А. М. Азизов

# Одноканальный принцип инвариантности в динамике измерительных систем

А. М. Азизов

# ОДНОКАНАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ в ДИНАМИКЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Монография

Электронное текстовое издание

Санкт-Петербург
Наукоемкие технологии
2019

ISBN 978-5-6042710-2-5

УДК 531
ББК 32.965
А 35

**Азизов А. М.**

А 35 Одноканальный принцип инвариантности в динамике измерительных систем [Электронный ресурс]: монография. СПб.: Наукоемкие технологии, 2019. 194 с. URL: http://publishing.intelgr.com/archive/invariance.pdf.

ISBN 978-5-6042710-2-5

Рассматривается физически одноканальный принцип инвариантности, основанный на постановке и решении расширенной задачи динамических измерений. В этой постановке задачи неизвестными считаются как сигнал, подлежащий измерению, так и параметры, характеризующие динамические свойства линейной измерительной системы.

Указанный принцип инвариантности позволяет решать ряд сложных задач динамических измерений, в том числе важнейшую задачу исключения влияния параметрических явлений на точность измерения.

Основная прикладная направленность содержания монографии – это область измерения неэлектрических параметров технологических процессов. Но приведенные методы и результаты могут быть использованы при решении общей задачи определения по реакции объекта входного воздействия для линейных нестационарных динамических объектов произвольной природы.

Для научных и инженерно-технических работников.

ISBN 978-5-93808-247-2 

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

При постановке расширенной задачи динамических измерений неизвестными считаются как измеряемый сигнал, так и параметры линейной нестационарной измерительной системы заданной структуры. Это по существу означает объединение собственно задачи измерения и задачи параметрической идентификации измерительной системы.

Аппроксимация в расширенной задаче измеряемого сигнала и неизвестных параметров измерительной системы многочленами позволяет заменить задачу с неизвестными функциями задачей с неизвестными постоянными величинами. Существование различных методов сведения последней задачи к решению некоторых эквивалентных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) обеспечивает реализацию физически одноканального принципа инвариантности.

Суть указанного принципа инвариантности заключается в том, что использование только показаний нестационарной измерительной системы и заданной математической модели этой системы позволяет находить независимо все неизвестные постоянные величины (коэффициенты аппроксимации), а, следовательно, все неизвестные функции – измеряемый сигнал и переменные во времени параметры измерительной системы.

В данной работе подробно излагается содержание физически одноканального принципа инвариантности применительно к линейным нестационарным измерительным системам заданной структуры, причем рассматриваются как измерительные системы с сосредоточенными параметрами, так и измерительные системы с распределенными параметрами.

Отдельно рассматривается одноканальный принцип инвариантности применительно к линейным нестационарным измерительным системам с сосредоточенными параметрами, имеющими произвольную (неизвестную) структуру.

Так как одноканальный принцип инвариантности реализуется при решении обратной задачи, каковой оказывается расширенная задача измерения, то рассматриваются вопросы повышения устойчивости конкретных алгоритмов инвариантности.

Завершается изложение рассмотрением применения одноканального принципа инвариантности в статистической динамике измерительных систем.

Приведены результаты компьютерного моделирования процесса восстановления измеряемых сигналов с использованием одноканального принципа инвариантности. В рамках выбранных косвенных и прямых критериев оценки точности восстановления измеряемых сигналов результаты моделирования подтверждают справедливость основного теоретического вывода: применение одноканального принципа инвариантности позволяет получать информацию об измеряемых сигналах, свободную от параметрических искажений. Указанный факт имеет очень важное значение, так как исключение влияния параметрических эффектов существенно повышает точность динамических измерений.

ГЛАВА 1

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТИПОВЫХ ПОДСИСТЕМ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ИСТОЧНИКАМИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Параметрические явления в области измерений могут наблюдаться как в подсистемах получения первичной измерительной информации – в, так называемых, измерительных преобразователях (ИП) первичной измерительной информации («датчиках»), так и в подсистемах преобразования измерительной информации – в технических средствах функционального преобразования измерительной информации (усилители, блоки запаздывания, корректирующие звенья, интегрирующие и дифференцирующие цепи, автокомпенсаторы и т. д.).

Основная направленность данной работы – это область измерения неэлектрических величин, где, как известно, параметрические эффекты проявляются весьма сильно, причем в подсистемах получения первичной измерительной информации указанные эффекты несоизмеримо существеннее, чем в подсистемах преобразования измерительной информации. В связи с этим, ниже приводятся примеры математических моделей лишь типовых подсистем получения первичной измерительной информации в области измерения неэлектрических величин.

## 1.1. ПОДСИСТЕМЫ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Круг приводимых ниже моделей ограничивается областью измерения скорости, температуры и давления потоков жидкостей и газов. В указанных моделях используются обозначения, принятые в соответствующих областях измерения.

### Измерительные преобразователи (ИП) скорости потока

Существует много типов ИП скорости потока, причем основанных на совершенно различных физических принципах действия. Остановимся на простейших из них, а именно, на ИП, которые получили название чашечных, или крыльчатых, анемометров. Если пренебречь трением в частях механизма, то при достаточно больших скоростях потока уравнение, характеризующее динамические свойства анемометра как линейного звена, может быть представлено в виде

$$I\frac{dw(t)}{dt}+r(t)w(t)=c_0\Omega^2(t),\ \ w(0)=w_0, \tag{1}$$

где $w(t)$ – скорость вращения ротора, по которой и судят о скорости потока; $\Omega(t)$ – скорость потока; $I$ – момент инерции ротора анемометра; $c_0$ – постоянная, зависящая от технологических параметров анемометра; $r(t)$ – переменный во времени параметр, зависящий от вязкого трения и условий измерения, который и является источником параметрических явлений.

## Измерительные преобразователи (ИП) температуры потока

Ограничимся только контактными методами измерения температуры потоков жидкостей и газов. В этом случае типичными ИП температуры (термоприемниками) служат термопары, термисторы и различного типа термометры сопротивления.

Начнем с простейшей ситуации. Пусть материал термоприемника однороден, и в процессе измерения отсутствуют градиенты температур внутри термоприемника. Тогда уравнением, описывающим динамические свойства указанных видов термоприемников как линейных звеньев будет уравнение

$$\frac{du(t)}{dt}+\frac{\alpha_k(t)\times S}{c\gamma V}u(t)=\frac{\alpha_k(t)\times S}{c\gamma V}\theta(t),\ \ u(0)=u_0, \tag{2}$$

где $u(t)$ – температура термоприемника; $\theta(t)$ – измеряемая температура потока; $S$, $V$ – площадь поверхности и объем термоприемника; $c$, $\gamma$ – удельная теплоемкость и плотность материала термоприемника; $\alpha_k(t)$ – коэффициент конвективного теплообмена между термоприемником и средой, в которой находится термоприемник.

Переменность во времени коэффициента конвективного теплообмена и является источником параметрических явлений.

Более сложными ИП температуры потоков являются ИП промышленного типа. В них указанные выше собственно термоприемники, играющие роль чувствительных элементов, помещаются в защитную оболочку. Если предположить, что материал оболочки такого ИП однороден по своим физическим свойствам, и в ней так же, как внутри самого чувствительного элемента, отсутствуют градиенты температур, то уравнение, описывающее динамические свойства этой группы термоприемников, имеет вид

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+[\beta_1+\beta_2+\beta_3\times\alpha_k(t)]\frac{du(t)}{dt}+\beta_1\times\beta_3\times\alpha_k(t)\times u(t)=\beta_1\times\beta_3\times\alpha_k(t)\times\theta(t), \qquad (3)$$

$$u(0)=u_0,\quad u'(0)=u_1,$$

где $\beta_1=\frac{k_0S_э}{c_э}$; $\beta_2=\frac{k_0S_э}{c_{об}}$; $\beta_3=\frac{S_{об}}{c_{об}}$; $c_э$, $c_{об}$ – полные теплоемкости термочувствительного элемента и оболочки соответственно; $k_0$ – коэффициент теплопередачи между оболочкой и чувствительным элементом; $S_э$, $S_{об}$ – площади поверхности чувствительного элемента и оболочки соответственно. Обозначения $u(t)$, $\theta(t)$, $\alpha_k(t)$ имеют тот же смысл, что и в уравнении (2).

## Измерительные преобразователи (ИП) давления потока

Типичными измерительными преобразователями давления потока газа являются монометры с упругим чувствительным элементом. Если пренебречь инерционностью упругого чувствительного элемента, то динамические свойства этих ИП будут полностью определяться свойствами аэродинамических передающих трасс. В этом случае уравнением, описывающем динамические свойства ИП, будет

$$\tau(p,t)\frac{dp(t)}{dt}+p(t)=P(t),\;\; p(0)=p_0, \qquad (4)$$

где $\tau(p,t)=\frac{128\mu(t)\times v_0\times l_0}{\pi d^4\times p(t)}$; $p(t)$ – текущее значение давления газа в полости монометра, которое по сделанному выше предположению без динамического искажения воспроизводится упругим чувствительным элементом, т. е. $p(t)$ – это показания ИП; $P(t)$ – измеряемое давление газового потока; $v_0$ – объем газа, заключенного в полости монометра; $l_0$ и $d$ – длина и диаметр трубки монометра; $\mu(t)$ – коэффициент динамической вязкости газа, который зависит от времени и является источником параметрических явлений.

Заметим, что модель (4) является по существу нелинейной, так как параметр $\tau(p,\ t)$ содержит функцию $p(t)$. Однако, на практике при оценке параметра $\tau(p,\ t)$, вместо входящей в его структуру функции $p(t)$, используют некоторое значение из предполагаемого интервала изменения измеряемого сигнала $P(t)$.

Возможно иное рассмотрение этих ИП давления. Пусть в монометрах с упругим чувствительным элементом динамические свойства ИП определяются только инерционностью упругого чувствительного элемента, а наличием аэродинамических трасс можно пренебречь. Если считать, что упругий элемент является элементом мембранного типа, то динамические свойства ИП как линейного элемента будут описываться уравнением

$$m\frac{d^2W(t)}{dt^2}+k(t)\frac{dW(t)}{dt}+\bar{c}W(t)=P(t),\ W(0)=W_0,\quad W'(0)=W_1, \tag{5}$$

где $W(t)$ – текущее значение прогиба мембраны; $P(t)$ – измеряемое давление; $m$, $\bar{c}$ – масса и жесткость мембраны; $k(t)$ – параметр, характеризующий демпфирование мембраны, который и является источником параметрических явлений.

Если бы при анализе динамических свойств ИП давления потребовалось учесть как инерцию аэродинамической трассы, так и инерцию упругого чувствительного элемента, то необходимо было бы рассматривать уравнение (4) совместно с уравнением (5), заменив в последнем функцию $P(t)$ функцией $p(t)$.

Исходя из конкретного вида (1)–(5) приведенных моделей, в качестве общей модели ИП с сосредоточенными параметрами, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, в простейшем случае можно взять уравнение

$$\frac{d^nY(t)}{dt^n}+\sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)\frac{d^iY(t)}{dt^i}=X(t),\ Y^{(i)}(0)=Y_0^{(i)},\quad i=0,1,\ldots,(n-1), \tag{I}$$

либо уравнение

$$\frac{d^nY(t)}{dt^n}+\sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)\frac{d^iY(t)}{dt^i}=a_0(t)X(t),\ Y^{(i)}(0)=Y_0^{(i)},\quad i=0,1,\ldots,(n-1), \tag{II}$$

что определяется конкретной областью измерений. В обоих случаях $Y(t)$ – выходной сигнал, т. е. показания ИП; $X(t)$ – измеряемый сигнал; $a_i(t)$, $i = 0, \ldots, (n-1)$ – переменные во времени параметры ИП.

В дальнейшем мы раздельно рассмотрим эти модели, так как физические свойства описываемых измерительных преобразователей оказываются различными, и при ссылке на них называем их первой и второй моделью измерительных систем с сосредоточенными параметрами.

## 1.2. ПОДСИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрение ИП с распределенными параметрами обусловлено необходимостью более точного физического и математического описания этих объектов. Здесь мы ограничимся приведением только моделей первичных измерительных преобразователей температуры и давлений, так как эти модели достаточно полно содержат в себе основные проблемы анализа, возникающие при исследовании динамических свойств ИП с распределенными параметрами.

### Измерительные преобразователи температуры потока

Наиболее простыми, с точки зрения анализа параметрических явлений, измерительными преобразователями температуры с распределенными параметрами являются так называемые термоприемники стержневого типа. Динамические свойства этих ИП в линейном приближении описываются краевой задачей

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + m(t)[\theta(t) - u(x,t)], \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad u(l,t) = u_{\text{ст}} = \text{const}, \quad u(x,0) = u_0 = \text{const}, \ m(t) = \frac{\beta}{c\gamma}\alpha_k(t), \qquad (7)$$

где $u(x, t)$ – температура стержня в точке $x$ в момент времени $t$; $\theta(t)$ – измеряемая температура потока; $\alpha_k(t)$ – коэффициент конвективного теплообмена между термоприемником и средой, в которой находится термоприемник; $a_0^2$, $c$, $\gamma$ – коэффициент температуропроводности, удельная теплоемкость и плотность материала термоприемника соответственно; $\beta$ – определяющий размер стержня; $l$ – длина стержня; $u_{\text{ст}}$ – температура стенки, в которой закреплен термоприемник.

В зависимости от конструктивного исполнения в качестве выходной величины этих термоприемников используются, как правило, либо температура начала стержня, т. е. температура в точке $x = 0$, либо средняя на длине $l_0$ температура стержня, определяемая по формуле

$$u_{\text{ср}}(t) = \frac{1}{l_0}\int_0^{l_0} u(x,t)dx, \ \ l_0 \le l.$$

Очевидно, что источником параметрических явлений для этих ИП является коэффициент конвективного теплообмена $\alpha_k(t)$. В дальнейшем анализе модель (6)–(7) будем считать первой моделью измерительной системы с распределенными параметрами.

В качестве следующей группы термоприемников, описываемых краевой задачей, будем считать измерительные преобразователи температуры, динамические свойства которых в линейном приближении описываются краевой задачей

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}=a_0^2\left[\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2}\right],$$

$$(x,y,z)\in\Omega_0,\quad t>0; \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}\right|_s+H(t)\left[u(x,y,z,t)\big|_s-\theta(t)\right]=0,\ u(x,y,z,0)=u_0=\mathrm{const}, \tag{9}$$

где $H(t)=\dfrac{\alpha_k(t)}{\lambda}$; $u(x, y, z, t)$ – температура термометрического тела в пространственной точке $(x, y, z)$ в момент времени $t$; $\theta(t)$ – измеряемая температура потока; $\lambda$ и $a_0^2$ – коэффициенты теплопроводности и температуропроводности материала термоприемника соответственно; $\dfrac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}$ – производная температуры по направлению нормали $n$ к изотермической поверхности.

Модель (8)–(9) описывает ИП температуры произвольной геометрической формы, но изготовленные из однородных по физическим свойствам материалов. Техническое исполнение ИП температуры обычно ограничивается телами канонических форм: неограниченной пластины (длина и ширина пластины во много раз больше ее толщины), шара и неограниченного цилиндра (длина цилиндра во много раз больше его диаметра). При этом общая модель (8)–(9) для указанных тел канонических форм соответствующим образом преобразуется. Для ИП, имеющих форму неограниченной пластины, модель (8)–(9) принимает вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a_0^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\quad 0<x<R,\quad t>0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial u(R,t)}{\partial x}+H(t)\left[u(R,t)\ -\theta(t)\right]=0,\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\ u(x,0)=u_0, \tag{11}$$

где $R$ – половина толщины пластины; $x$ – текущее расстояние от произвольной точки пластины до плоскости симметрии пластины, которая проходит через точку $x = 0$ параллельно плоскости поверхности пластины.

Для ИП, имеющих форму шара, модель (8)–(9) принимает вид:

$$\frac{\partial u(r,t)}{\partial t}=a_0^2\left[\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right],\quad 0<r<R,\quad t>0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial u(R,t)}{\partial r}+H(t)\left[u(R,t)\ -\theta(t)\right]=0,\frac{\partial u(0,t)}{\partial r}=0,\ u(r,0)=u_0, \tag{13}$$

где $R$ – радиус шара; $r$ – текущее расстояние от произвольной точки шара до его центра.

