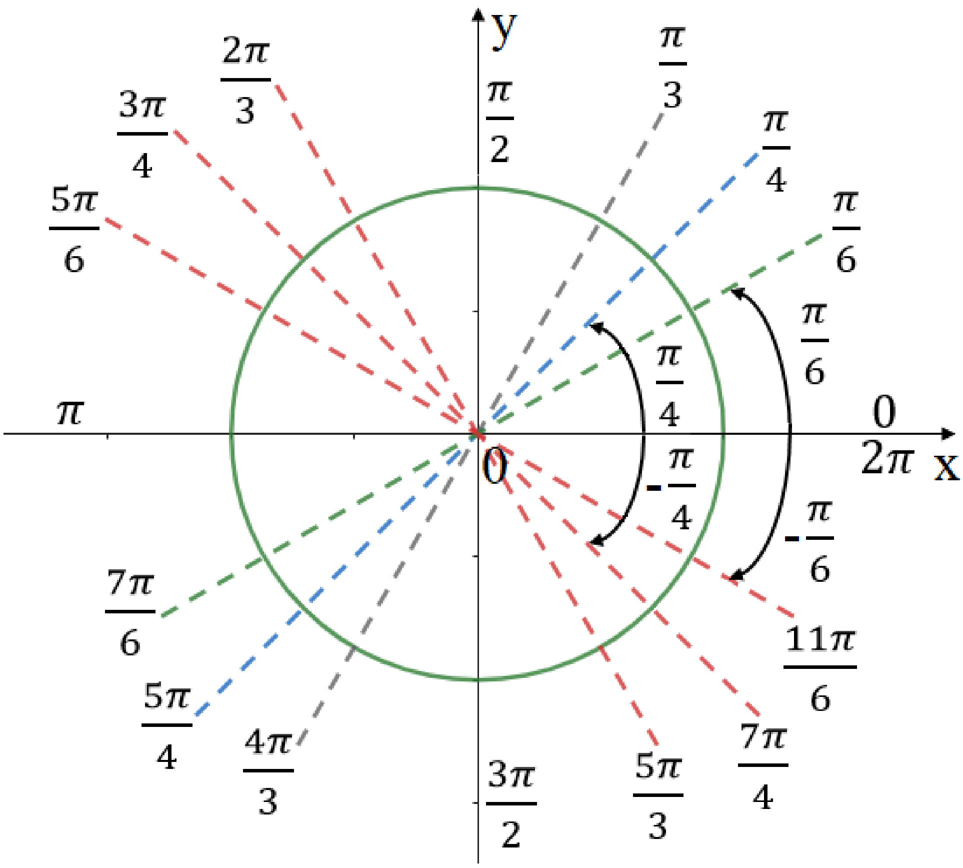
<u>Домашние задания (Д/з)</u>: № 35.7 (в), № 35.8 (в), № 35.13 (г), № 35.14 (г).

<u>А/з, Д/з (подготовка):</u>

$\sqrt{-bi} = \pm\sqrt{b}i;$

$az^2 + bz + c = 0;$ $\qquad\qquad D = b^2 - 4ac < 0;$

$z_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{|b^2-4ac|}\cdot i}{2a}.$



-	+	-	+	-	+	-	+
$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	-2π	2π
$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$		
$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\pi$	π	$-\frac{5\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$		
$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$		
$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$		

5.5 Возведение комплексного числа в степень. Извлечение кубического корня из комплексного числа

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 36.

Вычислите:

36.7.

а) $\left(\cos 15^0 + i \cdot \sin 15^0\right)^8$ (Пример);

в) $\left(\cos 75^0 + i \cdot \sin 75^0\right)^{10}$ (А/з);

г) $\left(\cos 75^0 + i \cdot \sin 75^0\right)^{100}$ (Д/з).

36.8.

а) $(1+i)^4$ (Пример); в) $(1-i)^{10}$ (А/з); г) $(1-i)^{20}$ (Д/з).

36.9.

а) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^3$ (Пример); в) $\left(\sqrt{3}+i\right)^7$ (А/з); г) $\left(\sqrt{3}-i\right)^9$ (Д/з).

36.20. Вычислите и изобразите на комплексной плоскости:

а) $\sqrt[3]{64}$ (Пример); б) $\sqrt[3]{-27}$ (А/з); в) $\sqrt[3]{125i}$ (Д/з).

Возведение комплексного числа в степень. Извлечение кубического корня из комплексного числа (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

36.7.а) $(cos15^0 + i \cdot sin15^0)^8$;

$\left(\rho(cos\alpha + i \cdot sin\alpha)\right)^n = \rho^n\left(cos(n\alpha) + i \cdot sin(n\alpha)\right),\ n\epsilon N$ – формула Муавра

$(cos15^0 + i \cdot sin15^0)^8 = cos(8 \cdot 15^0) + i \cdot sin(8 \cdot 15^0) = cos120^0 + i \cdot sin120^0 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

36.8.а) $(1+i)^4$;

$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \rho(cos\alpha + i \cdot sin\alpha)$;

$cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sin\frac{\pi}{4}\right)$;

$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \cdot \left(cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \cdot sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) = 4(cos\pi + i \cdot sin\pi) = -4.$

36.9.a) $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^3$;

$\rho = \sqrt{1+3} = 2$; $z = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \rho(cos\alpha + i \cdot sin\alpha)$;

$cos\alpha = \frac{1}{2}$; $sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

$z = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + i \cdot sin\frac{\pi}{3}\right)$;

$\left(1 + \sqrt{3}i\right)^3 = 2^3 \cdot \left(cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + i \cdot sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right) = 8(cos\pi + i \cdot sin\pi) = -8.$

36.20.a) $\sqrt[3]{64}$;

$$\boxed{\sqrt[3]{z} = \left\{\sqrt[3]{|z|} \cdot \left(cos\frac{argz + 2\pi k}{3} + i \cdot sin\frac{argz + 2\pi k}{3}\right) \middle| \ k = 0,1,2\right\};}$$

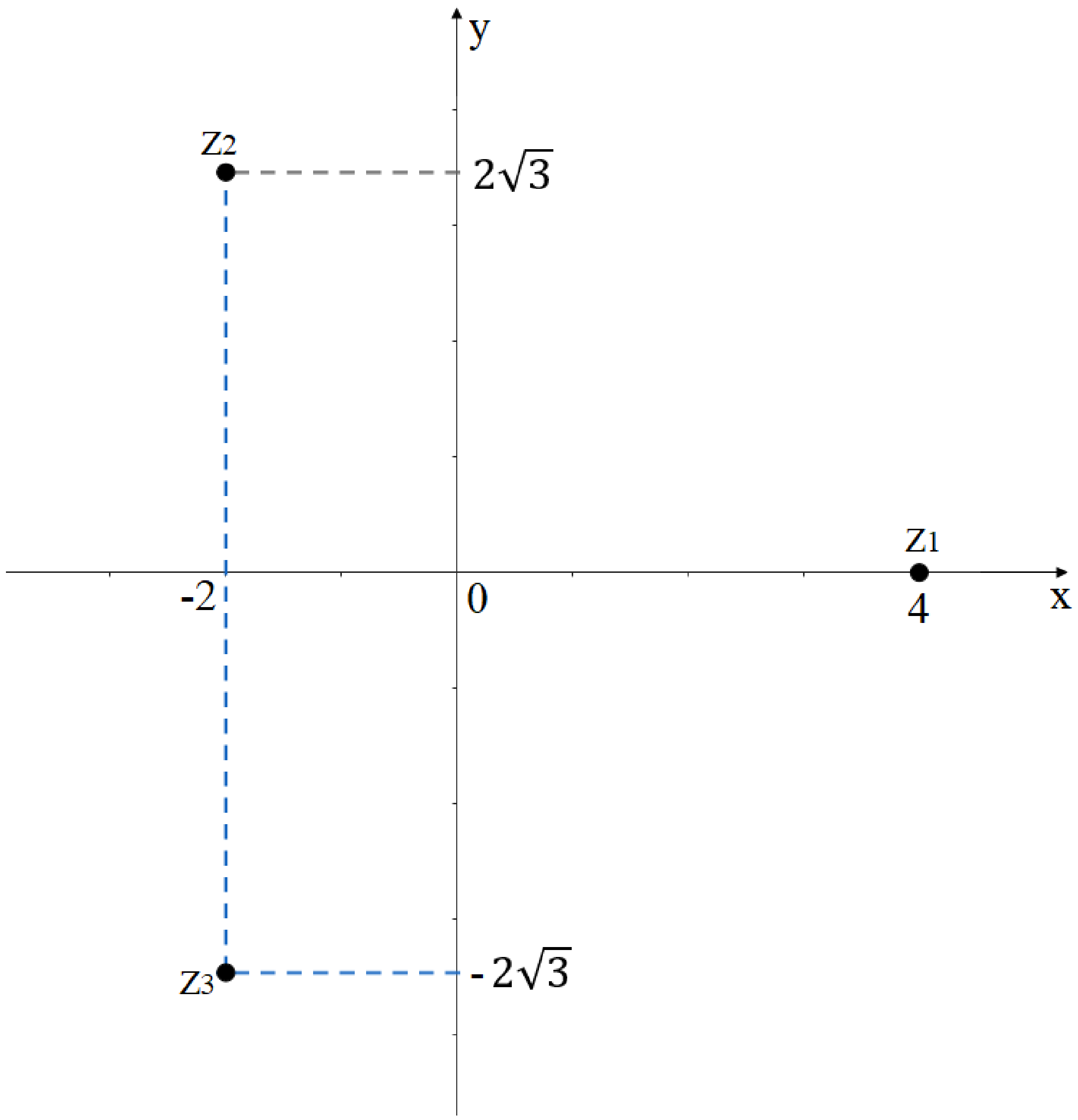
$|z| = 64$; $argz = 0$; $64 = 64(cos0 + i \cdot sin0)$;

$\sqrt[3]{64} = \left\{\sqrt[3]{64} \cdot \left(cos\frac{2\pi k}{3} + i \cdot sin\frac{2\pi k}{3}\right) \middle| \ k = 0,1,2\right\} = \left\{4 \cdot \left(cos\frac{2\pi k}{3} + i \cdot sin\frac{2\pi k}{3}\right) \middle| \ k = 0,1,2\right\}$;

$k = 0$: $z_1 = 4(cos0 + i \cdot sin0) = 4$;

$k = 1$: $z_2 = 4\left(cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot sin\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + i \cdot 2\sqrt{3}$;

$k = 2$: $z_3 = 4\left(cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot sin\frac{4\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 - i \cdot 2\sqrt{3}.$



Аудиторные задания (А/з): № 36.7 (в), № 36.8 (в), № 36.9 (в), № 36.20 (б).

Домашние задания (Д/з): № 36.7 (г), № 36.8 (г), № 36.9 (г), № 36.20 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$$\boxed{(cos\alpha + i \cdot sin\alpha)^n = cosn\alpha + i \cdot sinn\alpha;}$$

$sin(\alpha + 2\pi n) = sin\alpha,\ n\epsilon Z;$ $\quad cos(\alpha + 2\pi n) = cos\alpha,\ n\epsilon Z;$

$sin(2\pi n - \alpha) = sin\alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$ $\quad cos(2\pi n - \alpha) = cos\alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$

5.6 Контрольная работа «Комплексные числа»

Контрольная работа «Комплексные числа» (Подготовка)

1.Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах: 1) $z = 2 + 2i$; 2) $z = -5i$.

2.Даны комплексные числа: 1) $z = 5 - 5i$; 2) $z = (2-i)^2 \cdot (3+4i)$. Найти $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|, \arg z$.

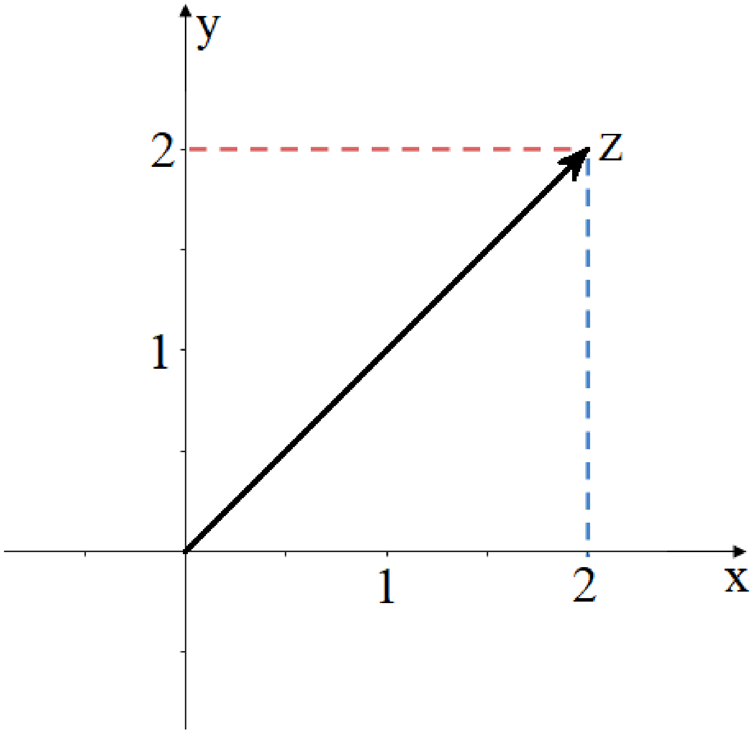
3.Найти $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 2 - i$.

4.Найти произведение $z \cdot \bar{z}$ и частное $\frac{z}{\bar{z}}$, если $z = 5 - 2i$, а $\bar{z}$ – его сопряженное.

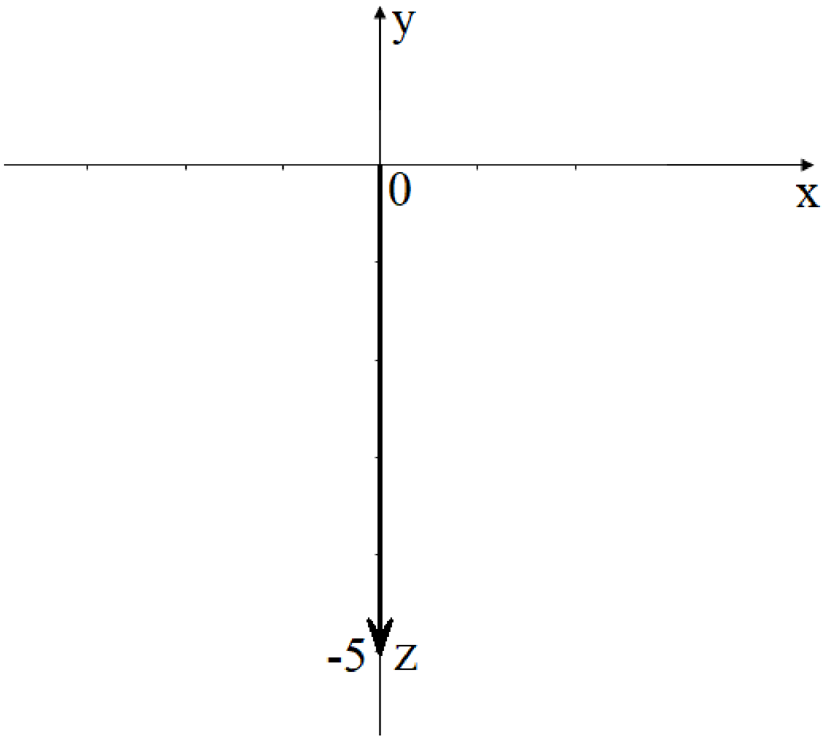
5.Найти $(1+i)^{10}$.

1.

1) $z = 2 + 2i$; $|z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$; $z = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}} i\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.



2) $z = -5i$; $|z| = 5$; $z = 5\left(\frac{-5}{5}i\right) = 5(-i) = 5\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}$.



2.

1) $z = 5 - 5i$; $Rez = 5$; $Imz = -5$; $|z| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;

$z = 5 - 5i = 5\sqrt{2}\left(\frac{5}{5\sqrt{2}} - \frac{5}{5\sqrt{2}}i\right) = 5\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 5\sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow argz = -\frac{\pi}{4}$.

2) $z = (2 - i)^2(3 + 4i) = (4 - 4i + i^2)(3 + 4i) = (3 - 4i)(3 + 4i) = 9 - 16i^2 = 9 + 16 = 25$; $Rez = 25$; $Imz = 0$; $|z| = 25$; $z = 25(cos0 + isin0) \Rightarrow argz = 0$.

3. $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 2 - i$;

$z_1 + z_2 = 1 + 2i + 2 - i = 3 + i$; $z_1 - z_2 = 1 + 2i - 2 + i = -1 + 3i$;

$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i)(2 - i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 2 + 3i + 2 = 4 + 3i$;

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{2-i} = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+4i+2i^2}{4-i^2} = \frac{5i}{5} = i.$

4. $z = 5 - 2i$; $\overline{z} = 5 + 2i$;

$z \cdot \overline{z} = (5 - 2i)(5 + 2i) = 5^2 - 4i^2 = 25 + 4 = 29$; $\frac{z}{\overline{z}} = \frac{5-2i}{5+2i} = \frac{(5-2i)^2}{25-4i^2} = \frac{25-20i+4i^2}{29} = \frac{21-20i}{29} = \frac{21}{29} - \frac{20}{29}i.$

5. $(1 + i)^{10}$ - ?

$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$;

$(1 + i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(cos\left(\frac{10\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{10\pi}{4}\right)\right) = 2^5\left(cos\frac{5\pi}{2} + isin\frac{5\pi}{2}\right) = 32\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right) = 32i.$

Контрольная работа «Комплексные числа»

1.Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах: 1) $z = -1 + \sqrt{3}i$; 2) $z = \sqrt{3} - i$.

2.Даны комплексные числа: 1) $z = 2 - 2i$; 2) $z = (-5 + i)\cdot(-5 - i)$.

Найти $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, |z|, \arg z$.

3.Найти $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 - 2i, z_2 = 3i$.

4.Найти произведение $z \cdot \bar{z}$ и частное $\frac{z}{\bar{z}}$, если $z = 1 - 2i$, а $\bar{z}$ – его сопряженное.

5.Найти $(2 + 2i)^8$.

5.7 Комплексные числа в профессиональных задачах

Используемый источник – [4].

В 1740 году Леонард Эйлер опубликовал формулу, связывающую комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями.

Показательная форма упрощает запись вычислений и оформление решения делает более компактным.

Синусоида имеет период T – это кратчайшее расстояние между двумя одинаковыми значениями напряжения.

Метод замены синусоидальных величин на комплексные называется символическим методом.

В действительности все вектора вращаются с частотой ω.

Вместо реактивных элементов индуктивности и емкости в символическую (комплексную) схему замещения вводятся их реактивные сопротивления.

Факт присутствия комплексной единицы j перед индуктивным сопротивлением jX_L означает, что напряжение на индуктивности опережает ток через индуктивность на 90 градусов.

Факт присутствия отрицательной комплексной единицы j перед ёмкостным сопротивлением $-jX_C$ означает, что напряжение на ёмкости отстает от тока через ёмкость на 90 градусов.

Задача «Комплексные числа в профессиональных задачах» (Подготовка)

Задача. В цепи, состоящей из трех параллельных ветвей, протекают токи

i_1=10sin(ωt+80^0);

i_2=30sin(ωt+150^0);

i_3=80sin(ωt-60^0).

Определить мгновенное значение тока в неразветвленной части цепи.

Решение:

$\dot{I_1} = \frac{10}{\sqrt{2}}(cos80^0 + jsin80^0) = 7{,}09(0{,}17 + j0{,}98) = 1{,}21 + j6{,}95;$

$\dot{I_2} = \frac{30}{\sqrt{2}}(cos150^0 + jsin150^0) = 21{,}98(-0{,}87 + j0{,}5) = -18{,}51 + j10{,}64;$

$\dot{I_3} = \frac{80}{\sqrt{2}}\left(cos(-60^0) + jsin(-60^0)\right) = 56{,}74(0{,}5 - j0{,}87) = 28{,}37 - j49{,}36;$

$I = \dot{I_1} + \dot{I_2} + \dot{I_3} = 1{,}21 + j6{,}95 - 18{,}51 + j10{,}64 + 28{,}37 - j49{,}36 = 11{,}07 - j31{,}77;$

$I = \sqrt{11{,}07^2 + (-31{,}77)^2} = 33{,}64$ (А);

$I_m = I\sqrt{2} = 33{,}64 \cdot 1{,}41 = 47{,}43$ (А);

$tg\alpha = \frac{-31{,}77}{11{,}07} = -2{,}87 \Rightarrow \alpha = -71^0;$

$i = 47{,}43sin(\omega t - 71^0).$

Тест «Комплексные числа в профессиональных задачах»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.В 1740 году Леонард Эйлер опубликовал формулу, связывающую комплексную ___________ с тригонометрическими функциями.

а) экспоненту; б) не экспоненту; в) не переменную; г) переменную.

2.___________ форма упрощает запись вычислений и оформление решения делает более компактным.

а) логарифмическая; б) показательная; в) не показательная; г) не логарифмическая.

3.Синусоида имеет период Т – это ____________ расстояние между двумя одинаковыми значениями напряжения.

а) наибольшее; б) не кратчайшее; в) кратчайшее; г) не наибольшее.

4.Метод замены синусоидальных величин на комплексные называется ______________ методом.

а) не комплексным; б) не символическим; в) комплексным; г) символическим.

5.В действительности все вектора вращаются с _________ ω.

а) частотой; б) не частотой; в) фазой; г) не фазой.

6.Вместо реактивных элементов индуктивности и емкости в символическую (____________) схему замещения вводятся их реактивные сопротивления.

а) не комплексную; б) комплексную; в) реактивную; г) не реактивную.

7.Факт присутствия ____________ единицы j перед индуктивным сопротивлением jX_L означает, что напряжение на индуктивности опережает ток через индуктивность на 90 градусов.

а) не комплексной; б) реактивной; в) комплексной; г) не реактивной.

8.Факт присутствия отрицательной _____________ единицы j перед ёмкостным сопротивлением $-jX_C$ означает, что напряжение на ёмкости отстает от тока через ёмкость на 90 градусов.

а) не комплексной; б) реактивной; в) не реактивной; г) комплексной.

Задача «Комплексные числа в профессиональных задачах»

9.В цепи, состоящей из трех параллельных ветвей, протекают токи

$i_1=25\sin(\omega t+75^0)$;

$i_2=45\sin(\omega t+155^0)$;

$i_3=95\sin(\omega t-65^0)$.

Определить мгновенное значение тока в неразветвленной части цепи.

РАЗДЕЛ 6. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

6.1 Числовые последовательности

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 37.

По заданной формуле n-го члена вычислите первые пять членов последовательности (y_n):

37.4.

а) $y_n = 2n^2 - n$ (Пример);

б) $y_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ (А/з);

в) $y_n = \dfrac{3n-1}{2n}$ (Д/з).

37.5.

а) $y_n = 3\cos\dfrac{2\pi}{n}$ (Пример);

б) $y_n = tg\left((-1)^n \dfrac{\pi}{4}\right)$ (А/з);

в) $y_n = 1 - \cos^2\dfrac{\pi}{n}$ (Д/з).

Выпишите первые пять членов последовательности, заданной рекуррентно:

37.9.

а) $x_1 = 2,\ x_n = 5 - x_{n-1}$ (Пример);

б) $x_1 = 2,\ x_n = x_{n-1} + 10$ (А/з);

в) $x_1 = -1,\ x_n = 2 + x_{n-1}$ (Д/з).

37.10.

а) $x_1 = 2,\ x_n = n \cdot x_{n-1}$ (Пример);

б) $x_1 = -5,\ x_n = -0{,}5 \cdot x_{n-1}$ (А/з);

в) $x_1 = -2,\ x_n = -x_{n-1}$ (Д/з).

Числовые последовательности (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

37.4.а) $y_n = 2n^2 - n$;

$y_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 2 - 1 = 1$; $y_2 = 2 \cdot 2^2 - 2 = 2 \cdot 4 - 2 = 8 - 2 = 6$; $y_3 = 2 \cdot 3^2 - 3 = 2 \cdot 9 - 3 = 18 - 3 = 15$; $y_4 = 2 \cdot 4^2 - 4 = 2 \cdot 16 - 4 = 32 - 4 = 28$; $y_5 = 2 \cdot 5^2 - 5 = 2 \cdot 25 - 5 = 50 - 5 = 45$.

37.5.а) $y_n = 3cos\frac{2\pi}{n}$;

$y_1 = 3cos\frac{2\pi}{1} = 3cos2\pi = 3 \cdot 1 = 3$; $y_2 = 3cos\frac{2\pi}{2} = 3cos\pi = 3 \cdot (-1) = -3$; $y_3 = 3cos\frac{2\pi}{3} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} = -1{,}5$; $y_4 = 3cos\frac{2\pi}{4} = 3cos\frac{\pi}{2} = 3 \cdot 0 = 0$; $y_5 = 3cos\frac{2\pi}{5}$.

37.9.а) $x_1 = 2,\ x_n = 5 - x_{n-1}$;

$x_2 = 5 - x_1 = 5 - 2 = 3$; $x_3 = 5 - x_2 = 5 - 3 = 2$;

$x_4 = 5 - x_3 = 5 - 2 = 3$; $x_5 = 5 - x_4 = 5 - 3 = 2$.

37.10.а) $x_1 = 2,\ x_n = nx_{n-1}$;

$x_2 = 2 \cdot x_1 = 2 \cdot 2 = 4$; $x_3 = 3 \cdot x_2 = 3 \cdot 4 = 12$;

$x_4 = 4 \cdot x_3 = 4 \cdot 12 = 48$; $x_5 = 5 \cdot x_4 = 5 \cdot 48 = 240$.

Аудиторные задания (А/з): № 37.4 (б), № 37.5 (б), № 37.9 (б), № 37.10 (б).

Домашние задания (Д/з): № 37.4 (в), № 37.5 (в), № 37.9 (в), № 37.10 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$(-1)^m = -1$, если m – нечетная степень (1, 3, 5, …)

$(-1)^m = 1$, если m – четная степень (2, 4, 6, …)

$tg(-x) = -tgx$; $1 - cos^2x = sin^2x$.

6.2 Предел числовой последовательности

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 38.

Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

38.13.

а) $x_n = \dfrac{5}{n^2}$ (Пример); б) $x_n = \dfrac{-17}{n^3}$ (А/з); в) $x_n = \dfrac{-15}{n^2}$ (Д/з).

38.14.

а) $x_n = \dfrac{7}{n} + \dfrac{8}{\sqrt{n}} + \dfrac{9}{n^3}$ (Пример);

б) $x_n = 6 - \dfrac{7}{n^2} - \dfrac{3}{n} - \dfrac{3}{\sqrt{n}}$ (А/з);

в) $x_n = \dfrac{3}{n} + \dfrac{7}{n^2} - \dfrac{5}{n^3} + \dfrac{13}{n^4}$ (Д/з).

38.15.

а) $x_n = \dfrac{5}{2^n}$ (Пример); б) $x_n = \dfrac{1}{2} \cdot 5^{-n}$ (А/з); в) $x_n = 7 \cdot 3^{-n}$ (Д/з).

38.16.

а) $x_n = \dfrac{5n+3}{n+1}$ (Пример); б) $x_n = \dfrac{7n-5}{n+2}$ (А/з); в) $x_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$ (Д/з).

Предел числовой последовательности (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

38.13.а) $x_n = \frac{5}{n^2}$;

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = \left[\frac{5}{\infty^2}\right] = 0.$

38.14.а) $x_n = \frac{7}{n} + \frac{8}{\sqrt{n}} + \frac{9}{n^3}$;

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{7}{n} + \frac{8}{\sqrt{n}} + \frac{9}{n^3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8}{\sqrt{n}} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{9}{n^3} = \left[\frac{7}{\infty}\right] + \left[\frac{8}{\sqrt{\infty}}\right] + \left[\frac{9}{\infty^3}\right] = 0 + 0 + 0 = 0.$

38.15.а) $x_n = \frac{5}{2^n}$;

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{2^n} = \left[\frac{5}{2^\infty}\right] = 0.$

38.16.а) $x_n = \frac{5n+3}{n+1}$;

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+3}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \left[\frac{5+\frac{3}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}\right] = \frac{5}{1} = 5.$

Аудиторные задания (А/з): № 38.13 (б), № 38.14 (б), № 38.15 (б), № 38.16 (б).

Домашние задания (Д/з): № 38.13 (в), № 38.14 (в), № 38.15 (в), № 38.16 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{n^m} = 0$; m – любое натуральное число, k – любой коэффициент.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$; $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b + c$ – предел суммы равен сумме пределов.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{\sqrt{n}} = 0$, k – любой коэффициент.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{m^n} = 0$, k – любой коэффициент, $m > 1$; $k \cdot m^{-n} = \frac{k}{m^n}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{an+b}{cn+d} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a+\frac{b}{n}}{c+\frac{d}{n}} = \left[\frac{a+\frac{b}{\infty}}{c+\frac{d}{\infty}}\right] = \frac{a}{c}.$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$; $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b - c$ – предел разности равен разности пределов.

$\lim\limits_{n\to\infty} kx_n = k \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, k – любой коэффициент; $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$.

6.3 Предел функции

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 39.

Вычислите:

39.11.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)$ (Пример);

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7}{x^5}-\dfrac{2}{x^3}\right)$ (А/з);

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}\right)$ (Д/з).

39.12.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x^9}+1\right)$ (Пример);

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{7}{x}-21\right)$ (А/з);

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6}{x^5}+\dfrac{4}{x^2}+9\right)$ (Д/з).

39.14.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x-2}$ (Пример);

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4}{2x+7}$ (А/з);

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-4}{x+3}$ (Д/з).

39.15.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{x^2+7x+5}$ (Пример);

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-5x}{2x^2-9x}$ (А/з);

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x-1}{3x^2-4x+1}$ (Д/з).

Предел функции (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

39.11.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}=\left[\frac{1}{\infty^2}\right]+\left[\frac{3}{\infty^3}\right]=0+0=0.$

39.12.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^9}+1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^9}+\lim\limits_{x\to\infty}1=\left[\frac{2}{\infty^9}\right]+1=0+1=1.$

39.14.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\left[\frac{1+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}\right]=\frac{1}{1}=1.$

39.15.а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x^2+7x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}}=\left[\frac{\frac{3}{\infty}-\frac{1}{\infty^2}}{1+\frac{7}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}}\right]=\frac{0}{1}=0.$

Аудиторные задания (А/з): № 39.11 (б), № 39.12 (б), № 39.14 (б), № 39.15 (б).

Домашние задания (Д/з): № 39.11 (в), № 39.12 (в), № 39.14 (в), № 39.15 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b,\qquad \lim\limits_{x\to\infty}g(x)=c;\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)+g(x)\big)=b+c;$

$\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-g(x)\big)=b-c.$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{k}{x^m}=0,$ m – любое натуральное число; k – любой коэффициент.

$\lim\limits_{x\to\infty}kf(x)=k\lim\limits_{x\to\infty}f(x);\qquad \lim\limits_{x\to\infty}k=k;$ k – любой коэффициент.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}=\left[\frac{a+\frac{b}{\infty}}{c+\frac{d}{\infty}}\right]=\frac{a}{c}.$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax+b}{cx^2+dx+e}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}{c+\frac{d}{x}+\frac{e}{x^2}}=\left[\frac{\frac{a}{\infty}+\frac{b}{\infty^2}}{c+\frac{d}{\infty}+\frac{e}{\infty^2}}\right]=\frac{0}{c}=0.$

6.4 Определение производной

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 40.

40.1. Закон движения точки по прямой задается формулой $s(t) = 2t + 1$, где t – время (в секундах), $s(t)$ – отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите среднюю скорость движения точки с момента t_1=2 с до момента:

а) t_2=3 с (Пример);

б) t_2=2,5 с (А/з);

в) t_2=2,1 с (Д/з).

40.2. Закон движения точки по прямой задается формулой $s(t) = t^2$, где t – время (в секундах), $s(t)$ – отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите среднюю скорость движения точки с момента t_1=0 с до момента:

а) t_2=0,1 с (Пример);

б) t_2=0,01 с (А/з);

в) t_2=0,2 с.

40.3. Закон движения точки по прямой задается формулой $s(t) = 2t^2 + t$, где t – время (в секундах), $s(t)$ – отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите среднюю скорость движения точки с момента t_1=0 с до момента:

а) t_2=0,6 с (Пример);

б) t_2=0,2 с (А/з);

в) t_2=0,5 с.

40.4. Закон движения точки по прямой задается формулой $s = s(t)$, где t – время (в секундах), $s(t)$ – отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите мгновенную скорость движения точки, если:

а) $s(t) = 4t + 1$ (Пример);

б) $s(t) = t^2 - t$ (А/з);

в) $s(t) = 3t + 2$.

Определение производной (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

40.1.а) $S(t) = 2t + 1,\ t_1 = 2\ c,\ t_2 = 3\ c.$

$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{2t_2 + 1 - (2t_1 + 1)}{t_2 - t_1} = \frac{2t_2 + 1 - 2t_1 - 1}{t_2 - t_1} = \frac{2 \cdot 3 + 1 - 2 \cdot 2 - 1}{3 - 2} = \frac{6 - 4}{1} = 2$ (м/с).

40.2.а) $S(t) = t^2,\ t_1 = 0\ c,\ t_2 = 0{,}1\ c.$

$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}1^2 - 0^2}{0{,}1 - 0} = \frac{0{,}01 - 0}{0{,}1} = 0{,}1$ (м/с).

40.3.а) $S(t) = 2t^2 + t,\ t_1 = 0\ c,\ t_2 = 0{,}6\ c.$

$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{2t_2^2 + t_2 - (2t_1^2 + t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{2 \cdot 0{,}6^2 + 0{,}6 - (2 \cdot 0^2 + 0)}{0{,}6 - 0} = \frac{2 \cdot 0{,}36 + 0{,}6}{0{,}6} = \frac{0{,}72 + 0{,}6}{0{,}6} = \frac{1{,}32}{0{,}6} = 2{,}2$ (м/с).

40.4.а) $S(t) = 4t + 1.$

$V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{4(t + \Delta t) + 1 - (4t + 1)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{4t + 4\Delta t + 1 - 4t - 1}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{4\Delta t}{\Delta t} = 4$ (м/с).

Аудиторные задания (А/з): № 40.1 (б), № 40.2 (б), № 40.3 (б), № 40.4 (б).

Домашние задания (Д/з): № 40.1 (в), № 40.2 (в), № 40.3 (в), № 40.4 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$S(t) = at + b.$

$V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{a(t + \Delta t) + b - (at + b)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{at + a\Delta t + b - at - b}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{a\Delta t}{\Delta t} = a.$

$S(t) = at^2 + bt + c.$

$V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{a(t + \Delta t)^2 + b(t + \Delta t) + c - (at^2 + bt + c)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{a(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2) + bt + b\Delta t + c - at^2 - bt - c}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{at^2 + 2at\Delta t + a(\Delta t)^2 + bt + b\Delta t + c - at^2 - bt - c}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{2at\Delta t + a(\Delta t)^2 + bt + b\Delta t}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} (2at + a\Delta t + b) = 2at + b.$

6.5 Вычисление производных

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 41.

Найдите производную функции:

41.1.

а) $y = 7x + 4$ (Пример); б) $y = x^2$ (А/з); в) $y = -6x + 1$ (Д/з).

41.2.

а) $y = x^5$ (Пример); б) $y = x^{10}$ (А/з); в) $y = x^4$ (Д/з).