Для ИП, имеющих форму неограниченного цилиндра, модель (8)–(9) принимает вид:

$$\frac{\partial u(r,t)}{\partial t} = a_0^2 \left[ \frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r,t)}{\partial r} \right], \quad 0 < r < R, \quad t > 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u(R,t)}{\partial r} + H(t)\left[u(R,t) - \theta(t)\right] = 0, \frac{\partial u(0,t)}{\partial r} = 0, \ u(r,0) = u_0, \tag{15}$$

где $R$ – радиус цилиндра; $r$ – текущее расстояние от произвольной точки цилиндра до оси симметрии цилиндра, проходящей через точку $r = 0$.

Показания термоприемников, описываемых приведенными краевыми задачами, соответствуют их среднеобъемным температурам $u_v(t)$:

для термоприемников, имеющих форму неограниченной пластины, –

$$u_v(t) = \frac{1}{R} \int_0^R u(x,t)dx;$$

для термоприемников, имеющих форму шара, –

$$u_v(t) = \frac{3}{R^3} \int_0^R r^2 u(r,t)dr;$$

для термоприемников, имеющих форму неограниченного цилиндра, –

$$u_v(t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R ru(r,t)dr.$$

Модели ИП температуры с распределенными параметрами (8)–(15) являются с физической и математической точек зрения более точными описаниями ИП температуры с сосредоточенными параметрами, динамические свойства которых в довольно грубом приближении описываются простой моделью (2). В дальнейшем анализе модель (8)–(9) и ее частные случаи (10)–(15) будем считать второй моделью измерительных систем с распределенными параметрами.

В заключение рассмотрения данной группы ИП температуры с распределенными параметрами заметим, что существуют технические исполнения термоприемников, для которых указанные выше термометрические тела канонических форм служат не чувствительными элементами, непосредственно регистрирующими температуру среды, в которой они находятся, а служат так называемыми подложками. В указанных технических исполнениях термоприемников чувствительными элементами, непосредственно регистрирующими температуру среды, являются тончайшие металлические пленки, которые, используя специальные технологии, наносятся на поверхности неэлектропроводящих подложек. При этом чрезвычайно малая толщина пленок позволяет считать, что внутри пленок отсутствуют градиенты температур, и температура пленок совпадает с температурой поверхности подложки. Следовательно, в указанных условиях можно пренебречь фактом наличия чувствительных пленок на поверхности подложек термоприемников и считать, что показания термоприемников соответствуют температуре поверхности подложки. Термоприемники, технически исполненные описанным образом, обычно называют пленочными термоприемниками. На практике неэлектропроводящие подложки пленочных термоприемников часто выполняют также в виде, так называемых, полуограниченных тел (полуограниченных цилиндров), на торцевую поверхность которых наносится чувствительная пленка.

### Измерительные преобразователи давления потока

Вновь обратимся к ИП давления – к монометрам с упругим чувствительным элементом, причем предположим, что динамические свойства этих ИП определяются только инерционностью упругой мембраны, а наличием аэродинамических передающих трасс можно пренебречь. Но теперь будем более точно описывать поведение мембраны, а именно, учтем, что, в отличие от модели (5), в действительности при воздействии входного сигнала $P(t)$ каждой точке мембраны будет соответствовать свое отклонение.

Если используемая в ИП мембрана имеет прямоугольную форму, то динамические свойства рассматриваемых ИП описываются краевой задачей

$$k_1(t)\frac{\partial W(x,y,t)}{\partial t}+\rho_s\frac{\partial^2 W(x,y,t)}{\partial t^2}=$$
$$=\frac{1}{\lambda_0}\left[\frac{\partial^2 W(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W(x,y,t)}{\partial y^2}\right]+P(t),\ \ t>0, \tag{16}$$

$$W(x,y,t)\big|_{\text{г}}=0,\ \ t\ge 0;\ \ W(x,y,0)=W_0;\ \ W_t'(x,y,0)=W_1, \tag{17}$$

где $W(x, y, t)$ – мгновенное значение отклонения точки мембраны с координатами $(x, y)$ от положения равновесия; $k_1(t)$ – функция, характеризующая демпфирование мембраны; $\rho_s$ – масса единицы площади мембраны; $\lambda_0$ – величина, характеризующая материал, из которого изготовлена мембрана, а также ее упругость и натяжение; индексом «г» обозначается граница мембраны.

Если используемая в ИП мембрана имеет круглую форму, то динамические свойства ИП описываются краевой задачей

$$k_1(t)\frac{\partial W(r,t)}{\partial t}+\rho_s\frac{\partial^2 W(r,t)}{\partial t^2}=\frac{1}{\lambda_0}\left[\frac{\partial^2 W(r,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W(r,t)}{\partial r}\right]+P(t), \tag{18}$$

$$W(R,t=0,\ t\geq 0;\ W(r,0)=W_0;\ W_t'(r,0)=W_1, \tag{19}$$

где $r$ – расстояние от центра мембраны до данной точки; $R$ – радиус мембраны.

Аналогично можно уточнить и поведение аэродинамических передающих трасс, описав их соответствующей краевой задачей.

Приведенные модели ИП общеизвестны и, естественно, ими далеко не исчерпываются ни огромное многообразие существующих моделей измерительных преобразователей, ни их сложность.

## 1.3. ИСТОЧНИКИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Если в приведенных выше линейных моделях параметры, характеризующие динамические свойства объекта, являются постоянными во времени величинами, то по существующей терминологии эти объекты называются *линейными стационарными*, в противном случае эти объекты называются *линейными нестационарными*. В рамках задач анализа теория линейных стационарных объектов к настоящему времени достаточно полно разработана. Теория линейных нестационарных динамических объектов, оказавшаяся значительно более сложной, до сих пор находится в стадии развития. Сказанное в полной мере относится и к области измерений.

В данной работе основное внимание обращается на, так называемые, параметрические эффекты, появляющиеся в поведении линейных нестационарных подсистем, входящих в структуру системы измерения. Параметрическим эффектом будем считать эффект появления в показаниях подсистем измерения составляющих, обусловленных только фактом переменности во времени параметров этой подсистемы.

Как отмечалось ранее, параметрические эффекты могут появляться как в подсистемах получения первичной измерительной информации, так и в подсистемах преобразования измерительной информации. Поэтому, анализируя в дальнейшем ту или иную конкретную математическую модель, мы будем говорить просто об измерительной системе (ИС), не конкретизируя, о каких именно подсистемах идет речь. Это естественно, ибо одна и та же математическая модель может описывать динамические свойства как первых из указанных подсистем, так и вторых.

Независимо от конкретной структуры модели и соответствующего источника параметрических явлений во всех случаях возникает один и тот же, главный, вопрос. А именно, каким образом в данной ситуации восстанавливать измеряемую физическую величину $X(t)$ по имеющимся показаниям $Y(t)$ измерительной системы и заданной математической модели ИС.

Традиционный и наиболее простой путь решения указанной проблемы заключается в том, что, вместо переменного во времени параметра, условно обозначим его $a(t)$, берут некоторую постоянную величину $a$. Величина $a$ оказывается, таким образом, оценочной. Иногда ее вычисляют на основе известных закономерностей, если таковые существуют, характеризующих зависимость этого параметра от других известных физических и технологических параметров. Пример анализа возможностей такой оценки в конкретной области измерения будет приведен ниже, где будет видно, что указанные возможности весьма ограничены. Поэтому чаще всего постоянную величину $a$ определяют экспериментально на специальных установках и стендах, служащих для динамической идентификации измерительных систем. На указанных установках и стендах всегда пытаются создать такие условия идентификации, при которых исследуемые ИС можно было бы считать стационарными системами, т. е. условия, позволяющие считать определяемый параметр приблизительно постоянным в процессе идентификации.

Однако, независимо от того, как оценен постоянный параметр $a$ – теоретически или экспериментально, – возникает и остается открытым принципиальный вопрос: в какой степени результаты восстановления измеряемого сигнала $X(t)$, основывающиеся на использовании выходного сигнала $Y(t)$ и модели ИС, содержащей постоянный параметр $a$, будут адекватны объективным результатам восстановления измеряемого сигнала $X(t)$, которые должны были бы основываться на использовании выходного сигнала $Y(t)$ и модели ИС, содержащей в действительности переменный параметр $a(t)$.

Второй путь решения указанной проблемы восстановления измеряемого сигнала при использовании нестационарных ИС, начало которому положила работа А. Н. Гордова [4], состоит в следующем. Решается соответствующее уравнение, описывающее динамические свойства нестационарных ИС, что позволяет установить функциональную связь между показаниями $Y(t)$ измерительной системы и измеряемым сигналом $X(t)$, которая как решение соответствующего уравнения содержит переменный параметр $a(t)$. Затем, задаваясь различными предполагаемыми функциональными видами параметра $a(t)$, для каждого из них оценивают по имеющемуся решению отклонение показаний $Y(t)$ ИС от измеряемого сигнала $X(t)$. Исходя из указанных теоретических оценок величин отклонений межу $Y(t)$ и $X(t)$, судят в дальнейшем о возможных погрешностях измерения в реальном процессе измерения.

Таким образом, на изложенном пути восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ для нестационарных ИС, так же как в предыдущем случае стационарных ИС, одним из важных этапов является этап использования решений прямых задач. Поэтому после появления указанной работы А. Н. Гордова различными авторами было опубликовано несколько десятков работ, единственной целью которых было получение по возможности более точных решений прямых задач для нестационарных ИС. В работе [1] приведен краткий обзор методов решения указанных задач и осуществлен детальный анализ рассматриваемого, второго, пути решения проблемы восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ для нестационарных ИС. Этот путь является в настоящее время основным и продолжает развиваться.

Обратимся, однако, к вопросу об адекватности восстанавливаемого на этом пути измеряемого сигнала истинному измеряемому сигналу. Очевидно, что теперь можно дать более содержательный ответ на основной вопрос, чем в предыдущем случае. Но такой ответ требует задания большей исходной информации, а именно, знания видов предполагаемых законов изменения переменного параметра $a(t)$, значений постоянных величин, входящих в указанные законы. Таким образом, чтобы дать объективную оценку второму пути решения основной проблемы восстановления измеряемого сигнала для нестационарных ИС, необходимо выяснить, во-первых, насколько реально получение упомянутой дополнительной исходной информации о переменных параметрах ИС, а во-вторых, насколько эта дополнительная информация, получаемая до измерения, будет соответствовать фактическому характеру изменения этих параметров в процессе реального измерения. Для прояснения указанных вопросов естественно обратиться к такой области измерения, в которой можно было бы опереться на уже известные в этой области соответствующие физические закономерности. Из рассмотренных выше такой областью измерений является область температурных измерений.

В моделях, относящихся к измерению температур, выше указывалось, что основным источником параметрических эффектов является параметр $\alpha_k(t)$, называемый коэффициентом конвективного теплообмена. К имеющейся в настоящее время информации об этом параметре мы и обратимся. Эта информация общеизвестна [11] и приводится здесь лишь с целью иллюстрации существующей реальной ситуации, связанной с нестационарными измерительными системами.

Из теории известно, что значение коэффициента конвективного теплообмена зависит от многих физических факторов, причем зависимость эта настолько сложна, что единственными надежными данными здесь являются эмпирические результаты исследований. Соотношения, соответствующие этим эмпирическим результатам, строятся обычно в критериальной форме. Необходимые нам для дальнейшего критерии, используемые в теории конвективного теплообмена, – это критерии Нуссельта, Прандтля и Рейнольдса. Приведем определения этих критериев, полагая, для конкретности, что речь идет о термоприемниках, имеющих форму неограченного цилиндра.

Критерий Нуссельта имеет вид

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha_k d}{\bar{\lambda}},$$

где $\alpha_k$ – коэффициент конвективного теплообмена, который в действительности является функцией времени $\alpha_k(t)$; $\bar{\lambda}$ – коэффициент теплопроводности среды, в которой находится цилиндрическое тело; $d$ – определяющий размер этого тела, в качестве которого принимают диаметр цилиндра.

Критерий Нуссельта характеризует интенсивность теплообмена между термоприемником и средой.

Критерий Прандтля имеет вид

$$\mathrm{Pr} = \frac{\bar{\nu}_0}{a^*},$$

где $\bar{\nu}_0$ и $a^*$ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности среды соответственно.

Этот критерий характеризует физические свойства среды, температура которой подлежит измерению.

Критерий Рейнольдса имеет вид

$$\mathrm{Re} = \frac{vd}{\bar{\nu}_0},$$

где $v$ – скорость потоков жидкости и газа, омывающих термоприемник.

Критерий Рейнольдса характеризует теплообмен при вынужденной конвекции, т. е. в условиях, когда движение жидкости и газа обусловлено действием каких-либо внешних сил; именно такие потоки и представляют наибольший интерес.

Заметим, что значения приведенных критериев зависят от температуры, поэтому обычно указывается, что величины этих критериев вычислены при значении температуры, равной либо температуре поверхности тела $u_{\text{п}}$, либо температуре среды θ, либо средней арифметической этих двух температур.

В теории конвективного теплообмена показано, что в условиях ламинарного течения жидкости ($10 < \mathrm{Re} < 10^3$) критериальное соотношение конвективного теплообмена имеет вид

$$\mathrm{Nu}_\theta = 0{,}5(\mathrm{Re}_\theta)^{0,5} \times (\mathrm{Pr}_\theta)^{0,38} \times \left(\frac{\mathrm{Pr}_\theta}{\mathrm{Pr}_{\text{п}}}\right)^{0,25},$$

а в условиях турбулентного течения ($10^3 \le \mathrm{Re}_\theta \le 2 \times 10^5$) соответствующим соотношением является

$$\mathrm{Nu}_\theta = 0{,}25(\mathrm{Re}_\theta)^{0,6} \times (\mathrm{Pr}_\theta)^{0,38} \times \left(\frac{\mathrm{Pr}_\theta}{\mathrm{Pr}_{\text{п}}}\right)^{0,25}.$$

В условиях развитой турбулентности показатель степени у критерия Рейнольдса может достигать величины 0,8.

Положим, что изменениями критерия Прандтля можно пренебречь в процессе измерения, тогда оба критериальных соотношения можно записать в виде (индекс θ опущен для упрощения записи)

$$\mathrm{Nu}_\theta = \bar{c}_0 \mathrm{Re}^n,$$

где смысл постоянных $\bar{c}_0$, $n$ очевиден из приведенных выше критериальных соотношений для ламинарного и турбулентного течений.

Критерий Рейнольдса содержит скорость потока, которая является функцией времени и пространственных координат. Так как нас интересует зависимость коэффициента конвективного теплообмена $\alpha_k(t)$ от времени, то, естественно, возникает вопрос: к каким изменениям величины коэффициента конвективного теплообмена приводят изменения величины скорости потока? Чтобы установить взаимосвязь между указанными величинами, представим критерий Re в виде $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_0 + \widetilde{\mathrm{Re}}$, где $\mathrm{Re}_0$ и $\widetilde{\mathrm{Re}}$ – постоянная и переменная составляющие этого критерия. Далее, разлагая величину $\mathrm{Re}^n$ в степенной ряд по переменной $\widetilde{\mathrm{Re}}$ и ограничиваясь линейными членами разложения, получим

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}_0 + \mathrm{Nu}_0 \times n\frac{\widetilde{\mathrm{Re}}}{\mathrm{Re}_0}, \quad \mathrm{Nu}_0 = c\mathrm{Re}_0^n.$$

Теперь, учитывая что

$$\frac{\mathrm{Nu} - \mathrm{Nu}_0}{\mathrm{Nu}_0} = \frac{\widetilde{\mathrm{Nu}}}{\mathrm{Nu}_0} = \frac{\tilde{\alpha}_k}{\alpha_{k0}}, \qquad \frac{\widetilde{\mathrm{Re}}}{\mathrm{Re}_0} = \frac{\tilde{v}(t)}{\bar{v}_0},$$

где $\mathrm{Nu}_0$, $\widetilde{\mathrm{Nu}}$ – постоянная и переменная составляющие критерия Nu, а $\bar{v}_0$ и $\tilde{v}(t)$ – постоянная и переменная составляющие скорости потока, окончательно имеем

$$\frac{\tilde{\alpha}_k(t)}{\alpha_{k0}} = n\frac{\tilde{v}(t)}{\bar{v}_0}.$$

При получении этого соотношения предполагалось, что коэффициент теплопроводности $\lambda_0$ и коэффициент кинематической вязкости среды $\bar{\nu}_0$, в которой находится термоприемник, остаются постоянными в процессе измерения.