41.3.

а) $y = \sin x$ (Пример); б) $y = \sqrt{x}$ (А/з); в) $y = \cos x$ (Д/з).

41.4.

а) $y = tgx$ (Пример); б) $y = ctgx$ (А/з); в) $y = tgx + 4$ (Д/з).

Вычисление производных (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

41.1.а) $y = 7x + 4,\ y' = 7.$

41.2.а) $y = x^5,\ y' = 5x^4.$

41.3.а) $y = sinx,\ y' = cosx.$

41.4.а) $y = tgx,\ y' = \frac{1}{cos^2x}.$

Аудиторные задания (А/з): № 41.1 (б), № 41.2 (б), № 41.3 (б), № 41.4 (б).

Домашние задания (Д/з): № 41.1 (в), № 41.2 (в), № 41.3 (в), № 41.4 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, где n – любой показатель.

$(kx + m)' = k,$

$(cosx)' = -sinx,$

$(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2x},$

$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x),$

$C' = 0$, где C – константа.

$(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$,

$(sinx)' = cosx$.

6.6 Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование обратной функции

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 42.

Найдите производную функции:

42.1.

а) $y = (4x - 9)^7$ (Пример);

б) $y = \left(12 - \frac{x}{5}\right)^6$ (А/з);

в) $y = \left(\frac{x}{3} + 2\right)^{12}$ (Д/з).

42.2.

а) $y = \sin(3x - 9)$ (Пример);

б) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$ (А/з);

в) $y = \sin(5 - 3x)$ (Д/з).

42.3.

а) $y = tg\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$ (Пример);

б) $y = \sqrt{50 + 0{,}2x}$ (А/з);

в) $y = ctg\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right)$ (Д/з).

42.4.

а) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ (Пример);

б) $y = 2\sin x \cdot \cos x$ (А/з);

в) $y = 1 - 2\sin^2 3x$ (Д/з).

Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование обратной функции (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

42.1.а) $y = (4x - 9)^7$;

$y' = 7 \cdot (4x - 9)^6 \cdot (4x - 9)' = 7 \cdot (4x - 9)^6 \cdot 4 = 28 \cdot (4x - 9)^6$.

42.2.а) $y = sin(3x - 9)$;

$y' = cos(3x - 9) \cdot (3x - 9)' = cos(3x - 9) \cdot 3 = 3cos(3x - 9)$.

42.3.а) $y = tg\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$;

$y' = \frac{1}{cos^2\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \left(5x - \frac{\pi}{4}\right)' = \frac{1}{cos^2\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot 5 = \frac{5}{cos^2\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)}$.

42.4.а) $y = cos^2 x - sin^2 x$;

$y' = 2cosx \cdot (cosx)' - 2sinx \cdot (sinx)' = 2cosx \cdot (-sinx) - 2sinx \cdot cosx = -4sinxcosx = -2sin2x$.

Аудиторные задания (А/з): № 42.1 (б), № 42.2 (б), № 42.3 (б), № 42.4 (б).

Домашние задания (Д/з): № 42.1 (в), № 42.2 (в), № 42.3 (в), № 42.4 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$; $g(x)$ – промежуточный аргумент; x – независимая переменная.

$[(ax + b)^n]' = n \cdot (ax + b)^{n-1} \cdot (ax + b)' = a \cdot n \cdot (ax + b)^{n-1}$;

$[cos(ax + b)]' = -sin(ax + b) \cdot (ax + b)' = -a \cdot sin(ax + b)$;

$[sin(ax + b)]' = cos(ax + b) \cdot (ax + b)' = a \cdot cos(ax + b)$;

$\left[\sqrt{ax + b}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{ax+b}} \cdot (ax + b)' = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$;

$[ctg(ax + b)]' = -\frac{1}{sin^2(ax+b)} \cdot (ax + b)' = - - \frac{a}{sin^2(ax+b)}$;

$2sinx \cdot cosx = sin2x$; $\qquad$ $2sin(kx) \cdot cos(kx) = sin(2kx)$;

$[sin(kx)]' = k \cdot cos(kx)$;

$[m \cdot sin^n(kx)]' = m \cdot n \cdot sin^{n-1}(kx) \cdot \left(sin(kx)\right)' \cdot (kx)' = m \cdot n \cdot sin^{n-1}(kx) \cdot cos(kx) \cdot k = m \cdot n \cdot k \cdot sin^{n-1}(kx) \cdot cos(kx)$.

6.7 Уравнение касательной к графику функции

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 43.

Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:

43.4.

а) $f(x) = \sqrt{x-7},\ a = 8$ (Пример);

б) $f(x) = \sqrt{4-5x},\ a = 0$ (А/з);

в) $f(x) = \sqrt{10+x},\ a = -5$ (Д/з).

43.5.

а) $f(x) = \sin x,\ a = 0$ (Пример);

б) $f(x) = tg 2x,\ a = \frac{\pi}{8}$ (А/з);

в) $f(x) = \cos 3x,\ a = \frac{\pi}{2}$ (Д/з).

43.6.

а) $f(x) = \sqrt{tgx},\ a = \frac{\pi}{4}$ (Пример);

б) $f(x) = \cos^2 x,\ a = \frac{\pi}{12}$ (А/з);

в) $f(x) = ctg^4 x,\ a = \frac{\pi}{4}$ (Д/з).

Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

43.7.

а) $f(x) = (x-2)\cdot(x^2+2x+4),\ x_0 = 3$ (Пример);

б) $f(x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$ (А/з);

в) $f(x) = (2x+1)\cdot(4x^2-2x+1),\ x_0 = -\frac{1}{2}$ (Д/з).

Уравнение касательной к графику функции (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

43.4.а) $f(x) = \sqrt{x-7}, a = 8;$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-7}};$ $f'(a) = f'(8) = \frac{1}{2\sqrt{8-7}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$

43.5.а) $f(x) = sinx, a = 0;$

$f'(x) = cosx;$ $f'(a) = f'(0) = cos0 = 1.$

43.6.а) $f(x) = \sqrt{tgx}, a = \frac{\pi}{4};$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{tgx}} \cdot \frac{1}{cos^2 x};$ $f'(a) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{tg\frac{\pi}{4}}} \cdot \frac{1}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{4}} = \frac{4}{4} = 1.$

43.7.а) $f(x) = (x-2)(x^2+2x+4), x_0 = 3;$

$f'(x) = x^2 + 2x + 4 + (x-2)(2x+2) = x^2 + 2x + 4 + 2x^2 + 2x - 4x - 4 = 3x^2; f'(x_0) = f'(3) = 3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 9 = 27.$

Аудиторные задания (А/з): № 43.4 (б), № 43.5 (б), № 43.6 (б), № 43.7 (б).

Домашние задания (Д/з): № 43.4 (в), № 43.5 (в), № 43.6 (в), № 43.7 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$f(x) = \sqrt{dx+b};$ $f'(x) = \frac{d}{2\sqrt{dx+b}};$ $f'(a) = \frac{d}{2\sqrt{d \cdot a + b}}.$

$f(x) = tg(kx);$ $f'(x) = \frac{k}{cos^2(kx)};$ $f'(a) = \frac{k}{cos^2(ka)}.$

$f(x) = cos(kx);$ $f'(x) = -ksin(kx);$ $f'(a) = -ksin(ka).$

$f(x) = cos^n(x);$ $f'(x) = n \cdot cos^{n-1}(x) \cdot (-sinx) = -n \cdot cos^{n-1}(x) \cdot sinx.$

$f(x) = ctg^n(x);$ $f'(x) = n \cdot ctg^{n-1}(x) \cdot \left(-\frac{1}{sin^2 x}\right) = -\frac{n \cdot ctg^{n-1}(x)}{sin^2 x}.$

$cos^2(kx) - sin^2(kx) = cos(2kx);$ $2 \cdot sin(kx) \cdot cos(kx) = sin(2kx).$

$f(x) = cos(2kx);$ $f'(x) = -2ksin(2kx);$ $f'(a) = -2ksin(2ka).$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$

$(ax+b)' = a$;

$(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$.

6.8 Применение производной для исследования функций

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 44.

Определите промежутки монотонности функции:

44.20.

а) $y = x^3 + 2x$ (Пример);

б) $y = 60 + 45x - 3x^2 - x^3$ (А/з);

в) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$ (Д/з).

44.21.

а) $y = \dfrac{3x-1}{3x+1}$ (Пример); б) $y = \dfrac{1-2x}{3+2x}$ (А/з).

44.22.

а) $y = \sqrt{3x-1}$ (Пример); б) $y = \sqrt{1-x} + 2x$ (А/з);

в) $y = \sqrt{1-2x}$ (Д/з); г) $y = \sqrt{2x-1} - x$ (Д/з).

44.23.

а) $y = \dfrac{x^2}{x^2+2}$ (Пример); б) $y = -\dfrac{3x^2}{x^2+4}$ (А/з).

44.25.

а) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$ (Пример); б) $y = \sqrt{5x - 2 - 2x^2}$ (Д/з).

Применение производной для исследования функций (Примеры, А/з, Д/з)

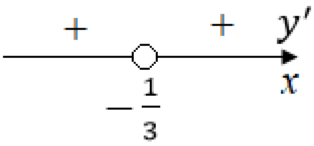
Примеры:

44.20.а) $y = x^3 + 2x$;

$y' = 3x^2 + 2$; $y' > 0 \Rightarrow$ функция возрастает на R.

44.21.а) $y = \frac{3x-1}{3x+1}$;

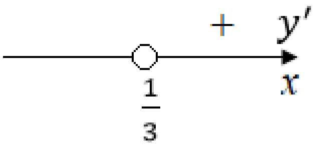
$y' = \frac{3(3x+1)-3(3x-1)}{(3x+1)^2} = \frac{9x+3-9x+3}{(3x+1)^2} = \frac{6}{(3x+1)^2};$ $\quad y' > 0;$ $\quad \nexists\, y'$ в $x = -\frac{1}{3};$



Функция возрастает на $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

44.22.а) $y = \sqrt{3x-1};$

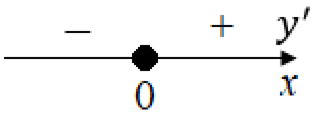
$y' = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}};$ $\quad y' > 0;$ $\quad \nexists\, y'$ при $\quad 3x - 1 \le 0,$ $\quad$ т.е. $x \le \frac{1}{3};$



Функция возрастает на $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

44.23.а) $y = \frac{x^2}{x^2+2};$

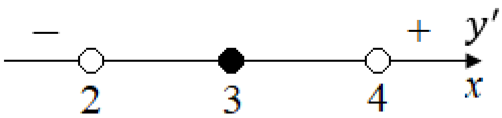
$y' = \frac{2x(x^2+2)-2x\cdot x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^3+4x-2x^3}{(x^2+2)^2} = \frac{4x}{(x^2+2)^2};$ $\quad y' = 0;$ $\quad x = 0;$



Функция убывает на $(-\infty; 0]$; возрастает на $[0; +\infty)$.

44.25.а) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8};$

$y' = \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+8}} = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+8}};$ $\quad y' = 0;$ $\quad x = 3;$ $\quad \nexists\, y'$ при $\quad x^2 - 6x + 8 \le 0,$ $(x-2)(x-4) \le 0;$ $\quad x \in [2; 4];$



Функция убывает на $(-\infty; 2)$; возрастает на $(4; +\infty)$.

Аудиторные задания (А/з): № 44.20 (б), № 44.21 (б), № 44.22 (б), № 44.23 (б).

Домашние задания (Д/з): № 44.20 (в), № 44.22 (в, г), № 44.25 (б).

А/з, Д/з (подготовка):

$y' \ge 0$ – функция возрастает;

$y' \le 0$ – функция убывает.

6.9 Построение графиков функций

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 45.

Исследуйте функцию и постройте ее график:

45.1.

а) $y = \frac{1}{x^2+1}$ (Пример); б) $y = \frac{-2}{x^2+4}$ (А/з).

45.2.

а) $y = \frac{-1}{x^2+4x+4}$ (Пример); б) $y = \frac{1}{x^2+2x+1}$ (А/з).

45.3.

а) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ (Пример); б) $y = \frac{x^2+4}{x}$ (Д/з).

45.4.

а) $y = \frac{2x+1}{x^2+2}$ (Пример); б) $y = \frac{x-2}{x^2+5}$ (Д/з).

Построение графиков функций (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

45.1.а) $y = \frac{1}{x^2+1}$;

1) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2) $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x) \Rightarrow$ функция четная.

3) Вертикальных асимптот нет. Найдем горизонтальные асимптоты

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$;

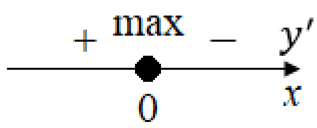
$y = 0$ – горизонтальная асимптота;

4) Найдем стационарные и критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции

$y' = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = -\frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет.

$y' = 0 \qquad x = 0$ – стационарная точка;



$x = 0$ – точка максимума функции;

$y_{max} = f(0) = \frac{1}{0^2+1} = 1.$

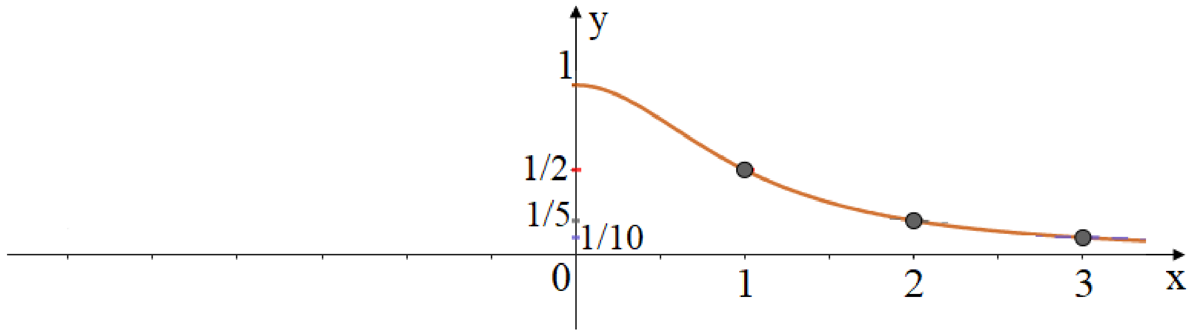
На $(-\infty; 0]$ функция возрастает, на $[0; +\infty)$ функция убывает.

5) Функция четная, график симметричен относительно оси Оу.

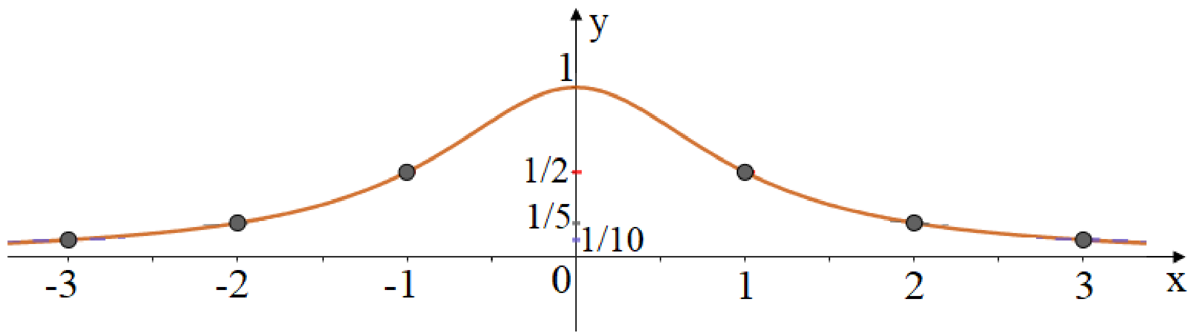
Составим таблицу значений функции $y = \frac{1}{x^2+1}$ при $x \geq 0$.

x	0	1	2	3
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

6) График функции при $x \geq 0$.



6) График функции



45.2.а) $y = \frac{-1}{x^2+4x+4} = \frac{-1}{(x+2)^2}$;

1) $f(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$; $\qquad x \neq -2; \qquad D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty).$

2) $f(-x) = \frac{-1}{(-x+2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2};$ $\begin{matrix} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{matrix}$ $\Rightarrow$ функция не является ни четной, ни нечетной.

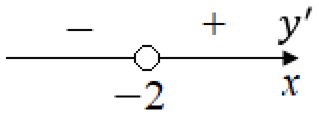
3) $x = -2$ – вертикальная асимптота. Найдем горизонтальные асимптоты:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-1}{(x+2)^2} = 0;$ $\qquad y = 0$ – горизонтальная асимптота.

4) Найдем стационарные и критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции

$y' = \left(\frac{-1}{(x+2)^2}\right)' = \frac{2}{(x+2)^3};$ $\qquad \nexists y'\ x = -2$ – критическая точка.

Стационарных точек нет, $\Rightarrow$ точек экстремума нет.

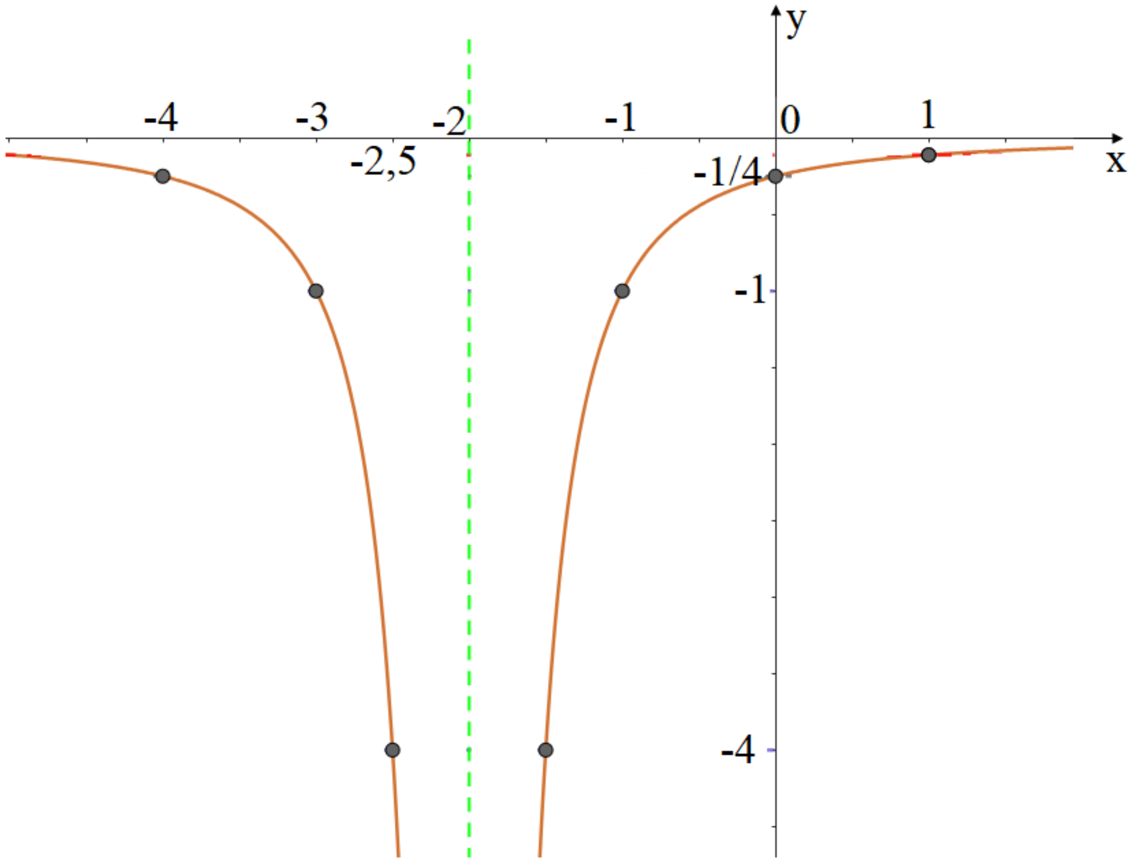


На $(-\infty; -2)$ функция убывает, на $(-2; +\infty)$ функция возрастает.

5) Составим таблицу значений функции $y = \frac{-1}{(x+2)^2}$.

x	-4	-3	-1	0	1	$-2{,}5$
y	$-\frac{1}{4}$	-1	-1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{9}$	-4

6) График функции



45.3.а) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{x^2+4}{2x}$;

1) $f(x) = \frac{x^2+4}{2x}$; $x \neq 0$; $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) $f(-x) = \frac{x^2+4}{2(-x)} = -\frac{x^2+4}{2x} = -f(x) \Rightarrow$ функция нечетная.

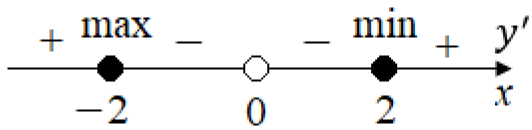
3) $x = 0$ – вертикальная асимптота. Найдем горизонтальные асимптоты:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+4}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\frac{4}{x}}{2} = \infty \Rightarrow$ горизонтальных асимптот нет.

4) Найдем стационарные и критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции

$y' = \left(\frac{x^2+4}{2x}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(x + \frac{4}{x}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{4}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-4}{x^2}$; $\nexists y'\ x = 0$ – критическая точка.

$y' = 0\ \ x^2 - 4 = 0,\ x = \pm 2$ – стационарные точки.



$x = -2$ – точка максимума функции; $y_{max} = f(-2) = \frac{(-2)^2+4}{2\cdot(-2)} = \frac{8}{-4} = -2.$

$x = 2$ – точка минимума функции; $y_{min} = f(2) = \frac{2^2+4}{2\cdot 2} = \frac{8}{4} = 2.$

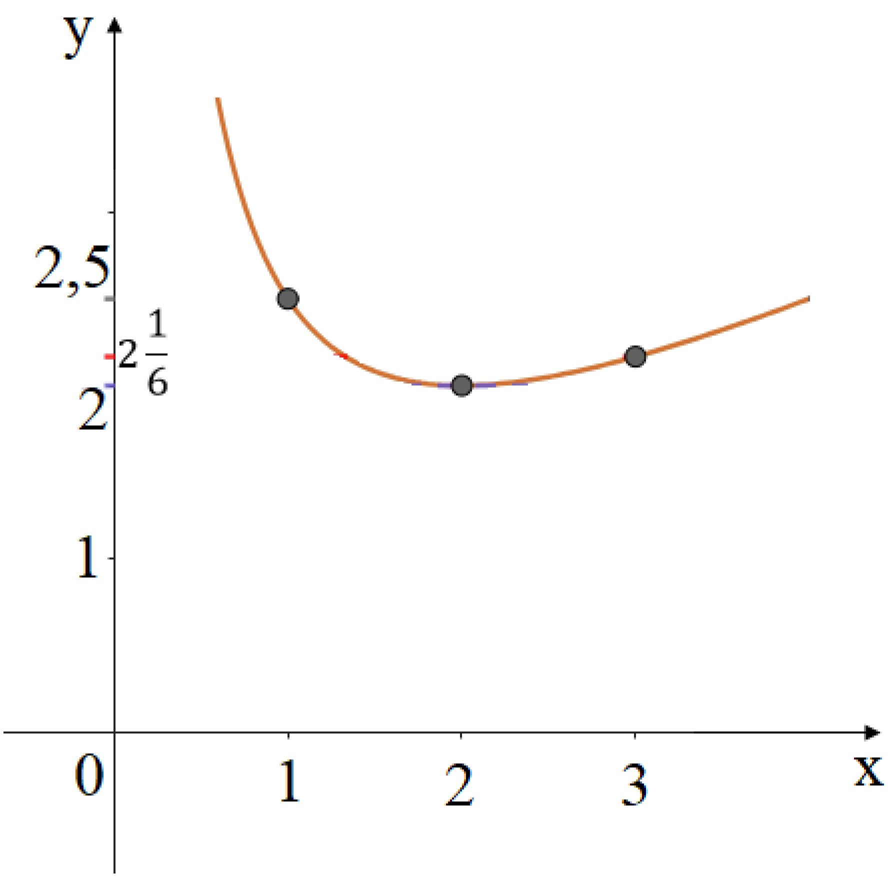
На $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ функция возрастает; на $[-2; 0) \cup (0; 2]$ функция убывает.

5) Функция нечетная, график симметричен относительно начала координат.

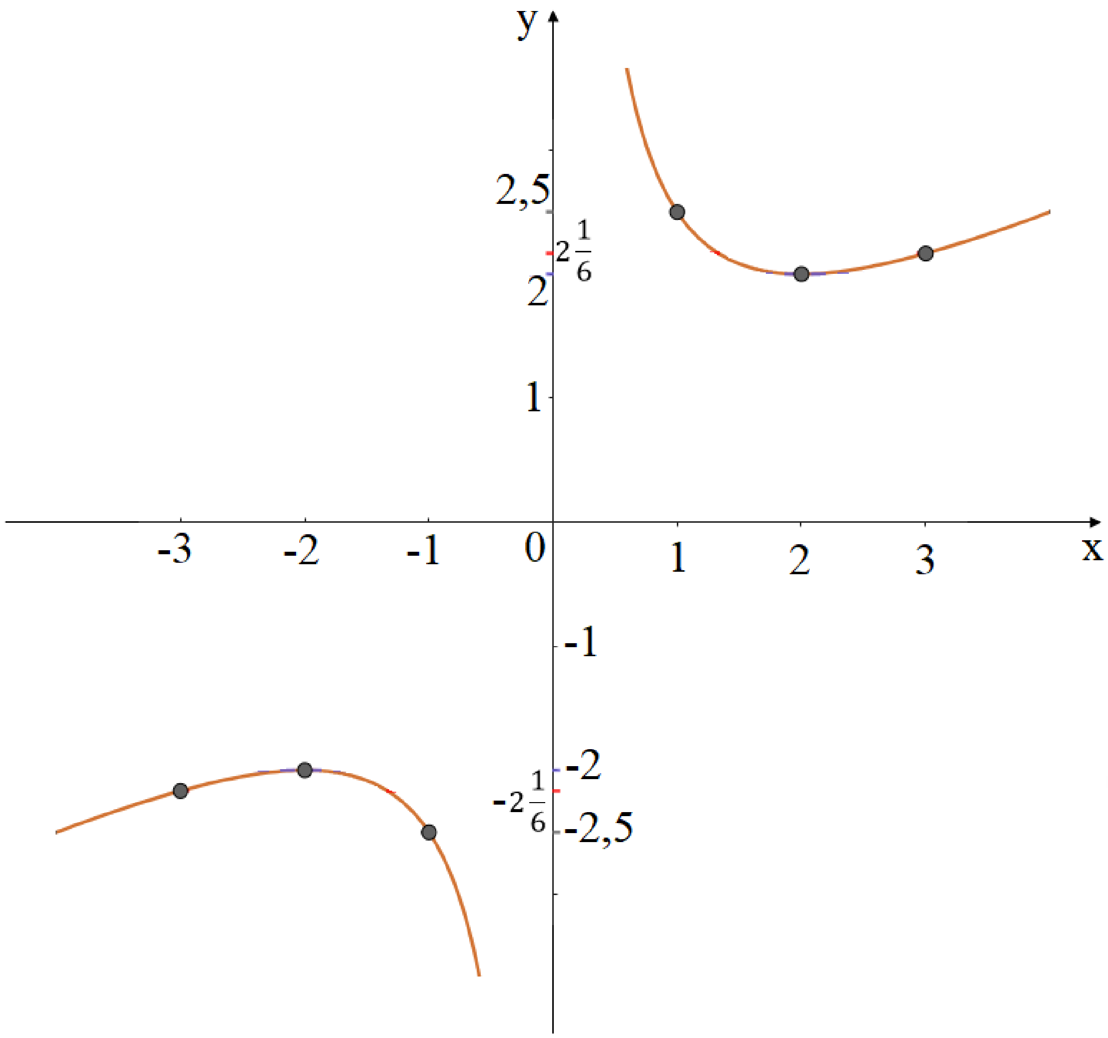
Составим таблицу значений функции $y = \frac{x^2+4}{2x}$ при $x > 0$.

x	1	2	3
y	2,5	2	$2\frac{1}{6}$

6) График функции при $x > 0$.



6) График функции



45.4.а) $y = \frac{2x+1}{x^2+2}$;

1) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$; $\qquad D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2) $f(-x) = \frac{2(-x)+1}{(-x)^2+2} = \frac{-2x+1}{x^2+2} = -\frac{2x-1}{x^2+2}$; $\begin{matrix} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{matrix} \Rightarrow$ функция не является ни четной, ни нечетной.

3) Вертикальных асимптот нет. Найдем горизонтальные асимптоты:

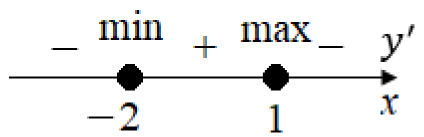
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{x+\frac{2}{x}} = 0$; $\quad y = 0$ – горизонтальная асимптота.

4) Найдем стационарные и критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции

$$y' = \left(\frac{2x+1}{x^2+2}\right)' = \frac{2(x^2+2)-2x(2x+1)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2)^2} = -\frac{2(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2} = - -$$
$$\frac{2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}.$$

Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет.

$y' = 0$ $\;x = -2,\; x = 1$ – стационарные точки.



$x = -2$ – точка минимума функции; $\qquad y_{min} = f(-2) = \frac{2(-2)+1}{(-2)^2+2} =$
$\frac{-4+1}{4+2} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}.$

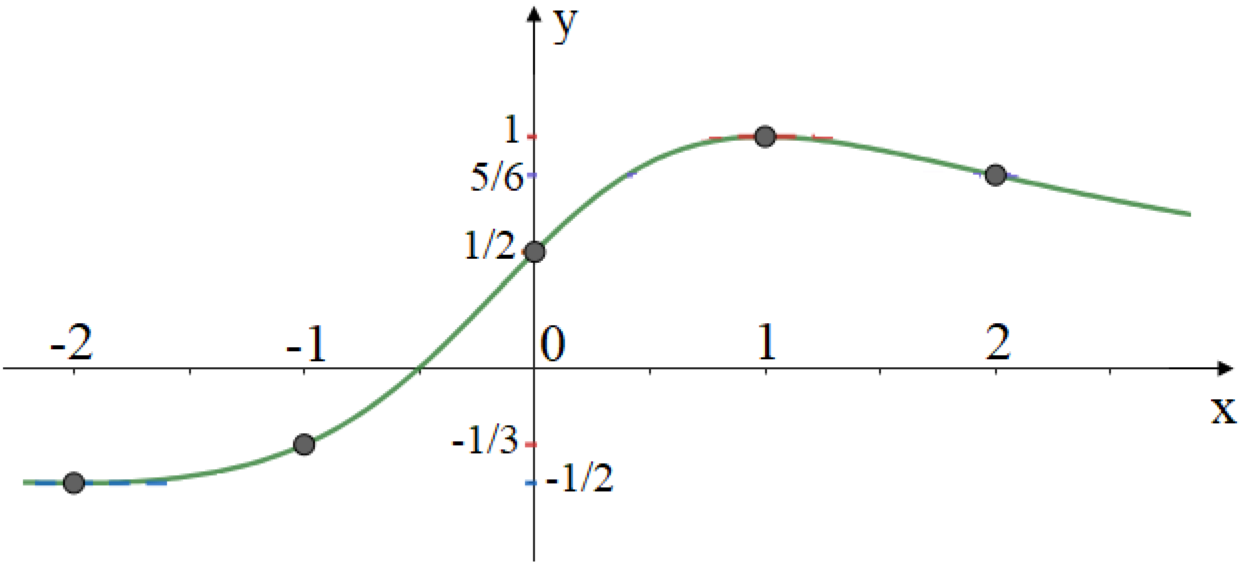
$x = 1$ – точка максимума функции; $\qquad y_{max} = f(1) = \frac{2 \cdot 1+1}{1^2+2} = \frac{3}{3} = 1.$

На $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$ функция убывает; на $[-2; 1]$ функция возрастает.

5) Составим таблицу значений функции $y = \frac{2x+1}{x^2+2}$.

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{6}$

6) График функции



<u>Аудиторные задания (А/з)</u>: № 45.1 (б), № 45.2 (б).

<u>Домашние задания (Д/з)</u>: № 45.3 (б), № 45.4 (б).

6.10 Применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений величин

Используемые источники – Алгебра 10 класс [8, 9], § 46.

46.9. Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном отрезке:

а) $y = x^2 - 8x + 19$, $[-1; 5]$ (Пример);

б) $y = x^2 + 4x - 3$, $[0; 2]$ (А/з);

в) $y = 2x^2 - 8x + 6$, $[-1; 4]$ (Д/з).

46.10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ на отрезке:

а) $[-1; 3]$ (Пример); б) $[3; 6]$ (А/з); в) $[-2; 3]$ (Д/з).

46.11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + 3x^2 - 45x - 2$ на отрезке:

а) $[-6;\,0]$ (Пример); б) $[1;\,2]$ (А/з); в) $[-6;\,-1]$ (Д/з).

46.12. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ на отрезке:

а) $[0;\,2]$ (Пример); б) $[3;\,6]$ (А/з); в) $[-1;\,3]$ (Д/з).

Применение производной для исследования функций (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

46.9.а) $y = x^2 - 8x + 19,\ [-1;5]$;

$y' = 2x - 8;\quad y' = 0;\quad 2x - 8 = 0;\quad x = 4 \in [-1;5]$;

$y(-1) = (-1)^2 - 8\cdot(-1) + 19 = 1 + 8 + 19 = 28$;

$y(4) = 4^2 - 8\cdot 4 + 19 = 16 - 32 + 19 = 3$;

$y(5) = 5^2 - 8\cdot 5 + 19 = 25 - 40 + 19 = 4$;

$y(-1) = 28$ – наибольшее значение; $y(4) = 3$ – наименьшее значение.

46.10.а) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1,\ [-1;3]$;

$y' = 3x^2 - 18x + 24;\quad y' = 0;\ 3x^2 - 18x + 24 = 0;\ x^2 - 6x + 8 = 0$;

$x_1 = 2;\ x_2 = 4;\quad x_1 = 2 \in [-1;3];\ x_2 = 4 \notin [-1;3] \Rightarrow x = 2$;

$y(-1) = (-1)^3 - 9\cdot(-1)^2 + 24\cdot(-1) - 1 = -1 - 9 - 24 - 1 = -35$;

$y(2) = 2^3 - 9\cdot 2^2 + 24\cdot 2 - 1 = 8 - 9\cdot 4 + 24\cdot 2 - 1 = 8 - 36 + 48 - 1 = 19$;

$y(3) = 3^3 - 9\cdot 3^2 + 24\cdot 3 - 1 = 27 - 9\cdot 9 + 24\cdot 3 - 1 = 27 - 81 + 72 - 1 = 17$;

$y(2) = 19$ – наибольшее значение; $y(-1) = -35$ – наименьшее значение.

46.11.а) $y = x^3 + 3x^2 - 45x - 2,\ [-6;0]$;

$y' = 3x^2 + 6x - 45;\quad y' = 0;\quad 3x^2 + 6x - 45 = 0;\quad x^2 + 2x - 15 = 0$;

$x_1 = -5;\ x_2 = 3;\ x_1 = -5 \in [-6;0];\ x_2 = 3 \notin [-6;0] \Rightarrow x = -5$;

$y(-6) = (-6)^3 + 3 \cdot (-6)^2 - 45 \cdot (-6) - 2 = -216 + 3 \cdot 36 + 45 \cdot 6 - 2 = -216 + 108 + 270 - 2 = 160;$

$y(-5) = (-5)^3 + 3 \cdot (-5)^2 - 45 \cdot (-5) - 2 = -125 + 3 \cdot 25 + 45 \cdot 5 - 2 = -125 + 75 + 225 - 2 = 173;$

$y(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 45 \cdot 0 - 2 = -2;$

$y(-5) = 173$ – наибольшее значение; $y(0) = -2$ – наименьшее значение.

46.12.а) $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3,\ [0; 2];$

$y' = 3x^2 - 18x + 15;\quad y' = 0;\ 3x^2 - 18x + 15 = 0; x^2 - 6x + 5 = 0;$

$x_1 = 1;\ x_2 = 5;\quad x_1 = 1 \in [0; 2];\ x_2 = 5 \notin [0; 2] \Rightarrow x = 1;$

$y(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 - 3 = -3;$

$y(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 - 3 = 1 - 9 + 15 - 3 = 4;$

$y(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 - 3 = 8 - 9 \cdot 4 + 15 \cdot 2 - 3 = 8 - 36 + 30 - 3 = -1;$

$y(1) = 4$ – наибольшее значение; $y(0) = -3$ – наименьшее значение.

Аудиторные задания (А/з): № 46.9 (б), № 46.10 (б), № 46.11 (б), № 46.12 (б).

Домашние задания (Д/з): № 46.9 (в), № 46.10 (в), № 46.11 (в), № 46.12 (в).

6.11 Контрольная работа «Производная функции, ее применение»

Контрольная работа «Производная функции, ее применение» (Подготовка)

Правила дифференцирования

1. $C' = 0,\ C$ – постоянная.

2. $(x)' = 1.$

3. $(u + v - \omega)' = u' + v' - \omega'.$

4. $(uv)' = u'v + v'u.$

5. $(Cu)' = Cu',\ C$ – постоянная.

6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$.

7. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Формулы дифференцирования

1. $(lnx)' = \frac{1}{x}$.

2. $(log_a x)' = \frac{1}{x \cdot lna}$.

3. $(x^n)' = nx^{n-1}$.

4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

5. $(a^x)' = a^x \cdot lna$.

6. $(e^x)' = e^x$.

7. $(sinx)' = cosx$.

8. $(cosx)' = -sinx$.

9. $(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$.

10. $(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2x}$.

11. $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. $(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.

14. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Контрольная работа «Производная функции, ее применение» (Подготовка)

1.Выписать первые шесть членов последовательности, общий член которой a_n имеет следующий вид:

1) $a_n = 2^n$; 2) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2.Вычислить пределы числовых последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+99}{n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n^2+1}$.

3.Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+3}{x^2-5}$.

4.Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

1) $y=\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{2}{x}+3$; 2) $y=\dfrac{5}{\sin x}+\dfrac{\ln x}{x^2}$.

5.Найти производные сложных функций:

1) $y=5\cdot\sqrt[5]{4x+3}$; 2) $y=\sqrt{1+4x-x^2}$.

6.Исследовать функцию на экстремум:

1) $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+3$; 2) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$.

1.

1) $a_n=2^n$; $a_1=2^1=2$; $a_2=2^2=4$; $a_3=2^3=8$; $a_4=2^4=16$; $a_5=2^5=32$; $a_6=2^6=64$;

2) $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$; $a_1=\frac{1(1+1)}{2}=1$; $a_2=\frac{2(2+1)}{2}=3$; $a_3=\frac{3(3+1)}{2}=6$; $a_4=\frac{4(4+1)}{2}=10$; $a_5=\frac{5(5+1)}{2}=15$; $a_6=\frac{6(6+1)}{2}=21$.

2.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+99}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{99}{n^2}\right)=0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2/n+1/n^2}{1+1/n^2}=1$.

3.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-1/x^2}{1+2/x^2}=1$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+3}{x^2-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2/x+3/x^2}{1-5/x^2}=\infty$.

4.

1) $y = \frac{x^2}{3} - \frac{2}{x} + 3;$ $\quad y' = \frac{2x}{3} + \frac{2}{x^2};$ $\quad$ 2) $y = \frac{5}{sinx} + \frac{lnx}{x^2};$ $\quad y' =$
$-\frac{5cosx}{sin^2x} + \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2xlnx}{x^4} = -\frac{5cosx}{sin^2x} + \frac{x - 2xlnx}{x^4} = -\frac{5ctgx}{sinx} + \frac{1 - 2lnx}{x^3}.$

5.

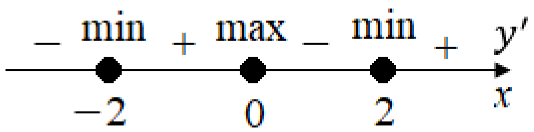
1) $y = 5 \cdot \sqrt[5]{4x+3};$ $\quad y' = 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot (4x+3)^{-\frac{4}{5}} \cdot 4 = \frac{4}{\sqrt[5]{(4x+3)^4}};$

2) $y = \sqrt{1 + 4x - x^2};$ $\quad y' = \frac{4-2x}{2\sqrt{1+4x-x^2}} = \frac{2-x}{\sqrt{1+4x-x^2}}.$

6.

1) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3;$ $\quad y' = x^3 - 4x;$ $\quad y' = 0;$ $\quad x^3 - 4x = 0;$

$x(x^2 - 4) = 0;$ $\quad x = 0,\ x = \pm 2;$ $\quad y' = x(x-2)(x+2);$



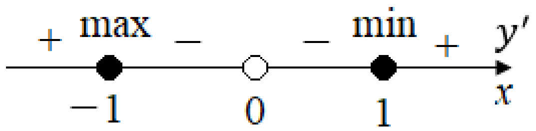
$x = -2$ – точка минимума; $\quad y(-2) = \frac{1}{4}(-2)^4 - 2(-2)^2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1;$

$x = 0$ – точка максимума; $\quad y(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 3 = 3;$

$x = 2$ – точка минимума; $\quad y(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1.$

2) $y = \frac{x^2+1}{x};$ $\quad y' = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2};$ $\quad y' = 0;$

$x = \pm 1;$ $\nexists y'$ $x = 0;$



$x = -1$ – точка максимума; $\quad y(-1) = \frac{(-1)^2+1}{-1} = -2;$

$x = 1$ – точка минимума; $\quad y(1) = \frac{1^2+1}{1} = 2.$

Контрольная работа «Производная функции, ее применение»

1.Выписать первые шесть членов последовательности, общий член которой a_n имеет следующий вид:

1) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (А/з); 2) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ (Д/з).

2.Найти пределы числовых последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3 - 10n^2 + 1}{100n^2 + 2n}$ (А/з); 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+2}$ (Д/з).

3.Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x + 3}{x^4 + 2x}$ (А/з); 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{4 - \frac{3}{x^2}}$ (Д/з).

4.Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

1) $y = \frac{3x^3}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{\sqrt{x^3}}{x}$ (А/з); 2) $y = \frac{x}{3 - \cos x} - \frac{x^3}{\sqrt{7}}$ (Д/з).

5.Найти производные сложных функций:

1) $y = \sqrt[4]{\left(x^2 - 1\right)^5}$ (А/з); 2) $y = \sqrt[3]{2x^3 + 1} + \sqrt[4]{3}$ (Д/з).

6.Исследовать функцию на экстремум:

1) $y = x^{\frac{2}{3}} - x$ (А/з); 2) $y = x\sqrt{2 - x^2}$ (Д/з).

6.12 Применение производной в профессиональных задачах

Используемый источник – [10].

Производная – одно из фундаментальных понятий математики, это основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке).

Архимед разработал способ проведения касательной, применимый для кривых.

Независимо друг от друга И. Ньютон и Г. Лейбниц разработали аппарат нахождения производной, которым мы и пользуемся в настоящее время.

Благодаря дифференциальному исчислению, был решен целый ряд задач теоретической механики, физики и астрономии.

Используя методы дифференциального исчисления, ученые предсказали возвращение кометы Галлея, что было большим триумфом науки XVIII в.

Основные понятия дифференциального исчисления долгое время не были должным образом обоснованы.

В начале XIX в. французский математик О. Коши дал строгое построение дифференциального исчисления на основе понятия предела.

В наши дни производная играет одну из самых главных ролей в науке и технике: с помощью дифференциального исчисления находят решение большинства задач в различных областях научного знания.

Производная показывает скорость изменения функции, или какого-либо процесса, величины как по времени, так и по другим параметрам.

Так как в практических приложениях обычно интересует не только сама функция, но и скорость ее изменения, то производная, будучи характеристикой скорости изменения функции, имеет самые широкие практические применения в вопросах физики, химии, геометрии и т.д.

Сила тока есть производная количества электричества по времени.

При изучении механического смысла производной пользуемся механическим истолкованием производной: скорость движения материальной точки в данный момент времени равна производной пути по времени.

Задача «Применение производной в профессиональных задачах» (Подготовка)

Задача. Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента времени $t = 0$, задается формулой $Q = 3t^2 - 3t + 4$. Определить силу тока в конце 6-й секунды.

Решение:

$I(6) = Q'(6) = (6t - 3)|_{t=6} = 6 \cdot 6 - 3 = 33$ (А).

Тест «Применение производной в профессиональных задачах»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Производная – одно из _______________ понятий математики, это основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке).

а) фундаментальных; б) не фундаментальных; в) прикладных; г) не прикладных.

2.Архимед разработал способ проведения __________, применимый для кривых.

а) не касательной; б) касательной; в) секущей; г) не секущей.

3.Независимо друг от друга И. Ньютон и Г. Лейбниц разработали аппарат нахождения ____________, которым мы и пользуемся в настоящее время.

а) не производной; б) интеграла; в) производной; г) не интеграла.

4.Благодаря ________________ исчислению, был решен целый ряд задач теоретической механики, физики и астрономии.

а) не дифференциальному; б) интегральному; в) не интегральному; г) дифференциальному.

5.Используя методы __________________ исчисления, ученые предсказали возвращение кометы Галлея, что было большим триумфом науки XVIII в.

а) дифференциального; б) интегрального; в) не интегрального; г) не дифференциального.

6.Основные понятия ________ исчисления долгое время не были должным образом обоснованы.

а) интегрального; б) дифференциального; в) не интегрального; г) не дифференциального.

7.В начале XIX в. французский математик О. Коши дал строгое построение _________________ исчисления на основе понятия предела.

а) интегрального; б) не интегрального; в) дифференциального; г) не дифференциального.

8.В наши дни производная играет одну из самых главных ролей в науке и технике: с помощью ___________ исчисления находят решение большинства задач в различных областях научного знания.

а) интегрального; б) не интегрального; в) не дифференциального; г) дифференциального.

9.____________ показывает скорость изменения функции, или какого-либо процесса, величины как по времени, так и по другим параметрам.

а) производная; б) не производная; в) не интеграл; г) интеграл.

10.Так как в практических приложениях обычно интересует не только сама функция, но и скорость ее изменения, то ____________, будучи характеристикой скорости изменения функции, имеет самые широкие практические применения в вопросах физики, химии, геометрии и т.д.

а) не производная; б) производная; в) не интеграл; г) интеграл.

11.Сила тока есть ______________ количества электричества по времени.

а) не производная; б) не интеграл; в) производная; г) интеграл.

12.При изучении механического смысла ____________ пользуемся механическим истолкованием производной: скорость движения материальной точки в данный момент времени равна производной пути по времени.

а) не производной; б) не интеграла; в) интеграла; г) производной.

Задача «Применение производной в профессиональных задачах»

13.Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента времени $t=0$, задается формулой $Q=4t^2-5t+6$. Определить силу тока в конце 10-й секунды.

РАЗДЕЛ 7. МНОГОГРАННИКИ И ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

7.1 Сфера и шар. Симметрия сферы и шара

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 16, 17.

Тест «Сфера и шар»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Сферой называется фигура, состоящая из _______ точек пространства, удаленных от данной точки на одно и то же (положительное) расстояние.

а) трех; б) пяти; в) нескольких; г) всех.

2.Шаром называется фигура, образованная _______ точками пространства, находящимися от данной точки на расстоянии, не большем данного (положительного) расстояния.

а) двумя; б) тремя; в) всеми; г) несколькими.

3.Диаметром сферы (и шара) называют как величину, равную ___________ радиусу, так и любой отрезок, по которому шар пересекает прямая, проходящая через его центр.

а) целому; б) удвоенному; в) единичному; г) половинному.

4.Если расстояние от центра шара до плоскости _________ радиуса шара, то шар и плоскость не имеют общих точек.

а) больше; б) не больше; в) меньше; г) не меньше.

5.Если расстояние от центра шара до плоскости _________ радиусу шара, то плоскость имеет с шаром и ограничивающей его сферой только одну общую точку.

а) не равно; б) равно; в) соответствует; г) не соответствует.

6.Если расстояние от центра шара до плоскости _________ радиуса шара, то пересечение шара с плоскостью представляет собой круг.

а) не больше; б) не меньше; в) меньше; г) больше.

7.Если плоскость проходит через точку на сфере и _____________ радиусу, проведенному в эту точку, то она касается сферы.

а) параллельна; б) не параллельна; в) не перпендикулярна; г) перпендикулярна.

8.Плоскость и сфера касаются в некоторой точке тогда и только тогда, когда плоскость _______________ радиусу, проведенному в эту точку.

а) перпендикулярна; б) не перпендикулярна; в) не параллельна; г) параллельна.

9.Каждые две большие окружности одной сферы пересекаются в _____ диаметрально противоположных точках.

а) трех; б) нескольких; в) некоторых; г) двух.

10.Ортогональная проекция шара, как и сферы, есть круг того же _________.

а) измерения; б) расстояния; в) радиуса; г) диаметра.

Тест «Симметрия сферы и шара»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Две фигуры называются симметричными относительно точки *O*, если они состоят из ___________ симметричных точек.

а) попарно; б) пяти; в) нескольких; г) всех.

2.Сфера симметрична относительно своего центра, т.е. центр сферы является ее центром ______________.

а) плоскости; б) поверхности; в) окружности; г) симметрии.

3.Точки *X* и *X'* называются симметричными относительно плоскости α, если отрезок *XX'* _______________ α и делится ею пополам.

а) параллелен; б) перпендикулярен; в) не перпендикулярен; г) не параллелен.

4.Две фигуры называются симметричными относительно плоскости α (или зеркально симметричными относительно α), если они состоят из _________ симметричных точек.

а) всех; б) нескольких; в) попарно; г) трех.

5.Сфера симметрична относительно _________ плоскости, проходящей через ее центр.

а) параллельной; б) единственной; в) главной; г) любой.

6.Меридианы получаются в сечении фигуры *F* ______________, ограниченными осью фигуры *F*.

а) поверхностями; б) плоскостями; в) полуплоскостями; г) полуповерхностями.

7.2 Цилиндр. Конус

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 18, 19.

Тест «Цилиндр»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Все образующие цилиндра равны друг другу как параллельные ___________ между параллельными плоскостями.

а) фигуры; б) отрезки; в) поверхности; г) лучи.

2.Все сечения цилиндра плоскостями, ________________ плоскостям его оснований (и лежащими между ними), равны друг другу (и равны основаниям цилиндра).

а) перпендикулярными; б) не перпендикулярными; в) параллельными; г) не параллельными.

3.Перпендикуляр, опущенный из _________ точки плоскости одного основания цилиндра на плоскость другого его основания, называется высотой цилиндра.

а) любой; б) одной; в) соответствующей; г) параллельной.

4.Цилиндр называется прямым, если его образующие ______________ плоскости основания.

а) параллельны; б) не параллельны; в) не перпендикулярны; г) перпендикулярны.

5.Образующие цилиндра вращения, исходящие из ______ окружности основания, образуют его боковую поверхность.

а) прямых; б) линий; в) точек; г) плоскостей.

6.Поверхностью цилиндра вращения называется ______________ его оснований и боковой поверхности.

а) пересечение; б) объединение; в) не пересечение; г) не объединение.

7.Цилиндр вращения симметричен относительно __________ плоскости, проходящей через его ось, а также относительно плоскости, делящей пополам его образующие.

а) любой; б) одной; в) соответствующей; г) главной.

Тест «Конус»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Если плоскость пересекает конус и _____________ его основанию, то сечение конуса такой плоскостью подобно основанию конуса.

а) перпендикулярна; б) параллельна; в) не перпендикулярна; г) не параллельна.

2.Конусом вращения называется конус, основание которого – _______ и вершина которого проектируется в центр основания.

а) круг; б) квадрат; в) прямоугольник; г) треугольник.

3.Осевые сечения конуса вращения – это его сечения ____________, проходящими через ось.

а) лучами; б) линиями; в) поверхностями; г) плоскостями.

4.Фигура, состоящая из _____ образующих конуса вращения, которые соединяют его вершину с окружностью основания, называется боковой поверхностью этого конуса.

а) трех; б) нескольких; в) тех; г) не тех.

5.Поверхностью конуса вращения называется ______________ его основания и его боковой поверхности.

а) объединение; б) пересечение; в) не объединение; г) не пересечение.

6.Усеченный конус получается, если от конуса отсечь __________ конус плоскостью, параллельной основанию.

а) больший; б) не больший; в) не меньший; г) меньший.

7.Высотой ____________ конуса называется перпендикуляр, опущенный из точки плоскости одного основания на плоскость другого.

а) прямого; б) усеченного; в) не прямого; г) не усеченного.

8.Усеченный конус вращения получается вращением прямоугольной трапеции вокруг ее _________ стороны, перпендикулярной основаниям, или равнобедренной трапеции вокруг оси симметрии.

а) центральной; б) не боковой; в) боковой; г) не центральной.

9.Боковая поверхность ___________ конуса вращения – это принадлежащая ему часть боковой поверхности конуса вращения, из которой он получен.

а) прямого; б) не прямого; в) усеченного; г) не усеченного.

10.Поверхность усеченного конуса вращения (или его полная поверхность) – это _____________ его оснований и его боковой поверхности.

а) объединение; б) пересечение; в) не объединение; г) не пересечение.

11.Каждое коническое сечение (кроме окружности) представляет собой _____________ место точек плоскости, отношение расстояний которых от некоторой точки, называемой фокусом, и некоторой прямой, называемой директрисой, постоянно.

а) геометрическое; б) алгебраическое; в) тригонометрическое; г) не геометрическое.

7.3 Геометрия окружности. Призма

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 20, 21.

Тест «Геометрия окружности»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Угол, вершина которого лежит внутри круга, измеряется ____________ двух его дуг, из которых одна заключена между сторонами угла, а другая – между продолжениями сторон угла.

а) полуразностью; б) полусуммой; в) разностью; г) суммой.

2.Угол, вершина которого лежит вне круга и стороны которого пересекают его окружность, измеряется ____________ двух дуг, заключенных между его сторонами.

а) полуразностью; б) полусуммой; в) разностью; г) суммой.

3.Угол между касательной к окружности и ее хордой, проведенной из точки касания, измеряется __________ дуги окружности, заключенной внутри угла.

а) не половиной; б) третью; в) четвертью; г) половиной.

4.__________ отрезка касательной, проведенной из некоторой точки вне окружности до точки касания, равен произведению отрезка секущей окружности на внешнюю часть этой секущей.

а) куб; б) удвоенный куб; в) квадрат; г) удвоенный квадрат.

5.Если ______________ вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180^0.

а) четырехугольник; б) треугольник; в) пятиугольник; г) шестиугольник.

6.Если сумма ______________ углов четырехугольника равна 180^0, то вокруг четырехугольника можно описать окружность.

а) параллельных; б) соответствующих; в) равных; г) противоположных.

7.Для того, чтобы четырехугольник можно было вписать в окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его _____________ углов была равна 180^0.

а) параллельных; б) соответствующих; в) противоположных; г) равных.

8.Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его _____________ сторон равны.

а) параллельных; б) противоположных; в) соответствующих; г) равных.

9.Если суммы _______________ сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

а) параллельных; б) соответствующих; в) противоположных; г) равных.

10.Для того, чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы его _______________ сторон были равны.

а) параллельных; б) противоположных; в) соответствующих; г) равных.

Тест «Призма»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Призмой называется цилиндр, основание которого – ___________.

а) круг; б) многоугольник; в) квадрат; г) ромб.

2.Объединение боковых граней призмы называется ее боковой ___________.

а) поверхностью; б) плоскостью; в) линией; г) фигурой.

3.___________ призмы является объединение оснований призмы и ее боковой поверхности.

а) фигурой; б) плоскостью; в) линией; г) поверхностью.

4. Высота призмы – это _______ перпендикуляр к плоскостям, на которых лежат основания призмы (или его длина).

а) единственный; б) целый; в) общий; г) главный.

5.Призма называется прямой, если ее боковые ребра _______________ плоскостям оснований.

а) не перпендикулярны; б) не параллельны; в) параллельны; г) перпендикулярны.

6.Перпендикулярным сечением призмы называется проекция ее основания на _______ плоскость, перпендикулярную боковым ребрам призмы.

а) любую; б) главную; в) единственную; г) соответствующую.

7.Все перпендикулярные сечения одной призмы _______ друг другу.

а) не соответствуют; б) соответствуют; в) равны; г) не равны.

8.Перпендикулярные сечения прямой призмы _______ ее основаниям.

а) не равны; б) равны; в) соответствуют; г) не соответствуют.

9.Правильной призмой называется прямая призма, основание которой – правильный __________.

а) многоугольник; б) круг; в) квадрат; г) ромб.

10.Параллелепипед – это призма, у которой все грани – _____________.

а) многоугольники; б) окружности; в) квадраты; г) параллелограммы.

11.Отрезок, соединяющий ____________ вершины параллелепипеда, называется диагональю параллелепипеда.

а) параллельные; б) не противоположные; в) противоположные; г) не параллельные.

12.Параллелепипед называется прямоугольным, если _____ его грани - прямоугольники.

а) две; б) все; в) три; г) четыре.

13.Куб – это прямоугольный параллелепипед, все ребра которого ______.

а) не параллельны; б) параллельны; в) не равны; г) равны.

14.____ диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

а) две; б) три; в) все; г) четыре.

15.Каждый параллелепипед имеет ______ симметрии – точку пересечения его диагоналей.

а) ядро; б) центр; в) область; г) поле.

7.4 Пирамида. Многогранники

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 22, 23.

Тест «Пирамида»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Пирамидой называется конус, основание которого – _______________.

а) треугольник; б) многоугольник; в) квадрат; г) ромб.

2.Боковая поверхность пирамиды состоит из ______ ее образующих, которые соединяют вершину с точками на границе основания.

а) двух; б) четырех; в) трех; г) всех.

3.Поверхность пирамиды состоит из основания пирамиды и ее ________ поверхности.

а) полной; б) не полной; в) боковой; г) не боковой.

4.Пирамида называется правильной, если ее основание – правильный _______________ и все ее боковые ребра равны.

а) многоугольник; б) треугольник; в) квадрат; г) ромб.

5.Все боковые грани правильной пирамиды – _________ равнобедренные треугольники с вершиной в вершине пирамиды.

а) разные; б) не разные; в) не равные; г) равные.

6.Пирамида является правильной тогда и только тогда, когда ее основание – правильный ______________, а вершина проектируется в центр основания.

а) треугольник; б) многоугольник; в) квадрат; г) ромб.

7.Правильную пирамиду можно определить, как такую пирамиду, у которой основание – правильный _____________ и вершина проектируется в его центр.

а) треугольник; б) квадрат; в) многоугольник; г) ромб.

Тест «Многогранники»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Граница (или поверхность) тела – это множество его граничных ______.

а) линий; б) точек; в) отрезков; г) прямых.

2.Точка называется _________ для данной фигуры, если сколь угодно близко от нее есть точки, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей.

а) начальной; б) конечной; в) граничной; г) главной.

3.Точка фигуры, не лежащая на ее границе, называется ____________ точкой фигуры.

а) внутренней; б) внешней; в) собственной; г) особой.

4.Множество внутренних ______ фигуры называется ее внутренностью.

а) линий; б) прямых; в) отрезков; г) точек.

5.Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из __________ числа многоугольников.

а) бесконечного; б) четного; в) конечного; г) нечетного.

6.Стороны граней многогранника называются ________ многогранника, их вершины – вершинами многогранника.

а) сторонами; б) ребрами; в) границами; г) измерениями.

7.Две грани многогранника, имеющие общее ребро, задают при этом ребре ___________ угол многогранника.

а) однореберный; б) общереберный; в) двуграничный; г) двугранный.

8.Многогранник называется выпуклым, если он лежит с одной стороны от плоскости любой своей грани, т.е. плоскость любой его грани является его ________ плоскостью.

а) опорной; б) главной; в) фундаментальной; г) центральной.

9.Многогранный поверхности – фигуры, составленные из многоугольников, которые прикладываются друг к другу ___________.

а) измерениями; б) ребрами; в) границами; г) сторонами.

10.Плоские углы, образующие многогранный угол, называются его гранями, а их стороны – его _______.

а) измерениями; б) ребрами; в) границами; г) сторонами.

11.Многогранные углы называются равными, если равны друг другу все их соответственные ___________.

а) измерения; б) ребра; в) элементы; г) границы.

12.Многогранный угол называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от плоскости каждой своей ____.

а) грани; б) границы; в) линии; г) области.

13.Выпуклый многогранный угол называется правильным, если равны друг другу все плоские углы его граней и равны друг другу все двугранные углы при его ______.

а) измерениях; б) ребрах; в) элементах; г) границах.

7.5 Правильные и полуправильные многогранники. Симметрия фигур

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 24.

Тест «Правильные и полуправильные многогранники. Симметрия фигур»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Правильным называется многогранник, у которого все элементы одного и того же вида равны, т.е. равны все ______, углы граней и двугранные углы.

а) измерения; б) ребра; в) области; г) границы.

2.Восьмигранник – многогранник, у которого грани – правильные треугольники, сходящиеся по четыре в каждой ________.

а) вершине; б) границе; в) области; г) точке.

3.Двадцатигранник – многогранник, у которого все грани – правильные ________, сходящиеся по пять в каждой вершине.

а) многоугольники; б) четырехугольники; в) треугольники; г) пятиугольники.

4.Двенадцатигранник – многогранник, у которого все грани – правильные ___________, сходящиеся по три в каждой вершине.

а) многоугольники; б) четырехугольники; в) треугольники; г) пятиугольники.

5.Говорят, что куб и октаэдр двойственны друг другу: ______ одного соответствуют вершины другого, и обратно.

а) граням; б) ребрам; в) измерениям; г) сторонам.

6.Центральной симметрией фигуры с центром *O* называется такое преобразование этой фигуры, которое сопоставляет каждой ее точке точку, ______________ относительно *O*.

а) главную; б) несимметричную; в) симметричную; г) центральную.

7.Отражением фигуры в плоскости α (или ___________ симметрией) называется такое преобразование, при котором каждой точке данной фигуры сопоставляется точка, симметричная ей относительно плоскости α.

а) плоскостной; б) зеркальной; в) отражающей; г) сопоставляющей.

8.Поворот задается осью, углом и направлением поворота в какой-либо плоскости, ______________ оси.

а) не перпендикулярной; б) не параллельной; в) параллельной; г) перпендикулярной.

9.Любой поворот вокруг оси фигуры вращения ______________ эту фигуру саму с собой.

а) самодополняет; б) самопересекает; в) самосовмещает; г) самополгощает.

10.Осевая симметрия в пространстве является __________ на 180^0 вокруг оси симметрии.

а) отражением; б) поворотом; в) движением; г) перемещением.

11.Поворот вокруг прямой является ___________.

а) движением; б) поворотом; в) отражением; г) перемещением.

12.Симметрией фигуры вообще называется свойство фигуры, состоящее в том, что существует ___________, совмещающее ее саму с собой.

а) перемещение; б) отображение; в) отражение; г) движение.

13.Если фигура _______________ в результате поворота вокруг оси, то эта ось называется ее осью поворотной симметрии.

а) самодополняется; б) самосовмещается; в) самопересекается; г) самополгощается.

14.Число поворотов вокруг оси, которыми фигура самосовмещается, называется ________ оси.

а) числом; б) уровнем; в) порядком; г) показателем.

15.Ось правильной n-угольной призмы является ее осью __________ симметрии порядка n.

а) поворотной; б) зеркальной; в) отражающей; г) сопоставляющей.

16.Осью поворотной симметрии порядка n является _______ правильной n-угольной пирамиды.

а) длина; б) высота; в) ширина; г) линия.

17.Движение, которое получается в результате последовательно выполненных поворотов вокруг прямой и отражения в плоскости, перпендикулярной этой прямой, называется зеркальным _________.

а) поворотом; б) движением; в) отражением; г) перемещением.

18.Оба вида осей поворота вместе с плоскостями симметрии и центром симметрии, если они есть у фигуры, называются ее ____________ симметрии.

а) составляющими; б) элементами; в) частями; г) долями.

7.6 Определение объёма.
Зависимость объёма тела от площадей его сечений

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 25, 26.

Тест «Определение объема. Зависимость объема тела от площадей его сечений»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Тело назовем _______, если каждая прямая, имеющая с телом общие точки, пересекает его поверхность по конечному числу отрезков и отдельных точек.

а) сложным; б) простым; в) простейшим; г) сложнейшим.

2.Будем говорить, что тело составлено из нескольких тел, если общими точками любых двух из этих составляющих тел являются разве лишь точки их _____________.

а) границ; б) областей; в) плоскостей; г) поверхностей.

3.Объемом тела называется положительная величина, определенная для тела так, что: 1) равные тела имеют равные объемы; 2) если тело составлено из ___________ числа тел, то его объем равен сумме их объемов.

а) бесконечного; б) определенного; в) конечного; г) минимального.

4.Единичный куб – это куб, ______ которого – единичный отрезок.

а) ребро; б) сторона; в) граница; г) область.

5.Равновеликими называются _____, объемы которых равны.

а) элементы; б) фигуры; в) объекты; г) тела.

6.Объем прямого __________ равен произведению площади его основания и высоты.

а) конуса; б) цилиндра; в) пирамиды; г) призмы.

7.7 Объёмы некоторых тел

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 27.

Тест «Объемы некоторых тел»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Объем цилиндра, в частности призмы, равен произведению ________ основания и высоты.

а) размера; б) площади; в) показателя; г) величины.

2.Объем конуса, в частности пирамиды, равен одной _______ произведения площади основания и высоты.

а) трети; б) четверти; в) пятой; г) шестой.

3.При подобных преобразованиях объемы тел умножаются на ____ коэффициента подобия.

а) квадрат; б) удвоенный квадрат; в) куб; г) удвоенный куб.

Задачи «Объемы некоторых тел»

4.Для цилиндра известны: площадь основания S=3, высота H=4. Найти объем цилиндра V.

5.Для конуса известны: площадь основания S=3, высота H=4. Найти объем конуса V.

6.Для шара известен: радиус R=2. Найти объем шара V.

Задачи «Объемы некоторых тел» (Подготовка)

1.Для цилиндра известны: площадь основания S=2, высота H=3. Найти объем цилиндра V.

Решение:

$V = SH$; $V = 2 \cdot 3 = 6.$

2.Для конуса известны: площадь основания S=2, высота H=3. Найти объем конуса V.

Решение:

$V = \frac{SH}{3}$; $V = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2.$

3.Для шара известен: радиус R=3. Найти объем шара V.

Решение:

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$; $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 27 = 36\pi.$

7.8 Площадь поверхности

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 28.

Тест «Площадь поверхности»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Многогранная поверхность называется ____________ вокруг выпуклой поверхности, если ее грани лежат в опорных плоскостях к данной выпуклой поверхности и она располагается с той же стороны от каждой такой плоскости, что и данная поверхность.

а) определенной; б) заданной; в) описанной; г) лежащей.

Задачи «Площадь поверхности»

2.Для многогранника B, описанного вокруг шара радиуса R, известны: радиус шара R=3, площадь поверхности многогранника $S(B)$=4. Найти объем многогранника $V(B)$.

3.Для сферы известен: радиус R=3. Найти площадь сферы S.

4.Для цилиндра вращения известны: высота H=3, радиус основания R=4. Найти площадь боковой поверхности цилиндра вращения $S_б$.

5.Для конуса вращения известны: образующая поверхности L=4, радиус основания R=3. Найти площадь боковой поверхности конуса вращения $S_б$.

6.Для конуса вращения известны: образующая поверхности L=4, радиус основания R=3. Найти площадь всей поверхности конуса вращения S.

Задачи «Площадь поверхности» (Подготовка)

1.Для многогранника B, описанного вокруг шара радиуса R, известны: радиус шара R=2, площадь поверхности многогранника $S(B)$=3. Найти объем многогранника $V(B)$.

Решение:

$V = \frac{1}{3}S(B)R; \qquad V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2 = 2.$

2.Для сферы известен: радиус R=2. Найти площадь сферы S.

Решение:

$S = 4\pi R^2; \qquad S = 4 \cdot \pi \cdot 2^2 = 16\pi.$

3.Для цилиндра вращения известны: высота H=2, радиус основания R=3. Найти площадь боковой поверхности цилиндра вращения $S_б$.

Решение:

$S_б = 2\pi RH; \qquad S_б = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 2 = 12\pi.$

4.Для конуса вращения известны: образующая поверхности L=3, радиус основания R=2. Найти площадь боковой поверхности конуса вращения $S_б$.

Решение:

$S_б = \pi RL; \qquad S_б = \pi \cdot 2 \cdot 3 = 6\pi.$

5.Для конуса вращения известны: образующая поверхности L=3, радиус основания R=2. Найти площадь всей поверхности конуса вращения S.

Решение:

$S = \pi RL + \pi R^2; \quad S = \pi \cdot 2 \cdot 3 + \pi \cdot 2^2 = 6\pi + 4\pi = 10\pi.$

7.9 Контрольная работа «Многогранники и тела вращения»

Используемый источник – Геометрия 10-11 класс [5], § 16-28.

Контрольная работа «Многогранники и тела вращения»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

§ 16. *Сфера и шар*

1.Сферой называется фигура, состоящая из _______ точек пространства, удаленных от данной точки на одно и то же (положительное) расстояние.

а) трех; б) пяти; в) нескольких; г) всех.

2.Шаром называется фигура, образованная _______ точками пространства, находящимися от данной точки на расстоянии, не большем данного (положительного) расстояния.

а) двумя; б) тремя; в) всеми; г) несколькими.

§ 17. *Симметрия сферы и шара*

3.Две фигуры называются симметричными относительно точки О, если они состоят из ___________ симметричных точек.

а) попарно; б) пяти; в) нескольких; г) всех.

4.Сфера симметрична относительно своего центра, т.е. центр сферы является ее центром ______________.

а) плоскости; б) поверхности; в) окружности; г) симметрии.

§ 18. *Цилиндр*

5.Все образующие цилиндра равны друг другу как параллельные ___________ между параллельными плоскостями.

а) фигуры; б) отрезки; в) поверхности; г) лучи.

6.Все сечения цилиндра плоскостями, ________________ плоскостям его оснований (и лежащими между ними), равны друг другу (и равны основаниям цилиндра).

а) перпендикулярными; б) не перпендикулярными; в) параллельными; г) не параллельными.

§ 19. *Конус*

7.Если плоскость пересекает конус и _____________ его основанию, то сечение конуса такой плоскостью подобно основанию конуса.

а) перпендикулярна; б) параллельна; в) не перпендикулярна; г) не параллельна.

8.Конусом вращения называется конус, основание которого – _______ и вершина которого проектируется в центр основания.

а) круг; б) квадрат; в) прямоугольник; г) треугольник.