Из последнего соотношения следует, что при измерении температур потоков переменность во времени коэффициента конвективного теплообмена $\alpha_k(t)$ весьма значительна: относительная величина переменной составляющей этого коэффициента прямо пропорциональна относительной величине переменной составляющей скорости потока. Очень важно, что указанная переменность параметра $\alpha_k(t)$ является естественным и неизбежным следствием самого метода измерения – измерения путем погружения измерительного преобразователя в среду, температуру которой необходимо измерить, и физической природы объекта исследования – потоков жидкостей и газов.

Таким образом, обращаясь к последнему соотношению, отмечаем, что о характере изменения параметра $\alpha_k(t)$ в процессе измерения температур потоков мы можем судить лишь в той степени, в какой можем судить о характере изменения во времени скорости потока – другой основной физической характеристики потока.

Однако, так как в области измерения скоростей потоков первичные измерительные преобразователи также подвержены действию параметрических эффектов, других по природе происхождения и, возможно, более сложных, то наша попытка решить проблему параметрических эффектов в одной области измерения свелась лишь к тому, что указанная проблема оказалась перенесенной в другую область измерения.

Таким образом, хотя второй путь восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ по показаниям $Y(t)$ нестационарных ИС является более содержательным, чем первый, он не дает возможности довести эту содержательность до получения конкретных функциональных соотношений, которые позволили бы объективно учесть влияние параметрических эффектов и тем самым реализовать возможность повышения точности измерения. Тем не менее, второй путь восстановления измеряемого сигнала $X(t)$, базирующийся на решении прямой задачи с переменными во времени параметрами, имеет самостоятельное и важное значение, так как именно анализ решения прямой задачи позволяет устанавливать и изучать весьма сложные закономерности, которые сопровождают реальные процессы измерения, а именно, закономерности появления параметрических эффектов в поведении нестационарных измерительных систем.

## 1.4. ПРОЯВЛЕНИЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЙ УЧЕТ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ

Рассмотрим примеры реализации второго пути восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ по показаниям $Y(t)$ нестационарной ИС, основанного на решении уравнения с переменными во времени параметрами, описывающего динамические свойства исследуемой ИС. Функциональная связь между измеряемым сигналом $X(t)$ и показаниями $Y(t)$ ИС, которая устанавливается в результате решения указанного уравнения, позволит конкретизировать содержание проблематики параметрических явлений в поведении нестационарных ИС.

### Измерительная система с сосредоточенными параметрами

Пусть рассматривается измерительная система, описываемая моделью (II) при $n = 1$, т. е. взаимосвязь между входным $X(t)$ и выходным $Y(t)$ сигналами определяется уравнением

$$\frac{dY(t)}{dt}+a(t)Y(t)=a(t)X(t),\quad Y(0)=0, \tag{20}$$

где для упрощения записи символ «0» у параметра $a(t)$ в исходном уравнении опущен.

Здесь и в дальнейшем, с целью упрощения выводов необходимых формул, начальные условия, как правило, принимаются нулевыми.

Предположим, что параметр $a(t)$ и измеряемый сигнал $X(t)$ являются линейными функциями времени:

$$a(t)=a_0+v_a\times t,\quad X(t)=X_0+v_x\times t, \tag{21}$$

где постоянные величины $X_0$, $a_0$ – начальные значения входного сигнала и параметра; постоянные величины $v_x$, $v_a$ – скорости изменения входного сигнала и параметра соответственно.

Решение уравнения (20) при нулевом начальном условии имеет вид

$$Y(t)=\int_0^t a(\tau)X(\tau)\exp\left[-\int_\tau^t a(\eta)\,d\eta\right]d\tau. \tag{22}$$

Подставив (21) в (22) и выполнив все возможные промежуточные вычисления, получим выражение для показаний ИС

$$Y(t)=X(t)-X_0\times\exp\left[-a_0\times t-\frac{v_a}{2}t^2\right]-v_x\sqrt{\frac{2}{v_a}}\times\exp\left[-\left(\sqrt{\frac{v_a}{2}}t+\frac{a_0}{\sqrt{2v_a}}\right)^2\right]\frac{\sqrt{\pi}}{2}\times$$

$$\times\left[Erfi\left(\sqrt{\frac{v_a}{2}}t+\frac{a_0}{\sqrt{2v_a}}\right)-Erfi\left(\frac{a_0}{\sqrt{2v_a}}\right)\right],\quad v_a>0 \tag{23}$$

$$Y(t)=X(t)-X_0\times\exp\left[-a_0\times t-\frac{|v_a|}{2}t^2\right]-$$

$$v_x\sqrt{\frac{2}{|v_a|}}\times\exp\left[\left(\sqrt{\frac{|v_a|}{2}}t-\frac{a_0}{\sqrt{2|v_a|}}\right)^2\right]\frac{\sqrt{\pi}}{2}\times$$

$$\times\left[erf\left(\sqrt{\frac{|v_a|}{2}}t-\frac{a_0}{\sqrt{2|v_a|}}\right)+erf\left(\frac{a_0}{\sqrt{2|v_a|}}\right)\right],\quad v_a<0, \tag{24}$$

где $Erfi\ z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{x^2}dx,\quad erf\ z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-x^2}dx.$

Применительно к рассматриваемым ИС напомним основной вывод теории стационарных ИС для случая линейно изменяющегося входного сигнала: если входной сигнал $X(t)$ изменяется по линейному закону, то выходной сигнал $Y(t)$ линейной стационарной системы (системы, для которой $v_a = 0$, $a(t) \equiv a_0$) в установившемся режиме также изменяется по линейному закону; при этом скорости изменения входного и выходного сигналов совпадают между собой, а величины этих сигналов смещены относительно друг друга на постоянную величину $v_x/a_0$. Другими словами, в установившемся режиме имеет место соотношение

$$Y(t) = X(t) - \frac{v_x}{a_0} = X_0 + v_x t - \frac{v_x}{a_0}. \tag{25}$$

Из выражений (23) и (24) видно, если входной сигнал и параметр являются линейными функциями времени, то сформулированный вывод теории стационарных ИС перестает быть справедливым: показания нестационарных ИС являются сложными функциями времени, существенно отличающимися по характеру от входного сигнала.

Для рассматриваемых условий измерения отклонение показаний $Y(t)$ ИС от измеряемого сигнала $X(t)$ будет зависеть от знака скорости $v_a$ изменения параметра: при возрастании значений параметра ($v_a > 0$) указанное отклонение с течением времени стремится к нулю, а при убывании значений параметра ($v_a < 0$) это отклонение будет неограниченно возрастать и, следовательно, измерение теряет смысл.

Как видим, для использования соотношений (23) и (24) с целью оценки степени достоверности результатов измерений необходимо знание исходной информации, которая может иметь лишь предположительный характер.

В рамках модели (20) перейдем к анализу одного из наиболее типичных и важных для практики режимов измерения, а именно, рассмотрим условия измерения, при которых входной сигнал $X(t)$ и параметр $a(t)$ изменяются во времени по гармоническому закону:

$$X(t) = X_0 + A_x \times \sin(\omega t + \phi), \quad a(t) = a_0 + A_a \times \sin \omega t, \tag{26}$$

где $X_0$, $a_0$ и $A_x$, $A_a$ – постоянные величины, имеющие смысл средних значений и амплитуд входного сигнала и параметра соответственно; $\omega$ – циклическая частота колебаний; $\varphi$ – сдвиг по фазе между колебаниями $X(t)$ и $a(t)$.

Подставим (26) в (22) и для вычисления интеграла воспользуемся специальными разложениями:

$$\exp(\eta\cos\omega t) = I_0(\eta) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(\eta)\cos n\omega t,$$

$$\exp(-\eta\cos\omega t) = I_0(\eta) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(\eta)\cos n\omega t,$$

где $\eta = \dfrac{A_a}{\omega}$, $I_n(\eta)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода *n*-го порядка.

В результате вычислений получаем соотношение, устанавливающее взаимосвязь между показаниями ИС и измеряемым сигналом. В установившемся режиме оно имеет вид (для наглядности оно приводится в развернутом виде)

$$\begin{aligned}
Y(t) = X(t) - A_x\omega \Bigg\{ & I_0^2(\eta) \times \frac{1}{a_0^2+\omega^2} \times \left[\omega\sin(\omega t+\phi) + a_0\cos(\omega t+\phi)\right] + \\
& + I_0(\eta)\sum_{n=1}^{\infty} I_n(\eta)\Bigg( \frac{\sin[(n+1)\omega t+\phi] - \sin[(n-1)\omega t-\phi]}{a_0^2+\omega^2}\omega + \\
& + \frac{1}{a_0^2+\omega^2}\left[\cos[(n+1)\omega t+\phi] + \cos[(n-1)\omega t-\phi]\right] a_0 \Bigg) + \\
& + I_0(\eta)\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(\eta)\Bigg( \frac{(n+1)\omega\ \sin[(n+1)\omega t+\phi] + a_0\cos[(n+1)\omega t+\phi]}{a_0^2+(n+1)^2\omega^2} + \\
& + \frac{(n-1)\omega\sin[(n-1)\omega t-\phi] + a_0\cos[(n-1)\omega t-\phi]}{a_0^2+(n-1)^2\omega^2} \Bigg) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n I_n(\eta) I_k(\eta)\Bigg( \frac{\sin[(n+k+1)\omega t+\phi] + \sin[(n-k+1)\omega t+\phi]}{a_0^2+(n+1)^2\omega^2}(n+1)\omega + \\
& + \frac{\cos[(n+k+1)\omega t+\phi] + \cos[(n-k+1)\omega t+\phi]}{a_0^2+(n+1)^2\omega^2} a_0 + \\
& + \frac{\sin[(n+k-1)\omega t-\phi] + \sin[(n-k-1)\omega t-\phi]}{a_0^2+(n-1)^2\omega^2}(n-1)\omega + \\
& + \frac{\cos[(n+k-1)\omega t-\phi] + \cos[(n-k-1)\omega t-\phi]}{a_0^2+(n-1)^2\omega^2} a_0 \Bigg) \Bigg\} \qquad (27)
\end{aligned}$$

Напомним два важнейших вывода теории стационарных ИС применительно к модели (20): если входной сигнал $X(t)$ изменяется по гармоническому закону (26), то выходной сигнал $Y(t)$ линейной стационарной системы $\left(\text{т. е. при } A_a = 0,\ a(t) \equiv a_0\right)$ в установившемся режиме изменяется по гармоническому закону того же вида и той же частоты, что и входного сигнала (но с другой амплитудой и со смещением по фазе), а средние уровни колебаний показаний ИС и входного сигнала совпадают между собой.

Как следует из (27), при гармоническом колебании входного сигнала выходной сигнал нестационарной ИС подчиняется очень сложной закономерности: монохроматическое колебание входного сигнала разворачивается в показаниях нестационарной ИС в полный спектр. Далее, как следует из (27), теряет силу и второе утверждение теории стационарных ИС, а именно, утверждение о совпадении средних уровней колебаний входного и выходного сигналов. Действительно, из (27) вытекает следующее выражение для смещения средних уровней этих сигналов

$$\left.\frac{X_{\text{ср}} - Y_{\text{ср}}}{A_x}\right|_{t\to\infty} = \left.\frac{X_0 - Y_{\text{ср}}}{A_x}\right|_{t\to\infty} = \frac{A_a}{a_0}\left[2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^2(\eta)\frac{n}{\eta^2 + n^2\left(\frac{A_a}{a_0}\right)^2} -\right.$$

$$\left.\frac{1}{\eta} I_0(\eta) I_1(\eta) - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n(\eta) I_{n-1}(\eta)\frac{\eta}{\eta^2 + n^2\left(\frac{A_a}{a_0}\right)^2}\right]\cos\phi -$$

$$2\left(\frac{A_a}{a_0}\right)^2 \times \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^2(\eta)\, n^2 \sin\phi \frac{1}{\eta\left[\eta^2 + n^2\left(\frac{A_a}{a_0}\right)^2\right]}. \qquad (28)$$

При синхронных и синфазных колебаниях входного сигнала и параметра величина указанного смещения определяется выражением

$$\left.\frac{X_{\text{ср}} - Y_{\text{ср}}}{A_x}\right|_{t\to\infty} = \frac{A_a}{a_0}\left[2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \times n \times I_n^2(\eta)\frac{1}{\eta^2 + n^2\left(\frac{A_a}{a_0}\right)^2} -\right.$$

$$\left.\frac{1}{\eta}I_0(\eta)I_1(\eta)-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n(\eta)I_{n-1}(\eta)\frac{\eta}{\eta^2+n^2\left(\frac{A_a}{a_0}\right)^2}\right]. \quad (29)$$

Наконец, для $\eta \to 0$, т. е. при высоких частотах колебаний входного сигнала и параметра, имеем

$$\left.\frac{X_{\text{ср}}-Y_{\text{ср}}}{A_x}\right|_{t\to\infty}=-\frac{1}{2}\frac{A_a}{a_0}. \quad (30)$$

Величина смещения, определяемая этим выражением, является наибольшей.

## Измерительная система с распределенными параметрами

Рассмотрим первую модель нестационарных ИС с распределенными параметрами. Она имеет вид (6)–(7). Проведем исследование этой модели для установления формы аналитической взаимосвязи между входным и выходным сигналами.

Как увидим, из указанной взаимосвязи очевидным образом вытекает вывод о том, что в данном случае имеют место те же параметрические эффекты, которые анализировались выше применительно к нестационарным ИС, описываемым моделью (20).

Итак, пусть поведение ИС описывается краевой задачей:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a_0^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+m(t)[\theta(t)-u(x,t)],\quad t>0,\quad x\in(0,l), \quad (31)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\quad u(l,t)=u_{\text{ст}}=\text{const},\quad u(x,0)=u_0=\text{const}. \quad (32)$$

Здесь $u(x, t)$ – локальная реакция ИС, $\theta(t)$ – измеряемый, т. е. входной сигнал; все остальные обозначения имеют смысл, указанный в п. 1.2.

Здесь основным источником появления параметрических эффектов является переменность во времени параметра $\tau(t)$. Не ограничивая общности, в дальнейшем полагаем $u_0 = u_{\text{ст}}$. Сделаем замену $\upsilon(x, t) = u(x, t) - u_0$, тогда задача примет вид:

$$\frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial t}=a_0^2\frac{\partial^2 \upsilon(x,t)}{\partial x^2}+m(t)[V_0(t)-\upsilon(x,t)],\quad V_0(t)=\theta(t)-u_0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial \upsilon(0,t)}{\partial x}=0,\quad \upsilon(l,t)=0,\quad \upsilon(x,0)=0. \quad (34)$$

Одним из общих методов решения краевых задач для нестационарных систем является метод интегральных тождеств [9]. Интегральное тождество, эквивалентное краевой задаче (33)–(34), имеет вид

$$\left(\frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial t},\eta\right)+a_0^2\left(\frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial x},\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+m(t)\big(\upsilon(x,t),\eta\big)=m(t)\times V_0(t)(1,\eta), \qquad (35)$$

где $\eta = \eta(x)$ – произвольная гладкая функция в $(0, l)$, удовлетворяющая граничным условиям в (34), а $(f_1, f_2)=\int_0^l f_1(x)f_2(x)dx$ означает скалярное произведение функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Пусть искомое решение определяется суммой

$$\upsilon(x,t)=\sum_{i=1}^{N} a_i(t)\,\phi_i(x), \qquad (36)$$

где $\{\varphi_i(x)\}$ – известная система координатных функций; $\{a_i(t)\}$ – система подлежащих определению функций.