§ 20. *Геометрия окружности*

9.Угол, вершина которого лежит внутри круга, измеряется ____________ двух его дуг, из которых одна заключена между сторонами угла, а другая – между продолжениями сторон угла.

а) полуразностью; б) полусуммой; в) разностью; г) суммой.

10.Угол, вершина которого лежит вне круга и стороны которого пересекают его окружность, измеряется ____________ двух дуг, заключенных между его сторонами.

а) полуразностью; б) полусуммой; в) разностью; г) суммой.

§ 21. *Призма*

11.Призмой называется цилиндр, основание которого – ___________.

а) круг; б) многоугольник; в) квадрат; г) ромб.

12.Объединение боковых граней призмы называется ее боковой ___________.

а) поверхностью; б) плоскостью; в) линией; г) фигурой.

§ 22. *Пирамида*

13.Пирамидой называется конус, основание которого – ______________.

а) треугольник; б) многоугольник; в) квадрат; г) ромб.

14.Боковая поверхность пирамиды состоит из ______ ее образующих, которые соединяют вершину с точками на границе основания.

а) двух; б) четырех; в) трех; г) всех.

§ 23. *Многогранники*

15.Граница (или поверхность) тела – это множество его граничных ______.

а) линий; б) точек; в) отрезков; г) прямых.

16.Точка называется _________ для данной фигуры, если сколь угодно близко от нее есть точки, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей.

а) начальной; б) конечной; в) граничной; г) главной.

§ 24. *Правильные и полуправильные многогранники. Симметрия фигур*

17.Правильным называется многогранник, у которого все элементы одного и того же вида равны, т.е. равны все ______, углы граней и двугранные углы.

а) измерения; б) ребра; в) области; г) границы.

18.Восьмигранник – многогранник, у которого грани – правильные треугольники, сходящиеся по четыре в каждой ________.

а) вершине; б) границе; в) области; г) точке.

§ 25. *Определение объема*

§ 26. *Зависимость объема тела от площадей его сечений*

19.Тело назовем _______, если каждая прямая, имеющая с телом общие точки, пересекает его поверхность по конечному числу отрезков и отдельных точек.

а) сложным; б) простым; в) простейшим; г) сложнейшим.

20.Будем говорить, что тело составлено из нескольких тел, если общими точками любых двух из этих составляющих тел являются разве лишь точки их ______________.

а) границ; б) областей; в) плоскостей; г) поверхностей.

Выполните задания:

§ 27. *Объёмы некоторых тел*

21.Для цилиндра известны: площадь основания S=30, высота H=40. Найти объем цилиндра V.

22.Для конуса известны: площадь основания S=30, высота H=40. Найти объем конуса V.

§ 28. *Площадь поверхности*

23.Для многогранника B, описанного вокруг шара радиуса R, известны: радиус шара R=30, площадь поверхности многогранника $S(B)$=40. Найти объем многогранника $V(B)$.

24.Для сферы известен: радиус R=30. Найти площадь сферы S.

Контрольная работа «Многогранники и тела вращения» (Подготовка)

§ 27. *Объёмы некоторых тел*

1.Для цилиндра известны: площадь основания S=2, высота H=3. Найти объем цилиндра V.

Решение:

$V = SH$; $V = 2 \cdot 3 = 6$.

2.Для конуса известны: площадь основания S=2, высота H=3. Найти объем конуса V.

Решение:

$V = \frac{SH}{3}$; $V = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2$.

3.Для многогранника B, описанного вокруг шара радиуса R, известны: радиус шара R=2, площадь поверхности многогранника $S(B)$=3. Найти объем многогранника $V(B)$.

Решение:

$V = \frac{1}{3}S(B)R;$ $\qquad V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2 = 2.$

4.Для сферы известен: радиус R=2. Найти площадь сферы S.

Решение:

$S = 4\pi R^2;$ $\qquad S = 4 \cdot \pi \cdot 2^2 = 16\pi.$

7.10 Многогранники и тела вращения в профессиональных задачах

Используемый источник – [11].

Четырехгранная призма на конце цилиндрического вала служит для передачи крутящегося момента на вал.

Сотовую конструкцию из шестигранных призм применяют в качестве сеток, управляющих электронными потоками в электровакуумных приборах.

В технике ротор – это вращающаяся часть двигателей и рабочих машин.

Ротор – это вращающаяся часть паровой турбины, компрессора, гидронасоса, гидромотора и т.д.

В электротехнике ротор – это вращающаяся часть электрической машины (генератора или двигателя переменного тока) внутри неподвижной части – статора.

Ротор в электромашинах постоянного тока называется якорем.

Механизмы роторного типа получили наиболее широкое применение в промышленности.

В основе механизмов роторного типа лежит мотор, имеющий консольное или межопорное расположение относительно подшипниковых опор.

Практически все энергетические механизмы представлены механизмами роторного типа: насосы, генераторы, турбины, компрессоры, вентиляторы, воздуходувки, дымососы, эксгаустеры, двигатели.

Схема двух опорного ротора является основным конструкторским решением для механизмов с редукторным приводом, используемого для согласования механических параметров двигателя и рабочего органа.

Редукторный привод используется в грузоподъемных механизмах, приводах транспортирующих машин, в некоторых энергетических машинах и др.

Задача «Многогранники и тела вращения в профессиональных задачах» (Подготовка)

Задача. Определить емкость воздушного цилиндрического конденсатора, имеющего обкладки радиусом r_1=25 мм и r_2=30 мм, длиной l=0,6 м.

Принять: $\varepsilon = 1$; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\pi \approx 3{,}14$; $ln\left(\frac{30}{25}\right) \approx 0{,}18$.

Решение:

Подставив значения : $\varepsilon = 1$ (для воздушного конденсатора) и $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, рассчитаем емкость цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{ln(r_2/r_1)} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 1\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}6}{ln(30/25)} = 183{,}2 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф} = 183{,}2\ \text{пФ}.$$

Тест «Многогранники и тела вращения в профессиональных задачах»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.______________ призма на конце цилиндрического вала служит для передачи крутящегося момента на вал.

а) трёхгранная; б) пятигранная; в) четырехгранная; г) двугранная.

2.Сотовую конструкцию из _____________ призм применяют в качестве сеток, управляющих электронными потоками в электровакуумных приборах.

а) четырехгранных; б) трёхгранных; в) пятигранных; г) шестигранных.

3.В технике ротор – это ____________ часть двигателей и рабочих машин.

а) вращающаяся; б) не вращающаяся; в) неподвижная; г) постоянная.

4.Ротор – это ___________ часть паровой турбины, компрессора, гидронасоса, гидромотора и т.д.

а) не вращающаяся; б) вращающаяся; в) неподвижная; г) постоянная.

5.В электротехнике ротор – это вращающаяся часть электрической машины (генератора или двигателя переменного тока) внутри ___________ части – статора.

а) не вращающейся; б) вращающейся; в) постоянной; г) неподвижной.

6.______ в электромашинах постоянного тока называется якорем.

а) не статор; б) статор; в) ротор; г) не ротор.

7.Механизмы __________ типа получили наиболее широкое применение в промышленности.

а) не роторного; б) роторного; в) не статорного; г) статорного.

8.В основе механизмов __________ типа лежит мотор, имеющий консольное или межопорное расположение относительно подшипниковых опор.

а) роторного; б) не роторного; в) не статорного; г) статорного.

9.Практически все энергетические механизмы представлены механизмами __________ типа: насосы, генераторы, турбины, компрессоры, вентиляторы, воздуходувки, дымососы, эксгаустеры, двигатели.

а) не статорного; б) не роторного; в) роторного; г) статорного.

10.Схема ___________ ротора является основным конструкторским решением для механизмов с редукторным приводом, используемого для согласования механических параметров двигателя и рабочего органа.

а) четырех опорного; б) пяти опорного; в) трех опорного; г) двух опорного.

11.____________ привод используется в грузоподъемных механизмах, приводах транспортирующих машин, в некоторых энергетических машинах и др.

а) не редукторный; б) редукторный; в) электрический; г) механический.

Задача «Многогранники и тела вращения в профессиональных задачах»

12.Определить емкость воздушного цилиндрического конденсатора, имеющего обкладки радиусом r_1=20 мм и r_2=25 мм, длиной l=0,5 м.

Принять: $\varepsilon = 1$; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\pi \approx 3{,}14$; $ln\left(\frac{25}{20}\right) \approx 0{,}22$.

РАЗДЕЛ 8. СТЕПЕНИ И КОРНИ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

8.1 Понятие корня n-й степени из действительного числа

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 4.

Вычислите:

4.7.

а) $\sqrt[9]{512}$ (Пример); б) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$ (А/з); в) $\sqrt[3]{1331}$ (Д/з).

4.8.

а) $\sqrt[3]{0{,}125}$ (Пример); б) $\sqrt[4]{0{,}0081}$ (А/з); в) $\sqrt[4]{0{,}0625}$ (Д/з).

4.10.

а) $\sqrt[7]{-128}$ (Пример); б) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$ (А/з); в) $\sqrt[3]{-64}$ (Д/з).

4.11.

а) $-2\sqrt[4]{81}$ (Пример); б) $-3\sqrt[3]{-64}$ (А/з); в) $-5\sqrt[4]{16}$ (Д/з).

Понятие корня n-й степени из действительного числа (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

4.7.а) $\sqrt[9]{512} = \sqrt[9]{2^9} = 2.$

4.8.а) $\sqrt[3]{0{,}125} = \sqrt[3]{0{,}5^3} = 0{,}5.$

4.10.а) $\sqrt[7]{-128} = \sqrt[7]{(-2)^7} = -2.$

4.11.а) $-2\sqrt[4]{81} = -2\sqrt[4]{3^4} = -2 \cdot 3 = -6.$

Аудиторные задания (А/з): № 4.7 (б), № 4.8 (б), № 4.10 (б), № 4.11 (б).

Домашние задания (Д/з): № 4.7 (в), № 4.8 (в), № 4.10 (в), № 4.11 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$\sqrt[n]{a^n} = a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n.$

$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{a}{b} = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n.$

Если $a \geq 0, n = 2,3,4,5, \ldots$, то: 1) $\sqrt[n]{a} \geq 0$; 2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Если $a < 0, n = 3,5,7,9, \ldots$, то: 1) $\sqrt[n]{a} < 0$; 2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

8.2 Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 5.

Постройте график функции:

5.1.

а) $y = \sqrt[3]{x}$ (Пример); б) $y = \sqrt[6]{x}$ (А/з); в) $y = \sqrt[4]{x}$ (Д/з).

5.2.

а) $y = 2\sqrt[3]{x}$ (Пример); б) $y = -\frac{1}{3}\sqrt[6]{x}$ (А/з); в) $y = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$ (Д/з).

Найдите область определения функции:

5.10.

а) $y = \sqrt[4]{2x-4}$ (Пример);

б) $y = \sqrt[8]{2-3x}$ (А/з);

в) $y = \sqrt[6]{3x-9}$ (Д/з).

5.11.

а) $y = \sqrt[3]{x^2+5}$ (Пример);

б) $y = \sqrt[7]{x^3-1}$ (А/з);

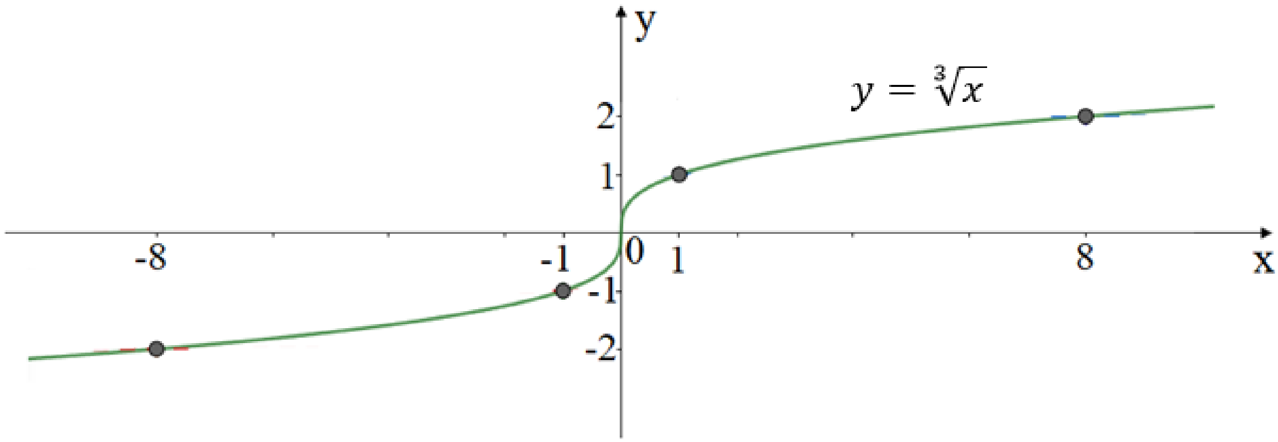
в) $y = \sqrt[9]{6x-7}$ (Д/з).

Функции y=x^(1/n), их свойства и графики (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

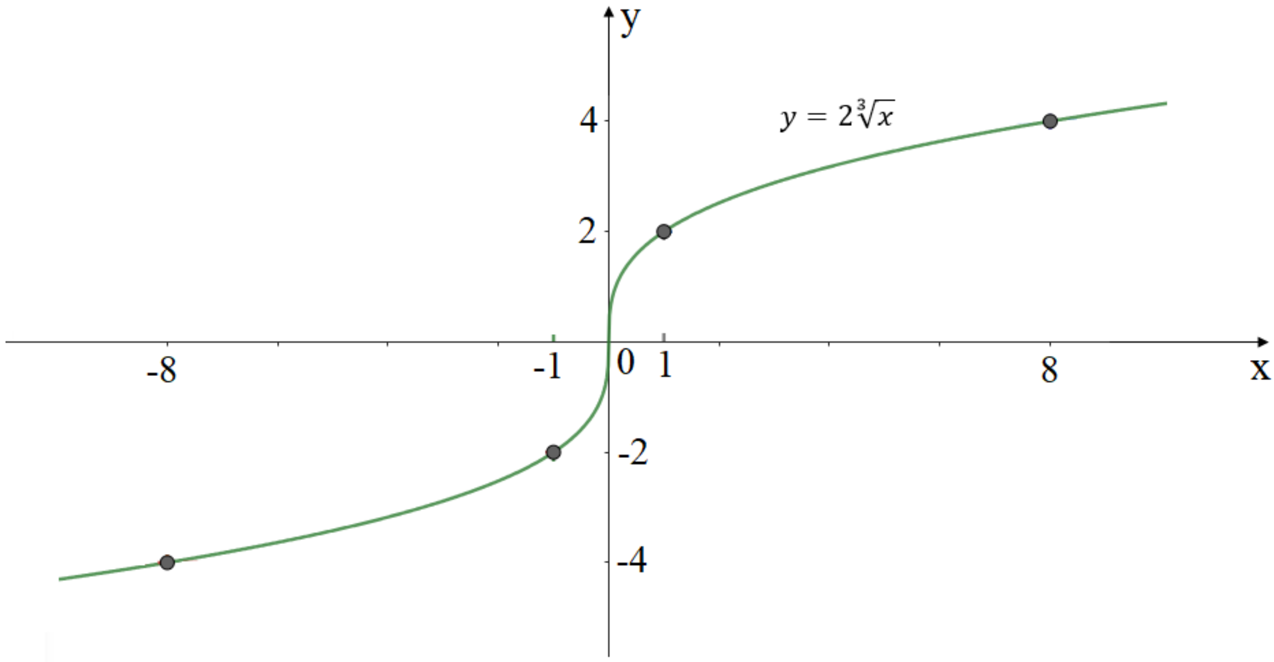
5.1.а) $y = \sqrt[3]{x}$.

x	-8	-1	0	1	8
y	-2	-1	0	1	2



5.2.a) $y = 2\sqrt[3]{x}.$

x	-8	-1	0	1	8
y	-4	-2	0	2	4



5.10.a) $y = \sqrt[4]{2x-4};$

ОДЗ: $2x - 4 \geq 0;$ $2x \geq 4;$ $x \geq 2.$

5.11.a) $y = \sqrt[3]{x^2+5};$

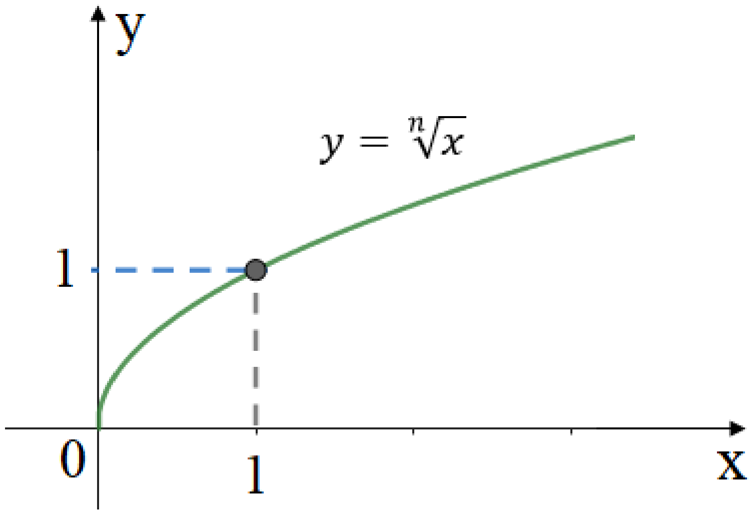
ОДЗ: $R.$

Аудиторные задания (А/з): № 5.1 (б), № 5.2 (б), № 5.10 (б), № 5.11 (б).

Домашние задания (Д/з): № 5.1 (в), № 5.2 (в), № 5.10 (в), № 5.11 (в).

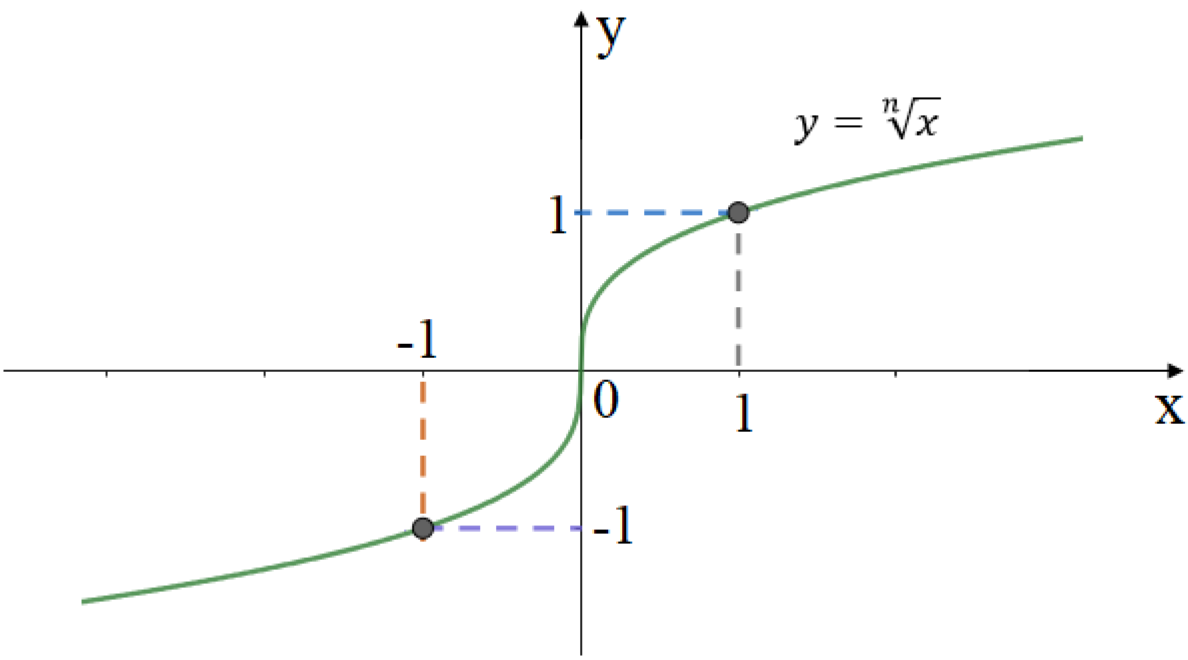
А/з, Д/з (подготовка):

$y = \sqrt[n]{x},\ n$ – чётное.



ОДЗ: $x \geq 0$.

$y = \sqrt[n]{x},\ n$ – нечётное.



ОДЗ: $R\ (-\infty; +\infty)$.

8.3 Свойства корня n-й степени

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 6.

Найдите значение числового выражения:

6.1.

а) $\sqrt[4]{16\cdot 0{,}0001}$ (Пример);

б) $\sqrt[5]{243\cdot \frac{1}{32}}$ (А/з);

в) $\sqrt[5]{0{,}00032\cdot 243}$ (Д/з).

6.2.

а) $\sqrt[5]{48\cdot 162}$ (Пример); б) $\sqrt[4]{\frac{16}{0{,}0625}}$ (А/з); в) $\sqrt[4]{54\cdot 24}$ (Д/з).

Упростите выражение, считая, что все переменные принимают только положительные значения:

6.5.

а) $\sqrt{a^2b^4}$ (Пример); б) $\sqrt[3]{a^3b^6}$ (А/з); в) $\sqrt[4]{a^4b^8}$ (Д/з).

6.6.

а) $\sqrt{\frac{49a^4}{169b^2}}$ (Пример); б) $\sqrt[4]{\frac{16a^4b^8}{c^{12}}}$ (А/з); в) $\sqrt[3]{\frac{27a^6}{64b^3}}$ (Д/з).

Свойства корня n-й степени (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

6.1.а) $\sqrt[4]{16\cdot 0{,}0001} = \sqrt[4]{2^4\cdot 0{,}1^4} = 2\cdot 0{,}1 = 0{,}2.$

6.2.а) $\sqrt[5]{48\cdot 162} = \sqrt[5]{6\cdot 8\cdot 81\cdot 2} = \sqrt[5]{3\cdot 2\cdot 2^3\cdot 3^4\cdot 2} = \sqrt[5]{3^5\cdot 2^5} = 3\cdot 2 = 6.$

6.5.а) $\sqrt{a^2b^4} = ab^2.$

6.6.а) $\sqrt{\frac{49a^4}{169b^2}} = \frac{\sqrt{49a^4}}{\sqrt{169b^2}} = \frac{7a^2}{13b}.$

Аудиторные задания (А/з): № 6.1 (б), № 6.2 (б), № 6.5 (б), № 6.6 (б).

Домашние задания (Д/з): № 6.1 (в), № 6.2 (в), № 6.5 (в), № 6.6 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}.$

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$

$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}.$

8.4 Преобразование иррациональных выражений

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 7.

Вынесите множитель из-под знака корня:

7.1.

а) $\sqrt{20}$ (Пример); б) $\sqrt{147}$ (А/з); в) $\sqrt{108}$ (Д/з).

Внесите множитель под знак корня:

7.12.

а) $2\sqrt{5}$ (Пример); б) $5\sqrt{2}$ (А/з); в) $5\sqrt{3}$ (Д/з).

Выполните действия:

7.22.

а) $\left(\sqrt[3]{m} - 2\sqrt[3]{n}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{m} + 2\sqrt[3]{n}\right)$ (Пример);

б) $\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt[3]{5}\right)$ (А/з);

в) $\left(a - \sqrt{b}\right) \cdot \left(a + \sqrt{b}\right)$ (Д/з).

Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

7.35.

а) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (Пример); б) $\frac{3}{2\sqrt[3]{9}}$ (А/з); в) $\frac{8}{\sqrt[5]{16}}$ (Д/з).

Преобразование иррациональных выражений (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

7.1.а) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$.

7.12.а) $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$.

7.22.а) $\left(\sqrt[3]{m} - 2\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{m} + 2\sqrt[3]{n}\right) = \left(\sqrt[3]{m}\right)^2 - \left(2\sqrt[3]{n}\right)^2 = \sqrt[3]{m^2} - 4\sqrt[3]{n^2}$.

7.35.а) $\frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Аудиторные задания (А/з): № 7.1 (б), № 7.12 (б), № 7.22 (б), № 7.35 (б).

Домашние задания (Д/з): № 7.1 (в), № 7.12 (в), № 7.22 (в), № 7.35 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$.

$\frac{k}{p\sqrt{a}} = \frac{k\sqrt{a}}{p\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{k\sqrt{a}}{pa}$.

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

$\frac{k}{p\sqrt[3]{a^2}} = \frac{k\sqrt[3]{a}}{p\sqrt[3]{a^3}} = \frac{k\sqrt[3]{a}}{pa}$.

$\frac{k}{p\sqrt[4]{a^3}} = \frac{k\sqrt[4]{a}}{p\sqrt[4]{a^4}} = \frac{k\sqrt[4]{a}}{pa}$.

$\frac{k}{p\sqrt[5]{a^4}} = \frac{k\sqrt[5]{a}}{p\sqrt[5]{a^5}} = \frac{k\sqrt[5]{a}}{pa}$.

$\frac{k}{p\sqrt[n]{a^{n-1}}} = \frac{k\sqrt[n]{a}}{p\sqrt[n]{a^n}} = \frac{k\sqrt[n]{a}}{pa}$.

8.5 Понятие степени с любым рациональным показателем

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 8.

Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

8.2.

а) $5^{\frac{2}{3}}$ (Пример); б) $3^{3\frac{1}{2}}$ (А/з); в) $6^{\frac{3}{8}}$ (Д/з).

Представьте заданное выражение в виде степени с рациональным показателем:

8.6.

а) $\sqrt[5]{b^4}$ (Пример); б) $\sqrt[3]{a^2}$ (А/з); в) $\sqrt[11]{c^2}$ (Д/з).

Вычислите:

8.8.

а) $49^{\frac{1}{2}}$ (Пример); б) $1000^{\frac{1}{3}}$ (А/з); в) $27^{\frac{1}{3}}$ (Д/з).

8.10.

а) $\left(27\cdot3^{-4}\right)^2$ (Пример); б) $\dfrac{6^{-4}\cdot6^{-9}}{6^{-12}}$ (А/з); в) $16\cdot\left(2^{-3}\right)^2$ (Д/з).

Понятие степени с любым рациональным показателем (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

8.2.а) $5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}.$

8.6.а) $\sqrt[5]{b^4}=b^{\frac{4}{5}}=b^{0,8}.$

8.8.а) $49^{\frac{1}{2}}=\sqrt{49}=7.$

8.10.а) $(27\cdot3^{-4})^2=(3^3\cdot3^{-4})^2=(3^{-1})^2=3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}.$

Аудиторные задания (А/з): № 8.2 (б), № 8.6 (б), № 8.8 (б), № 8.10 (б).

Домашние задания (Д/з): № 8.2 (в), № 8.6 (в), № 8.8 (в), № 8.10 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p},\ a\geq0.$

$a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}},\ a>0.$

$a^s\cdot a^t=a^{s+t},\ a>0, b>0,\ s,t$ – произвольные рациональные числа.

$\frac{a^s}{a^t}=a^{s-t}.$

$(a^s)^t=a^{st}.$

$(ab)^s=a^s\cdot b^s.$

$\left(\frac{a}{b}\right)^s=\frac{a^s}{b^s}.$

8.6 Степенные функции, их свойства и графики

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 9.

9.3. Вычислите:

а) $f(4)$, если $f(x)=x^{\frac{5}{2}}$ (Пример);

б) $f(1)$, если $f(x)=x^{-\frac{4}{3}}$ (А/з);

в) $f(0)$, если $f(x)=x^{\frac{6}{7}}$ (Д/з).

9.4. Исследуйте степенную функцию на четность:

а) $y=x^{10}$ (Пример); б) $y=x^{-\frac{1}{3}}$ (А/з); в) $y=x^{-15}$ (Д/з).

9.5. Исследуйте степенную функцию на ограниченность:

а) $y=x^{8}$ (Пример); б) $y=x^{-\frac{3}{4}}$ (А/з); в) $y=x^{-5}$ (Д/з).

9.6. Исследуйте степенную функцию на монотонность:

а) $y=x^{12}$ (Пример); б) $y=x^{-\frac{1}{6}}$ (А/з); в) $y=x^{-11}$ (Д/з).

Степенные функции, их свойства и графики (Примеры, А/з, Д/з)

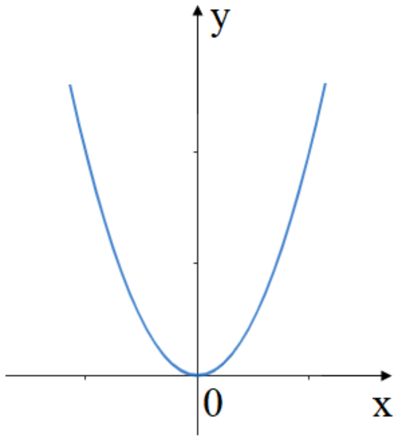
Примеры:

9.3.а) $f(4)$, если $f(x)=x^{\frac{5}{2}}$;

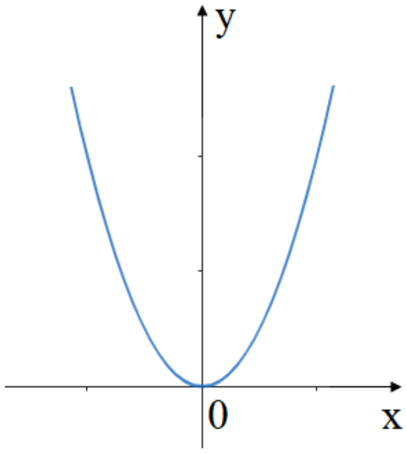
$f(4)=4^{\frac{5}{2}}=2^{2\cdot\frac{5}{2}}=2^5=32.$

9.4.а) $y = x^{10}$;

$y(-x) = y(x) \Rightarrow$ чётная функция.

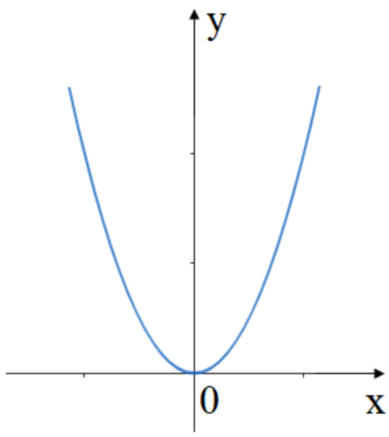


9.5.а) $y = x^{8}$;



Ограничена снизу, не ограничена сверху.

9.6.а) $y = x^{12}$;

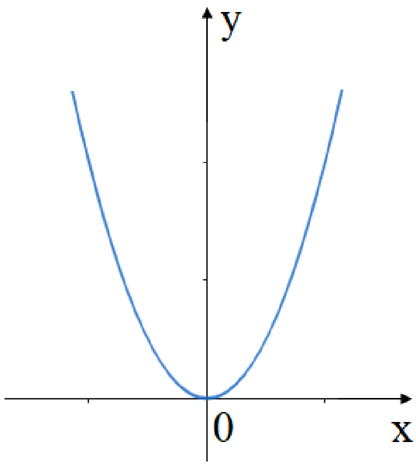
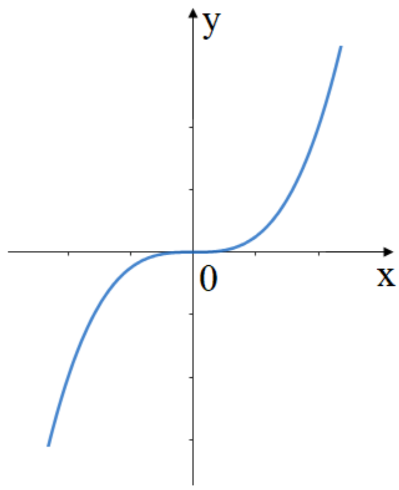
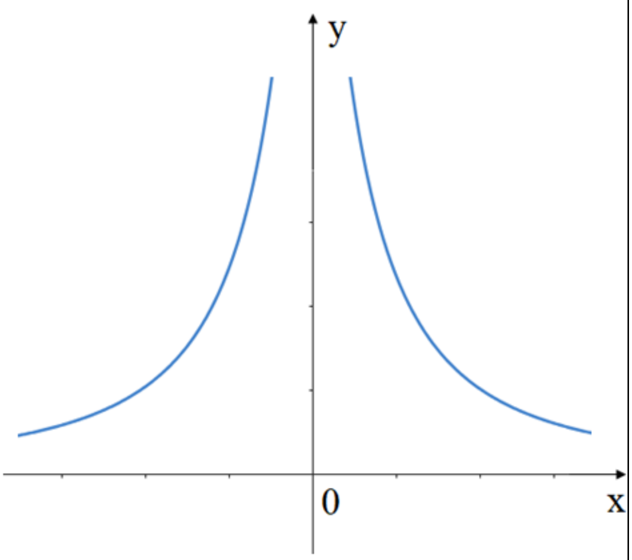
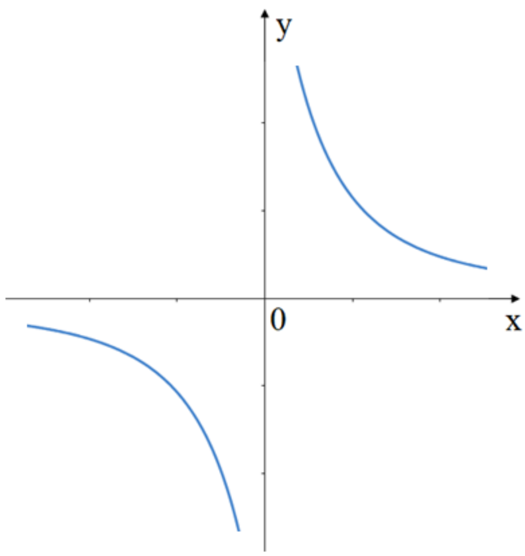


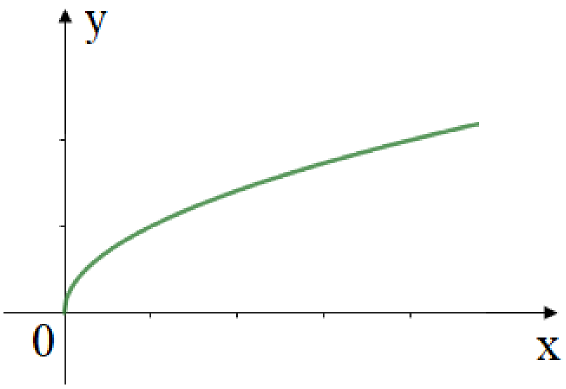
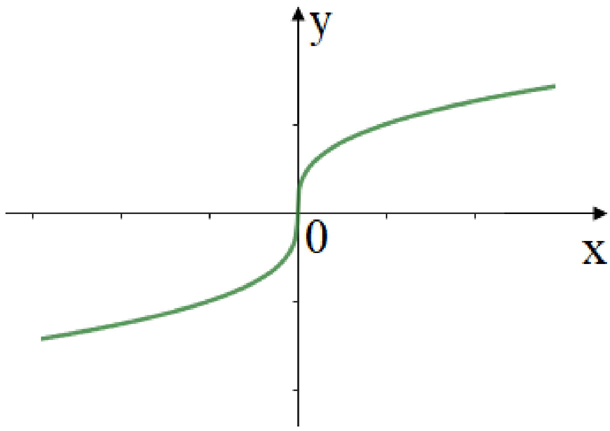
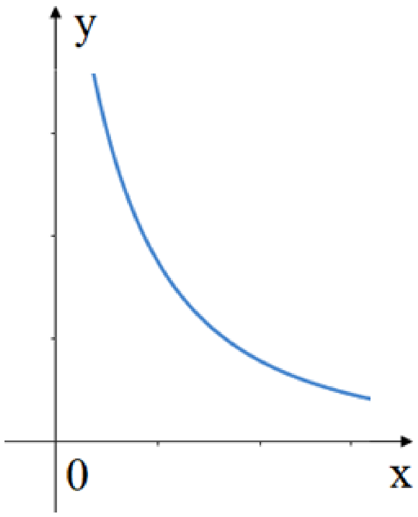
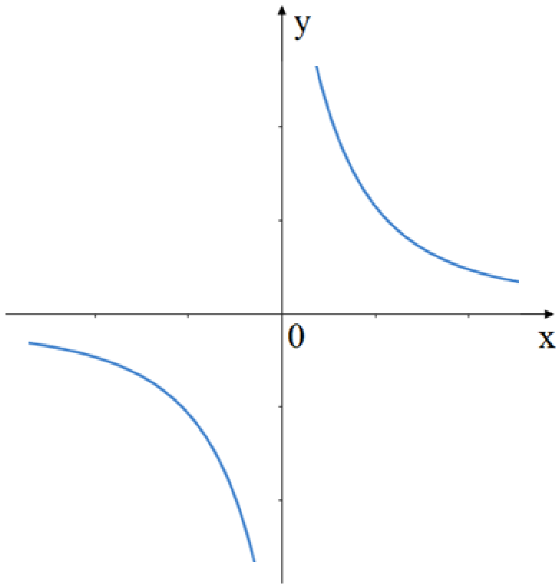
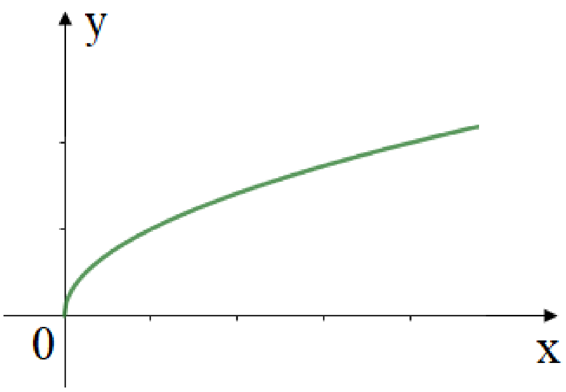
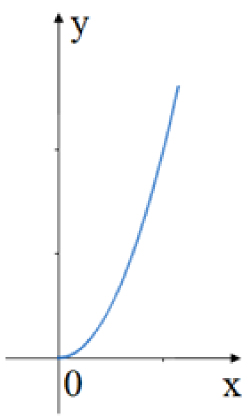
Убывает на $(-\infty; 0]$; возрастает на $[0; +\infty)$.