Подставим выражение (36) в тождество (35) и возьмем в качестве $\eta(x)$ последовательность $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, N$. Тогда для определения $a_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=1}^{N}(\phi_i,\phi_k)\,\frac{da_i(t)}{dt}+\sum_{i=1}^{N}\Big[a_0^2(\phi_i',\phi_k')+m(t)(\phi_i,\phi_k)\Big]\,a_i(t)=$$

$$=m(t)V_0(t)(1,\phi_k),\;\; k=1,2,\dots,N. \qquad (37)$$

В качестве системы $\{\varphi_i(x)\}$ используем систему ортогональных функций, удовлетворяющих граничным условиям:

$$\phi_i(x)=\sin\,(2i-1)\frac{\pi}{2l}(x+l).$$

Тогда для определения функций $a_i(t)$ получим $N$ не связанных между собой дифференциальных уравнений

$$\frac{da_i(t)}{dt}+\left\{a_0^2\left[\frac{(2i-1)\pi}{2l}\right]^2+m(t)\right\}a_i(t)=\frac{4}{\pi}\frac{1}{2i-1}m(t)V_0(t). \qquad (38)$$

Решения уравнений (38) при нулевых начальных условиях имеют вид

$$a_i(t)=\frac{4}{\pi}\frac{1}{2i-1}\int_0^t \exp\left\{-a_0^2\left[\frac{(2i-1)\pi}{2l}\right]^2(t-\tau)-\int_\tau^t m(\varepsilon)d\varepsilon\right\}m(\tau)V_0(\tau)d\tau. \qquad (39)$$

Введя в рассмотрение бесконечное множество функций $\{\varphi_i(x)\}$, $\{a_i(t)\}$, получаем точное решение исходной краевой задачи

$$\upsilon(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2i-1}\exp\left\{-a_0^2\left[\frac{(2i-1)\pi}{2l}\right]^2 \times t - \int_0^t m(\tau)d\tau\right\}\times$$

$$\times\int_0^t m(\tau)V_0(\tau)\exp\left\{a_0^2\left[\frac{(2i-1)\pi}{2l}\right]^2 \times\tau + \int_0^\tau m(\varepsilon)d\varepsilon\right\}d\tau\times\sin\left[\frac{(2i-1)\pi}{2l}(x+l)\right]. \quad (40)$$

Решение (40) показывает локальную реакцию ИС на сигнал $V_0(t)$. Получим выражение для интегральной реакции, т. е. для показаний ИС. Оно имеет вид

$$\upsilon(t) = -\frac{8}{\pi^2 l'}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^2}\cos\left[(2i-1)\frac{\pi}{2}(1+l')\right]\times$$

$$\times\int_0^t m(\tau)V_0(\tau)\exp\left\{-a_0^2\left[\frac{(2i-1)\pi}{2l}\right]^2(t-\tau) - \int_\tau^t m(\varepsilon)d\varepsilon\right\}d\tau, \quad l' = \frac{l_0}{l}. \quad (41)$$

Если выходной сигнал соответствует локальной реакции ИС в точке $x = 0$, то

$$\upsilon(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}\times\int_0^t m(\tau)V_0(\tau)\exp\left\{-a_0^2\left[\frac{(2i-1)\pi}{2l}\right]^2(t-\tau) - \int_\tau^t m(\varepsilon)d\varepsilon\right\}d\tau\times \quad (42)$$

Сравнивая выражения (41) и (42), устанавливающие взаимосвязь между входным и выходным сигналами рассматриваемой нестационарной ИС с распределенными параметрами, с выражением (22), устанавливающим взаимосвязь между входным и выходным сигналами нестационарной ИС с сосредоточенными параметрами первого порядка, можно заключить, что все параметрические эффекты, обсуждавшиеся выше применительно к нестационарным ИС первого порядка, присутствуют также в динамике рассматриваемой нестационарной ИС с распределенными параметрами. Так как общие члены в рядах (41) и (42) совпадают по структуре с выражением (22), то эти общие члены могут вычисляться для конкретных режимов измерения так же, как это было сделано в случае выражения (22).

В заключение обратим внимание на одну особенность, характерную именно для рассматриваемых ИС с распределенными параметрами. Пусть параметр $T(t)$ и измеряемый сигнал $\theta(t)$ остаются постоянными в процессе измерения. Тогда, полагая в решении (40) $T(t) = T = \text{const}$, $V_0(t) = V_0 = \theta - u_0 = \text{const}$, получим

$$\upsilon(x,t)=\frac{4mV_0}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2i-1}\sin\left[\frac{2i-1}{2l}\pi(x+l)\right]\frac{1}{a_0^2\left[\frac{(2i-1)\pi}{2l}\right]^2+m}\times$$

$$\times\left(1-\exp\left\{-a_0^2\left[\frac{(2i-1)\pi}{2l}\right]^2\times t-mt\right\}\right), \qquad (43)$$

что для установившегося режима измерения примет вид

$$\upsilon(x,\infty)=\frac{4mV_0}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2i-1}\sin\left[\frac{2i-1}{2l}\pi(x+l)\right]\frac{1}{a_0^2\left[\frac{(2i-1)\pi}{2l}\right]^2+m}. \qquad (44)$$

Из выражения (44) следует, что даже в установившемся режиме измерения локальная реакция этой модели стационарной ИС ни в одной пространственной точке не совпадает с измеряемым сигналом $\theta$. Это относится, очевидно, и к показаниям ИС, причем независимо от того, как определяются показания ИС. Следовательно, появляющиеся в этих ИС параметрические эффекты накладываются на уже существующие смещения между показаниями ИС и измеряемым сигналом. Так как указанное смещение имеет характер методической погрешности, то учет этого смещения осуществляется достаточно просто.

Аналогично проводится анализ поведения нестационарных ИС с распределенными параметрами, описываемых краевой задачей (8)–(9) [1].

ГЛАВА 2

# ИНВАРИАНТНОСТЬ В ДИНАМИКЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В данной главе рассматриваются постановка задачи динамических измерений и содержание физически одноканального принципа инвариантности, реализация которого позволяет исключать влияние параметрических эффектов в динамике измерений.

## 2.1. О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Продолжим анализ возможностей восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ при использовании нестационарных ИС, начатый в п. 1.3. Как следует из анализа, проведенного в п. 1.3, специфика процессов измерения неэлектрических величин заключается в том, что значения величин параметров ИС зависят от условий, в которых будет осуществляться измерение, причем важнейшие из этих условий определяются не только свойствами самой ИС, но часто и свойствами объекта, характеристика которого подлежит измерению. Заметим, что предварительные оценки влияния подобных условий на свойства ИС и точность измерения не имеют существенной ценности, ибо важны оценки указанного влияния именно в процессе фактического измерения. Поэтому описанный в п. 1.3 общепринятый способ восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ по показаниям $Y(t)$ нестационарных ИС и оценка предполагаемой погрешности с помощью решения прямой задачи нельзя считать удовлетворительным: сама оценка предполагаемой погрешности основывается на использовании предположений о неизвестных условиях измерения, в том числе о свойствах объекта исследования.

Обратимся к существующей формулировке задачи динамических измерений для линейных ИС с сосредоточенными параметрами.

Пусть дано

$$AX(t) = Y(t),$$

где $X(t)$ – сигнал, подлежащий измерению; $Y(t)$ – показания ИС; $A$ – линейный оператор, полностью описывающий динамические свойства ИС.

Задача динамических измерений в общем виде формулируется следующим образом: по известным показаниям ИС $Y(t)$ и заданному оператору $A$ определить измеряемый сигнал $X(t)$.

Очевидно, задача измерения по своей сути является обратной задачей, поэтому в последние десятилетия задача динамических измерений все чаще решается именно как обратная задача. Полученные в этом направлении результаты относятся, как правило, к линейным стационарным ИС и связаны с построением регуляризованных решений обратных измерительных задач, которые, вообще говоря, относятся к классу так называемых некорректно поставленных задач. Что касается нестационарных ИС, то проблемы, связанные с параметрическими явлениями, в полной мере возникают и при решении обратных задач.

Итак, в соответствии с приведенной формулировкой задачи динамических измерений предполагается, что оператор $A$ задан, т. е. известны как структура этого оператора, так и числовые значения величин параметров, входящих в указанный оператор. Другими словами, приведенная формулировка предполагает, что до использования ИС в фактическом процессе измерения для данной ИС уже решена задача идентификации. Именно этот факт и позволяет ставить задачу определения измеряемого сигнала $X(t)$ в соответствии с приведенным выше операторным уравнением.

Но, в связи с отмеченной в начале этого параграфа спецификой задач измерения неэлектрических величин, при указанных постановке и решении задачи измерения даже для линейных стационарных ИС остается открытым важный вопрос: в какой степени значения постоянных параметров стационарных ИС, определенные в процессе идентификации до процесса измерения, будут соответствовать истинным значениям этих параметров в фактическом процессе измерения. Не имея ответа на указанный вопрос, невозможно судить о том, насколько восстановленный измеряемый сигнал будет адекватен истинному измеряемому сигналу. Ситуация существенно усугубляется при попытке охватить приведенной выше формулировкой задачи динамических измерений более общий класс ИС, а именно, линейные нестационарные ИС, которые и являются основным предметом исследования в данной работе.

Из всего изложенного с неизбежностью вытекает очевидный вывод: результаты восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ должны быть независимыми от конкретных значений параметров или функций, характеризующих динамические свойства измерительной системы. Другими словами, способ (алгоритм) восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ должен быть инвариантным к значениям указанных параметров или функций. Если структура модели нестационарной ИС известна, то требуется, очевидно, инвариантность к конкретным значениям величин неизвестных переменных во времени параметров, входящих в структуру модели ИС. Если структура модели нестационарной ИС не известна, то, полагая выполненным указанное выше условие линейности ИС, можно считать, что основной характеристикой ИС является, например, ее импульсная переходная функция. Следовательно, в этом случае можно аппроксимировать неизвестную импульсную переходную функцию некоторой известной функцией, содержащей линейно входящие в нее неизвестные параметры, поэтому требование инвариантности к импульсной переходной функции будет означать инвариантность к конкретным значениям величин указанных неизвестных параметров.

Итак, имея в виду только линейные ИС, и в общем случае, т. е. в случае неизвестности структуры ИС, требование инвариантности можно интерпретировать как инвариантность способа (алгоритма) восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ к конкретным значениям величин неизвестных параметров, характеризующих динамические свойства ИС.

Заметим, что задача поиска способа (алгоритма) восстановления измеряемого сигнала, результаты реализации которого не зависели бы от конкретных значений величин неизвестных параметров, характеризующих динамические свойства используемых измерительных приборов, далеко не нова. Более того, в измерительной технике многие десятилетия успешно эксплуатируются измерительные системы, в структуре которых реализованы указанные способы, например, в области измерения угла поворота и угловой скорости объектов, на которых установлены измерительные приборы, в области измерения ускорения движущихся в пространстве объектов и т. д. Одними из успешных и распространенных оказались способы, которые можно назвать инструментально-алгоритмическими. Суть этих способов заключается в том, что для измерения некоторой физической величины – сигнала $X(t)$ одновременно используются несколько измерительных преобразователей первичной измерительной информации («датчиков»), а восстановление искомого сигнала осуществляется на основе использования специального алгоритма, содержащего в своей структуре как показания $Y_i(t)$ используемых измерительных преобразователей, так и некоторые операции над этими показаниями.

Возникает естественный вопрос: насколько указанный инструментально-алгоритмический способ восстановления измеряемого сигнала является универсальным, может ли этот способ использоваться, например, при измерении физических характеристик потоков жидкостей и газов при столь сложных условиях, которые сопровождают процесс измерения в этих объектах исследования.

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо обратиться к работе Г. Пфрима [16], являющейся, вероятно, первой работой, в которой была предпринята попытка исключения влияния параметрических эффектов на точность динамических измерений. Способ восстановления измеряемого сигнала, предложенный Г. Пфримом, также можно отнести к инструментально-алгоритмическим. С целью исключения влияния параметрических эффектов на точность динамических измерений температур потоков жидкостей и газов Г. Пфрим предложил использовать два измерительных преобразователя (два термоприемника), а суть предложенного способа заключается в следующем.

Пусть речь идет об измерении температур турбулентных потоков жидкостей и газов, что представляет наибольший интерес. В этом случае для каждой точки потока характерны своя температура $X(t)$ и своя скорость $v(t)$, которые являются некоторыми функциями времени, в общем случае они являются случайными функциями времени.

Сделаем первое допущение. Пусть в некоторых двух точках потока, в которые можно разместить два термоприемника, температура потока оказывается одной и той же функцией времени, т. е. $X_1(t) = X_2(t) = X(t)$. Пусть для измерения температуры потока используются два простейших термоприемника (п. 1.1). Тогда, с учетом сделанного предположения о равенстве температур потока в двух различных точках, в качестве математических моделей этих термоприемников можно взять:

$$\frac{dY_1(t)}{dt} + \frac{\alpha_1(t)}{c_1\gamma_1 L_1} Y_1(t) = \frac{\alpha_1(t)}{c_1\gamma_1 L_1} X(t), \quad L_1 = \frac{V_1}{S_1},$$

$$\frac{dY_2(t)}{dt} + \frac{\alpha_2(t)}{c_2\gamma_2 L_2} Y_2(t) = \frac{\alpha_2(t)}{c_2\gamma_2 L_2} X(t), \quad L_2 = \frac{V_2}{S_2}.$$

Здесь $X(t)$ – измеряемая температура потока; $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ – показания первого и второго термоприемников соответственно, а все остальные обозначения имеют физический смысл, указанный в п. 1.1.

Как ясно из вида этих уравнений, источником параметрических явлений в рассматриваемых термоприемниках являются коэффициенты конвективного теплообмена $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, так как все остальные физические параметры можно считать постоянными.

Из двух этих уравнений можно найти температуру потока, выраженную через величины $Y_1$, $Y_2$, $Y_1'$, $Y_2'$ и отношение коэффициентов конвективного теплообмена:

$$X(t)=Y_1(t)\frac{1-\dfrac{Y_2(t)}{Y_1(t)}\times f(t)}{1-f(t)},\ \text{где}\ f(t)=\frac{c_1\gamma_1L_1}{c_2\gamma_2L_2}\times\frac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)}\times\frac{Y_1'(t)}{Y_2'(t)}.$$

Сделаем второе допущение. Пусть скорость потока в тех двух точках, в которых расположены термоприемники, также оказывается одной и той же функцией времени.

Наконец, сделаем третье допущение. Пусть измеряемая температура потока $X(t)$ изменяется в процессе измерения настолько мало, что критериальные уравнения, приведенные в п. 1.3 и справедливые для стационарного конвективного теплообмена, могут быть использованы и в условиях динамических измерений, для которых характерен именно нестационарный конвективный теплообмен. Тогда справедливо соотношение:

$$\frac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)}=\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{n-1},$$

где $n$ – показатель степени в критериальном уравнении (п. 1.3).

Теперь для функции $f(t)$ имеем

$$f(t)=\frac{c_1\gamma_1}{c_2\gamma_2}\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{2-n}\times\frac{Y_1'(t)}{Y_2'(t)}$$

и, следовательно, приведенный выше алгоритм определения температуры потока оказывается не зависящим от коэффициентов конвективного теплообмена $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$.

Таким образом, несмотря на наличие параметрических явлений в поведении каждого из термоприемников, при сделанных выше допущениях построенный алгоритм определения измеряемого сигнала по показаниям двух термоприемников оказывается не зависящим от параметрических явлений.

Не трудно заметить, что предложенный Г. Пфримом метод исключения влияния параметрических эффектов на точность динамических измерений, в сущности, может рассматриваться как одна из множества возможных частных реализаций идей широко известной теории инвариантности, структурным признаком реализуемости которой является, так называемый, принцип двухканальности. Как известно, факт появления теории инвариантности в общем и современном его понимании отмечен 1939 годом и связан с именем Г. В. Щипанова.

Обратимся, однако, к содержательной стороне метода Г. Пфрима, т. е. на степень достоверности допущений, сделанных при формулировании этого метода.