<u>Аудиторные задания (А/з)</u>: № 9.3 (б), № 9.4 (б), № 9.5 (б), № 9.6 (б).

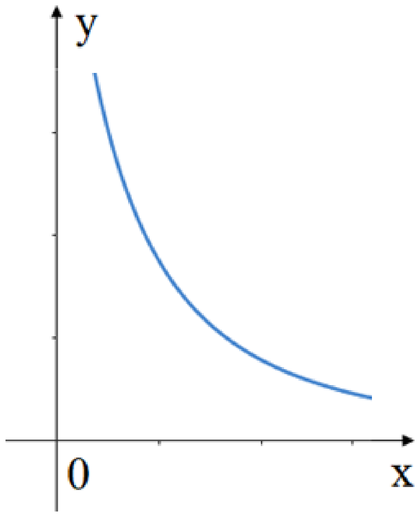
Домашние задания (Д/з): № 9.3 (в), № 9.4 (в), № 9.5 (в), № 9.6 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$y = x^{2n} (n \in N)$ чётная 	$y = x^{2n-1} (n \in N,\ n \neq 1)$ нечётная 
$y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}} (n \in N)$ чётная 	$y = x^{-2n+1} = \frac{1}{x^{2n-1}} (n \in N)$ нечётная 

<table>
<tr>
<td>$y = \sqrt[2n]{x} (n \in N)$ не является ни чётной, ни нечётной
</td>
<td>$y = \sqrt[2n-1]{x} (n \in N)$ нечётная
</td>
</tr>
<tr>
<td>$y = \frac{1}{\sqrt[2n]{x}} (n \in N)$ не является ни чётной, ни нечётной
</td>
<td>$y = \frac{1}{\sqrt[2n-1]{x}} (n \in N)$ нечётная
</td>
</tr>
<tr>
<td>$y = x^r (0 < r < 1)$ не является ни чётной, ни нечётной
</td>
<td>$y = x^r \left(r = \frac{m}{n}, m > n\right)$ не является ни чётной, ни нечётной
</td>
</tr>
</table>

$y = x^r \left(r = -\frac{m}{n}\right)$ не является ни чётной, ни нечётной



8.7 Извлечение корней из комплексных чисел

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 10.

10.1. Вычислите:

а) $\frac{3+7i}{3-i}$ (Пример);

б) $\frac{-i\cdot(3+i)}{7-i}$ (А/з);

в) $\frac{(2+3i)\cdot(4-i)}{i(1-7i)}$ (Д/з).

10.2. Решите уравнение относительно n ($n \in Z$):

а) $i^7 + i^n = 0$ (Пример);

б) $i^9 + i^n = 1 + i$ (А/з);

в) $i^{-12} + i^{-13} + i^9 + i^n = 2$ (Д/з).

10.8. Решите уравнение:

а) $z^2 - 10z + 29 = 0$ (Пример);

б) $iz^2 - 10z - 29i = 0$ (А/з);

в) $z^2 + 30z + 241 = 0$ (Д/з).

10.9. Вычислите:

а) $(\cos 20^0 + i\sin 20^0)^9$ (Пример);

б) $(\cos 20^0 + i\sin 20^0)^{-3}$ (А/з);

в) $(\cos 3^0 - i\sin 3^0)^{-40}$ (Д/з).

Извлечение корней из комплексных чисел (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

10.1.а) $\frac{3+7i}{3-i} = \frac{(3+7i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{9+3i+21i+7i^2}{9-i^2} = \frac{9+24i-7}{9+1} = \frac{2+24i}{10} = 0{,}2 + 2{,}4i.$

10.2.а) $i^7 + i^n = 0;\ \ n \in Z;$

$i^n = -i^7 = -i^6 \cdot i = -(i^2)^3 \cdot i = -(-1)^3 \cdot i = i \Rightarrow n = 1.$

10.8.а) $z^2 - 10z + 29 = 0;$

$D = 100 - 4 \cdot 29 = 100 - 116 = -16;$

$z_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{10 \pm 4i}{2} = 5 \pm 2i.$

10.9.а) $(cos20^0 + i \cdot sin20^0)^9 = \left(e^{i20^0}\right)^9 = e^{i180^0} = cos180^0 + i \cdot sin180^0 = -1 + i \cdot 0 = -1.$

Аудиторные задания (А/з): № 10.1 (б), № 10.2 (б), № 10.8 (б), № 10.9 (б).

Домашние задания (Д/з): № 10.1 (в), № 10.2 (в), № 10.8 (в), № 10.9 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$i^2 = -1$ – мнимая единица.

$\frac{a+bi}{a-bi} = \frac{(a+bi)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{(a+bi)^2}{a^2-(bi)^2} = \frac{a^2+2abi+(bi)^2}{a^2-b^2i^2} = \frac{a^2+2abi+b^2i^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}.$

$\frac{a}{i} = \frac{ai}{i^2} = -ai.$

$az^2 + bz + c = 0; \qquad D = b^2 - 4ac < 0; \qquad z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|} \cdot i}{2a}.$

$z = a + bi$ – алгебраическая форма записи комплексного числа;

$z = \rho(cos\varphi + isin\varphi)$ – тригонометрическая форма записи;

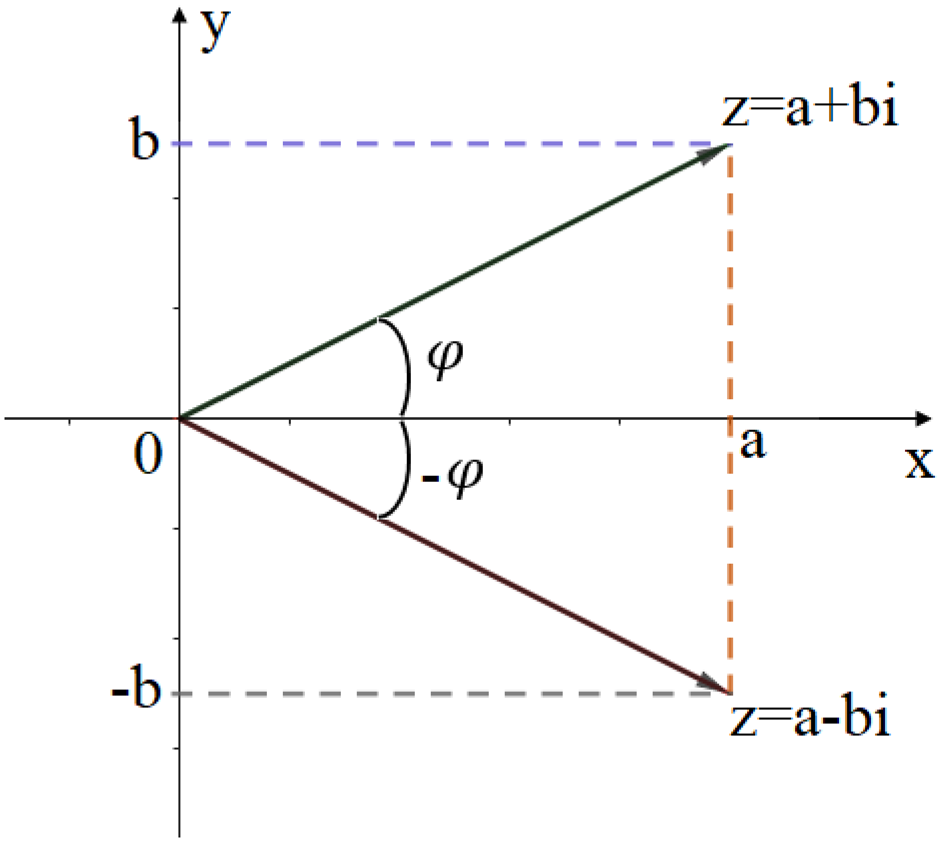
$\rho = \sqrt{a^2 + b^2},\ cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$

$z = \rho e^{i\varphi}$ – показательная форма;

$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$ – формула Эйлера;

$(cos\varphi + isin\varphi)^n = \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{i\varphi n} = cos(\varphi n) + isin(\varphi n);$

$i^0 = 1.$



8.8 Контрольная работа «Степени и корни. Степенная функция»

Контрольная работа «Степени и корни. Степенная функция» (Подготовка)

1.Найти значение арифметического квадратного корня:

1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{100}$.

2.Вынести множитель из-под корня:

1) $\sqrt{45}$; 2) $\sqrt{52}$.

3. Внести множитель под корень:

1) $7\sqrt{2}$; 2) $2\sqrt{14}$.

4.Вынести множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{a^4}$.

5.Внести множитель под знак корня:

1) $a\sqrt[5]{3}$; 2) $9\sqrt[7]{q^3}$.

1.

1) $\sqrt{9} = 3;$ 2) $\sqrt{100} = 10.$

2.

1) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5};$ 2) $\sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}.$

3.

1) $7\sqrt{2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98};$ 2) $2\sqrt{14} = \sqrt{4 \cdot 14} = \sqrt{56}.$

4.

1) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2};$ 2) $\sqrt{a^4} = a^2.$

5.

1) $a\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{a^5 \cdot 3} = \sqrt[5]{3a^5};$ 2) $9\sqrt[7]{q^3} = \sqrt[7]{9^7 q^3}.$

Контрольная работа «Степени и корни. Степенная функция»

1.Найти значение арифметического квадратного корня:

1) $\sqrt{0{,}04}$; 2) $\sqrt{0{,}64}$.

2.Вынести множитель из-под корня:

1) $\sqrt{175}$; 2) $\sqrt{224}$.

3. Внести множитель под корень:

1) $3\sqrt{7}$; 2) $2\sqrt{17}$.

4.Вынести множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{n^5 m^2}$; 2) $\sqrt[3]{27 \cdot b^3}$.

5.Внести множитель под знак корня:

1) $b\sqrt[5]{2}$; 2) $2a\sqrt{3a}$.

РАЗДЕЛ 9. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

9.1 Показательная функция, её свойства и график

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 11.

Найдите значение выражения:

11.1.

а) $2^{5,3}\cdot 2^{-0,3}$ (Пример);

б) $7^{-\frac{1}{2}}\cdot 7^{3,5}$ (А/з);

в) $3^{6,8}\cdot 3^{-5,8}$ (Д/з).

11.2.

а) $\left(\sqrt{5}\right)^{3,6}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{-1,6}$ (Пример);

б) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{4,7}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^{-1,7}$ (А/з);

в) $\left(\sqrt{7}\right)^{-0,2}\cdot\left(\sqrt{7}\right)^{-3,8}$ (Д/з).

11.3.

а) $4^{3,5}:4^{3}$ (Пример);

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6,3}:\left(\frac{1}{2}\right)^{-2,3}$ (А/з);

в) $8^{2\frac{1}{3}}:8^{2}$ (Д/з).

11.4.

а) $\left(\sqrt{0,6}\right)^{2,7}:\left(\sqrt{0,6}\right)^{0,7}$ (Пример);

б) $\left(\sqrt{1,2}\right)^{4,2}:\left(\sqrt{1,2}\right)^{0,2}$ (А/з);

в) $\left(\sqrt[5]{\frac{1}{3}}\right)^{6,3}:\left(\sqrt[5]{\frac{1}{3}}\right)^{-3,7}$ (Д/з).

Показательная функция, её свойства и график (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

11.1.а) $2^{5,3}\cdot 2^{-0,3} = 2^{5,3-0,3} = 2^5 = 32.$

11.2.а) $\left(\sqrt{5}\right)^{3,6}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{-1,6} = \left(\sqrt{5}\right)^{3,6-1,6} = \left(\sqrt{5}\right)^{2} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{2} = 5^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 5.$

11.3.а) $4^{3,5}:4^3 = 4^{3,5-3} = 4^{0,5} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2.$

11.4.а) $\left(\sqrt{0,6}\right)^{2,7}:\left(\sqrt{0,6}\right)^{0,7} = \left(\sqrt{0,6}\right)^{2,7-0,7} = \left(\sqrt{0,6}\right)^{2} = \left(0,6^{\frac{1}{2}}\right)^{2} = 0,6^{\frac{1}{2}\cdot 2} =$ $0,6.$

Аудиторные задания (А/з): № 11.1 (б), № 11.2 (б), № 11.3 (б), № 11.4 (б).

Домашние задания (Д/з): № 11.1 (в), № 11.2 (в), № 11.3 (в), № 11.4 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$a^x\cdot a^y = a^{x+y}.$

$\left(\sqrt{a}\right)^{x}\cdot\left(\sqrt{a}\right)^{y} = \left(\sqrt{a}\right)^{x+y} = a^{\frac{x+y}{2}}.$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{x}\cdot\left(\sqrt[n]{a}\right)^{y} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{x+y} = a^{\frac{x+y}{n}}.$

$a^x:a^y = a^{x-y}.$

$\left(\sqrt{a}\right)^{x}:\left(\sqrt{a}\right)^{y} = \left(\sqrt{a}\right)^{x-y} = a^{\frac{x-y}{2}}.$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{x}:\left(\sqrt[n]{a}\right)^{y} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{x-y} = a^{\frac{x-y}{n}}.$

$(a^x)^y = a^{xy}.$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x};$ $\quad\left(\sqrt{a}\right)^{-x} = \frac{1}{\left(\sqrt{a}\right)^{x}};$ $\quad\left(\sqrt[n]{a}\right)^{-x} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{x}}.$

$\left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)^{x} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{x}}.$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{x} = a^{\frac{x}{n}}.$

9.2 Показательные уравнения

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 12.

Решите уравнение:

12.1.

а) $4^x = \frac{1}{16}$ (Пример);

б) $7^x = \frac{1}{343}$ (А/з);

в) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 36$ (Д/з).

12.2.

а) $10^x = \sqrt[4]{1000}$ (Пример);

б) $5^x = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ (А/з);

в) $0{,}3^x = \sqrt[4]{0{,}0081}$ (Д/з).

12.3.

а) $0{,}3^x = \frac{1000}{27}$ (Пример);

б) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{25}{16}$ (А/з);

в) $0{,}7^x = \frac{1000}{343}$ (Д/з).

12.4.

а) $2^{x+1} = 4$ (Пример);

б) $5^{3x-1} = 0{,}2$ (А/з);

в) $0{,}4^{4-5x} = 0{,}16\sqrt{0{,}4}$ (Д/з).

Показательные уравнения (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

12.1.а) $4^x = \frac{1}{16}$;

$4^x = \frac{1}{4^2}$; $4^x = 4^{-2}$; $x = -2$.

12.2.а) $10^x = \sqrt[4]{1000}$;

$10^x = \sqrt[4]{10^3}$; $10^x = 10^{\frac{3}{4}}$; $x = \frac{3}{4}$.

12.3.а) $0{,}3^x = \frac{1000}{27}$;

$\left(\frac{3}{10}\right)^x = \left(\frac{10}{3}\right)^3$; $\left(\frac{3}{10}\right)^x = \left(\frac{3}{10}\right)^{-3}$; $x = -3$.

12.4.а) $2^{x+1} = 4$;

$2^{x+1} = 2^2$; $x + 1 = 2$; $x = 1$.

Аудиторные задания (А/з): № 12.1 (б), № 12.2 (б), № 12.3 (б), № 12.4 (б).

Домашние задания (Д/з): № 12.1 (в), № 12.2 (в), № 12.3 (в), № 12.4 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

$a^x = \frac{1}{a^n}$; $a^x = a^{-n}$; $x = -n$.

$\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^n$; $a^{-x} = a^n$; $-x = n$; $x = -n$.

$a^x = \sqrt[n]{a^m}$; $a^x = a^{\frac{m}{n}}$; $x = \frac{m}{n}$.

$a^x = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$; $a^x = a^{-\frac{m}{n}}$; $x = -\frac{m}{n}$.

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(\frac{b}{a}\right)^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$; $x = -n$.

$a^{x+p} = a^n$; $x + p = n$; $x = n - p$.

$a^{kx+p} = a^n$; $kx + p = n$; $kx = n - p$; $x = \frac{n-p}{k}$.

9.3 Показательные неравенства

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 13.

Решите неравенство:

13.1.

а) $2^x \geq 4$ (Пример);

б) $2^x < \frac{1}{2}$ (А/з);

в) $2^x \leq 8$ (Д/з).

13.2.

а) $3^x \leq 81$ (Пример);

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{27}$ (А/з);

в) $5^x > 125$ (Д/з).

13.3.

а) $3^{2x-4} \leq 27$ (А/з);

б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+6} > \frac{4}{9}$ (Пример);

г) $(0{,}1)^{5x-9} > 0{,}001$ (Д/з).

13.4.

а) $7^{2x-9} > 7^{3x-6}$ (А/з);

б) $0{,}5^{4x+3} \geq 0{,}5^{6x-1}$ (Пример);

в) $9^{x-1} \geq 9^{-2x+8}$ (Д/з).

<u>Показательные неравенства (Примеры, А/з, Д/з)</u>

<u>Примеры</u>:

13.1.а) $2^x \geq 4$;

$2^x \geq 2^2$; $\quad x \geq 2$.

13.2.а) $3^x \leq 81$;

$3^x \leq 3^4$; $\quad x \leq 4$.

13.3.б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+6} > \frac{4}{9}$;

$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+6} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2}$; $\quad 3x + 6 < 2$; $\quad 3x < -4$; $\quad x < -\frac{4}{3}$.

13.4.б) $0{,}5^{4x+3} \geq 0{,}5^{6x-1}$;

$4x + 3 \leq 6x - 1$; $\quad -2x \leq -4$; $\quad x \geq 2$.

Аудиторные задания (А/з): № 13.1 (б), № 13.2 (б), № 13.3 (а), № 13.4 (а).

Домашние задания (Д/з): № 13.1 (в), № 13.2 (в), № 13.3 (г), № 13.4 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$.

Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

$a^x \geq a^n$;	$x \geq n$;	$a > 1$.
$a^x \geq a^n$;	$x \leq n$;	$a < 1$.
$a^x \leq a^n$;	$x \leq n$;	$a > 1$.
$a^x \leq a^n$;	$x \geq n$;	$a < 1$.
$a^x > a^n$;	$x > n$;	$a > 1$.
$a^x > a^n$;	$x < n$;	$a < 1$.
$a^x < a^n$;	$x < n$;	$a > 1$.
$a^x < a^n$;	$x > n$;	$a < 1$.

9.4 Контрольная работа «Показательная функция»

Контрольная работа «Показательная функция» (Подготовка)

1.Пользуясь свойством монотонности степенной функции, сравнить числа m и n, если:

1) $\left(\frac{3}{5}\right)^{m} < \left(\frac{3}{5}\right)^{n}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{m} > \left(\frac{4}{3}\right)^{n}$.

2.Решить показательные уравнения методом уравнивания оснований:

1) $3^{-x}=81$; 2) $2^{-x}=64$.

3.Решить неравенства методом уравнивания оснований:

1) $5^{4x+8}>\frac{1}{625}$; 2) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x}>\left(\frac{1}{32}\right)^{x+2}$.

1.

1) $\left(\frac{3}{5}\right)^{m}<\left(\frac{3}{5}\right)^{n}$; $m>n$;

2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{m}>\left(\frac{4}{3}\right)^{n}$; $m>n$.

2.

1) $3^{-x}=81$; $3^{-x}=3^{4}$; $-x=4$; $x=-4$.

2) $2^{-x}=64$; $2^{-x}=2^{6}$; $-x=6$; $x=-6$.

3.

1) $5^{4x+8}>\frac{1}{625}$; $5^{4x+8}>5^{-4}$; $4x+8>-4$;

$4x>-12$; $x>-3$.

2) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x}>\left(\frac{1}{32}\right)^{x+2}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}>\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+10}$; $3x<5x+10$;

$-2x<10$; $x>-5$.

Контрольная работа «Показательная функция»

1.Пользуясь свойством монотонности степенной функции, сравнить числа m и n, если:

1) $(1{,}5)^{m}>(1{,}5)^{n}$; 2) $(0{,}3)^{m}>(0{,}3)^{n}$.

2.Решить показательные уравнения методом уравнивания оснований:

1) $8^{x}=16$; 2) $9^{x}=27$.

3.Решить неравенства методом уравнивания оснований:

1) $121^{4-x}>11^{3x-2}$; 2) $(0{,}72)^{x}<(0{,}72)^{0,4x^{2}}$.

РАЗДЕЛ 10. ЛОГАРИФМЫ. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

10.1 Понятие логарифма

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 14.

Вычислите:

14.3.

а) $\log_2 2^4$ (Пример); б) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-7}$ (А/з); в) $\log_8 8^{-3}$ (Д/з).

14.4.

а) $\log_3 \frac{1}{27}$ (Пример); б) $\log_{0,1} 0{,}0001$ (А/з); в) $\lg 0{,}0001$ (Д/з).

14.5.

а) $\log_{\sqrt{7}} 49$ (Пример); б) $\log_{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{8}\right)$ (А/з); в) $\log_{\frac{1}{15}} 225\sqrt[3]{15}$ (Д/з).

14.6.

а) $\log_{\sqrt{2}} 1$ (Пример); б) $\log_{0,5} \frac{1}{4\sqrt{2}}$ (А/з); в) $\log_{\sqrt{3}} 81\sqrt{3}$ (Д/з).

Понятие логарифма (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

14.3.а) $\log_2 2^4 = 4.$

14.4.а) $\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3.$

14.5.а) $\log_{\sqrt{7}} 49 = \log_{7^{\frac{1}{2}}} 7^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 = 4.$

14.6.а) $\log_{\sqrt{2}} 1 = 0.$

Аудиторные задания (А/з): № 14.3 (б), № 14.4 (б), № 14.5 (б), № 14.6 (б).

Домашние задания (Д/з): № 14.3 (в), № 14.4 (в), № 14.5 (в), № 14.6 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

$\log_a b = c$; $a^c = b$.

$\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$; $\log_a a^c = c$.

$a^{\log_a b} = b$.

$\log_{a^c} b^c = \log_a b$; $\log_a b^c = c \log_a b$; $\log_{a^c} b = \frac{1}{c}\log_a b$.

$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$; $\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$.

$\log_{10} a = lg\, a$ – десятичный логарифм.

10.2 Логарифмическая функция, её свойства и график

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 15.

15.2. Найдите значение логарифмической функции $y = \log_3 x$ в указанных точках:

а) 3^7 (Пример); б) 3^{-3} (А/з); в) 3^{18} (Д/з).

15.3. Найдите значение логарифмической функции $y = \log_2 x$ в указанных точках:

а) $x_1 = 4,\ x_2 = 8,\ x_3 = 16$ (Пример);

б) $x_1 = \dfrac{1}{2},\ x_2 = \dfrac{1}{4},\ x_3 = \dfrac{1}{16}$ (А/з);

в) $x_1 = 32,\ x_2 = 128,\ x_3 = 2$ (Д/з).

15.6. В одной системе координат изобразите графики функций:

а) $y = \log_2 x,\ y = \log_9 x$ (Пример);

б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x,\ y = \log_{\frac{1}{5}} x$ (А/з);

в) $y = \log_5 x,\ y = \log_3 x$ (Д/з).

15.7. Найдите область определения функции:

а) $y=\log_6(4x-1)$ (Пример);

б) $y=\log_{\frac{1}{9}}(7-2x)$ (А/з);

в) $y=\log_9(8x+9)$ (Д/з).

Логарифмическая функция, её свойства и график (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

15.2.а) $y = \log_3 x$, 3^7;

$y(3^7) = \log_3 3^7 = 7.$

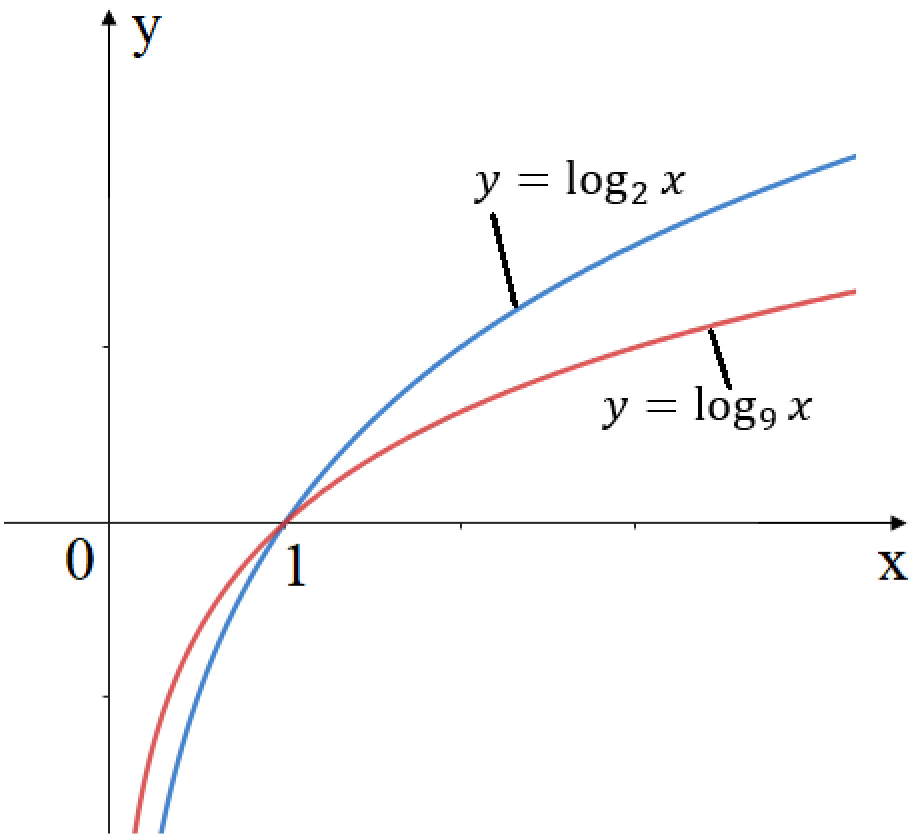
15.3.а) $y = \log_2 x$, $x_1 = 4$, $x_2 = 8$, $x_3 = 16$;

$y(x_1) = y(4) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2;$

$y(x_2) = y(8) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3;$

$y(x_3) = y(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4.$

15.6.а) $y = \log_2 x$, $y = \log_9 x$.



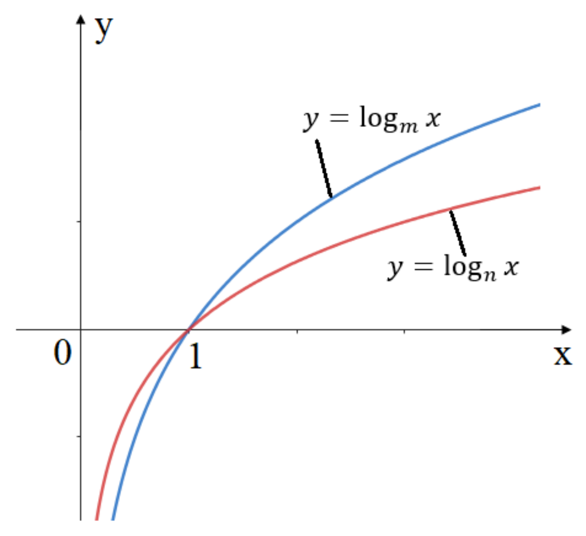
15.7.а) $y = \log_6(4x - 1)$;

ОДЗ: $4x - 1 > 0$; $4x > 1$; $x > \frac{1}{4}$; $x > 0{,}25$.

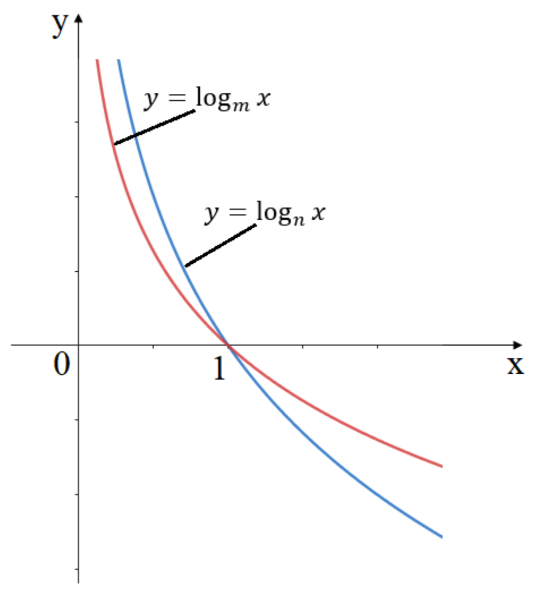
<u>Аудиторные задания (А/з)</u>: № 15.2 (б), № 15.3 (б), № 15.6 (б), № 15.7 (б).

<u>Домашние задания (Д/з)</u>: № 15.2 (в), № 15.3 (в), № 15.6 (в), № 15.7 (в).

<u>А/з, Д/з (подготовка):</u>



$m > 1,\ n > 1,\ n > m.$



$0 < m < 1,\ 0 < n < 1,\ n > m.$

$y = \log_a x$;   ОДЗ: $x > 0$.

10.3 Свойства логарифмов

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 16.

Вычислите:

16.1.

а) $\log_6 2 + \log_6 3$ (Пример);

б) $\lg 25 + \lg 4$ (А/з);

в) $\log_{26} 2 + \log_{26} 13$ (Д/з).

16.2.

а) $\log_{144} 3 + \log_{144} 4$ (Пример);

б) $\log_{\frac{1}{8}} 4 + \log_{\frac{1}{8}} 2$ (А/з);

в) $\log_{216} 2 + \log_{216} 3$ (Д/з).

16.3.

а) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{9}$ (Пример);

б) $\log_{\frac{1}{2}} 28 - \log_{\frac{1}{2}} 7$ (А/з);

в) $\log_2 15 - \log_2 30$ (Д/з).

16.4.

а) $\log_{\sqrt{3}} 6 - \log_{\sqrt{3}} 2\sqrt{3}$ (Пример);

б) $\log_{\sqrt{2}} 7\sqrt{2} - \log_{\sqrt{2}} 14$ (А/з);

в) $\log_{\frac{2}{3}} 32 - \log_{\frac{2}{3}} 243$ (Д/з).

Свойства логарифмов (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

16.1.а) $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6(2 \cdot 3) = \log_6 6 = 1.$

16.2.а) $\log_{144} 3 + \log_{144} 4 = \log_{144}(3 \cdot 4) = \log_{144} 12 = \log_{12^2} 12 = \frac{1}{2} =$ 0,5.

16.3.а) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{9} = \log_3 \left(7 : \frac{7}{9}\right) = \log_3 \left(\frac{7 \cdot 9}{7}\right) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2.$

16.4.а) $\log_{\sqrt{3}} 6 - \log_{\sqrt{3}} 2\sqrt{3} = \log_{\sqrt{3}}\left(6 : 2\sqrt{3}\right) = \log_{\sqrt{3}} \frac{6}{2\sqrt{3}} = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 1.$

Аудиторные задания (А/з): № 16.1 (б), № 16.2 (б), № 16.3 (б), № 16.4 (б).

Домашние задания (Д/з): № 16.1 (в), № 16.2 (в), № 16.3 (в), № 16.4 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$\log_a bc = \log_a b + \log_a c \iff \log_a b + \log_a c = \log_a bc;$

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \iff \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c};$

$\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}.$

10.4 Логарифмические уравнения

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 17.

Решите уравнение:

17.1.

а) $\log_2 x = 3$ (Пример);

б) $\log_7 x = -1$ (А/з);

в) $\log_{0,3} x = 2$ (Д/з).

17.2.

а) $\log_x 16 = 2$ (Пример);

б) $\log_x \frac{1}{8} = -3$ (А/з);

в) $\log_x \sqrt{3} = -1$ (Д/з).

17.3.

а) $\log_{\sqrt{2}}(2x+1) = 6$ (Пример);

б) $\log_{\sqrt{3}+1}\left(3x+2\sqrt{3}\right) = 2$ (А/з);

в) $\log_{2\sqrt{2}} 16x = 4$ (Д/з).

17.4.

а) $\log_{\cos x} \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$ (Пример);

б) $\log_{\cos x} \frac{1}{2} = 2$ (А/з);

в) $\log_{\sin x} \frac{1}{2} = 1$ (Д/з).

<u>Логарифмические уравнения (Примеры, А/з, Д/з)</u>

<u>Примеры</u>:

17.1.а) $\log_2 x = 3$;

$x = 2^3 = 8.$

17.2.а) $\log_x 16 = 2$;

$x^2 = 16$; $x = \pm 4$; $x_1 = -4$ – не удовлетворяет условию: $x > 0, x \neq 1$; $x_2 = 4$ – не удовлетворяет условию, $\Rightarrow$ $x = 4$.

17.3.а) $\log_{\sqrt{2}}(2x+1) = 6$;

$2x + 1 = \left(\sqrt{2}\right)^6$; $2x + 1 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6$; $2x + 1 = 2^3$;

$2x + 1 = 8; 2x = 7$; $x = 3{,}5$.

17.4.а) $\log_{cosx} \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$;

$(cosx)^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \pm arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k, k \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

<u>Аудиторные задания (А/з)</u>: № 17.1 (б), № 17.2 (б), № 17.3 (б), № 17.4 (б).

<u>Домашние задания (Д/з)</u>: № 17.1 (в), № 17.2 (в), № 17.3 (в), № 17.4 (в).

<u>А/з, Д/з (подготовка):</u>

$\log_a x = b$; $x = a^b$; $x > 0$.

$\log_x a = b$; $x^b = a$; $x = \sqrt[b]{a}$; $x > 0, x \neq 1$.

$\log_a f(x) = b$; $f(x) = a^b$; $f(x) > 0$.

$\log_{f(x)} a = b$; $(f(x))^b = a$; $f(x) = \sqrt[b]{a}$; $f(x) > 0, f(x) \neq 1$.

$sinx = a$; $x = (-1)^k arcsina + \pi k, k \in Z$.

$cosx = a$; $x = \pm arccosa + 2\pi k, k \in Z$.

10.5 Логарифмические неравенства

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 18.

Решите неравенство:

18.1.

а) $\log_2 x \geq 4$ (Пример);

б) $\log_{\frac{1}{2}} x > -3$ (А/з);

в) $\log_2 x < \frac{1}{2}$ (Д/з).

18.2.

а) $\log_5(3x+1) < 2$ (Пример);

б) $\log_{0,5} \frac{x}{3} \geq -2$ (А/з);

в) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{x}{5} > 1$ (Д/з).

18.3.

а) $\log_3 x > \log_3 72 - \log_3 8$ (Пример);

б) $3\log_{\frac{1}{7}} x < \log_{\frac{1}{7}} 9 + \log_{\frac{1}{7}} 3$ (А/з);

в) $\log_5 x - \log_5 35 \leq \log_5 \frac{1}{7}$ (Д/з).

18.4.

а) $\log_5 x > \log_5(3x-4)$ (Пример);

б) $\log_{0,6}(2x-1) < \log_{0,6} x$ (А/з);

в) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-9) \geq \log_{\frac{1}{3}} 4x$ (Д/з).

<u>Логарифмические неравенства (Примеры, А/з, Д/з)</u>

<u>Примеры</u>:

18.1.а) $\log_2 x \geq 4$;

$x \geq 2^4$; $x \geq 16$.

18.2.а) $\log_5(3x+1) < 2$;

$3x+1 < 5^2$; $3x+1 < 25$; $3x < 24$; $x < 8$;.

ОДЗ: $3x+1 > 0$; $3x > -1$; $x > -\frac{1}{3} \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}; 8\right)$ – решение неравенства.

18.3.а) $\log_3 x > \log_3 72 - \log_3 8$;

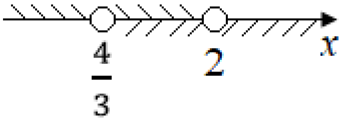
$\log_3 x > \log_3 \frac{72}{8}$; $\log_3 x > \log_3 9$; $\log_3 x > 2$; $x > 3^2$;

$x > 9$.

18.4.а) $\log_5 x > \log_5 (3x - 4)$;

$x > 3x - 4$; $-2x > -4$; $2x < 4$; $x < 2$.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ 3x - 4 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x > \frac{4}{3}, \end{cases} \Rightarrow x > \frac{4}{3}$.



$x \in \left(\frac{4}{3}; 2\right)$ – решение неравенства.

Аудиторные задания (А/з): № 18.1 (б), № 18.2 (б), № 18.3 (б), № 18.4 (б).

Домашние задания (Д/з): № 18.1 (в), № 18.2 (в), № 18.3 (в), № 18.4 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$\log_a x > b$;	$x > a^b$;	$a > 1$;	$x > 0$.
$\log_a x > b$;	$x < a^b$;	$0 < a < 1$;	$x > 0$.
$\log_a x \geq b$;	$x \geq a^b$;	$a > 1$;	$x > 0$.
$\log_a x \geq b$;	$x \leq a^b$;	$0 < a < 1$;	$x > 0$.
$\log_a x < b$;	$x < a^b$;	$a > 1$;	$x > 0$.
$\log_a x < b$;	$x > a^b$;	$0 < a < 1$;	$x > 0$.
$\log_a x \leq b$;	$x \leq a^b$;	$a > 1$;	$x > 0$.
$\log_a x \leq b$;	$x \geq a^b$;	$0 < a < 1$;	$x > 0$.

10.6 Дифференцирование показательной и логарифмической функций

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 19.

19.2. Найдите производную функции:

а) $f(x) = 4 - e^x$ (Пример);

б) $f(x) = 13e^x$ (А/з);

в) $f(x)=e^x-19$ (Д/з).

19.5. Найдите значение производной заданной функции в указанной точке x_0:

а) $y=e^x+x^2,\ x_0=0$ (Пример);

б) $y=e^x(x+1),\ x_0=-1$ (А/з);

в) $y=e^x-x,\ x_0=1$ (Д/з).

19.23. Найдите производную функции:

а) $y=x^2\ln x$ (Пример);

б) $y=\dfrac{\ln x}{x+1}$ (А/з);

в) $y=\dfrac{x}{\ln x}$ (Д/з).

19.25. Найдите значение производной заданной функции в указанной точке:

а) $y=\ln x+x,\ x_0=\dfrac{1}{7}$ (Пример);

б) $y=x^3\ln x,\ x_0=e$ (А/з);

в) $y=x^2-\ln x,\ x_0=0{,}5$ (Д/з).

Дифференцирование показательной и логарифмической функций (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

19.2.а) $f(x)=4-e^x$;

$f'(x)=-e^x$.

19.5.а) $y=e^x+x^2, x_0=0$;

$y'=e^x+2x$; $\qquad$ $y'(x_0)=y'(0)=e^0+2\cdot 0=1$.

19.23.а) $y=x^2lnx$;

$y'=2xlnx+x^2\cdot\frac{1}{x}=2xlnx+x=x(2lnx+1)$.

19.25.а) $y = lnx + x,\ x_0 = \frac{1}{7};$

$y' = \frac{1}{x} + 1;$ $\qquad y'(x_0) = y'\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{\frac{1}{7}} + 1 = 7 + 1 = 8.$

Аудиторные задания (А/з): № 19.2 (б), № 19.5 (б), № 19.23 (б), № 19.25 (б).

Домашние задания (Д/з): № 19.2 (в), № 19.5 (в), № 19.23 (в), № 19.25 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$e \approx 2{,}72.$

$\boxed{(e^x)' = e^x.}$

$\log_e a = lna$ – натуральный логарифм.

$ln1 = 0;\quad lne = 1;\quad lne^r = r;\qquad e^{lnx} = x;\qquad \log_a x = \frac{lnx}{lna}.$

$\boxed{(lnx)' = \frac{1}{x}.}$

$\boxed{(a^x)' = a^x lna.}$

$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{xlna}.}$

$e^0 = 1.$

10.7 Контрольная работа «Логарифмы. Логарифмическая функция»

Контрольная работа «Логарифмы. Логарифмическая функция»

(Подготовка)

1.Вычислить x, пользуясь определением логарифма:

1) $\log_{0,3} x = 3$; 2) $\log_{0,2} x = 4$.

2.Вычислить:

1) $2^{\log_2 25}$; 2) $3^{\log_3 25}$.

3.Решить логарифмические равнения:

1) $\log_3(1-x) - 2 = 0$; 2) $\log_{\frac{1}{4}}(4 - 0{,}2x) - \frac{1}{2} = 0$.

4.Решить логарифмические неравенства:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+1\le 0$; 2) $2-\log_2(3-x)\ge 0$.

1.

1) $\log_{0,3} x = 3$; $x = 0,3^3 = 0,027$;

2) $\log_{0,2} x = 4$; $x = 0,2^4 = 0,0016$.

2.

1) $2^{\log_2 25} = 25$; 2) $3^{\log_3 25} = 25$.

3.

1) $\log_3(1-x) - 2 = 0$; $\log_3(1-x) = 2$; $1 - x = 3^2$; $1 - x = 9$; $x = -8$; ОДЗ: $1 - x > 0$; $x < 1$; $x = -8 \in$ ОДЗ.

2) $\log_{\frac{1}{4}}(4 - 0,2x) - \frac{1}{2} = 0$; $\log_{\frac{1}{4}}(4 - 0,2x) = \frac{1}{2}$; $4 - 0,2x = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; $4 - 0,2x = \frac{1}{2}$; $4 - 0,2x = 0,5$; $0,2x = 3,5$;

$2x = 35$; $x = \frac{35}{2} = 17,5$;

ОДЗ: $4 - 0,2x > 0$; $-0,2x > -4$; $0,2x < 4$;

$2x < 40$; $x < 20$; $x = 17,5 \in$ ОДЗ.

4.

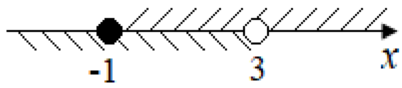
1) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) + 1 \le 0$; $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \le -1$; $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \le \log_{\frac{1}{2}} 2$; $2x - 1 \ge 2$; $2x \ge 3$; $x \ge \frac{3}{2}$;

ОДЗ: $2x - 1 > 0$; $2x > 1$; $x > \frac{1}{2} \Rightarrow x \ge \frac{3}{2}$ – решение неравенства.

2) $2 - \log_2(3-x) \ge 0$; $-\log_2(3-x) \ge -2$; $\log_2(3-x) \le 2$; $\log_2(3-x) \le \log_2 4$; $3 - x \le 4$; $-x \le 1$;

$x \ge -1$;

ОДЗ: $3 - x > 0$; $-x > -3$; $x < 3$;



$x \in [-1; 3)$ – решение неравенства.

Контрольная работа «Логарифмы. Логарифмическая функция»

1.Вычислить x, пользуясь определением логарифма:

1) $\log_{0,5} x = \frac{1}{2}$; 2) $\log_{\sqrt[3]{5}} x = 6$.

2.Вычислить:

1) $5^{-\log_5 3}$; 2) $4^{-\log_4 3}$.

3.Решить логарифмические равнения:

1) $\log_5 2x + \log_5 25 = 1$; 2) $\log_2 16 - \log_2 \frac{2}{x} = 5$.

4.Решить логарифмические неравенства:

1) $\log_2 \frac{x^2+3}{x+3} \geq 1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x^2+3}{x-2} \leq 0$.

10.8 Логарифмы в профессиональных задачах

Используемый источник – [14].

На пути своего развития математика очень тесно взаимодействует с техническими науками.

Зачастую математический аппарат используется в решении научно-технических задач.

Инженерная практика, в свою очередь, является стимулом в развитии математических наук.

Решение физических и технических проблем нередко прибегает к помощи различных математических методов, облегчающих и разъясняющих поставленную задачу.

Логарифмы с их особенными свойствами находят очень широкое применение в упрощении сложных вычислений различных задач.

Логарифм в переводе с греческого языка – «число, меняющее отношение».

Лаплас говорил, что изобретение логарифмов, «сократив труд астронома, удвоило его жизнь».

В современной жизни функция логарифма просто незаменима в человеческой деятельности.

Обычно на практике используют вещественные (натуральные) логарифмы, десятичные и двоичные логарифмы.

Суть метода «Нахождение законов, содержащих логарифмы» заключается в приведении различных законов к линейной форме.

Задача «Логарифмы в профессиональных задачах» (Подготовка)

Задача. Экспериментально измеренные значения тока, проходящего через резистор, и рассеиваемой им мощности представлены в таблице. Определить закон рассеивания мощности тока.

Таблица

Ток I [А]	1,8	3,2	3,7	4,7	6,4
Мощность P [Вт]	95	276	364	632	1045

При решении задачи можете пользоваться найденными значениями lgP и lgI:

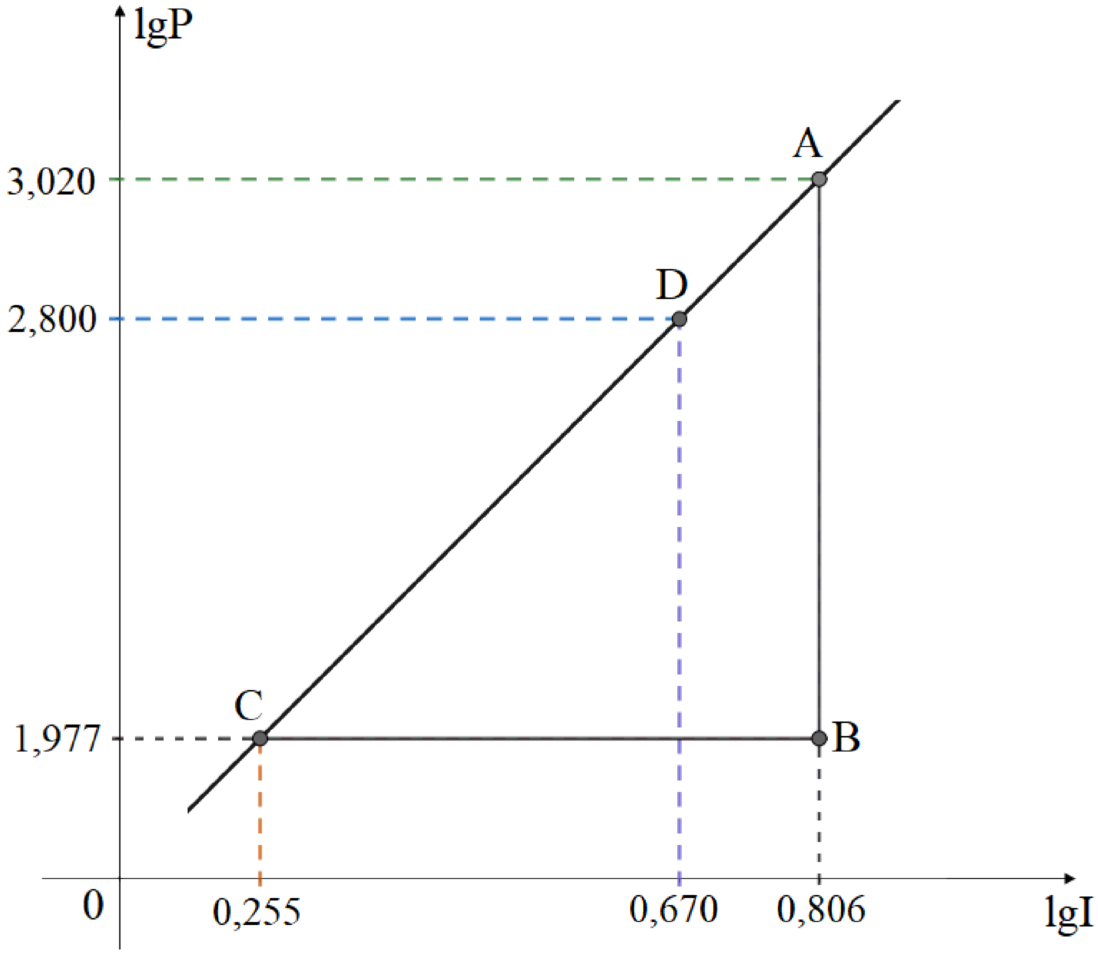
I [А]	1,8	3,2	3,7	4,7	6,4
lgI	0,255	0,505	0,568	0,670	0,806
P [Вт]	95	276	364	632	1045
lgP	1,977	2,441	2,561	2,800	3,020

Решение:

Пусть $P = RI^b,\ R, b - const.$

$lgP = lg(RI^b)$; $\quad lgP = lgR + lgI^b$; $\quad \boxed{lgP = b \cdot lgI + lgR.}$

Построим график зависимости lgP от lgI по найденным значениям:



Угол наклона b определяем по графику:

$b = \frac{AB}{BC} = \frac{3{,}020-1{,}977}{0{,}806-0{,}255} \approx 1{,}893.$

Обозначив произвольную точку графика (точка D), в которой $lgI = 0{,}670$, а $lgP = 2{,}800$, подставим эти данные в доказанный нами закон:

$2{,}800 = 1{,}893 \cdot 0{,}670 + lgR;$

$lgR = 2{,}800 - 1{,}268 = 1{,}532;$

$R = 10^{1{,}532} \approx 34{,}041.$

Следовательно, рассеивание мощности тока происходит по закону:

$P = 34{,}041 \cdot I^{1{,}893}.$

Тест «Логарифмы в профессиональных задачах»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.На пути своего развития математика очень тесно взаимодействует с ____________ науками.

а) естественными; б) прикладными; в) точными; г) техническими.

2.Зачастую ______________ аппарат используется в решении научно-технических задач.

а) не математический; б) алгебраический; в) математический; г) геометрический.

3.Инженерная практика, в свою очередь, является стимулом в развитии _____________ наук.

а) физических; б) математических; в) не математических; г) не физических.

4.Решение физических и технических проблем нередко прибегает к помощи различных ______________ методов, облегчающих и разъясняющих поставленную задачу.

а) математических; б) физических; в) не математических; г) не физических.

5.____________ с их особенными свойствами находят очень широкое применение в упрощении сложных вычислений различных задач.

а) степени; б) интегралы; в) производные; г) логарифмы.

6.___________ в переводе с греческого языка – «число, меняющее отношение».

а) степень; б) интеграл; в) логарифм; г) производная.

7.Лаплас говорил, что изобретение ___________, «сократив труд астронома, удвоило его жизнь».

а) степеней; б) логарифмов; в) интегралов; г) производных.

8.В современной жизни функция __________ просто незаменима в человеческой деятельности.

а) логарифма; б) степени; в) интеграла; г) производной.

9.Обычно на практике используют вещественные (натуральные) логарифмы, десятичные и ___________ логарифмы.

а) не двойные; б) двойные; в) не двоичные; г) двоичные.

10.Суть метода «Нахождение законов, содержащих логарифмы» заключается в приведении различных законов к __________ форме.

а) канонической; б) квадратичной; в) линейной; г) нелинейной.

Задача «Логарифмы в профессиональных задачах»

11.Экспериментально измеренные значения тока, проходящего через резистор, и рассеиваемой им мощности представлены в таблице. Определить закон рассеивания мощности тока.

Таблица

Ток I [А]	1,9	3,1	3,8	4,6	6,5
Мощность P [Вт]	105	266	374	622	1055

При решении задачи можете пользоваться найденными значениями lgP и lgI:

I [А]	1,9	3,1	3,8	4,6	6,5
lgI	0,279	0,491	0,58	0,663	0,813
P [Вт]	105	266	374	622	1055
lgP	2,021	2,425	2,573	2,794	3,023

РАЗДЕЛ 11. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ, ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

11.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 20.

Для функции *y*=*f*(*x*) найдите первообразную:

20.11.

а) $f(x) = x^2 + x^{16}$ (Пример);

б) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{x^2}$ (А/з);

в) $f(x) = x^{13} + x^{18}$ (Д/з).

20.12.

а) $f(x) = -3\sin x + 2\cos x$ (Пример);

б) $f(x) = \dfrac{4}{\sin^2 x} - \dfrac{9}{\cos^2 x}$ (А/з);

в) $f(x) = -4\cos x + \dfrac{2}{\sin^2 x}$ (Д/з).

20.13.

а) $f(x) = \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ (Пример);

б) $f(x) = \dfrac{1}{2 - 5x}$ (А/з);

в) $f(x) = \cos(4x - 3)$ (Д/з).

20.14.

а) $f(x) = -\dfrac{1}{(6x+1)^2}$ (Пример);

б) $f(x) = \dfrac{1}{(8x-3)^2}$ (А/з);

в) $f(x) = \dfrac{1}{(7x-3)^2}$ (Д/з).

Первообразная и неопределенный интеграл (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

20.11.а) $f(x) = x^2 + x^{16}$; $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^{17}}{17}$.

20.12.а) $f(x) = -3sinx + 2cosx$; $F(x) = 3cosx + 2sinx$.

20.13.а) $f(x) = sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$; $F(x) = -\frac{1}{3}cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.

20.14.а) $f(x) = -\frac{1}{(6x+1)^2}$; $F(x) = \frac{1}{6x+1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6(6x+1)}$.

Аудиторные задания (А/з): № 20.11 (б), № 20.12 (б), № 20.13 (б), № 20.14 (б).

Домашние задания (Д/з): № 20.11 (в), № 20.12 (в), № 20.13 (в), № 20.14 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

Функция $y = f(x)$	Первообразная $y = F(x)$	Функция $y = f(x)$	Первообразная $y = F(x)$
$x^r, r \neq -1$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$k \cdot f(x)$	$k \cdot F(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$f(kx+m)$	$\frac{1}{k} \cdot F(kx+m)$
$sinx$	$-cosx$	$f_1(x) + f_2(x)$	$F_1(x) + F_2(x)$
$cosx$	$sinx$	$f_1(x) - f_2(x)$	$F_1(x) - F_2(x)$
$\frac{1}{sin^2x}$	$-ctgx$	$cos(kx+m)$	$\frac{1}{k} \cdot sin(kx+m)$
$\frac{1}{cos^2x}$	tgx	$\frac{1}{kx+m}$	$\frac{1}{k} \cdot \ln\lvert kx+m\rvert$

11.2 Определенный интеграл

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 21.

Вычислите определенный интеграл:

21.1.

а) $\int_{-\frac{2}{3}}^{1} x^3 dx$ (Пример); б) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^2}$ (А/з); в) $\int_{1}^{2} x^4 dx$ (Д/з).

21.15.

а) $\int_{0}^{1} e^x dx$ (Пример); б) $\int_{-1}^{1} 3e^x dx$ (А/з); в) $\int_{-1}^{0} \frac{1}{2} e^x dx$ (Д/з).

21.5.

а) $\int_{1}^{2} \frac{4x^5 - 3x^4 + x^3 - 1}{x^2} dx$ (Пример);

б) $\int_{-2}^{-1} \frac{5x^7 - 4x^6 + 2x}{x^3} dx$ (А/з);

в) $\int_{2}^{3} \frac{6x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 1}{x^2} dx$ (Д/з).

21.7.

а) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$ (Пример); б) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ (А/з); в) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ (Д/з).

Определенный интеграл (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

21.1.а) $\int_{-\frac{2}{3}}^{1} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-\frac{2}{3}}^{1} = \frac{1}{4} \cdot \left(1^4 - \left(-\frac{2}{3}\right)^4\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{16}{81}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{81-16}{81} = \frac{1}{4} \cdot \frac{65}{81} = \frac{65}{324}$.

21.5.а) $\int_{1}^{2} \frac{4x^5-3x^4+x^3-1}{x^2} dx = \int_{1}^{2} \left(4x^3 - 3x^2 + x - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_{1}^{2} 4x^3 dx - \int_{1}^{2} 3x^2 dx + \int_{1}^{2} x dx - \int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} dx = 4\int_{1}^{2} x^3 dx - 3\int_{1}^{2} x^2 dx + \int_{1}^{2} x dx - \int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2} = 4 \cdot$

$\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 - 3\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 + \left.\frac{1}{x}\right|_1^2 = x^4|_1^2 - x^3|_1^2 + \frac{1}{2}\cdot x^2|_1^2 + \left.\frac{1}{x}\right|_1^2 = (2^4 - 1^4) - (2^3 - 1^3) + \frac{1}{2}\cdot(2^2 - 1^2) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right) = (16-1) - (8-1) + \frac{1}{2}\cdot(4-1) + \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 15 - 7 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 8 + 1 = 9.$

21.7.а) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sinx dx = (-cosx)|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\left(cos\pi - cos\frac{\pi}{2}\right) = -(-1-0) = 1.$

21.15.а) $\int_0^1 e^x dx = e^x|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$

Аудиторные задания (А/з): № 21.1 (б), № 21.5 (б), № 21.7 (б), № 21.15 (б).

Домашние задания (Д/з): № 21.1 (в), № 21.5 (в), № 21.7 (в), № 21.15 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$ – формула Ньютона-Лейбница.

$F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$

Свойства определенного интеграла

1) $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$

Функция $y = f(x)$	Первообразная $F(x)$
e^x	e^x
ke^x	ke^x

11.3 Контрольная работа «Первообразная функции, ее применение»

Контрольная работа «Первообразная функции, ее применение» (Подготовка)

1.Основные свойства неопределенного интеграла:

1) $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

2) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx\,, a \neq 0.$

3) $\int\big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

2.Первообразные элементарных функций:

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq 1.$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1.$

4) $\int e^x dx = e^x + C.$

5) $\int sinxdx = -cosx + C.$

6) $\int cosxdx = sinx + C.$

7) $\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + C.$

8) $\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C.$

9) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctgx + C,\ a \neq 0.$

10) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0.$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + C,\ a \neq 0.$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C,\ a \neq 0.$

Контрольная работа «Первообразная функции, ее применение»

(Подготовка)

1.Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x-3}{x^2}dx;$ 2) $\int \frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^3}dx.$

2.Вычислить интегралы:

1) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx;$ 2) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx.$

3.Вычислить интегралы:

1) $\int_2^3 5x^2dx;$ 2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$

1.

1) $\int \frac{x-3}{x^2}dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)dx = \int \frac{dx}{x} - 3\int \frac{dx}{x^2} = \ln|x| + \frac{3}{x} + C.$

2) $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx = \int \frac{x^4+2x^2+1}{x^3}dx = \int\left(x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx = \int xdx + 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^3} = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C.$

2.

1) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx - \int x^{-\frac{3}{4}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}} + C = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + C.$

2) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx = \int\left(x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{4-3}{6}} - x^{-\frac{1}{4}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{1}{6}} - x^{-\frac{1}{4}}\right)dx = \int x^{\frac{1}{6}}dx - \int x^{-\frac{1}{4}}dx + C = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C = \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$

3.

1) $\int_2^3 5x^2dx = 5\int_2^3 x^2dx = 5\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{5}{3}\cdot(3^3-2^3) = \frac{5}{3}\cdot(27-8) = \frac{5}{3}\cdot 19 = \frac{95}{3} = 31\frac{2}{3}$.

2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2x} = tgx\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

Контрольная работа «Первообразная функции, ее применение»

1.Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;   2) $\int \frac{x+4}{2\sqrt{x}}dx$.

2.Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x}dx$;   2) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$.

3.Вычислить интегралы:

1) $\int_0^4 \left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx$;   2) $\int_0^4 xe^{-x^2}dx$.

11.4 Применения интеграла в профессиональных задачах

Используемый источник – [15].

Сегодня трудно представить научно-техническую деятельность, где бы не использовались фундаментальные исследования в области математики.

Все технические инновации, которые окружают нас в повседневной жизни, есть результат плодотворного симбиоза техники и математики.

Взаимодействие прикладных и математических дисциплин приводит к их обоюдному совершенствованию.

В современном мире деятельность инженера не утратила своей сути, но стала более разнообразной по форме и содержанию.

Инженерное дело в ходе развития постоянно расширяет широкую сферу своего приложения и тем самым, отвечает все более обширным и сложным техническим задачам.

Вместе с расширением прикладной сферы инженерного дела происходит усиление его специализации.

Вследствие развития науки и техники происходит расщепление основных специальностей, появляются новые, ориентированные на более узкий круг практических задач.

Инженер, являясь специалистом в узкой области, обязан базировать свои знания на прочном фундаменте математических и естественных наук.

Современный инженер-электротехник должен превосходно владеть методами интегрирования для решения конкретных практических задач в своей профессиональной сфере.

Для удобства вычисления определенного интеграла применяют формулу Ньютона-Лейбница.

Задача «Применение интеграла в профессиональных задачах» (Подготовка)

Задача. Сила тока в проводнике меняется со временем по закону $I = 2 + 3t^2$. Определить, какое количество электричества проходит через поперечное сечение проводника за время от 2 до 5 секунд.

Решение:

$Q = \int_2^5 I(t)\,dt = \int_2^5 (2 + 3t^2)\,dt = (2t + t^3)|_2^5 = (2 \cdot 5 + 125) - (2 \cdot 2 + 8) = 135 - 12 = 123.$

Тест «Применение интеграла в профессиональных задачах»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Сегодня трудно представить научно-техническую деятельность, где бы не использовались ________________ исследования в области математики.

а) фундаментальные; б) не фундаментальные; в) прикладные; г) не прикладные.

2.Все технические инновации, которые окружают нас в повседневной жизни, есть результат плодотворного симбиоза техники и _____________.

а) алгебры; б) математики; в) физики; г) геометрии.

3.Взаимодействие прикладных и _______________ дисциплин приводит к их обоюдному совершенствованию.

а) физических; б) не математических; в) математических; г) не физических.

4.В современном мире деятельность _________ не утратила своей сути, но стала более разнообразной по форме и содержанию.

а) не техника; б) не инженера; в) техника; г) инженера.

5.___________ дело в ходе развития постоянно расширяет широкую сферу своего приложения и тем самым, отвечает все более обширным и сложным техническим задачам.

а) инженерное; б) не инженерное; в) техническое; г) не техническое.

6.Вместе с расширением прикладной сферы _____________ дела происходит усиление его специализации.

а) не инженерного; б) инженерного; в) технического; г) не технического.

7.Вследствие развития науки и техники происходит расщепление основных специальностей, появляются новые, ориентированные на более узкий круг __________ задач.

а) не теоретических; б) теоретических; в) практических; г) не практических.

8.__________, являясь специалистом в узкой области, обязан базировать свои знания на прочном фундаменте математических и естественных наук.

а) техник; б) не техник; в) не инженер; г) инженер.

9.Современный инженер-электротехник должен превосходно владеть методами _______________ для решения конкретных практических задач в своей профессиональной сфере.

а) интегрирования; б) не интегрирования; в) дифференцирования; г) не дифференцирования.

10.Для удобства вычисления ______________ интеграла применяют формулу Ньютона-Лейбница.

а) неопределенного; б) определенного; в) криволинейного; г) поверхностного.

Задача «Применение интеграла в профессиональных задачах»

11.Сила тока в проводнике меняется со временем по закону $I = 3 + 4t^2$. Определить, какое количество электричества проходит через поперечное сечение проводника за время от 3 до 6 секунд.

РАЗДЕЛ 12. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

12.1 Вероятность и геометрия

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 22.

Тест «Вероятность и геометрия»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1. Вероятностью события A при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие A, к общему числу (_______________ между собой) исходов этого испытания.

а) общих; б) различных; в) равновозможных; г) равных.

2.Если площадь $S(A)$ фигуры A разделить на площадь $S(X)$ фигуры X, которая _______ содержит фигуру A, то получится вероятность того, что случайно выбранная точка фигуры X окажется в фигуре A:

$$P = \frac{S(A)}{S(X)}.$$

а) иногда; б) немного; в) частично; г) целиком.

Задачи «Вероятность и геометрия»

1. Найти вероятность случайного события А, если число N всех возможных исходов данного опыта равно 100, а количество N(A) тех исходов опыта, в которых наступает событие А, равно 50.
2. Найти вероятность того, что случайно выбранная точка фигуры X окажется в фигуре А, если площадь S(A) фигуры А равна 3, а площадь S(X) фигуры X равна 4.

Задачи «Вероятность и геометрия» (Подготовка)

1. Найти вероятность случайного события А, если число N всех возможных исходов данного опыта равно 100, а количество N(A) тех исходов опыта, в которых наступает событие А, равно 50.

2. Найти вероятность того, что случайно выбранная точка фигуры X окажется в фигуре А, если площадь S(A) фигуры А равна 3, а площадь S(X) фигуры X равна 4.

Решение:

1.

$N = 50,\ N(A) = 5;$

$P = \frac{N(A)}{N} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$

2.

$S(A) = 4,\ S(X) = 5;$

$P = \frac{S(A)}{S(X)} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$

12.2 Независимые повторения испытаний с двумя исходами

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 23.

Тест «Независимые повторения испытаний с двумя исходами»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Про n независимых повторений одного и того же испытания с ______ возможными исходами более кратко говорят, как об n испытаниях Бернулли.

а) тремя; б) двумя; в) несколькими; г) n.

2.Распределение числа «успехов» в испытаниях Бернулли по вероятности их наступления, как правило, называют _____________ распределением.

а) биномиальным; б) полиномиальным; в) простым; г) сложным.

3.Наиболее вероятное число «успехов» в n испытаниях Бернулли ___________ равно np, где р – вероятность «успеха» в отдельном испытании.

а) иногда; б) точно; в) приближенно; г) слабо.

Задачи «Независимые повторения испытаний с двумя исходами»

1.Найти вероятность наступления ровно 3 «успехов» в 3 независимых повторениях одного и того же испытания, если вероятность «успеха» равна 0,3.

2.Найти наиболее вероятное число «успехов» в 3 испытаниях Бернулли, если вероятность «успеха» в отдельном испытании равна 0,3 (в ответе округлить до целого числа).

Задачи «Независимые повторения испытаний с двумя исходами» (Подготовка)

1.Найти вероятность наступления ровно 5 «успехов» в 5 независимых повторениях одного и того же испытания, если вероятность «успеха» равна 0,5.

2.Найти наиболее вероятное число «успехов» в 5 испытаниях Бернулли, если вероятность «успеха» в отдельном испытании равна 0,58 (в ответе округлить до целого числа).

Решение:

1.

$P_n(k)$ – вероятность наступления ровно k «успехов» в n независимых повторениях одного и того же испытания.

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ – вероятность.

p – вероятность «успеха»; $q = 1 - p$ – вероятность «неудачи» в отдельном испытании;

$p = 0{,}5$; $k = 5$; $n = 5$; $C_n^n = 1$; $C_5^5 = 1$; $q^0 = 1$.

$P_5(5) = C_5^5 p^5 q^0 = 0{,}5^5 = 0{,}03125.$

2.

$n \cdot p$ – наиболее вероятное число «успехов» в n испытаниях Бернулли.

p – вероятность «успеха» в отдельном испытании;

$n = 5$; $p = 0{,}58$.

$n \cdot p = 5 \cdot 0{,}58 = 2{,}9 \approx 3$.

12.3 Статистические методы обработки информации

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 24.

Тест «Статистические методы обработки информации»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Одна из основных задач статистики состоит в надлежащей __________ информации.

а) переоценке; б) оценке; в) обработке; г) проверке.

2.Кратность варианты – число, показывающее, сколько раз эта варианта встретилась в данном __________.

а) наборе; б) объекте; в) опыте; г) измерении.

3.Мода ряда данных – это варианта, которая встречается в ряду ______ остальных вариант.

а) реже; б) чаще; в) больше; г) меньше.

4.Значение квадратного корня из дисперсии называют средним ______________ отклонением и обозначают σ: $\sigma = \sqrt{D}$.

а) квадратическим; б) кубическим; в) малым; г) большим.

Задачи «Статистические методы обработки информации»

1.Определить частоту варианты, если кратность варианты равна 5, а объём измерения равен 100.

2.Найти среднее значение данных измерения, представленных в таблице.

Таблица

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
5	6	3	4	7	2

Задачи «Статистические методы обработки информации» (Подготовка)

1.Определить частоту варианты, если кратность варианты равна 10, а объём измерения равен 400.

2.Найти среднее значение данных измерения, представленных в таблице.

Таблица

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
8	10	9	11	13

Решение:

1.

$\text{Частота варианты} = \frac{\text{Кратность варианты}}{\text{Объем измерения}}.$

$\text{Кратность варианты} = 10.$

$\text{Объем измерения} = 400.$

$\text{Частота варианты} = \frac{10}{400} = 0{,}025.$

2.

$M = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ – среднее значение данных измерения.

$M = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5} = \frac{8+10+9+11+13}{5} = 10{,}2.$

12.4 Гауссова кривая. Закон больших чисел

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 25.