Первое допущение – температуры в двух точках потока, в которых размещены термоприемники, представляют собой одну и ту же функцию времени $X(t)$, так же как второе допущение – скорости в тех же двух точках потока представляют собой одну и ту же функцию времени $v(t)$, находятся в прямом противоречии с физической природой исследуемого объекта: различным точкам турбулентного потока жидкости и газа соответствуют различные временны́е закономерности изменения температур и скоростей.

Третье допущение также лишено логических оснований. Действительно, если для вывода алгоритма восстановления измеряемой температуры $X(t)$ используются критериальные уравнения, справедливые для стационарного теплообмена, предусматривающего постоянство или незначительное изменение $X(t)$, то этот случай по существу нельзя отнести к вполне динамическим измерениям. Если же речь идет о действительно динамических измерениях, сам смысл которых имеет в виду переменность во времени температуры $X(t)$, а, следовательно, проявление закономерностей нестационарного теплообмена, то использование критериальных уравнений стационарного теплообмена попросту неправомерно.

Таким образом, обсуждаемые допущения настолько далеки от реальной физической картины, которая имеет место при динамических измерениях температур потоков жидкостей и газов, что построенный алгоритм является по существу отражением некоторой идеализированной ситуации измерений. Несмотря на то, что сам алгоритм восстановления сигнала $X(t)$ является точным в рамках принятых допущений, даже незначительные отклонения от принятых допущений приводят к неприемлемым по точности результатам, в чем легко убедиться, обратившись к компьютерному моделированию процесса восстановления сигнала $X(t)$ в соответствии с обсуждаемым алгоритмом. Указанные обстоятельства стали непреодолимым препятствием на пути сколько-нибудь заметного практического применения описанного способа при измерении температур потоков жидкостей и газов.

Следует, однако, отметить очень важное методологическое значение работы [16]: автор не только впервые обратил внимание исследователей на наличие очень важной и сложной проблемы в теории динамических измерений – проблемы параметрических явлений, но и указал на одно из возможных направлений поиска методов решения этой проблемы.

С учетом изложенного и возвращаясь к вопросу о способах восстановления измеряемого сигнала, необходимо констатировать: существуют области измерения неэлектрических величин, например, область измерения физических характеристик потоков жидкостей и газов, в которых условия измерений настолько сложны и специфичны, что использование, с целью исключения влияния параметрических эффектов, инструментально – алгоритмических способов восстановления измеряемого сигнала не представляется возможным. Все изложенное побуждает к поиску чисто алгоритмических способов восстановления измеряемых сигналов, причем таких, которые позволили бы исключать влияние параметрических эффектов на точность динамических измерений. При этом чисто алгоритмический способ восстановления измеряемого сигнала означает, что этот способ основан на использовании некоторых специальных алгоритмов, содержащих показания $Y(t)$ только данной измерительной системы и математические операции над этими показаниями, но не предусматривает ни инструментального вмешательства в данную ИС, ни использования каких-либо других дополнительных измерительных преобразователей первичной измерительной информации.

Имея в виду указанную ранее интерпретацию понятия инвариантности, положим, что динамические свойства ИС определяются системой неизвестных параметров $\{a_i(t)\}$, $i = 0, 1, ..., (n - 1)$, причем все эти параметры, а также подлежащий измерению неизвестный сигнал $X(t)$ являются независимыми компонентами некоторой единой системы неизвестных величин – одного неизвестного вектора, а задача измерения заключается в одновременном и независимом определении по показаниям данной ИС $Y(t)$ каждой из компонент неизвестного вектора. Слова «одновременное и независимое определение» в данном случае означает, что все указанные неизвестные определяются как независимые решения некоторой системы уравнений, содержащей в своей структуре показания данной ИС $Y(t)$, а также математические операции над этими показаниями.

Вопросы построения указанных систем будут подробно обсуждаться в дальнейшем, здесь же лишь предположим возможность построения некоторой системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решениями которой являются либо исходные неизвестные компоненты $X(t)$, $\{a_i(t)\}$, $i = 0, 1, ..., (n - 1)$, либо некоторые обобщенные (промежуточные) компоненты, представляющие собой известные преобразования исходных неизвестных компонент. Изложенную постановку задачи динамических измерений можно считать расширенной задачей измерения. Допустим, что расширенная задача измерения разрешима, и обратим внимание на вытекающие из этого факта следствия.

Так как исходные неизвестные компоненты (или промежуточные компоненты) являются решениями некоторой СЛАУ, то значения величины каждой из найденных исходных компонент оказываются инвариантными к конкретным значениям величин всех остальных компонент, а, следовательно, значения величины восстановленного сигнала $X(t)$ оказываются инвариантными к конкретным значениям величин всех параметров $\{a_i(t)\}$, $i = 0$, $1, \ldots, (n-1)$ измерительной системы.

Далее, если расширенная задача измерения решена, т. е. наряду с измеряемым сигналом $X(t)$ найдены также все неизвестные параметры $\{a_i(t)\}$, $i = 0, 1, \ldots, (n-1)$, то тем самым решена и задача параметрической идентификации для линейных нестационарных ИС, причем результаты решения задачи идентификации, во-первых, оказываются инвариантными к конкретным значениям величины входного сигнала – измеряемого сигнала $X(t)$, а во-вторых, что исключительно важно, результаты решения задачи идентификации относятся к фактически имевшим место условиям измерения.

Таким образом, поиск чисто алгоритмических способов восстановления измеряемого сигнала $X(t)$, позволяющих исключать влияние параметрических эффектов на точность измерения, привел к необходимости постановки задачи динамических измерений как расширенной задачи динамических измерений. Решение расширенной задачи измерения, в свою очередь, означает, по существу, реализацию физически одноканального принципа инвариантности в динамике измерений.

Теперь, ограничиваясь только рамками задач, затрагиваемых в данной работе, и, прежде всего, задачи исключения влияния параметрических эффектов, постановку задачи динамических измерений можно сформулировать следующим образом: по показаниям $Y(t)$ линейной измерительной системы определить измеряемый сигнал $X(t)$ в соответствии с алгоритмом, инвариантным к характеристикам динамических свойств данной ИС.

Обратим внимание на то, что в приведенной формулировке не требуется задания оператора, характеризующего динамические свойства ИС, но указывается на линейность ИС. Это означает, что в частном случае, когда задана структура оператора, характеризующего динамические свойства ИС, и не известны только параметры ИС, входящие в эту структуру, алгоритм восстановления сигнала $X(t)$ должен быть инвариантным к значениям величин параметров ИС.

В общем случае, когда не известны и структура оператора, характеризующего динамические свойства ИС, и параметры ИС, входящие в эту структуру, алгоритм восстановления сигнала $X(t)$ должен быть инвариантным к некоторой обобщенной характеристике ИС, например, к ее импульсной переходной функции. Как указывалось ранее, неизвестную импульсную переходную функцию линейной ИС можно аппроксимировать некоторой известной функцией, содержащей линейно входящие в нее неизвестные параметры. Поэтому инвариантность к неизвестной импульсной переходной функции будет означать инвариантность к значениям неизвестных параметров, входящих в структуру функции, аппроксимирующей импульсную переходную функцию ИС.

Очевидно, что приведенная формулировка задачи динамических измерений как расширенной задачи динамических измерений является весьма условной, имеет частный характер, и любое расширение круга рассматриваемых измерительных задач, а тем более класса используемых измерительных систем, могут потребовать существенного изменения содержания этой формулировки.

## 2.2. ФИЗИЧЕСКИ ОДНОКАНАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ

Обратимся к подробному описанию алгоритма физически одноканального принципа инвариантности для линейных нестационарных измерительных систем с сосредоточенными параметрами. Предварительно коснемся одного методического вопроса, связанного с формой математической модели «вход–выход», принимаемой для описания поведения линейных динамических систем. Указанная математическая модель для линейных ИС при нулевых начальных условиях может иметь «интегральную форму» – форму интегрального уравнения Вольтерра первого рода

$$\int_0^t g(t,\tau) X(\tau) d\tau = Y(t),$$

где $g(t,\tau)$ – импульсная переходная функция динамической системы; $X(t)$, $Y(t)$ – входной и выходной сигналы системы соответственно.

Деление задач на прямые и обратные связано с отношением содержания задачи к причинно-следственным связям: в прямых задачах по причине определяют следствие, в обратных задачах по следствию восстанавливают причину. В приведенной модели прямая задача имеет единственную постановку – это задача определения выходного сигнала $Y(t)$ по заданным импульсной переходной функции $g(t,\tau)$ и входному сигналу $X(t)$.

Обратная задача может иметь две постановки. Первая постановка обратной задачи: по заданным импульсной переходной функции $g(t, \tau)$ и выходному сигналу $Y(t)$ определить входной сигнал системы $X(t)$ – это постановка задачи восстановления измеряемого сигнала.

Вторая постановка обратной задачи: по заданным входному $X(t)$ и выходному $Y(t)$ сигналам определить импульсную переходную функцию $g(t, \tau)$ динамической системы.

Но математическая модель «вход–выход» для описания поведения линейной динамической системы может иметь иную, например, «дифференциальную форму» – форму обыкновенного линейного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^n Y(t)}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) \frac{d^i Y(t)}{dt^i} = X(t), \quad Y^{(i)}(0) = Y_0^{(i)}, \; i = 0, 1, \ldots, (n-1),$$

в которой функции $Y(t)$, $X(t)$ имеют тот же смысл, что в предыдущем случае, а вместо обобщенной характеристики $g(t, \tau)$ динамической системы используется характеристика этой системы в виде линейного дифференциального оператора, содержащего переменные параметры нестационарной измерительной системы.

Все сказанное выше о прямых и обратных задачах относится, естественно, и ко второй модели. Хорошо известно, что для линейных ИС от одной из приведенных математических моделей поведения ИС можно перейти к другой. Понятно, что в общем случае математическая модель «вход–выход» поведения линейной динамической системы может иметь форму некоторого линейного интегро-дифференциального уравнения.

Таким образом, изложенное свидетельствует, что при постановке прямых и обратных задач динамических измерений форма используемой математической модели «вход–выход» не имеет принципиального значения, но важна направленность содержания задачи – на определение следствия по причине или на определение причины по следствию. Более того, как будет видно в дальнейшем, при решении, например, обратной задачи восстановления измеряемого сигнала задание только математической модели «вход–выход» не достаточно.

В связи с изложенным, в данном параграфе в качестве математической модели «вход–выход» поведения линейной динамической ИС будем использовать следующую символическую форму:

$$\Phi[\, Y(t), a_i(t), X(t)] = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1), \tag{1}$$

где $\{a_i(t)\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ – система параметров, характеризующих динамические свойства ИС, которые так же, как измеряемый сигнал $X(t)$, являются детерминированными функциями времени.

Математическая модель выбрана в символической форме (1), вместо более компактной операторной формы, так как форма (1) оказывается более наглядной при изложении содержания данного параграфа. Структура выражения для Ф[...], в зависимости от вида выбранной формы модели, может содержать линейные операторы дифференцирования и интегрирования функций $Y(t)$, $X(t)$, эти операторы не указаны в (1) в явном виде с целью упрощения записи. Символическая форма (1) может рассматриваться как некоторое уравнение, искомая функция в котором определяется только самой постановкой задачи; в дальнейшем речь идет только о решении обратной задачи восстановления измеряемого сигнала. Относительно структуры Ф[...] будем считать выполненными следующие условия: структура Ф[...] задана и неизменна в процессе восстановления измеряемого сигнала $X(t)$, а все функции $Y(t)$, $a_i(t)$, $i = 0, 1, 2, ..., (n - 1)$, $X(t)$ входят в эту структуру линейным образом. Если структура модели линейной ИС не известна, то можно обратиться к аппроксимации ее импульсной переходной функции, являющейся исчерпывающей характеристикой динамических свойств линейной ИС. Предполагая возможность аппроксимации импульсной переходной функции некоторой известной функцией, содержащей линейно входящие в нее неизвестные параметры, можно считать, что указанные выше условия для линейных ИС всегда могут быть выполнены.

Приступим к последовательному изложению различных этапов действий, совокупность которых и представляет собой способ восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ для линейных нестационарных ИС – способ, являющийся реализацией физически одноканального принципа инвариантности в динамике измерений.

**1. Постановка задачи – переход к расширенной задаче динамических измерений.**

Будем считать, что, наряду с неизвестным измеряемым сигналом $X(t)$, все параметры $\{a_i(t)\}$, $i = 0, 1, 2, ..., (n - 1)$, характеризующие динамические свойства линейной ИС, также являются неизвестными величинами. Все неизвестные величины $X(t)$, $\{a_i(t)\}$, $i = 0, 1, 2, ..., (n - 1)$ будем рассматривать как независимые компоненты некоторой единой системы неизвестных величин, т. е. неизвестными компонентами некоторого вектора. Задачей измерения будем считать задачу независимого и одновременного определения по показаниям ИС каждой из компонент неизвестного вектора $\{X(t), \{a_i(t)\}, i = 0, 1, 2, ..., (n - 1)\}$. Очевидно, расширенная задача измерения оказывается значительно более сложной, чем обычная задача измерения, в которой неизвестной является только измеряемый сигнал $X(t)$.

При расширении задачи измерения структура выражения для Ф[...] может сохранить линейный характер относительно всех входящих в нее неизвестных компонент, но может оказаться нелинейной относительно некоторых из указанных компонент. Как будет видно при рассмотрении конкретных моделей, примером сохранения линейности при переходе к расширенной задаче измерений может служить первая общая модель ИС с сосредоточенными параметрами, а простейшим примером потери линейности может служить вторая общая модель ИС с сосредоточенными параметрами. О линеаризации в расширенной задаче измерения речь идет ниже.

**2. Аппроксимация исходных неизвестных параметров и измеряемого сигнала.**

Пусть расширенная задача измерения решается для достаточно узкого интервала изменения времени $t \in [t_1, t_1 + T0]$, в котором $t_1$ – произвольно выбранный, но расположенный близко от начала процесса измерения, момент времени, а $T0$ – длина этого интервала. Положим, что все искомые компоненты-функции достаточно гладки и могут быть аппроксимированы на выбранном интервале с помощью известных функций, содержащих линейно входящие в них неизвестные, но постоянные величины, т. е.:

$$a_i(t) = \varphi_i(t, b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, \ldots, b_m^{(i)}), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1),$$

$$X(t) = \varphi_n(t, b_0^{(n)}, b_1^{(n)}, \ldots, b_m^{(n)}), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1),$$

где $\varphi_i$, $\varphi_n$ – известные функции, а $b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, \ldots, b_m^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ являются неизвестными постоянными величинами.

Для простоты записи число $(m + 1)$ неизвестных постоянных величин для всех аппроксимируемых функций взято одинаковым. Теперь уравнение (1) можно записать в форме

$$\Phi[\,Y(t), \varphi_i(t, b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, \ldots, b_m^{(i)})] = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Таким образом, на этом этапе задача отыскания неизвестных компонент-функций $X(t)$, $a_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, исходя из уравнения (1) для расширенной задачи измерения, заменяется задачей на отыскание постоянных величин на основе уравнения (2). Если структура Ф[...] неизвестна и приходится пользоваться аппроксимацией импульсной переходной функции известной функцией с линейно входящими в нее неизвестными постоянными величинами, то, в соответствии с данным этапом, необходимо аппроксимировать лишь функцию $X(t)$-измеряемый сигнал.

**3. Введение обобщенных (промежуточных) неизвестных.**

Целью введения обобщенных (промежуточных) неизвестных $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q$, является линеаризация структуры выражения для Ф[...], если при переходе к расширенной задаче измерения указанная структура оказалась нелинейной относительно некоторых из искомых компонент вектора $\{\{a_i(t)\},\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1),\ X(t)\}$. Число $q$ этих обобщенных неизвестных определяется характером нелинейностей, появляющихся при переходе к расширенной задаче измерения. Если отмеченная нелинейность появилась, то она перенесется и на уравнение (2), следовательно, линеаризация расширенной задачи измерения осуществляется над уравнением (2), которое после введения обобщенных неизвестных можно записать в виде

$$\Phi[\,Y(t),\ b_0^{(i)},\ b_1^{(i)},\ \ldots,\ b_m^{(i)},\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_q] = 0,$$

в котором указаны как прежние неизвестные, линейно входившие в структуру Ф[...], так и обобщенные неизвестные.