Тест «Гауссова кривая. Закон больших чисел»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Для каждого _____________ числа r при неограниченном увеличении числа n независимых повторений испытания с двумя исходами вероятность того, что частота $\frac{k}{n}$ появления «успеха» отличается менее чем на r от вероятности p «успеха» в одном отдельном испытании, стремится к единице.

а) целого; б) отрицательного; в) положительного; г) натурального.

2.При большом числе независимых повторений одного и того же испытания в неизменных условиях практически достоверно, что частота появления ______________ случайного события совпадает (с заданной степенью точности) с некоторым постоянным числом.

а) точного; б) фиксированного; в) полного; г) неполного.

Задачи «Гауссова кривая. Закон больших чисел»

1.Найти вероятность наступления 50 «успехов» в 100 независимых повторениях одного и того же испытания с двумя исходами, если вероятность «успеха» равна 0,6. При решении задачи использовать табличное значение гауссовой функции $\varphi(2{,}04) = 0{,}0498$.

2.Найти вероятность того, что число «успехов» в 90 испытаниях Бернулли находится в пределах от 40 до 60, если вероятность «успеха» равна 0,6. При решении задачи использовать табличные значения дополнительной гауссовой функции $\Phi(3) = 0{,}4987;\ \Phi(1{,}29) = 0{,}4015$.

Задачи «Гауссова кривая. Закон больших чисел» (Подготовка)

1.$y = \varphi(x)$ – гауссова функция чётная ($\varphi(-x) = \varphi(x)$).

2.$y = \Phi(x)$ – дополнительная гауссова функция нечётная ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$).

Задачи «Гауссова кривая. Закон больших чисел» (Подготовка)

1.Найти вероятность наступления 70 «успехов» в 120 независимых повторениях одного и того же испытания с двумя исходами, если вероятность «успеха» равна 0,5. При решении задачи использовать табличное значение гауссовой функции $\varphi(1{,}83) = 0{,}0748$.

2.Найти вероятность того, что число «успехов» в 80 испытаниях Бернулли находится в пределах от 35 до 50, если вероятность «успеха» равна 0,5. При решении задачи использовать табличные значения дополнительной гауссовой функции $\Phi(1{,}12) = 0{,}3686$; $\Phi(2{,}2) = 0{,}4861$.

1.Для вычисления вероятности $P_n(k)$ следует:

1) проверить справедливость равенства $n \cdot p \cdot q \geq 10$;

2) вычислить x_k по формуле $x_k = \frac{k-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$;

3) по таблице значений гауссовой функции вычислить $\varphi(x_k)$;

4) предыдущий результат разделить на $\sqrt{n \cdot p \cdot q}$:

$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x_k)}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$;

$k = 70,\ n = 120,\ p = 0{,}5$ – вероятность «успеха»; $q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5;\ \varphi(1{,}83) = 0{,}0748$;

1) $n \cdot p \cdot q = 120 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 30 > 10$;

2) $x_k = \frac{k-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} = \frac{70-120\cdot 0{,}5}{\sqrt{120\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}} \approx 1{,}83$;

3) $\varphi(x_k) = \varphi(1{,}83) = 0{,}0748$;

4) $P_n(k) = P_{120}(70) \approx \frac{\varphi(x_k)}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} = \frac{0{,}0748}{\sqrt{120\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}} \approx 0{,}014$.

2.Для вычисления вероятности $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$ следует:

1) проверить справедливость равенства $n \cdot p \cdot q \geq 10$;

2) вычислить x_1 и x_2 по формулам $x_1 = \frac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$, $x_2 = \frac{k_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$;

3) по таблице вычислить значения $\Phi(x_1)$ и $\Phi(x_2)$;

4) найти разность $\Phi(x_2) - \Phi(x_1)$:

$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$;

$n = 80,\ k_1 = 35,\ k_2 = 50,\ p = 0{,}5$ – вероятность «успеха»; $q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$; $\Phi(1{,}12) = 0{,}3686$; $\Phi(2{,}2) = 0{,}4861$.

1) $n \cdot p \cdot q = 80 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 20 > 10$;

2) $x_1 = \frac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{35 - 80 \cdot 0{,}5}{\sqrt{80 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \approx -1{,}12$; $x_2 = \frac{k_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{50 - 80 \cdot 0{,}5}{\sqrt{80 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \approx 2{,}2$;

3) $\Phi(x_1) = \Phi(-1{,}12) = -\Phi(1{,}12) = -0{,}3686$; $\Phi(x_2) = \Phi(2{,}2) = 0{,}4861$.

4) $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = P_{80}(35 \leq k \leq 50) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0{,}4861 + 0{,}3686 = 0{,}8547$.

12.5 Контрольная работа «Элементы теории вероятностей и математической статистики»

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 22-25.

Контрольная работа «Элементы теории вероятностей и математической статистики»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

§ 22. Вероятность и геометрия

1. Вероятностью события A при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает

событие A, к общему числу (_______________ между собой) исходов этого испытания.

а) общих; б) различных; в) равновозможных; г) равных.

2.Если площадь $S(A)$ фигуры A разделить на площадь $S(X)$ фигуры X, которая _______ содержит фигуру A, то получится вероятность того, что случайно выбранная точка фигуры X окажется в фигуре A:

$$P = \frac{S(A)}{S(X)}.$$

а) иногда; б) немного; в) частично; г) целиком.

§ 23. Независимые повторения испытаний с двумя исходами

3.Про n независимых повторений одного и того же испытания с ______ возможными исходами более кратко говорят, как об n испытаниях Бернулли.

а) тремя; б) двумя; в) несколькими; г) n.

4.Распределение числа «успехов» в испытаниях Бернулли по вероятности их наступления, как правило, называют _____________ распределением.

а) биномиальным; б) полиномиальным; в) простым; г) сложным.

§ 24. Статистические методы обработки информации

5.Одна из основных задач статистики состоит в надлежащей __________ информации.

а) переоценке; б) оценке; в) обработке; г) проверке.

6.Кратность варианты – число, показывающее, сколько раз эта варианта встретилась в данном __________.

а) наборе; б) объекте; в) опыте; г) измерении.

§ 25. Гауссова кривая. Закон больших чисел

7.Для каждого _____________ числа r при неограниченном увеличении числа n независимых повторений испытания с двумя исходами вероятность того, что частота $\frac{k}{n}$ появления «успеха» отличается менее чем на r от вероятности p «успеха» в одном отдельном испытании, стремится к единице.

а) целого; б) отрицательного; в) положительного; г) натурального.

8.При большом числе независимых повторений одного и того же испытания в неизменных условиях практически достоверно, что частота появления ______________ случайного события совпадает (с заданной степенью точности) с некоторым постоянным числом.

а) точного; б) фиксированного; в) полного; г) неполного.

12.6 Вероятность в профессиональных задачах. Статистические методы в профессиональных задачах

Вероятность в профессиональных задачах

Используемый источник – [16].

Для количественного сравнения случайных событий между собой по частоте их появления используют вероятность события.

Вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления случайного события при конкретных условиях.

Возможны два метода определения безусловной вероятности случайного события – классический и статистический.

На практике общее число элементарных исходов случайного события, а также «благоприятных» элементарных исходов, крайне трудно определить.

Далеко не всегда удаётся доказать правомерность допущения о равной вероятности появления тех или иных случайных событий в рамках данной группы.

В электроэнергетике вместо классической вероятности случайного события значительно чаще используется статистическая вероятность.

Под статистической вероятностью случайного события А понимают относительную частоту появления случайного события при достаточно большом числе испытаний n.

Количественная оценка наиболее просто осуществляется для дискретной случайной величины.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины x называют сумму произведений всех её возможных значений x_i на соответствующие вероятности их появления p_i.

В общем случае M(x) характеризует среднее значение анализируемой случайной величины x.

Часто необходимо знать, насколько отклоняется случайная величина от своего математического ожидания.

Квадратный корень из величины дисперсии называется среднеквадратичным отклонением – электрическим стандартом σ(x) случайной величины x.

Функция F(x) называется интегральной функцией распределения вероятностей или законом распределения вероятностей случайной величины.

Тест «Вероятность в профессиональных задачах»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Для ________________ сравнения случайных событий между собой по частоте их появления используют вероятность события.

а) количественного; б) качественного; в) не количественного; г) не качественного.

2.Вероятность есть число, характеризующее степень ______________ появления случайного события при конкретных условиях.

а) не возможности; б) возможности; в) надежности; г) не надежности.

3.Возможны два метода определения __________ вероятности случайного события – классический и статистический.

а) не условной; б) не безусловной; в) безусловной; г) условной.

4.На практике общее число элементарных исходов __________ события, а также «благоприятных» элементарных исходов, крайне трудно определить.

а) конкретного; б) не конкретного; в) не случайного; г) случайного.

5.Далеко не всегда удаётся доказать правомерность допущения о равной вероятности появления тех или иных __________ событий в рамках данной группы.

а) случайных; б) не конкретных; в) не случайных; г) конкретных.

6.В электроэнергетике вместо классической вероятности ____________ события значительно чаще используется статистическая вероятность.

а) не конкретного; б) случайного; в) не случайного; г) конкретного.

7.Под статистической вероятностью ___________ события А понимают относительную частоту появления случайного события при достаточно большом числе испытаний n.

а) не конкретного; б) не случайного; в) случайного; г) конкретного.

8.Количественная оценка наиболее просто осуществляется для дискретной _________ величины.

а) не конкретной; б) не случайной; в) конкретной; г) случайной.

9.Математическим ожиданием дискретной __________ величины x называют сумму произведений всех её возможных значений x_i на соответствующие вероятности их появления p_i.

а) случайной; б) не конкретной; в) конкретной; г) не случайной.

10.В общем случае M(x) характеризует среднее значение анализируемой _________ величины x.

а) не конкретной; б) случайной; в) конкретной; г) не случайной.

11.Часто необходимо знать, насколько отклоняется __________ величина от своего математического ожидания.

а) не конкретная; б) конкретная; в) случайная; г) не случайная.

12.Квадратный корень из величины дисперсии называется среднеквадратичным отклонением – электрическим стандартом ϭ(х) ___________ величины х.

а) не конкретной; б) конкретной; в) не случайной; г) случайной.

13.Функция F(x) называется интегральной функцией распределения вероятностей или законом распределения вероятностей _________ величины.

а) случайной; б) конкретной; в) не случайной; г) не конкретной.

Задачи «Вероятность в профессиональных задачах»

14.На испытание поставлено 1500 однотипных электрических изделий; за 2800 час. отказало 150 изделий. Требуется определить $p(t)$, $q(t)$ при t=2800 час.

15.В электрическую цепь последовательно включены 5 элементов, работающие независимо друг от друга. Вероятность отказов первого, второго, третьего, четвертого, пятого элементов соответственно равны 0,1; 0,15; 0,2; 0,15; 0,1. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет (событие А).

Задачи «Вероятность в профессиональных задачах» (Подготовка)

1.На испытание поставлено 1000 однотипных электрических изделий; за 3000 час. отказало 80 изделий. Требуется определить $p(t)$, $q(t)$ при t=3000 час.

2.В электрическую цепь последовательно включены 5 элементов, работающие независимо друг от друга. Вероятность отказов первого, второго, третьего, четвертого, пятого элементов соответственно равны 0,1; 0,2; 0,3; 0,2; 0,1. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет (событие А).

1.

$N = 1000;\ n(t) = 1000 - 80 = 920;$

$p(t) = \frac{n(t)}{N},\ q(t) = \frac{N-n(t)}{N};$

$p(3000) = \frac{n(t)}{N} = \frac{920}{1000} = 0{,}92;$

$q(3000) = \frac{N-n(t)}{N} = \frac{80}{1000} = 0{,}08;$

Или $q(3000) = 1 - p(3000) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08.$

2.

Т.к. элементы включены последовательно, то тока в цепи не будет, если откажет хотя бы один элемент. Событие $A_i (i = 1, \ldots ,5)$ – откажет i-й элемент.

События A_i – независимые.

Имеем $P(A_1) = 0{,}1$; $P(A_2) = 0{,}2$; $P(A_3) = 0{,}3$; $P(A_4) = 0{,}2$; $P(A_5) = 0{,}1$;

$P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9;$

$P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8;$

$P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7;$

$P(\overline{A}_4) = 1 - P(A_4) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8;$

$P(\overline{A}_5) = 1 - P(A_5) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9.$

Тогда $P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot P(\overline{A}_4) \cdot P(\overline{A}_5) = 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 1 - 0{,}9^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}7 = 1 - 0{,}36288 = 0{,}63712.$

Статистические методы в профессиональных задачах

Используемый источник – [16].

Задача определения точного вида выявленной взаимозависимости параметров решается с помощью регрессионного анализа.

Регрессионный анализ заключается в определении аналитического выражения связи, в котором изменение одного параметра (у) обусловлено влиянием другого параметра (х).

Для статистического определения коэффициента корреляции между двумя случайными величинами у и х необходимо иметь данные их измерений.

Важной проверкой составления регрессионной модели является знак коэффициента р правой части уравнения.

При изучении аварийных режимов в электрических сетях широко применяется метод статистических испытаний, называемый методом Монте-Карло.

Суть метода Монте-Карло заключается в том, что вместо аналитических вычислений различных вероятностных характеристик производится моделирование («розыгрыш») изучаемого режима с помощью массивов (датчиков) случайных чисел.

Задачи «Статистические методы в профессиональных задачах» (Подготовка)

1.На испытание поставлено 6 однотипных электрических изделий. Получены следующие значения t_i (t_i – время безотказной работы i-го изделия): t_1=280 час.; t_2=350 час.; t_3=400 час.; t_4=320 час.; t_5=380 час.; t_6=330 час. Определить статистическую оценку среднего времени безотказной работы изделия.

2.За наблюдаемый период эксплуатации в электрической аппаратуре было зафиксировано 8 отказов. Время восстановления составило: t_1=12 мин.; t_2=23 мин.; t_3=15 мин.; t_4=9 мин.; t_5=17 мин.; t_6=28 мин.; t_7=25 мин.; t_8=31 мин. Требуется определить среднее время восстановления аппаратуры.

1.

$m_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i.$

$m_t = \frac{1}{6}(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6) = \frac{1}{6}(280 + 350 + 400 + 320 + 380 + 330) \approx 343{,}3$ (сек).

2.

$m_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i.$

$m_t = \frac{1}{8}(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8) = \frac{1}{8}(12 + 23 + 15 + 9 + 17 + 28 + 25 + 31) = 20$ (мин).

Тест «Статистические методы в профессиональных задачах»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Задача определения точного вида выявленной взаимозависимости параметров решается с помощью _______________ анализа.

а) не корреляционного; б) корреляционного; в) не регрессионного; г) регрессионного.

2.______________ анализ заключается в определении аналитического выражения связи, в котором изменение одного параметра (у) обусловлено влиянием другого параметра (х).

а) не корреляционный; б) корреляционный; в) регрессионный; г) не регрессионный.

3.Для статистического определения коэффициента корреляции между двумя _____________ величинами у и х необходимо иметь данные их измерений.

а) не случайными; б) случайными; в) конкретными; г) не конкретными.

4.Важной проверкой составления _______________ модели является знак коэффициента р правой части уравнения.

а) регрессионной; б) корреляционной; в) не корреляционной; г) не регрессионной.

5.При изучении аварийных режимов в электрических сетях широко применяется метод _______________ испытаний, называемый методом Монте-Карло.

а) не вероятностных; б) вероятностных; в) не статистических; г) статистических.

6.Суть метода Монте-Карло заключается в том, что вместо аналитических вычислений различных ______________ характеристик производится моделирование («розыгрыш») изучаемого режима с помощью массивов (датчиков) случайных чисел.

а) не вероятностных; б) не статистических; в) вероятностных; г) статистических.

Задачи «Статистические методы в профессиональных задачах»

7.На испытание поставлено 6 однотипных электрических изделий. Получены следующие значения t_i (t_i – время безотказной работы i-го изделия): t_1=400 час.; t_2=430 час.; t_3=420 час.; t_4=400 час.; t_5=450 час.; t_6=410 час. Определить статистическую оценку среднего времени безотказной работы изделия.

8.За наблюдаемый период эксплуатации в электрической аппаратуре было зафиксировано 8 отказов. Время восстановления составило: t_1=24 мин.; t_2=21 мин.; t_3=27 мин.; t_4=17 мин.; t_5=29 мин.; t_6=26 мин.; t_7=37 мин.; t_8=39 мин. Требуется определить среднее время восстановления аппаратуры.

РАЗДЕЛ 13. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

13.1 Равносильность уравнений

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 26.

26.1. Равносильно ли уравнение $2^x = 256$ уравнению:

а) $\log_2 x = 3$ (Пример); б) $x^2 - 9x + 8 = 0$ (А/з);

в) $3x^2 - 24x = 0$ (Д/з); г) $\frac{16}{x} = 2$ (Д/з)?

26.2. Равносильно ли уравнение $\sin x = 0$ уравнению:

а) $\cos x = 1$ (Пример); б) $tgx = 0$ (Д/з);

в) $\cos 2x = 1$ (А/з); г) $\sqrt{x-1} \cdot \sin x = 0$ (Д/з)?

26.6. Равносильны ли уравнения:

а) $\sqrt{2x^2 + 2} = \sqrt{x^4 + 3}$ и $2x^2 + 2 = x^4 + 3$ (Пример);

б) $\sqrt[4]{\sin^2 x + 1} = 1$ и $\sin^2 x = 0$ (А/з)?

26.7. Равносильны ли уравнения:

а) $3^{\sqrt{x}+4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$ и $\sqrt{x} + 4 - x = 0$ (Пример);

б) $\sqrt{0{,}5^x} \cdot 2^{x^2} \cdot \sqrt{2} = 4$ и $x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 2$ (Д/з)?

<u>Равносильность уравнений (Примеры, А/з, Д/з)</u>

<u>Примеры</u>:

26.1.а) $\log_2 x = 3$; $2^x = 256$.

$2^x = 256$; $2^x = 2^8$; $x = 8$;

$\log_2 x = 3$; $x = 2^3 = 8 \Rightarrow$ да, равносильно.

26.2.а) $sinx = 0$; $cosx = 1$.

$sinx = 0$; $x = \pi k, k \in Z$;

$cosx = 1$; $x = 2\pi k, k \in Z \Rightarrow$ нет, не равносильно.

26.6.а) $\sqrt{2x^2+2}=\sqrt{x^4+3}$; $2x^2+2=x^4+3$.

$\sqrt{2x^2+2}=\sqrt{x^4+3}$; $2x^2+2=x^4+3$;

ОДЗ: R $\Rightarrow$ да, равносильны.

26.7.а) $3^{\sqrt{x}+4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x=1$; $\sqrt{x}+4-x=0$.

$3^{\sqrt{x}+4}\cdot 3^{-x}=1$; $3^{\sqrt{x}+4-x}=1$; $\sqrt{x}+4-x=0\Rightarrow$ да, равносильны.

Аудиторные задания (А/з): № 26.1 (б, г), № 26.2 (в), № 26.6 (б).

Домашние задания (Д/з): № 26.1 (в), № 26.2 (б, г), № 26.7 (б).

А/з, Д/з (подготовка):

Два уравнения с одной переменной $f(x)=g(x)$ и $p(x)=h(x)$ называют равносильными, если множества их корней совпадают.

13.2 Общие методы решения уравнений

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 27.

Решите уравнение:

27.5.

а) $\log_3(x^2-10x+40)=\log_3(4x-8)$ (Пример);

б) $\log_{0,8}(9x-4x^2)=\log_{0,8}(x^3+4x^2)$ (А/з);

в) $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x-2}{2x-4}=\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+1}{x+2}$ (А/з);

г) $\log_{0,1}\sqrt{5x-6}=\log_{0,1}\sqrt{x^2-2}$ (Д/з).

27.6.

а) $(x^2-6x)^5=(2x-7)^5$ (Пример);

б) $(\sqrt{6x-1}+1)^9=(\sqrt{6x+8})^9$ (А/з);

в) $(2^{2x}+16)^{20}=(10\cdot 2^x)^{20}$ (Д/з);

г) $(\log_{0,1}^2 x-2)^3=(2\log_{0,1}x+1)^3$ (Д/з).

27.7.

а) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ (Пример);

б) $tg\left(\frac{\pi}{8}-x\right)=tg\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)$ (А/з);

в) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ (Д/з).

Общие методы решения уравнений (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

27.5.а) $\log_3(x^2-10x+40)=\log_3(4x-8)$;

$x^2-10x+40=4x-8$; $x^2-14x+48=0$; $x_1=6, x_2=8$;

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-10x+40>0 \\ 4x-8>0 \end{cases}$; $x_1=6$:

$\begin{cases} 6^2-10\cdot 6+40=36-60+40=16>0 \\ 4\cdot 6-8=24-8=16>0 \end{cases} \Rightarrow x_1=6$ является корнем уравнения.

$x_2=8$: $\begin{cases} 8^2-10\cdot 8+40=64-80+40=24>0 \\ 4\cdot 8-8=32-8=24>0 \end{cases} \Rightarrow x_2=8$ является корнем уравнения.

Ответ: $x_1=6, x_2=8$.

27.6.а) $(x^2-6x)^5=(2x-7)^5$;

$x^2-6x=2x-7$; $x^2-8x+7=0$; $x_1=1, x_2=7$.

Ответ: $x_1=1, x_2=7$.

27.7.а) $sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$;

$3x+\frac{\pi}{3}=x-\frac{\pi}{6}$; $2x=-\frac{\pi}{2}$; $x=-\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}$.

Аудиторные задания (А/з): № 27.5 (б, в), № 27.6 (б), № 27.7 (б).

Домашние задания (Д/з): № 27.5 (г), № 27.6 (в, г), № 27.7 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$a^{f(x)} = a^{g(x)}$; $f(x) = g(x)$.

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$; $f(x) = g(x)$ ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$; n – нечетное (3, 5, 7, …); $f(x) = g(x)$.

$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$; n – четное (2, 4, 6, …); $f(x) = g(x)$;

ОДЗ: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$.

$(f(x))^n = (g(x))^n$; $f(x) = g(x)$.

$f(x)g(x)h(x) = 0$; $f(x) = 0$; $g(x) = 0$; $h(x) = 0$ – разложение на множители.

$p\big(g(x)\big) = 0$; $u = g(x)$; $p(u) = 0$; $u_1, u_2, \dots, u_n$; $g(x) = u_1$; $g(x) = u_2, \dots, g(x) = u_n$ – введение новой переменной.

13.3 Равносильность неравенств

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 28.

28.3. Являются ли равносильными неравенства:

а) $\sin x + 2\log_3 x > 20$ и $\sin x > 20 - 2\log_3 x$ (Пример);

б) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}} \geq 1$ и $\sin x \geq \sqrt{x^2+1}$ (А/з);

в) $13 - 13^{x^2-4} \geq 10^x$ и $13 \geq 10^x + 13^{x^2-4}$ (Д/з)?

Решите систему неравенств:

28.5.

а) $\begin{cases} 3x - 11 > 2x + 13, \\ 17x + 9 < 9x + 99; \end{cases}$ (Пример)

б) $\begin{cases} 6x + 2 \leq 4x + 24, \\ 2x - 1 \geq x + 7. \end{cases}$ (А/з)

28.6.

а) $\begin{cases} (x+1)^2-(x-1)^2 \geq 12, \\ (x+4)(x-4)-(x+2)^2 < 9; \end{cases}$ (Пример)

б) $\begin{cases} (x-2)(x^2+2x+4)-x^3 < 8x, \\ 3x-16 \leq x. \end{cases}$ (Д/з)

<u>Равносильность неравенств (Примеры, А/з, Д/з)</u>

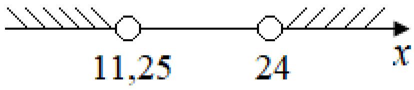
<u>Примеры</u>:

28.3.а) $sinx + 2\log_3 x > 20$ и $sinx > 20 - 2\log_3 x$;

$sinx + 2\log_3 x > 20$; $sinx > 20 - 2\log_3 x \Rightarrow$ да, являются равносильными.

28.5.а) $\begin{cases} 3x-11 > 2x+13 \\ 17x+9 > 9x+99 \end{cases}$;

$\begin{cases} x > 24 \\ 8x < 90 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 24 \\ x < \frac{90}{8} \end{cases}$; $\begin{cases} x > 24 \\ x < 11{,}25 \end{cases}$;



$x = \emptyset$.

Ответ: $x = \emptyset$.

28.6.а) $\begin{cases} (x+1)^2-(x-1)^2 \geq 12 \\ (x+4)(x-4)-(x+2)^2 < 9 \end{cases}$;

$\begin{cases} x^2+2x+1-(x^2-2x+1) \geq 12 \\ x^2-16-(x^2+4x+4) < 9 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x \geq 12 \\ -4x < 29 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geq 3 \\ x > -\frac{29}{4} \end{cases} \Rightarrow$

$x \geq 3$.

Ответ: $x \geq 3$.

<u>Аудиторные задания (А/з)</u>: № 28.3 (б), № 28.5 (б).

<u>Домашние задания (Д/з)</u>: № 28.3 (в), № 28.6 (б).

<u>А/з, Д/з (подготовка):</u>

Два неравенства с одной переменной $f(x) > g(x)$ и $p(x) > h(x)$ называют <u>равносильными</u>, если их решения (т.е. множества частных решений) совпадают.

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$; $f(x) > g(x)$, если $a > 1$; $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

$f(x) > g(x)$; $\left(f(x)\right)^n > (g(x))^n$.

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$; $f(x) > g(x)$, если $a > 1$; $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$;

ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

$f(x) > g(x)$; $h(x) > 0$; $f(x)h(x) > g(x)h(x)$.

13.4 Уравнения и неравенства с модулями

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 29.

Решите уравнение:

29.1.

а) $|x| = 7$ (Пример);

б) $|x - 8| = 7$ (А/з);

в) $|x + 5| = 7$ (Д/з).

29.2.

а) $|x + 2| = -7$ (Пример);

б) $|x + 5| = -2 + \sqrt{7}$ (А/з);

в) $|x + 8| = 2 - \sqrt{7}$ (Д/з).

29.8.

а) $|2x - 3| = x$ (Пример);

б) $|3x - 1| = x + 9$ (А/з);

в) $|2x - 2| = 5x + 1$ (Д/з).

29.9.

а) $|x^2 - x| = 4x$ (Пример);

б) $|2x - x^2 + 3| = x + 7$ (А/з);

в) $\left|x^2-6x+10\right|=x$ (Д/з).

Уравнения и неравенства с модулями (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

29.1.а) $|x| = 7$;

$x_1 = 7$; $x_2 = -7$.

29.2.а) $|x + 2| = -7$;

$\emptyset$.

29.8.а) $|2x - 3| = x$;

$x \geq 0$ – условие;

$2x - 3 = x$; $x_1 = 3$;

$2x - 3 = -x$; $3x = 3$; $x_2 = 1$;

$x_1 = 3, x_2 = 1$ – удовлетворяют условию.

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 1$.

29.9.а) $|x^2 - x| = 4x$;

$4x \geq 0$; $x \geq 0$ – условие;

$x^2 - x = 4x$; $x^2 - 5x = 0$; $x(x - 5) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 5$;

$x^2 - x = -4x$; $x^2 + 3x = 0$; $x(x + 3) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -3$;

$x_1 = 0, x_2 = 5$ – удовлетворяют условию;

$x_3 = -3$ – не удовлетворяют условию;

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 5$.

Аудиторные задания (А/з): № 29.1 (б), № 29.2 (б), № 29.8 (б), № 29.9 (б).

Домашние задания (Д/з): № 29.1 (в), № 29.2 (в), № 29.8 (в), № 29.9 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

$c > 0$; $|f(x)| = c$; $f(x) = c$; $f(x) = -c$.

$c < 0$; $|f(x)| = c$; $\emptyset$.

$c = 0$; $|f(x)| = c$; $f(x) = 0$.

$|f(x)| = g(x)$; $g(x) \geq 0$ – условие; $f(x) = g(x)$; $f(x) = -g(x)$ – проверить корни на соблюдение условия.

13.5 Иррациональные уравнения и неравенства

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 30.

Решите уравнение:

30.1.

а) $\sqrt{x}=7$ (Пример);

в) $\sqrt{6-x}=8$ (А/з);

г) $\sqrt[7]{x+1}=-2$ (Д/з).

30.2.

а) $\sqrt{x^2-4x-3}=3$ (Пример);

б) $\sqrt[6]{x^3-2x^2+1}=1$ (А/з);

в) $\sqrt{36-x-12x^2}=5$ (Д/з).

30.3.

а) $\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{3x-2}=4$ (Пример);

б) $\sqrt{(x+2)(3x-2)}=4$ (А/з);

в) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{3x+7}=4$ (Д/з).

30.33. Решите неравенство:

а) $\sqrt{x}<7$ (Пример);

в) $\sqrt{6-x}\le 8$ (А/з);

г) $\sqrt[7]{x+1}\ge -2$ (Д/з).

Иррациональные уравнения и неравенства (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

30.1.а) $\sqrt{x}=7;$

$x=49.$

30.2.а) $\sqrt{x^2-4x-3}=3;$

$x^2-4x-3=9;$ $\quad x^2-4x-12=0;$ $\quad x_1=-2;\ x_2=6.$

30.3.а) $\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{3x-2}=4;$

$(x+2)(3x-2)=16;$ $\quad 3x^2-2x+6x-4=16;$ $\quad 3x^2+4x-20=0;$ $\quad D=16-4\cdot3\cdot(-20)=16+12\cdot20=256;$

$x_1=\frac{-4-16}{6}=-\frac{20}{6}=-\frac{10}{3}=-3\frac{1}{3};$ $\quad x_2=\frac{-4+16}{6}=\frac{12}{6}=2;$

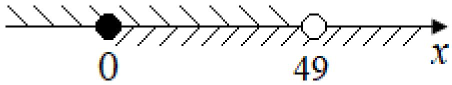
ОДЗ: $\begin{cases} x+2\geq0 \\ 3x-2\geq0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x\geq-2 \\ x\geq\frac{2}{3} \end{cases}\Rightarrow x\geq\frac{2}{3}$ – ОДЗ.

$x_1=-3\frac{1}{3}\notin$ ОДЗ; $\quad x_2=2\in$ ОДЗ.

Ответ: $x=2$.

30.33.а) $\sqrt{x}<7;$

$x<49;$ $\quad$ ОДЗ: $x\geq0\ \Rightarrow x\in[0;49)$.



Ответ: $x\in[0;49)$.

Аудиторные задания (А/з): № 30.1 (в), № 30.2 (б), № 30.3 (б), № 30.33 (в).

Домашние задания (Д/з): № 30.1 (г), № 30.2 (в), № 30.3 (в), № 30.33 (г).

А/з, Д/з (подготовка):

$\sqrt{f(x)}=a;$ $\quad a\geq0;$ $\quad f(x)=a^2;$ $\quad a<0;\ \emptyset.$

$\sqrt[n]{f(x)}=a;$ $\quad f(x)=a^n,\ n$ – нечетное (3,5,7,…) $\quad a\in R.$

$\sqrt[n]{f(x)}=a;$ $\quad f(x)=a^n,\ n$ – четное (2,4,6,…) $\quad$ ОДЗ: $f(x)\geq0;\ a\geq0.$

$\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}=a;$ $\quad f(x)g(x)=a^2,$ $\quad$ ОДЗ: $\begin{cases} f(x)\geq0 \\ g(x)\geq0 \end{cases}.$

$\sqrt{f(x)}<g(x);$ $\quad \begin{cases} f(x)\geq0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<(g(x))^2 \end{cases},$ $\quad$ ОДЗ: $\begin{cases} f(x)\geq0 \\ g(x)\geq0 \end{cases}.$

$\sqrt[n]{f(x)}<a;$ $\quad f(x)<a^n,\ n$ – нечетное (3,5,7,…).

$\sqrt[n]{f(x)}<a;$ $\quad f(x)<a^n,\ n$ – четное (2,4,6,…) $\quad$ ОДЗ: $f(x)\geq0.$

13.6 Доказательство неравенств

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 31.

31.8. Докажите:

а) если $a+b \geq 0$, то $ab(a+b) \leq a^3+b^3$ (Пример);

б) если $a+b \geq 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0$, то $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (А/з).

Докажите неравенство:

31.10.

а) $x^2+\frac{1}{x^2} \geq 2\ (x \neq 0)$ (Пример);

б) $\frac{a^4}{1+a^8} \leq \frac{1}{2}$ (Д/з).

31.13.

а) $x^2+\frac{25}{4x^2} \geq 5\ (x \neq 0)$ (Пример);

б) $\frac{z^2+10}{\sqrt{z^2+9}} \geq 2$ (Пример);

в) $x^2y^2+\frac{z^2}{y^2} \geq 2xz\ (y \neq 0)$ (А/з);

г) $\frac{6\sqrt{c^2+3}}{c^2+12} \leq 1$ (Д/з).

<u>Доказательство неравенств (Примеры, А/з, Д/з)</u>

<u>Примеры</u>:

31.8.а) если $a+b \geq 0$, то $ab(a+b) \leq a^3+b^3$;

$ab(a+b) \leq (a+b)(a^2-ab+b^2)$; $ab \leq a^2-ab+b^2$; $a^2-2ab+b^2 \geq 0$; $(a-b)^2 \geq 0$.

31.10.а) $x^2+\frac{1}{x^2} \geq 2\ \ (x \neq 0)$;

$x^2+\frac{1}{x^2}-2 \geq 0$; $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \geq 0$.

31.13.а) $x^2+\frac{25}{4x^2} \geq 5\ \ (x \neq 0)$;

$x^2+\frac{25}{4x^2}-5 \geq 0$; $\left(x-\frac{5}{2x}\right)^2 \geq 0$.

б) $\frac{z^2+10}{\sqrt{z^2+9}} \geq 2$;

$z^2 + 10 \geq 2\sqrt{z^2 + 9}$; $(z^2 + 10)^2 \geq 4(z^2 + 9)$; $z^4 + 20z^2 + 100 - 4z^2 - 36 \geq 0$; $z^4 + 16z^2 + 64 \geq 0$; $(z^2 + 8)^2 \geq 0$.

Аудиторные задания (А/з): № 31.8 (б), № 31.13 (в).

Домашние задания (Д/з): № 31.10 (б), № 31.13 (г).

А/з, Д/з (подготовка):

$A > B$; $A - B > 0$.

$f(x) > g(x)$; $f(x) - g(x) > 0$.

$a^2 \geq 0$; $[f(x)]^2 \geq 0$.

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

13.7 Уравнения и неравенства с двумя переменными

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 32.

Решите уравнение $f(x;y) = 0$ относительно x, т.е. преобразуйте уравнение к виду $x = x(y)$:

32.3.

а) $xy + y - x = 0$ (Пример); б) $xy^2 + xy^5 - (1 + y^3) = 0$ (А/з);

в) $xy + y + 2x = 0$ (А/з); г) $xy - (x-1)y^3 - 1 = 0$ (Д/з).

32.4.

а) $yx + x + y + 1 = 0$ (Пример); б) $y^2 + (x+1)y + x = 0$ (А/з);

в) $yx + 4x + 2y + 8 = 0$ (Д/з); г) $y^2 + 5xy + 4x^2 = 0$ (Д/з).

32.24. Постройте на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $x \leq 5$ (Пример); б) $x > -4$ (А/з); в) $y \geq -3$ (Д/з).

Уравнения и неравенства с двумя переменными (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

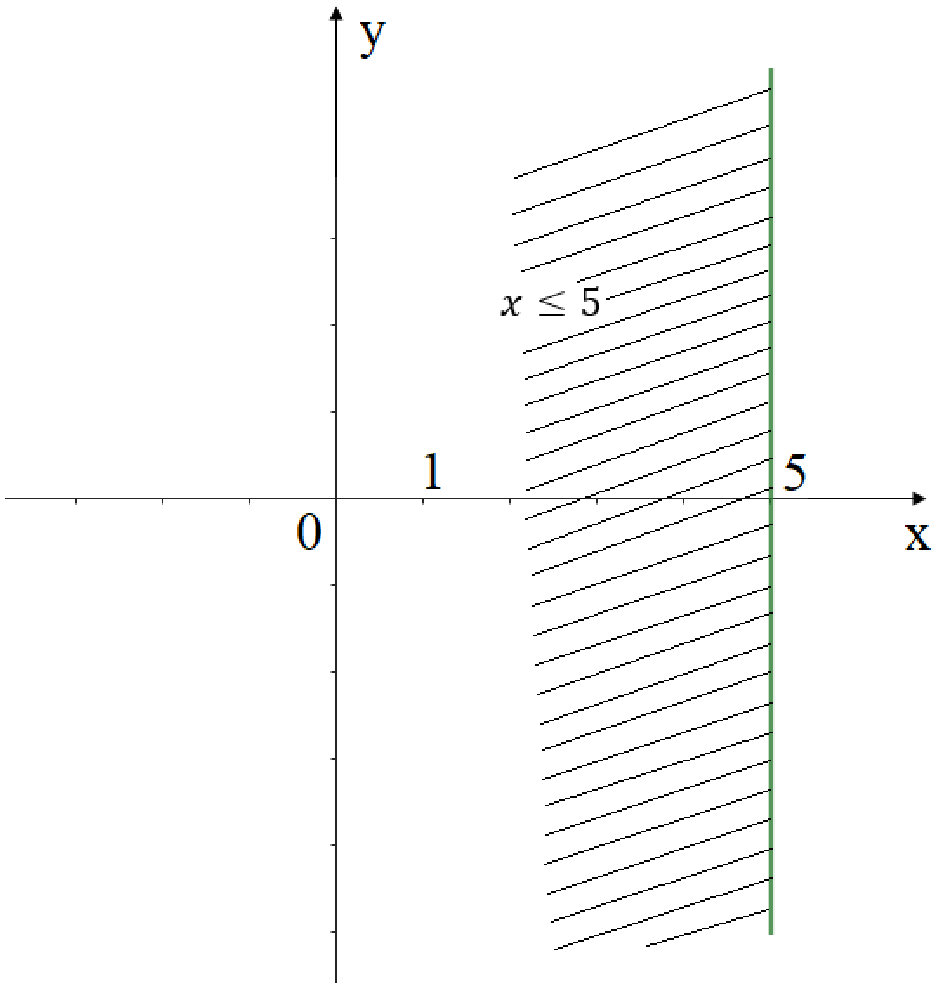
32.3.а) $xy + y - x = 0;$

$x(y-1) = -y;$ $x = \frac{-y}{y-1};$ $x = \frac{y}{1-y}.$

32.4.а) $yx + x + y + 1 = 0;$

$(y+1)x = -(y+1);$ $x = -1.$

32.24.а) $x \leq 5;$

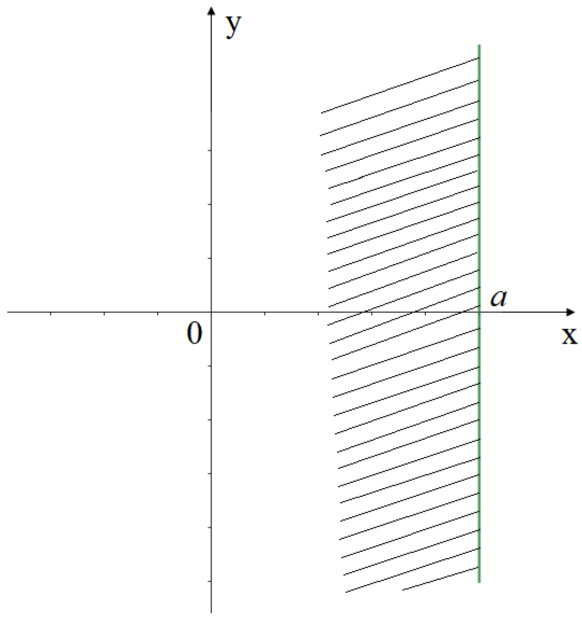


Аудиторные задания (А/з): № 32.3 (б, в), № 32.4 (б), № 32.24 (б).

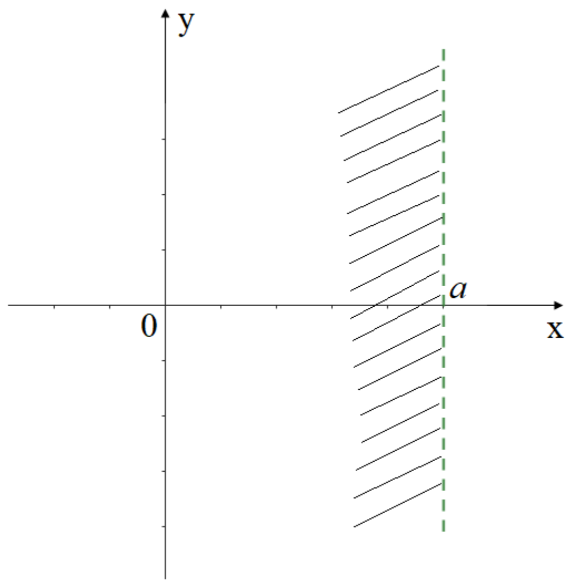
Домашние задания (Д/з): № 32.3 (г), № 32.4 (в, г), № 32.24 (в).

А/з, Д/з (подготовка):

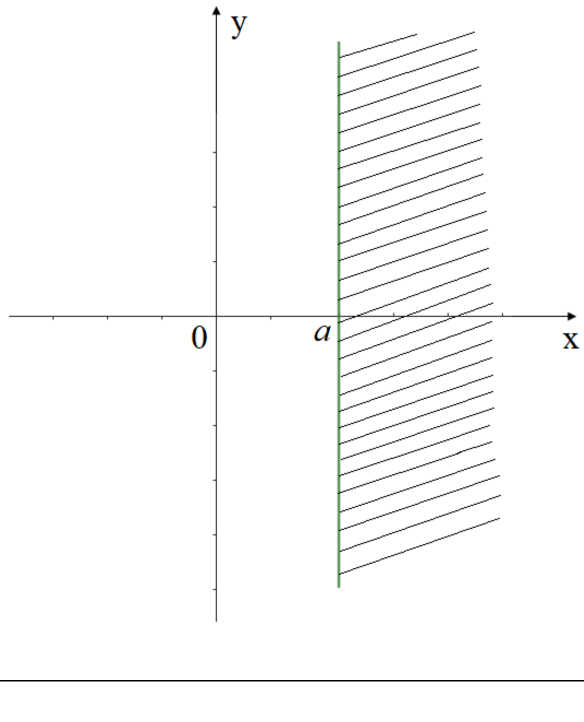
$x \leq a.$



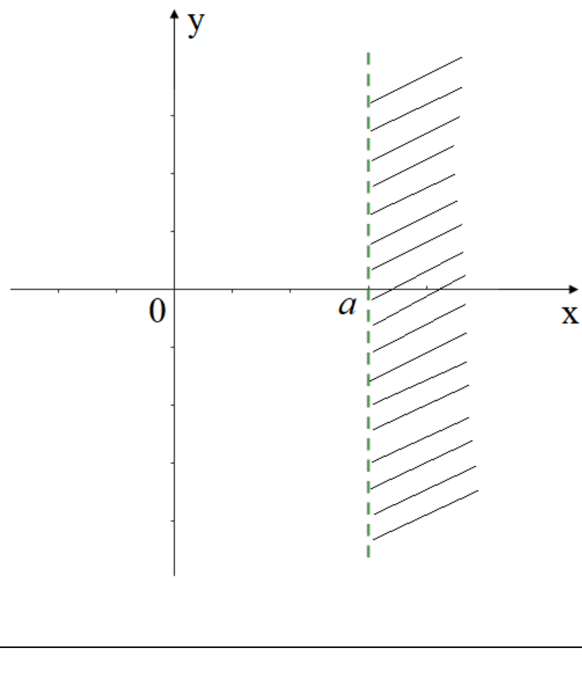
$x < a.$



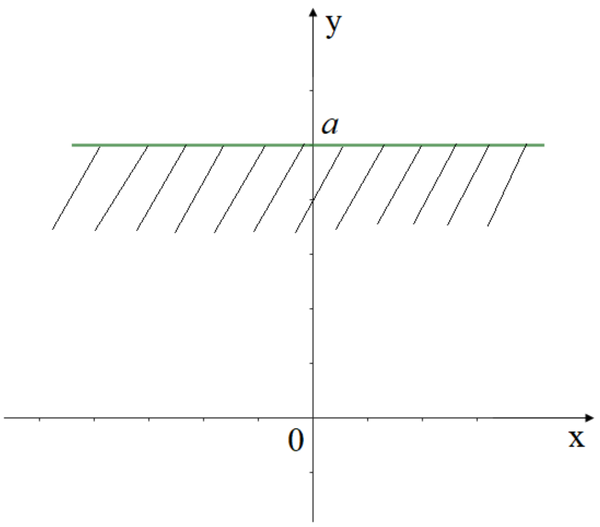
$x \geq a.$



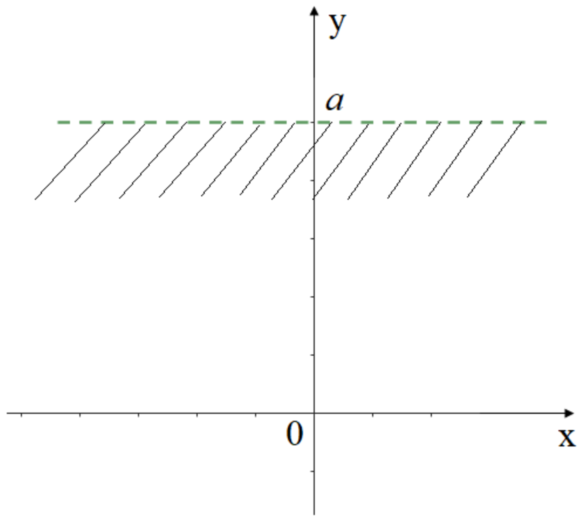
$x > a.$



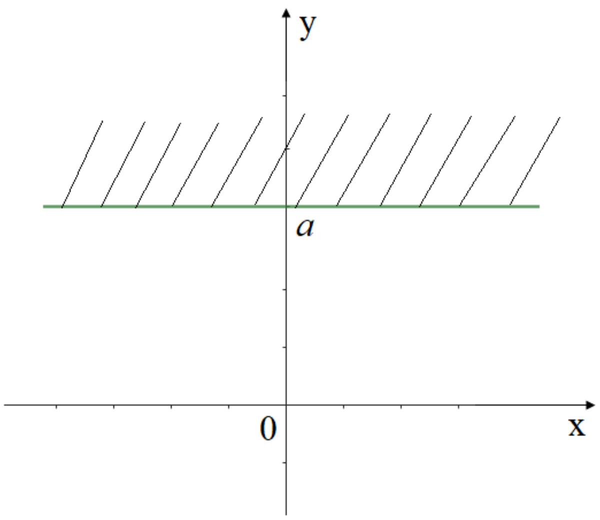
$y \le a.$



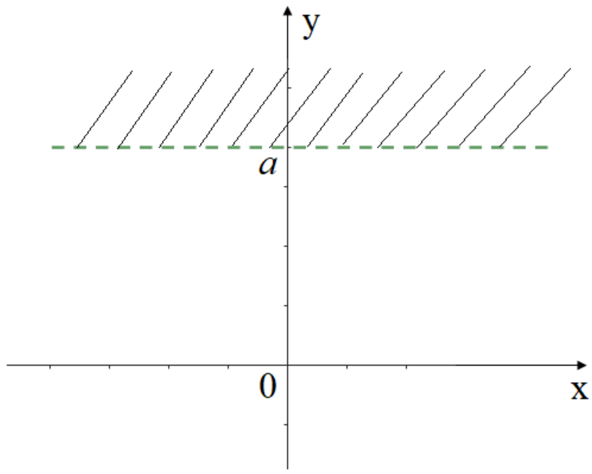
$y < a.$



$y \ge a.$



$y > a.$



13.8 Системы уравнений

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 33.

Решите систему уравнений методом подстановки:

33.1.

а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + 2y^2 - xy + 2x - 3y = 3; \end{cases}$ (Пример) б) $\begin{cases} y = 2 + x, \\ x^3 - y^3 = -8; \end{cases}$ (А/з) в) $\begin{cases} x+y=5, \\ x^3+y^3=35; \end{cases}$ (А/з)

г) $\begin{cases} x+2y=1, \\ 2x^2+3xy-3y^2=6. \end{cases}$ (Д/з)

33.2.

а) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4}, \\ \sin x \sin y=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}; \end{cases}$ (Пример)

б) $\begin{cases} 3x=y+1, \\ 7^{y-2x+2}=7^{y-4x+1}+6; \end{cases}$ (А/з)

в) $\begin{cases} x=2y, \\ \log_{\frac{1}{3}}(2y+x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-y+1)=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{y+1}; \end{cases}$ (Д/з)

г) $\begin{cases} \sqrt{7-6x-y^2}=y+5, \\ y=x-1. \end{cases}$ (Д/з)

33.3. Решите систему уравнений методом алгебраического сложения:

а) $\begin{cases} 3x+2y=1, \\ x-y=-3; \end{cases}$ (Пример)

б) $\begin{cases} 2\sqrt{x}-3\sqrt{y}=1, \\ 3\sqrt{x}-2\sqrt{y}=4; \end{cases}$ (А/з)

в) $\begin{cases} x+y^2=2, \\ 2y^2+x^2=3. \end{cases}$ (Д/з)

Системы уравнений (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

33.1.а) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+2y^2-xy+2x-3y=3 \end{cases}$;

$x=3-y;$ $\quad (3-y)^2+2y^2-(3-y)y+2(3-y)-3y=3;$

$9-6y+y^2+2y^2-3y+y^2+6-2y-3y-3=0;$ $\quad 4y^2-14y+12=0;$ $\quad 2y^2-7y+6=0;$

$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \left(\frac{14}{2}\right)^2 - 4 \cdot 12 = 49 - 48 = 1;$

$y_1 = \frac{-\frac{b}{2} - \sqrt{D_1}}{a} = \frac{7-1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2};$ $\qquad y_2 = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{D_1}}{a} = \frac{7+1}{4} = \frac{8}{4} = 2;$

$x_1 = 3 - y_1 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2};$ $\qquad x_2 = 3 - y_2 = 3 - 2 = 1.$

$\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right); (1; 2)$ – решение системы.

33.2.а) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ sinxsiny = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases};$

$x = \frac{\pi}{4} - y;$ $sin\left(\frac{\pi}{4} - y\right)siny = -\frac{1}{2\sqrt{2}};$ $\left(sin\frac{\pi}{4}cosy - cos\frac{\pi}{4}siny\right)siny + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0;$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cosy - \frac{\sqrt{2}}{2}siny\right)siny + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0;$ $\frac{\sqrt{2}}{2}(cosy - siny)siny + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0;$

$2(cosy - siny)siny + 1 = 0;$ $\qquad 2(sinycosy - sin^2y) + 1 = 0;$

$2sinycosy - 2sin^2y + sin^2y + cos^2y = 0;$ $\qquad 2sinycosy + cos^2y - sin^2y = 0;$

$sin2y + cos2y = 0;$ $\quad tg2y = -1;$ $\quad 2y = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z;$ $\quad y = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z;$

$x = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi k}{2} = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi k}{2}, k \in Z;$

$\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right), k \in Z$ – решение системы.

33.3.а) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - y = -3 \end{cases};$

$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 2y = -6 \end{cases};$ $\qquad \begin{cases} 5x = -5 \\ y = x + 3 \end{cases};$ $\qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 + 3 \end{cases};$ $\qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}.$

<u>Аудиторные задания (А/з)</u>: № 33.1 (б, в), № 33.2 (б), № 33.3 (б).

<u>Домашние задания (Д/з)</u>: № 33.1 (г), № 33.2 (в, г), № 33.3 (в).

13.9 Задачи с параметрами

Используемые источники – Алгебра 11 класс [12, 13], § 34.

Решите уравнение (относительно x):

34.3.

а) $a^2x-4x+2=a$ (Пример); б) $\frac{x}{a}+x-1=a$ (А/з).

34.4.

а) $\frac{ax-5-x}{x^2-4}=0$ (Пример); б) $\frac{ax+6-2x}{x^2-9}=0$ (Д/з).

Решите неравенство (относительно x):

34.5.

а) $mx-x+1\geq m^2$ (Пример); б) $b^2x-x+1>b$ (А/з).

34.6.

а) $b^2x-bx\geq b^2+b-2$ (Пример); б) $\frac{x}{a}+x\leq a+1$ (Д/з).

34.7. При каких значения параметра a уравнение $ax^2+4x-a+5=0$:

а) имеет два различных корня (Пример);

б) имеет ровно один корень (А/з)?

34.8. При каких значения параметра a система уравнений имеет решения:

а) $\begin{cases} y=2x^2-5x+1, \\ y=3x+a; \end{cases}$ (Пример) б) $\begin{cases} y=3x^2-4x-2, \\ y=-10x+a? \end{cases}$ (Д/з)

Задачи с параметрами (Примеры, А/з, Д/з)

Примеры:

34.3.а) $a^2x-4x+2=a$;

$(a^2-4)x=a-2$; $(a-2)(a+2)x=a-2$; $x=\frac{1}{a+2}$.

34.4.а) $\frac{ax-5-x}{x^2-4}=0$;

$ax - 5 - x = 0;$ $(a-1)x = 5;$ $x = \frac{5}{a-1}, a \neq 1;$

ОДЗ: $x^2 - 4 \neq 0;$ $x^2 \neq 4;$ $x \neq \pm 2 \Rightarrow \frac{5}{a-1} \neq \pm 2;$ $a - 1 \neq \pm\frac{5}{2};$ $a - 1 \neq \pm 2{,}5;$

$a - 1 \neq -2{,}5;$ $a \neq -1{,}5;$ $a - 1 \neq 2{,}5;$ $a \neq 3{,}5.$

Ответ: $x = \frac{5}{a-1}, a \neq 1, a \neq -1{,}5, a \neq 3{,}5.$

34.5.а) $mx - x + 1 \geq m^2;$

$(m-1)x \geq m^2 - 1;$ $(m-1)x \geq (m-1)(m+1);$ $x \geq (m+1).$

34.6.а) $b^2x - bx \geq b^2 + b - 2;$

$(b^2 - b)x \geq b^2 + b - 2;$ $b^2 + b - 2 = 0;$ $b_1 = -2,\ b_2 = 1;$

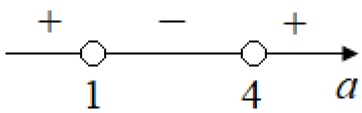
$(b+2)(b-1) = 0;$ $b(b-1)x \geq (b+2)(b-1);$ $bx \geq b + 2;$

$x \geq \frac{b+2}{b};$ $b \neq 0;$ $x \geq 1 + \frac{2}{b}, b \neq 0.$

34.7.а) $ax^2 + 4x - a + 5 = 0;$ 2 корня;

$D = 16 - 4 \cdot a(-a+5) = 16 + 4a^2 - 20a;$ $D > 0;$ $16 + 4a^2 - 20a > 0;$ $a^2 - 5a + 4 > 0;$ $a^2 - 5a + 4 = 0;$ $a_1 = 1,\ a_2 = 4;$

$(a-1)(a-4) > 0;$



$a \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$ – имеет два различных корня.

34.8.а) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = 3x + a \end{cases};$

$2x^2 - 5x + 1 = 3x + a;$ $2x^2 - 8x + 1 - a = 0;$ $D = 64 - 4 \cdot 2 \cdot (1 - a) = 64 - 8(1-a);$ $D \geq 0;$ $64 - 8(1-a) \geq 0;$ $8(a-1) \geq -64;$

$a - 1 \geq -8;$ $a \geq -7.$

<u>Аудиторные задания (А/з)</u>: № 34.3 (б), № 34.5 (б), № 34.7 (б).

<u>Домашние задания (Д/з)</u>: № 34.4 (б), № 34.6 (б), № 34.8 (б).

13.10 Контрольная работа «Уравнения и неравенства»

Контрольная работа «Уравнения и неравенства» (Подготовка)

1.Решить уравнения:

1) $x^4-5x^2-36=0$; 2) $2x^4-3x^2-2=0$.

2.Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0 \\ x+y+8=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x^2+3xy-y^2=92 \\ x+3y=18 \end{cases}$.

3.Решить уравнения:

1) $\frac{3}{x}=\frac{2}{3-x}$; 2) $\frac{5}{2x-1}=\frac{2}{3x+2}$.

4.Решить неравенства:

1) $\frac{x-2}{2x+3}\geq 0$; 2) $\frac{5x+1}{2-x}>0$.

5.Решить уравнения:

1) $\sqrt[3]{2x-5}=3$; 2) $\sqrt[3]{3x+4}=-2$.

1.

1) $x^4-5x^2-36=0$; $x^2=t$; $t^2-5t-36=0$; $t_1=-4, t_2=9$; $x^2=9$; $x=\pm 3$.

2) $2x^4-3x^2-2=0$; $x^2=t$; $2t^2-3t-2=0$; $D=9-4\cdot 2\cdot(-2)=25$;

$t_1=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}$; $t_1=\frac{3+5}{4}=2$; $x^2=2$; $x=\pm\sqrt{2}$.

2.

1) $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0 \\ x+y+8=0 \end{cases}$;

$x=-8-y$; $(-8-y)^2+y^2+6(-8-y)+2y=0$; $(8+y)^2+y^2-48-6y+2y=0$; $64+16y+y^2+y^2-48-4y=0$; $2y^2+12y+16=0$; $y^2+6y+8=0$; $y_1=-2$; $y_2=-4$; $x_1=-8-y_1=-8-(-2)=-8+2=-6$; $x_2=-8-y_2=-8-(-4)=-8+4=-4$;

$(-6;-2); (-4;-4)$ – решения системы.

2) $\begin{cases} x^2+3xy-y^2=92 \\ x+3y=18 \end{cases}$;

$x=18-3y;\qquad (18-3y)^2+3(18-3y)y-y^2-92=0;$

$3^2(6-y)^2+3(18y-3y^2)-y^2-92=0;\qquad 9(36-12y+y^2)+54y-9y^2-y^2-92=0;$

$324-108y+9y^2+54y-10y^2-92=0;\qquad -y^2-54y+232=0;$

$y^2+54y-232=0;\quad D_1=27^2-(-232)=961;\quad y_1=\frac{-27-31}{1}=-58;$

$y_2=\frac{-27+31}{1}=4;\ x_1=18-3y_1=18-3\cdot(-58)=192;\ x_2=18-3y_2=18-3\cdot 4=18-12=6;$

$(192;-58); (6;4)$ – решения системы.

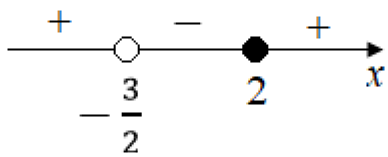
3.

1) $\frac{3}{x}=\frac{2}{3-x};\qquad 9-3x=2x;\qquad 5x=9;\qquad x=\frac{9}{5}.$

2) $\frac{5}{2x-1}=\frac{2}{3x+2};\qquad 15x+10=4x-2;\qquad 11x=-12;\qquad x=-\frac{12}{11}.$

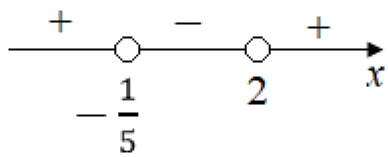
4.

1) $\frac{x-2}{2x+3}\geq 0;\qquad \frac{x-2}{2x+3}=0;\quad x=2;\qquad x\neq -\frac{3}{2};$



$x\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup[2;+\infty).$

2) $\frac{5x+1}{2-x}>0;\qquad \frac{5x+1}{x-2}<0;\quad \frac{5x+1}{x-2}=0;\quad x=-\frac{1}{5};\qquad x\neq 2;$



$x\in\left(-\frac{1}{5};2\right).$

5.

1) $\sqrt[3]{2x-5}=3;\qquad 2x-5=27;\qquad 2x=32;\quad x=16.$

2) $\sqrt[3]{3x+4} = -2$; $3x + 4 = -8$; $3x = -12$; $x = -4$.

Контрольная работа «Уравнения и неравенства»

1.Решить уравнения:

1) $x^4 - 3x^2 - 54 = 0$ (А/з); 2) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ (Д/з).

2.Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$ (А/з); 2) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 3x - 2 = 0 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ (Д/з).

3.Решить уравнения:

1) $\dfrac{4}{3x-1} = \dfrac{3}{2x+5}$ (А/з); 2) $\dfrac{2}{4-3x} = \dfrac{1}{5x+4}$ (Д/з).

4.Решить неравенства:

1) $\dfrac{2x+3}{3x-2} \le 0$ (А/з); 2) $\dfrac{4-3x}{2x+7} \le 0$ (Д/з).

5.Решить уравнения:

1) $\sqrt[3]{3-x} = 1$ (А/з); 2) $\sqrt[3]{5x+4} = -1$ (Д/з).

13.11 Уравнения и неравенства в профессиональных задачах

Используемый источник – [17].

Метод решения уравнения, при котором данное уравнение заменяется уравнением-следствием, а затем полученные корни подвергают проверке, называют методом следствий.

Применяя как метод следствий, так и метод равносильных преобразований, важно знать причины потери корней и появления посторонних корней.

Вне области определения уравнения корней нет.

Если расширение области определения уравнения может привести к появлению посторонних корней, то её сужение – возможная причина потери корней.

Часто причиной изменения множества корней уравнения является применение равенств, правая и левая части которых имеют разные области определения.

Иногда бывает целесообразным умножить обе части уравнения на некоторое выражение.

Решение прямой задачи электротехники посредством законов Кирхгофа даже для простых задач требует составления и решения системы с большим числом уравнений.

Под контурными токами понимают токи независимых контуров.

Предполагается, что все контурные токи протекают (замыкаются) только в своих контурах.

Чтобы не ошибиться с выбором независимых контуров, целесообразно указывать направление тока, обтекающего контур, а, следовательно, и обхода контура по ячейкам (или сотам).

В методе узловых потенциалов в качестве вспомогательных формализованных переменных используют потенциалы узловых точек.

Так как токи ветвей определяются не потенциалами узлов, а разностью потенциалов, т.е. напряжениями ветвей, то потенциал любого узла (обычно последнего по номеру) приравнивается нулю.

Тест «Уравнения и неравенства в профессиональных задачах»

Вставьте пропущенное слово (выберите верный вариант ответа):

1.Метод решения уравнения, при котором данное уравнение заменяется уравнением-следствием, а затем полученные корни подвергают _____________, называют методом следствий.

а) проверке; б) не проверке; в) не подтверждению; г) подтверждению.

2.Применяя как метод следствий, так и метод _____________ преобразований, важно знать причины потери корней и появления посторонних корней.

а) равновеликих; б) равносильных; в) не равносильных; г) не равновеликих.

3.Вне области определения уравнения корней _____.

а) не будет; б) не было; в) нет; г) не есть.

4.Если расширение области ____________ уравнения может привести к появлению посторонних корней, то её сужение – возможная причина потери корней.

а) не существования; б) не определения; в) существования; г) определения.

5.Часто причиной изменения множества корней уравнения является применение равенств, правая и левая части которых имеют разные области ____________.

а) определения; б) не определения; в) существования; г) не существования.

6.Иногда бывает _____________ умножить обе части уравнения на некоторое выражение.

а) не необходимым; б) целесообразным; в) необходимым; г) не целесообразным.

7.Решение прямой задачи электротехники посредством законов Кирхгофа даже для простых задач требует составления и решения системы с ________ числом уравнений.

а) малым; б) не большим; в) большим; г) не малым.

8.Под контурными токами понимают токи __________ контуров.

а) коротких; б) длинных; в) зависимых; г) независимых.

9.Предполагается, что все контурные токи протекают (___________) только в своих контурах.

а) замыкаются; б) сужаются; в) не замыкаются; г) не сужаются.

10.Чтобы не ошибиться с выбором ____________ контуров, целесообразно указывать направление тока, обтекающего контур, а, следовательно, и обхода контура по ячейкам (или сотам).

а) коротких; б) независимых; в) зависимых; г) длинных.

11.В методе узловых потенциалов в качестве вспомогательных формализованных ____________ используют потенциалы узловых точек.

а) не переменных; б) координат; в) переменных; г) не координат.

12.Так как токи ветвей определяются не потенциалами узлов, а ___________ потенциалов, т.е. напряжениями ветвей, то потенциал любого узла (обычно последнего по номеру) приравнивается нулю.

а) не суммой; б) суммой; в) не разностью; г) разностью.

Задача «Уравнения и неравенства в профессиональных задачах»

Определить токи в цепи (Рис.), имеющей следующие параметры: E_1=75 В; E_2=68 В; E_3=26 В; R_1=250 Ом; R_2=105 Ом; R_3=50 Ом, методом узловых и контурных уравнений.

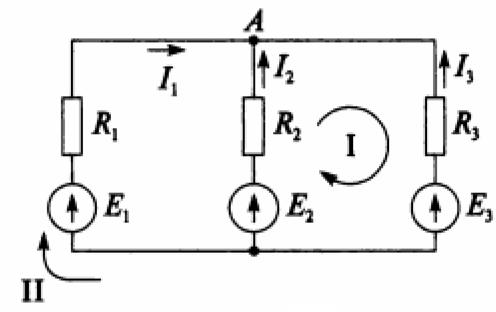


Рис.

Задача «Уравнения и неравенства в профессиональных задачах» (Подготовка)

Определить токи в цепи (Рис.), имеющей следующие параметры: E_1=60 В; E_2=48 В; E_3=6 В; R_1=200 Ом; R_2=100 Ом; R_3=10 Ом, методом узловых и контурных уравнений.

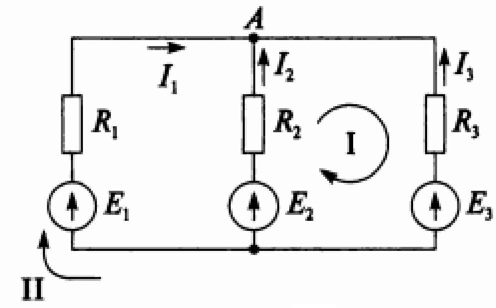


Рис.

Решение:

В цепи три ветви, следовательно, произвольно выберем направление трех токов и составим систему из трех уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{array}{c} \text{для узла } A \\ \text{для контура I} \\ \text{для контура II} \end{array} \quad \begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0; \\ E_2 - E_3 = I_2R_2 - I_3R_3; \\ E_1 - E_3 = I_1R_1 - I_3R_3. \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений, подставив заданные числовые значения:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0; & (1) \\ 100I_2 - 10I_3 = 48 - 6; & (2) \\ 200I_1 - 10I_3 = 60 - 6. & (3) \end{cases}$$

Отнимем из уравнения (3) уравнение (2):

$200I_1 - 10I_3 - 100I_2 + 10I_3 = 60 - 6 - 48 + 6; \qquad 200I_1 - 100I_2 = 12.$

В уравнении (1) перенесем I_3 вправо: $\quad I_1 + I_2 = -I_3.$

Решим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 200I_1 - 100I_2 = 12 & (1^*) \\ I_1 + I_2 = -I_3 & (2^*) \end{cases}$$

Умножим уравнение (2^*) на 200 и отнимем из уравнения (1^*) уравнение (2^*):

$200I_1 - 100I_2 - 200I_1 - 200I_2 = 12 + 200I_3; \quad -300I_2 = 12 + 200I_3;$

$300I_2 + 200I_3 = -12; \ I_3 = \frac{-12-300I_2}{200} = -\frac{12+300I_2}{200}$ – подставим в уравнение (2):

$100I_2 - 10 \cdot \left(-\frac{12+300I_2}{200}\right) = 42; \qquad 100I_2 + \frac{12+300I_2}{20} = 42; \ 100I_2 + \frac{3+75I_2}{5} = 42;$

$500I_2 + 3 + 75I_2 = 210$; $575I_2 = 207$; $I_2 = \frac{207}{575} = 0{,}36$ (А) – подставим в уравнение (1*):

$200I_1 = 12 + 100I_2$; $I_1 = \frac{12+100I_2}{200} = \frac{12+100\cdot 0{,}36}{200} = 0{,}24$ (А) – подставим вместе с $I_2 = 0{,}36$ (А) в уравнение (2*):

$I_3 = -I_1 - I_2 = -0{,}24 - 0{,}36 = -0{,}6$ (А).

Ответ: $I_1 = 0{,}24$ А; $I_2 = 0{,}36$ А; ; $I_3 = -0{,}6$ А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин В.Ф. История и методология математики: текст лекций / В.Ф. Чаплыгин; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2007. – 120 с.
2. Алгебра. 9 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков и др. – М.: Просвещение, 2018. – 400 с.
3. Основные методы решения систем алгебраических уравнений. URL: https://guimc.bmstu.ru/wp-content/uploads/2019/08/lesson_1.1.pdf (дата обращения: 12.03.2025).
4. Исаев Ю.Н. Курс лекций по теоретическим основам электротехники / Ю.Н. Исаев, В.А. Колчанова, Т. Е. Хохлова. – Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – 176 с.
5. Александров А.Д. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / А.Д. Александров, Л.А. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2014. – 255 с.
6. Шуранова Е. Н. Начертательная геометрия и инженерная графика: учеб. пособие / Е. Н. Шуранова, Л. В. Дмитриенко. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2017. – 148 с.
7. Ткачёв А.Н. Теоретические основы электротехники. Расчёт линейных электрических цепей: уч. пособие / А.Н. Ткачёв, Е.Н. Епишков. – Челябинск: ОУ ВО «ЮжноУральский технологический университет», 2021. – 108 с.
8. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2009. – 424 с.
9. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.] под. ред. А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2009. – 343 с.

10. Родина Е.В. Приложение производной в электроэнергетике / Е.В. Родина, А.А. Шунина, Е.В. Савельева // Современные наукоемкие технологии. – 2013. – № 6. – С. 86-88.
11. Применение многогранников в технике. URL: https://alldrawings.ru/yroki-cherchenia/item/применение-многогранников-в-технике (дата обращения: 13.03.2025).
12. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2014. – 311 с.
13. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.]; под. ред. А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2012. – 264 с.
14. Афанасьев Р.О. Нахождение законов, содержащих логарифмы, и их применение в электротехнике // Интеллектуальный потенциал XXI века: ступени познания. – 2014. – № 22. – С. 70-73.
15. Агафонов М.В. Применение интегрального исчисления в электротехнике // Интеллектуальный потенциал XXI века: ступени познания. – 2014. – № 22. – С. 66-69.
16. Курбацкий В.Г. Прикладные задачи теории вероятностей и случайных процессов: методические указания для практических занятий студентов / В. Г. Курбацкий. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2013. – 37с.
17. Осипов Ю.М. Методы расчета линейных электрических цепей. Учебное пособие по курсам электротехники и ТОЭ / Ю.М. Осипов, П.А. Борисов. – СПб: НИУ ИТМО, 2012. – 120 с.