Так как теперь структура Ф[...] линейна относительно всех входящих в нее неизвестных, то, введя единое обозначение неизвестных – $X_1, X_2, \ldots, X_p$, вместо уравнения (2), имеем

$$\Phi[\,Y(t),\ X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_p] = 0, \qquad (3)$$

где $p$ – общее число неизвестных.

Понятно, что единое обозначение неизвестных вводится лишь для удобства и не является необходимым.

Если структура линейной ИС задана, то введение обобщенных неизвестных обычно не вызывает каких-либо трудностей. Если же рассматривается общий случай – для линейной ИС не задана структура, и возникает необходимость в использовании импульсной переходной функции и в ее аппроксимации, то линеаризация нелинейной структуры уравнения (2) возможна, но связана с определенными трудностями. В этом случае, перед введением обобщенных неизвестных, необходимы некоторые специальные преобразования уравнения (2). Указанный общий случай подробно рассматривается в четвертой главе.

**4. Составление и решение основной СЛАУ.**

Предполагая выполненными действия и условия, описанные в предыдущих пунктах, для определения неизвестных $X_1, X_2, \ldots, X_p$ необходимо составить некоторую систему линейных алгебраических уравнений, основываясь только на уравнении (3). Построение указанной СЛАУ может быть осуществлено, если, например, воспользоваться идеями, связанными в численном анализе с методами решения прямых краевых задач. Эти идеи часто используются и при решении обратных задач, в частности, при решении задач параметрической идентификации. Общий подход, используемый для перехода к СЛАУ, заключается в следующем. Так как в процессе решения поставленной задачи измерения находятся не истинные значения неизвестных, а их оценки $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_p$, то величина

$$I[Y(t), \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_p] = \Phi[Y(t), \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_p],$$

которую принято называть невязкой, не равна тождественно нулю.

Требуя от невязки выполнения различных условий, получаем различные методы составления основной СЛАУ. Некоторые из этих методов подробно анализируются в следующей главе, здесь же, в качестве примера, коснемся лишь одного из них, который, по существу, является аналогом известного метода коллокации.

В соответствии с этим методом потребуем, чтобы невязка обращалась в нуль в точках $t_1, t_2, \ldots, t_p = t_1 + T0$, число которых равно числу неизвестных. Это дает искомую СЛАУ в виде

$$I[Y(t_k), \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_p] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p \tag{4}$$

После решения СЛАУ (4) необходимо вернуться к оценкам прежних искомых постоянных величин $\tilde{b}_0^{(i)}, \tilde{b}_1^{(i)}, \ldots, \tilde{b}_m^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, а затем и к оценкам исходных искомых функций $\tilde{X}(t)$, $\tilde{a}_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$. Таким образом, каждая из оценок искомых неизвестных функций находится в соответствии с алгоритмом, инвариантным к конкретным значениям оценок всех остальных функций и, следовательно, решается задача восстановления измеряемого сигнала (определения оценки измеряемого сигнала) инвариантно к параметрическим эффектам.

Теперь остановимся на некоторых комментариях, относящихся к этапам построения изложенного способа (алгоритма), инвариантного к параметрическим эффектам.

А. Относительно аппроксимирующих функций $\varphi_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ заметим, что, кроме свойства достаточной гладкости, выбор этих функций ничем не ограничен, поэтому естественно выбирать простые функции. При практической реализации описанного алгоритма часто оказывается предпочтительным использование алгебраических многочленов канонического вида или тригонометрических многочленов.

В. После решения задачи оценки неизвестных функций на интервале $[t_1, t_1 + T0]$ можно перейти к решению этой задачи на любом другом интервале. При этом второй интервал может частично совпадать с первым, сопрягаться с ним, или вовсе не иметь общих точек с первым интервалом, а результаты решения задачи на втором интервале никак не связаны с результатами решения задачи на первом интервале.

C. Важное условие правомерности использования изложенного алгоритма восстановления искомых заключается в том, что в процессе восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ на указанном интервале должны в полной мере проявляться динамические свойства данной ИС. Это условие является следствием более общего требования, выдвинутого при описании формы (1), а именно, структура Ф[...] не только задана и линейна относительно функций $Y(t)$, $a_i(t)$, $X(t)$, но она неизменна в процессе восстановления измеряемого сигнала $X(t)$. Важность указанного условия связана с тем, что, в зависимости от условий измерения и характера изменения во времени функции $X(t)$, измерительная система может «войти» в такую «динамически установившуюся стадию» измерений, в которой взаимосвязь между входным $X(t)$ и выходным $Y(t)$ сигналами описывается существенно более простым соотношением, чем исходное уравнение (1). Понятно, что в указанных стадиях измерения проявляются не все свойства и особенности поведения ИС, характеризующие ее динамические свойства, а только некоторые из них. Поэтому применение исходного уравнения (1) на подобной стадии измерения оказывается неправомерным. Этот факт будет иллюстрирован и обсужден в следующей главе при модельной реализации одноканального принципа инвариантности. Здесь же заметим лишь, что учет указанного факта особенно важен при монотонном изменении измеряемого сигнала $X(t)$.

D. При решении данной обратной задачи возможно существование множества решений, поэтому необходимо иметь средство выбора из этого множества, в том или ином смысле, наиболее приемлемого решения.

Выбор приемлемого решения может осуществляться с помощью прямых и косвенных критериев. Использование прямых критериев выбора приемлемого решения требует специального исследования, этот вопрос рассматривается в конце главы 5. При моделировании описанного алгоритма восстановления сигнала $X(t)$ будут использоваться косвенные критерии. Косвенными критериями будем считать критерии, которые, во-первых, содержат в своей структуре только показания $Y(t)$ ИС и, возможно, некоторые линейные операции над $Y(t)$, а также найденные оценки $\widetilde{X}(t)$, $\widetilde{a}_i(t)$, $i = 0, 1, ..., (n - 1)$ и, во-вторых, позволяют косвенно устанавливать степень близости найденных оценок к оцениваемым величинам.

При реализации изложенного алгоритма восстановления измеряемого сигнала в результате решения появляются погрешности, основными источниками которых, помимо прочих, могут быть:

– неудачный выбор вида аппроксимирующих функций $\varphi_i(t, b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, ..., b_m^{(i)})$, $i = 0, 1, 2, ..., n$, в частности, если эти функции имеют вид алгебраических многочленов, то недостаточно высокая степень выбранных многочленов;

– если структура Ф[...] не известна и при построении этой структуры приходится обращаться к импульсной переходной функции и ее аппроксимации, то основным источником погрешности восстановления измеряемого сигнала может оказаться погрешность аппроксимации импульсной переходной функции ИС.

При этом единственным «инструментом» количественной оценки результатов проверки каждой из альтернативных измерительных ситуаций, а также сравнения этих результатов между собой оказываются указанные выше критерии. В общей программе восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ по регистрируемым значениям выходного сигнала $Y(t)$ предусматривается возможность одновременной проверки некоторого множества из указанных альтернативных измерительных ситуаций.

Выбор приемлемого решения поставленной задачи требует предъявления к величине косвенного критерия определенных условий. Например, для выбранного приемлемого решения величина косвенного критерия либо должна быть наименьшей по сравнению со значениями этого критерия для остальных возможных решений, либо не должна превышать некоторой заданной величины. Таким образом, для того чтобы рассматриваемая обратная задача измерения была разрешимой, недостаточно, в отличие от решения прямой задачи, задания только математической модели «вход–выход» линейной системы, но необходимо еще выдвинуть в той или иной форме определенные условия, которым должна удовлетворять погрешность решения задачи.

При построении косвенных критериев можно использовать понятие невязки, которая может иметь вышеприведенный или иной специально выбранный вид: в качестве косвенного критерия можно взять как значение самой невязки в некоторой выбранной точке, так и некоторый функционал, использующий эту невязку.

Рассмотрение вопроса о косвенных критериях будет продолжено в следующей главе.

В изложенном и заключается содержание способа (алгоритма) восстановления детерминированных измеряемых сигналов, инвариантного к параметрическим эффектам, являющегося по существу реализацией физически одноканального принципа инвариантности в динамике нестационарных измерительных систем. Вполне очевидно, что переход от формулировки обычной задачи измерения к формулировке расширенной задачи измерения, а это важнейший этап в реализации изложено способа восстановления измеряемого сигнала, возникает ряд важных, традиционных при решении обратных задач динамики измерительных систем, теоретических вопросов, которые требуют для своего решения специальных и систематических исследований на основе более общей методологии постановки задачи измерения и с использованием более сложного аппарата исследования. Здесь не затрагиваются подобные вопросы, так как целью данной работы является исследование лишь принципиальной возможности такой постановки задачи измерения, которая позволила бы исключать влияние параметрических эффектов в динамических измерениях. Поэтому содержание всего дальнейшего изложения направлено на достижение именно этой конкретной цели с использованием минимально необходимых и простых математических средств.

Заметим, что необходимость разработки чисто алгоритмических способов восстановления сигнала $X(t)$, а следовательно, реализации физически одноканального принципа инвариантности была отмечена в монографии [2], где был предложен также возможный алгоритм восстановления характеристик сигналов, который, однако, приводит к решению системы нелинейных алгебраических уравнений.

Целью данной работы является построение алгоритмов восстановления измеряемого сигнала, которые, будучи инвариантными к параметрическим эффектам, приводили бы в конечном итоге к необходимости решения лишь систем линейных алгебраических уравнений, что существенно упрощает практическое использование указанных алгоритмов.

## 2.3. АЛГОРИТМЫ ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Объединяя первую (1.I) и вторую (1.II) общие модели для линейных измерительных систем с сосредоточенными параметрами, имеем

$$\frac{d^nY(t)}{dt^n}+\sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)\frac{d^iY(t)}{dt^i}=F(t),\;\; Y^{(i)}(0)=Y_0^{(i)},\quad i=0,1,\ldots,(n-1). \qquad (5)$$

Здесь для первой общей модели $F(t) = X(t)$, а для второй $F(t) = = a_0(t)X(t)$. Иногда, если дифференциальное уравнение (5) имеет очень высокий порядок, может оказаться целесообразным переход от дифференциальной формы модели (5) к интегральной форме: по общеизвестной методике дифференциальное уравнение (5) может быть сведено к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода.

Ограничиваясь моделью (5) и исходя из изложенного выше содержания физически одноканального принципа инвариантности, последовательно рассмотрим построение алгоритма инвариантности применительно к первой и второй общим моделям ИС с сосредоточенными параметрами.

### ПЕРВАЯ ОБЩАЯ МОДЕЛЬ

В качестве исходной модели «вход–выход» в данном случае имеем уравнение

$$\frac{d^nY(t)}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\frac{d^iY(t)}{dt^i} - X(t) = 0,\ \ Y^{(i)}(0) = Y_0^{(i)}, \quad i = 0, 1, ..., (n-1), \tag{6}$$

где $\{a_i(t)\}$, $i = 0, 1, ..., (n-1)$ – переменные параметры ИС; $X(t)$ – неизвестный измеряемый сигнал.

1. В соответствии с первым этапом, переходим к расширенной задаче измерения: наряду с измеряемой величиной $X(t)$, в число неизвестных включаем также все параметры $a_i(t)$ системы. Кроме того, будем считать, что, регистрируя выходной сигнал $Y(t)$, всегда можно определить и его производные, входящие в (6). Итак, подлежат определению функции

$$X(t),\ a_i(t),\ i = 0, 1, ..., (n-1).$$

Заметим, структура уравнения (6) линейна относительно искомых и сохраняет свою линейность после перехода к расширенной задаче измерения.

2. Пусть на выбранном интервале $[t_1,\ t_1 + T0]$ решения задачи измерения функции $a_i(t)$, $X(t)$ аппроксимируются алгебраическими многочленами канонического вида:

$$a_i(t) = \varphi_i(t, b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, ..., b_m^{(i)}), \quad i = 0, 1, ..., (n-1),$$

$$X(t) = \varphi_n(t, b_0^{(n)}, b_1^{(n)}, ..., b_m^{(n)}),$$

где $b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, ..., b_m^{(i)}$, $i = 0, 1, ..., n$ – новые неизвестные постоянные величины, число которых равно $(n + 1)(m + 1)$.

Теперь вместо (6) имеем уравнение

$$\frac{d^n Y(t)}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} [b_0^{(i)} + b_1^{(i)} \times t + \ldots + b_m^{(i)} \times t^m] \frac{d^i Y(t)}{dt^i} -$$

$$-[b_0^{(n)} + b_1^{(n)} \times t + \ldots + b_m^{(n)} \times t^m] = 0. \tag{7}$$

3. Так как модель (7) является линейной относительно искомых $b_0^{(i)}$, $b_1^{(i)}$, ..., $b_m^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, то отпадает необходимость во введении обобщенных неизвестных.

4. Если для определения неизвестных постоянных величин $b_0^{(i)}$, $b_1^{(i)}$, ..., $b_m^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ используется идея метода коллокации, то требуется, чтобы уравнение (7) удовлетворялось в количестве точек, равном количеству неизвестных, т. е. в $(n + 1)(m + 1)$ точках. Это дает для определения указанных постоянных величин следующую СЛАУ

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[ b_0^{(i)} + b_1^{(i)} \times t_k + \ldots + b_m^{(i)} \times t_k^m \right] \times \left[ \frac{d^i Y(t)}{dt^i} \right] \Bigg|_{t=t_k} -$$

$$\left[ b_0^{(n)} + b_1^{(n)} \times t_k + \ldots + b_m^{(n)} \times t_k^m \right] = -\left[ \frac{d^n Y(t)}{dt^n} \right] \Bigg|_{t=t_k}, \tag{8}$$

$k = 1, 2, \ldots, (n + 1)(m + 1)$, $t_k = t_1 + T \times (k - 1)$, $T = \dfrac{T0}{(n+1)(m+1)-1}$.

Так как система алгебраических уравнений (8) является линейной относительно искомых величин, то ее решение не представляет труда. Решение этой системы позволяет найти величины $b_0^{(i)}$, $b_1^{(i)}$, ..., $b_m^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, а следовательно, найти неизвестные функции $X(t)$, $a_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, (n - 1)$, что и представляет собой решение поставленной задачи динамических измерений, т. е. определение измеряемого сигнала $X(t)$ в соответствии с алгоритмом, инвариантным к параметрическим эффектам.

### Измерительная система второго порядка

В качестве примера рассмотрим вид СЛАУ (8) для ИС второго порядка. Если неизвестные параметры $a_i(t)$ и искомый сигнал $X(t)$ аппроксимируются линейными функциями, имеем:

$$m = 1,\quad a_0(t) = b_0^{(0)} + b_1^{(0)} \times t,\quad a_1(t) = b_0^{(1)} + b_1^{(1)} \times t,\quad X(t) = b_0^{(2)} + b_1^{(2)} \times t.$$

При $m = 1$, $n = 2$ общая система (8) принимает вид

$$\left[ b_0^{(0)} + b_1^{(0)} \times t_k \right] \times Y(t_k) + \left[ b_0^{(1)} + b_1^{(1)} \times t_k \right] \times \left[ \frac{dY(t)}{dt} \right] \Bigg|_{t=t_k} -$$

$$\left[ b_0^{(2)} + b_1^{(2)} \times t_k \right] = -\left[ \frac{d^2Y(t)}{dt^2} \right] \Bigg|_{t=t_k}, \qquad (9)$$

$k = 1, ..., 6,\ t_k = t_1 + T(k-1),\ T = T0/5.$

Единое обозначение неизвестных здесь очевидно:

$$X_1 = b_0^{(0)},\ X_2 = b_1^{(0)},\ X_3 = b_0^{(1)},\ X_4 = b_1^{(1)},\ X_5 = b_0^{(2)},\ X_6 = b_1^{(2)}.$$

## ВТОРАЯ ОБЩАЯ МОДЕЛЬ

В качестве исходной модели «вход–выход» (1) в этом случае имеем

$$\frac{d^nY(t)}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) \frac{d^iY(t)}{dt^i} - a_0(t)X(t) = 0, \quad Y^{(i)}(0) = Y_0^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, ..., (n-1) \qquad (10)$$

Так как последовательность и содержание действий на первых двух этапах построения алгоритма инвариантности те же, что и для первой общей модели, запишем сразу уравнение, получающееся после аппроксимации параметров $a_i(t)$ системы и измеряемого сигнала $X(t)$:

$$\frac{d^nY(t)}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \left[ b_0^{(i)} + b_1^{(i)} \times t + ... + b_m^{(i)} \times t^m \right] \times \frac{d^iY(t)}{dt^i} -$$

$$[b_0^{(0)} + b_1^{(0)} \times t + ... + b_m^{(0)} \times t^m] \times [b_0^{(n)} + b_1^{(n)} \times t + ... + b_m^{(n)} \times t^m] = 0,$$

$$Y^{(i)}(0) = Y_0^{(i)}, \quad i = 0, 1, ..., (n-1). \qquad (11)$$

Как видим, переход к расширенной задаче измерения привел к тому, что модель (11) оказалась нелинейной относительно искомых, что обусловлено наличием произведений неизвестных величин в уравнении (11).

Для данной модели измерительных систем этап линеаризации является важнейшим, поэтому остановимся на этом подробно.

Для того чтобы уравнение (11) оказалось линейным относительно неизвестных величин, необходимо ввести в рассмотрение обобщенные (промежуточные) неизвестные величины $\gamma_1$, $\gamma_2$, ..., каждая из которых представляет собой некоторую комбинацию из прежних неизвестных. Так как число обобщенных неизвестных зависит непосредственно от степени аппроксимирующих многочленов, то для конкретности рассмотрим два частных случая: аппроксимирующие многочлены являются многочленами первой и второй степени.

**А.** Аппроксимирующие многочлены – многочлены первой степени.

В случае $m = 1$ выражение (11) принимает вид

$$\frac{d^nY(t)}{dt^n}+\sum_{i=0}^{n-1}\left[\,b_0^{(i)}+b_1^{(i)}\times t\,\right]\times\frac{d^iY(t)}{dt^i}-$$

$$\left\{\,b_0^{(0)}b_0^{(n)}+[b_0^{(0)}b_1^{(n)}+b_1^{(0)}b_0^{(n)}]\times t+b_1^{(0)}b_1^{(n)}\times t^2\right\}=0. \qquad (12)$$

Как видим, для линеаризации модели (12) необходимо ввести в рассмотрение обобщенные неизвестные:

$$\gamma_1=b_0^{(0)}b_0^{(n)},\quad \gamma_2=b_0^{(0)}b_1^{(n)}+b_1^{(0)}b_0^{(n)},\quad \gamma_3=b_1^{(0)}b_1^{(n)}.$$

Число неизвестных, содержащихся во втором члене левой части (12), равно $n(m+1)$, следовательно, общее число неизвестных после линеаризации равно $n(m+1)+3=2n+3=2(n+1)+1$. Для первой общей модели общее число неизвестных в данном случае было бы равно $(n+1)(m+1)=2n+2=2(n+1)$.

B. Аппроксимирующие многочлены – многочлены второй степени.

В этом случае $m=2$ и выражение (11) принимает вид

$$\frac{d^nY(t)}{dt^n}+\sum_{i=0}^{n-1}\left[\,b_0^{(i)}+b_1^{(i)}\times t+b_2^{(i)}\times t^2\right]\times\frac{d^iY(t)}{dt^i}-$$

$$\left\{\,b_0^{(0)}b_0^{(n)}+[b_0^{(0)}b_1^{(n)}+b_1^{(0)}b_0^{(n)}]\times t+[b_0^{(0)}b_2^{(n)}+b_1^{(0)}b_1^{(n)}+b_2^{(0)}b_0^{(n)}]\times t^2+\right.$$

$$\left.+[b_1^{(0)}b_2^{(n)}+b_2^{(0)}b_1^{(n)}]\times t^3+[b_2^{(0)}b_2^{(n)}]\times t^4\right\}=0 \qquad (13)$$

Для линеаризации модели (13) вводим в рассмотрение обобщенные неизвестные:

$$\gamma_1=b_0^{(0)}b_0^{(n)},\quad \gamma_2=b_0^{(0)}b_1^{(n)}+b_1^{(0)}b_0^{(n)},\quad \gamma_3=b_0^{(0)}b_2^{(n)}+b_1^{(0)}b_1^{(n)}+b_2^{(0)}b_0^{(n)},$$

$$\gamma_4=b_1^{(0)}b_2^{(n)}+b_2^{(0)}b_1^{(n)},\quad \gamma_5=b_2^{(0)}b_2^{(n)}.$$

Общее число неизвестных после линеаризации равно $n(m+1)+$ $+5=3n+5=3(n+1)+2$; для первой общей модели общее число неизвестных в данном случае было бы равно $3(n+1)$.

Переходя к четвертому этапу построения алгоритма инвариантности, для модели (12) получаем следующую основную СЛАУ

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[\,b_0^{(i)}+b_1^{(i)}\times t_k\right]\times\left[\frac{d^iY(t)}{dt^i}\right]\Bigg|_{t=t_k}-$$

$$\left[\,\gamma_1+\gamma_2\times t_k+\gamma_3\times t_k^2\right]=-\left[\frac{d^nY(t)}{dt^n}\right]\Bigg|_{t=t_k}, \qquad (14)$$

$k=1,2,\ldots,[2(n+1)+1]$, $t_k=t_1+T(k-1)$, $T=\dfrac{T0}{2(n+1)}$.

Решение системы (14) дает значения величин $b_0^{(i)}$, $b_1^{(i)}$, характеризующих параметры ИС $a_i(t)$, и значения обобщенных неизвестных $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$. Остается найти величины $b_0^{(n)}$, $b_1^{(n)}$, характеризующие измеряемый сигнал. Пользуясь приведенными выше выражениями для $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ имеем:

$$b_0^{(n)} = \frac{\gamma_1}{b_0^{(0)}}, \quad b_1^{(n)} = \frac{\gamma_2 - b_1^{(0)} b_0^{(n)}}{b_0^{(0)}} \quad \text{или} \quad b_1^{(n)} = \frac{\gamma_3}{b_1^{(0)}}.$$

Значения величины $b_1^{(n)}$, определяемые по указанным двум формулам, естественно, оказываются тождественными.

Подставляя найденные величины в аппроксимирующие функции, находим оценки $\tilde{a}_i(t)$, $\tilde{X}(t)$, чем и завершается решение задачи восстановления измеряемого сигнала.

Основная СЛАУ для модели (13) имеет вид

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[ b_0^{(i)} + b_1^{(i)} t_k + b_2^{(i)} \times t_k^2 \right] \times \left[ \frac{d^i Y(t)}{dt^i} \right] \Bigg|_{t=t_k} -$$

$$\left[ \gamma_1 + \gamma_2 \times t_k + \gamma_3 \times t_k^2 + \gamma_4 \times t_k^3 + \gamma_5 \times t_k^4 \right] = -\left[ \frac{d^n Y(t)}{dt^n} \right] \Bigg|_{t=t_k}, \qquad (15)$$

$k = 1, 2, ..., [3(n + 1) + 2]$, $t_k = t_1 + T(k - 1)$, $T = \dfrac{T0}{3(n+1)+1}$.

Решение системы (15) дает значения величин $b_0^{(i)}$, $b_1^{(i)}$, $b_2^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, ..., (n - 1)$ и значения обобщенных неизвестных $\gamma_1$, ..., $\gamma_5$. Для нахождения величин $b_0^{(n)}$, $b_1^{(n)}$, $b_2^{(n)}$ воспользуемся выражениями для обобщенных неизвестных $\gamma_1$, $\gamma_2$ и, например, $\gamma_3$. Это дает:

$$b_0^{(n)} = \frac{\gamma_1}{b_0^{(0)}}, \quad b_1^{(n)} = \frac{\gamma_2 - b_1^{(0)} b_0^{(n)}}{b_0^{(0)}}, \quad b_2^{(n)} = \frac{\gamma_3 - b_1^{(0)} b_1^{(n)} - b_2^{(0)} b_0^{(n)}}{b_0^{(0)}}.$$

Подставляя найденные значения величин $b_0^{(i)}$, $b_1^{(i)}$, $b_2^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, ..., n$ в аппроксимирующие функции, получаем искомые оценки $\tilde{a}_i(t)$, $\tilde{X}(t)$, что и завершает решение задачи измерения.

В завершение обратим внимание на то, что введение в рассмотрение обобщенных неизвестных ведет к повышению порядка основной СЛАУ и появлению дополнительных неизвестных, найденные значения которых могут не использоваться.

## 2.4. АЛГОРИТМ ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

При рассмотрении классической постановки задачи динамических измерений в п. 1.3 указывалось, что традиционный подход к решению задачи динамических измерений состоит из двух этапов: на первом этапе решается прямая задача анализа, а на втором – на основе полученного решения прямой задачи и по известным показаниям $Y(t)$ ИС, оценивают измеряемый сигнал $X(t)$, приписывая параметрам ИС некоторые предполагаемые значения. Как отмечалось, даже для линейных ИС при детерминированном изменении входного сигнала и параметров ИС уже на первом этапе возникают сложности, связанные с поиском эффективных методов решения прямых задач. При переходе к нелинейным измерительным системам отмеченные сложности перерастают уже в общеизвестную проблему решения нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений. В связи с этим, необходимость построения алгоритмов, инвариантных к параметрическим эффектам в нелинейных ИС, совершенно очевидна, так как при построении указанных алгоритмов не требуется решения каких-либо дифференциальных или интегральных уравнений.

Рассмотрим класс нелинейных измерительных систем, поведение которых описывается уравнением:

$$\sum_{i=0}^{n} g_i(Y)\frac{d^iY(t)}{dt^i} = X(t), \quad Y^{(i)}(0) = Y_0^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, ..., (n-1), \tag{16}$$

где, как и ранее, $X(t)$, $Y(t)$ – входной (измеряемый) и выходной сигналы соответственно.

Это достаточно типичная модель для нелинейных ИС с сосредоточенными параметрами.

Допустим, что функции $g_i(Y)$ имеют вид:

$$g_i(Y) = b_0^{(i)} + b_1^{(i)}Y + b_2^{(i)}Y^2 + ... + b_{m_i}^{(i)}Y^{m_i}, \quad i = 0, 1, 2, ..., n, \tag{17}$$

где $b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, ..., b_{m_i}^{(i)}$ – некоторые постоянные величины.

В этом случае основной целью является построение такого алгоритма восстановления измеряемого сигнала $X(t)$, который был бы инвариантным к значениям всех постоянных величин, входящих в структуры функций $g_i(Y)$. При этом будем полагать, что структуры уравнения (16) и выражений (17) остаются неизменными в процессе восстановления измеряемого сигнала. Переход к расширенной задаче измерения в данном случае будет означать, что при построении алгоритма инвариантности, наряду с неизвестным измеряемым сигналом $X(t)$, неизвестными, а следовательно, подлежащими определению, будут считаться также все постоянные величины $b_0^{(i)}$, $b_1^{(i)}$, ..., $b_{m_i}^{(i)}$, $i = 0, 1, ..., n$.

Если хотя бы одна из функций $g_i(Y)$ не содержит неизвестные постоянные величины, т. е. является известной постоянной величиной, или известной функцией времени, или, наконец, известной функцией выходного сигнала $Y(t)$, причем ни известная функция времени, ни известная функция выходного сигнала не содержат неизвестные постоянные величины, то возможно построение линейного алгоритма восстановления измеряемых сигналов, инвариантного к значениям неизвестных постоянных величин $b_0^{(i)}$, $b_1^{(i)}$, $b_2^{(i)}$,..., $b_{m_i}^{(i)}$ и основанного на соответствующей неоднородной СЛАУ. Другими словами, построение алгоритма инвариантности возможно, если хотя бы при одном значении $i$, например при $i = p$, из числа указанных неизвестных постоянных величин выпадают, как известные, постоянные величины $b_0^{(p)}$, $b_1^{(p)}$, ..., $b_{m_p}^{(p)}$, или даже одна из этих постоянных величин.

Рассмотрим только два из множества указанных случаев, когда построение алгоритма инвариантности возможно: первый случай – $g_n(Y) = 1$, второй случай – $g_0(Y) = 1$. Так как характер построения алгоритма инвариантности единообразен для различных порядков $n$ уравнения (16), отличаясь лишь объемом вычислений, то с целью упрощения дальнейшего изложения ограничимся системой второго порядка.

### Случай $g_n(Y) = 1$

Итак, пусть $n = 2$ и $g_n(Y) = 1$, тогда поведение измерительной системы описывается уравнением:

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + g_1(Y)\frac{dY(t)}{dt} + g_0(Y) \times Y(t) = X(t), \quad Y(0) = Y_0, \quad Y'(0) = Y_0', \tag{18}$$

где $g_0(Y) = b_0^{(0)} + b_1^{(0)}Y + ... + b_{m_0}^{(0)}Y^{m_0}$; $g_1(Y) = b_0^{(1)} + b_1^{(1)}Y + ... + b_{m_1}^{(1)}Y^{m_1}$.

Будем строить искомый алгоритм инвариантности в соответствии с этапами, изложенными в п. 2.2.

Переходя к расширенной задаче измерения, фиксируем неизвестные:

$$b_0^{(0)},\ b_1^{(0)}, ..., b_{m_0}^{(0)},\ b_0^{(1)},\ b_1^{(1)}, ..., b_{m_1}^{(1)},\ X(t).$$

Для рассматриваемой модели нелинейной ИС необходимо аппроксимировать только измеряемый сигнал $X(t)$. Если функцию $X(t)$ аппроксимировать, например, алгебраическим многочленом второй степени

$$X(t) = b_0^{(2)} + b_1^{(2)} t + b_2^{(2)} t^2,$$

то имеем следующие неизвестные постоянные величины:

$$b_0^{(0)},\ b_1^{(0)}, \ldots, b_{m_0}^{(0)},\quad b_0^{(1)},\ b_1^{(1)}, \ldots, b_{m_1}^{(1)},\quad b_0^{(2)},\ b_1^{(2)}, b_2^{(2)},$$

общее число которых равно $(m_0 + m_1) + 5$.

Так как модель расширенной задачи измерения оказывается линейной относительно всех указанных неизвестных постоянных величин, то для рассматриваемой модели нелинейной ИС необходимость во введении обобщенных неизвестных отсутствует.

Переходя к построению основной СЛАУ, вновь воспользуемся идеей метода коллокации. Тогда основная СЛАУ примет вид

$$\left[b_0^{(1)} + b_1^{(1)} Y(t_k) + b_2^{(1)} Y^2(t_k) + \ldots + b_{m_1}^{(1)} Y^{m_1}(t_k)\right] \times \left[\frac{dY(t)}{dt}\right]\Bigg|_{t=t_k} +$$

$$+\left[b_0^{(0)} + b_1^{(0)} Y(t_k) + b_2^{(0)} Y^2(t_k) + \ldots + b_{m_0}^{(0)} Y^{m_0}(t_k)\right] \times Y(t_k) -$$

$$\left[b_0^{(2)} + b_1^{(2)} t_k + b_2^{(2)} t_k^2\right] = -\left[\frac{d^2 Y(t)}{dt^2}\right]\Bigg|_{t=t_k}, \qquad (19)$$

$$k = 1, 2, \ldots, [(m_0 + m_1) + 5],\ \ t_k = t_1 + T(k-1),\ \ T = \frac{T0}{(m_0 + m_1) + 4}.$$

Здесь $t_1$ – точка начала восстановления измеряемого сигнала, $T0$ – длительность интервала восстановления.

Решение этой системы дает значения всех искомых величин, а следовательно, позволяет восстанавливать измеряемый сигнал $X(t)$ на интервале $[t_1,\ t_1 + T0]$. При этом алгоритм восстановления измеряемого сигнала является инвариантным к значениям параметров $b_0^{(0)}$, $b_1^{(0)}$, …, $b_{m_0}^{(0)}$, $b_0^{(1)}$, $b_1^{(1)}$, …, $b_{m_1}^{(1)}$ нелинейной ИС.

Заметим, что наряду с решением основной задачи измерения – задачи восстановления измеряемого сигнала $X(t)$, здесь, как и ранее, решается также задача идентификации, а именно, задача параметрической идентификации рассматриваемой нелинейной ИС.

### Случай $g_0(Y) = 1$

Итак, пусть $n = 2$ и $g_0(Y) = 1$, тогда поведение измерительной системы описывается уравнением

$$g_2(Y)\frac{d^2Y(t)}{dt^2}+g_1(Y)\frac{dY(t)}{dt}+Y(t)=X(t),\quad Y(0)=Y_0,\quad Y'(0)=Y_0',\tag{20}$$

где: $g_1(Y)=b_0^{(1)}+b_1^{(1)}Y+\ldots+b_{m_1}^{(1)}Y^{m_1};\quad g_2(Y)=b_0^{(2)}+b_1^{(2)}Y+\ldots+b_{m_2}^{(2)}Y^{m_2}.$

Теперь в расширенной задаче измерения неизвестными являются:

$$b_0^{(1)},\ b_1^{(1)},\ldots,b_{m_1}^{(1)},\ b_0^{(2)},\ b_1^{(2)},\ldots,b_{m_2}^{(2)},\ X(t).$$

Если аппроксимировать измеряемый сигнал алгебраическим многочленом второй степени

$$X(t)=b_0^{(3)}+b_1^{(3)}t+b_2^{(3)}t^2,$$

то неизвестными постоянными величинами становятся:

$$b_0^{(1)},\ b_1^{(1)},\ldots,b_{m_1}^{(1)},\quad b_0^{(2)},\ b_1^{(2)},\ldots,b_{m_2}^{(2)},\quad b_0^{(3)},\ b_1^{(3)},\ b_2^{(3)},$$

общее число которых равно $(m_1+m_2)+5$.

Ввиду линейности расширенной задачи измерения относительно всех приведенных неизвестных постоянных величин, обобщенные неизвестные не вводятся.

Основная СЛАУ в этом случае имеет вид:

$$\left[b_0^{(2)}+b_1^{(2)}Y(t_k)+\ldots+b_{m_2}^{(2)}Y^{m_2}(t_k)\right]\times\left[\frac{d^2Y(t)}{dt^2}\right]\Bigg|_{t=t_k}+$$

$$+\left[b_0^{(1)}+b_1^{(1)}Y(t_k)+\ldots+b_{m_1}^{(1)}Y^{m_1}(t_k)\right]\times\left[\frac{dY(t)}{dt}\right]\Bigg|_{t=t_k}-$$

$$\left[b_0^{(3)}+b_1^{(3)}t_k+b_2^{(3)}t_k^2\right]=-Y(t_k).$$

Решение этой системы и позволяет восстанавливать измеряемый сигнал $X(t)$ в соответствии с алгоритмом, инвариантным к значениям параметров рассматриваемой нелинейной ИС.

В заключение обратим внимание на то, что все приведенные выше алгоритмы инвариантности строились таким образом, чтобы они оказывались инвариантными также и к начальным условиям, так как для рассматриваемых задач измерения эти условия часто являются неизвестными.

ГЛАВА 3

# МОДЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОДНОКАНАЛЬНОГО ПРИНЦИПА ИНВАРИАНТНОСТИ

После изложения содержания физически одноканального принципа инвариантности в динамике нестационарных измерительных систем возникает естественный вопрос о возможной проверке как реализуемости указанного принципа, так и выводов, касающихся теории динамических измерений и являющихся следствием применения этого принципа.

Так как постановка какого-либо физического эксперимента, в котором можно было бы исследовать такие сложные явления, как параметрические эффекты в динамике измерения неэлектрических величин, не представляется возможной в настоящее время, то единственным средством исследования указанных вопросов оказывается компьютерное моделирование.

В данной главе подробно рассматриваются все вопросы, вкратце затронутые в предыдущей главе при изложении содержания физически одноканального принципа инвариантности. При этом основной целью моделирования является подтверждение того факта, что практическая реализация алгоритмов инвариантности, во-первых, не связана с преодолением каких-либо трудностей, а во-вторых, действительно решает проблему исключения влияния параметрических эффектов на точность динамических измерений.

Приводимые далее результаты моделирования относятся к измерительным системам первого порядка при детерминированных изменениях входных сигналов и параметров ИС. При этом рассмотрению математической модели этого частного случая, соответствующей второй общей модели ИС с сосредоточенными параметрами (1.II), уделяется большее внимание, так как математическая модель для ИС первого порядка, вытекающая из первой общей модели ИС сосредоточенными параметрами (1.I), является более простой как с точки зрения теоретических исследований, так и с точки зрения реализации одноканального принципа инвариантности. Для измерительных систем более высокого порядка суть дела не меняется, хотя, естественно, вычислительные процедуры оказываются более громоздкими.

Фактический (истинный) выходной сигнал измерительной системы, который получается при фактическом (истинном) входном сигнале $X(t)$, в этой главе будем обозначать $u(t)$; сигнал $u(t)$ считается известной функцией времени, а $X(t)$ – неизвестной функцией времени. Оценки измеряемого сигнала $X(t)$ и неизвестного параметра ИС $a(t)$, которые получаются в результате реализации алгоритма инвариантности, будем обозначать $\tilde{X}(t)$, $\tilde{a}(t)$.

## 3.1. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ОСНОВНЫХ СЛАУ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗМЕРЯЕМЫХ СИГНАЛОВ

Построение основных СЛАУ для восстановления характеристик измеряемых сигналов является очень важным этапом при реализации принципа инвариантности, поэтому указанный этап рассматривается ниже очень подробно.

Пусть измерительная система описывается уравнением

$$\frac{du(t)}{dt} + a(t)u(t) = a(t)X(t), \quad u(0) = 0. \tag{1}$$

Исходя из физического смысла параметра $a(t)$, можно считать $a(t) \neq 0$. Равенство нулю этого параметра означало бы, что система имеет бесконечно большую инерционность, а следовательно, не может служить измерительным средством. Сказанное позволяет перейти от уравнения в форме (1) к уравнению в форме

$$\alpha(t)\frac{du(t)}{dt} + u(t) = X(t), \quad u(0) = 0, \ \alpha(t) = \frac{1}{a(t)}, \tag{2}$$

которая представляется более удобной для наших ближайших целей.

Пусть оценки $\tilde{\alpha}(t)$, $\tilde{X}(t)$ для неизвестных процессов $\alpha(t)$, $X(t)$ аппроксимируются алгебраическими многочленами:

$$\tilde{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^{n1} \tilde{\alpha}_i \times t^{i-1}, \quad X(t) = \sum_{j=1}^{n2} \tilde{\beta}_j \times t^{j-1}. \tag{3}$$

Невязкой в дифференциальной форме $I_{dif}(t)$ будем считать величину

$$I_{dif}(t) = \tilde{\alpha}(t)\frac{du(t)}{dt} + u(t) - \tilde{X}(t), \tag{4}$$

или с учетом (3):

$$I_{dif}(t) = \frac{du(t)}{dt}\sum_{i=1}^{n1}\tilde{\alpha}_i \times t^{i-1} + u(t)\sum_{j=1}^{n2}\tilde{\beta}_j \times t^{j-1}. \tag{5}$$

Вместо обозначений неизвестных $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_j$, введем единое обозначение для неизвестных: $\tilde{\alpha}_i = X_i$, $\tilde{\beta}_j = X_{n1+j}$. Сделав во второй сумме замену индекса суммирования $n_1 + j = i$, получим следующее выражение для невязки в дифференциальной форме:

$$I_{dif}(t) = \frac{du(t)}{dt}\sum_{i=1}^{n1} t^{i-1} X_i + u(t) - \sum_{i=n1+1}^{n1+n2} t^{i-n1-1} X_i. \tag{6}$$

Интегрируя обе части соотношений (4)–(6) в пределах от $t_1$ до $t$, получим выражения для невязки в интегральной форме $I_{\text{int}}(t)$:

$$I_{\text{int}}(t) = u(t)\tilde{\alpha}(t) - u(t_1)\tilde{\alpha}(t_1) - \int_{t_1}^{t} u(\tau)\frac{d\tilde{\alpha}(\tau)}{d\tau}d\tau +$$

$$+\int_{t_1}^{t} u(\tau)\,d\tau - \int_{t_1}^{t}\tilde{X}(\tau)\,d\tau, \tag{4a}$$

$$I_{\text{int}}(t) = \sum_{i=1}^{n1}\left[\, t^{i-1}u(t) - t_1^{i-1}u(t_1) - (i-1)\int_{t_1}^{t}\tau^{i-2}u(\tau)d\tau\right]\tilde{\alpha}_i -$$

$$\sum_{j=1}^{n2}\left[\frac{1}{j}\left(t^j - t_1^j\right)\right]\tilde{\beta}_j + \int_{t_1}^{t} u(\tau)\,d\tau, \tag{5a}$$

$$I_{\text{int}}(t) = \sum_{i=1}^{n1}\left[\, t^{i-1}u(t) - t_1^{i-1}u(t_1) - (i-1)\int_{t_1}^{t}\tau^{i-2}u(\tau)d\tau\right] X_i -$$

$$\sum_{i=n1+1}^{n1+n2}\left[\frac{1}{i-n_1}\left(t^{i-n1} - t_1^{i-n1}\right)\right] X_i + \int_{t_1}^{t} u(\tau)\,d\tau. \tag{6a}$$

Существует большое число методов построения основной СЛАУ для реализации одноканального принципа инвариантности по заданным математическим моделям, описывающим динамические свойства измерительных систем. Приведем описание нескольких методов построения указанной основной СЛАУ.

## Первый метод – метод интегрирования на частичных интервалах

Этот метод основан на использовании невязки в интегральной форме. Потребовав равенства нулю невязки в интегральной форме

(6а), записанной для каждого из равных частичных интервалов $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, ... , $[t_{n1+n2}, t_{n1+n2+1}]$, т. е. для частичных интервалов $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, 2, ..., (n1 + n2)$, сразу получим основную СЛАУ. Она имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n1}\Big[\, t_{k+1}^{i-1}u(t_{k+1}) - t_k^{i-1}u(t_k) - (i-1)\int_{t_k}^{t_{k+1}} x^{i-2}u(x)dx \,\Big] X_i -$$

$$\sum_{i=n1+1}^{n1+n2}\Big[\frac{1}{i-n1}\Big(t_{k+1}^{i-n1} - t_k^{i-n1}\Big)\Big] X_i = -\int_{t_k}^{t_{k+1}} u(x)\, dx$$

$$k = 1, 2, ..., (n1 + n2)$$

Так как $t_k = t_1 + T(k-1)$, $t_{k+1} = t_1 + T\times k$, $T = T0/(n1 + n2)$, где $T0$ – длина интервала восстановления процессов $\alpha(t)$, $X(t)$, то СЛАУ запишется в виде

$$\sum_{i=1}^{n1}\Big\{\, (t_1+Tk)^{i-1}\times u(t_1+Tk) - [t_1+T(k-1)]^{i-1}\times u[t_1+T(k-1)] -$$

$$(i-1)\int_{t_1+T(k-1)}^{t_1+Tk} x^{i-2}u(x)dx\Big\}\, X_i - \sum_{i=n1+1}^{n1+n2}\Big\{\,\frac{1}{i-n1}\Big[\,(t_1+Tk)^{i-n1} -$$

$$[t_1+T(k-1)]^{i-n1}\Big]\Big\}\, X_i = -\int_{t_1+T(k-1)}^{t_1+Tk} u(x)dx$$

$$k = 1, 2, ..., (n1 + n2).$$

Наконец, введя обозначение

$$I(k,i) = (i-1)\int_{t_1+T(k-1)}^{t_1+Tk} x^{i-2}\times u(x)dx,$$

запишем основную систему в стандартной форме

$$\sum_{i=1}^{n1+n2} A_{ki}X_i = B_k, \quad k = 1, 2, ..., (n1+n2), \qquad \text{где}$$

$$A_{ki} = \begin{cases} (t_1+Tk)^{i-1}\times u(t_1+Tk) - [t_1+T(k-1)]^{i-1}\times u[t_1+T(k-1)] - I(k,i), & i \le n1 \\ -\dfrac{1}{i-n1}\Big[(t_1+Tk)^{i-n1} - [t_1+T(k-1)]^{i-n1}\Big], & i > n1 \end{cases} \tag{7}$$

$$B_k = -I(k, 2).$$

Очевидно, СЛАУ в виде (7) можно получить также, основываясь на невязке в дифференциальной форме. Для этого достаточно потребовать равенства нулю интегралов от невязки в дифференциальной форме, взятых в пределах, указанных приведенными выше частичными интервалами $[t_k,\ t_{k+1}]$, $k = 1, 2, ..., (n1 + n2)$.

**Второй метод – аналог метода коллокации**

Этот метод представляет собой использование идеи метода коллокации, широко используемого в численном анализе при нахождении решений дифференциальных уравнений.

Если применение этого метода основывать на невязке в дифференциальной форме, то необходимо потребовать равенства нулю выражения для $I_{dif}(t)$ в точках $t_k = t_1 + T(k - 1)$, $k = 1, 2, ..., (n1 + n2)$. Это требование сразу дает искомое СЛАУ, которое имеет вид:

$$\left[\frac{du(t)}{dt}\right]\Bigg|_{t=t_k} \sum_{i=1}^{n1} t_k^{i-1} X_i - \sum_{i=n1+1}^{n1+n2} t^{i-n1-1} X_i = -u(t_k)$$

$$k = 1, 2, ..., (n1 + n2),\ \ t_k = t_1 + T(k - 1),\ T = \frac{T0}{n1 + n2 - 1},$$

или в стандартной форме

$$\sum_{i=1}^{n1+n2} A_{ki} X_i = B_k, \quad k = 1, 2, ..., (n1 + n2), \qquad \text{где}$$

$$A_{ki} = \begin{cases} \left.\dfrac{du(t)}{dt}\right|_{t=t_{1+T(k-1)}} [t_1 + T(k-1)]^{i-1}, & i \le n1 \\ -[t_1 + T(k-1)]^{i-n1-1}, & i > n1 \end{cases} \tag{8}$$

$$B_k = -u([t_1 + T(k - 1)].$$

Заметим, что при моделировании процесса восстановления измеряемого сигнала с использованием СЛАУ (8) погрешность восстановления оказывается на 2–3 порядка выше, чем погрешность, которая имеет место при использовании СЛАУ (7).

**Третий метод – аналог метода моментов**

Изложим метод, который заключается в использовании идеи метода моментов, также широко используемого в численном анализе при решении дифференциальных уравнений.

Пусть имеется некоторая полная на $[t_1,\ t_1 + T0]$ система функций $\{\varphi_k(t)\}$, $k = 1, 2, ..., (n1 + n2)$. Для получения основной СЛАУ потребуем, чтобы на интервале $[t_1,\ t_1 + T0]$ равнялись нулю интегралы от невязки, взятые с весами $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, ..., (n1 + n2)$.

Итак, если использовать, например, невязку в дифференциальной форме, то основная СЛАУ определяется условиями:

$$\int_{t_1}^{t+T0} I_{dif}(t) \times \varphi_k(t)\, dt = 0, \quad k = 1, 2, ..., (n1 + n2).$$

В качестве простейшей системы функций $\{\varphi_k(t)\}$ можно взять:

$$\varphi_k(t) = t^{k-1}, \quad k = 1, 2, ..., (n1 + n2).$$

Подставив выражения для $I_{dif}(t)$, $\varphi_k(t)$ в приведенные выше условия, имеем:

$$\sum_{i=1}^{n1} \left[ u(t_1 + T0)(t_1 + T0)^{i+k-2} - u(t_1) t_1^{i+k-2} - (i + k - 2) I(k,i) \right] X_i -$$

$$\sum_{i=n1+1}^{n1+n2} \frac{1}{i + k - n1 - 1} \left[ (t_1 + T0)^{i+k-n1-1} - t_1^{i+k-n1-1} \right] X_i =$$

$$= -I(k,2), \; I(k,i) = \int_{t_1}^{t_1+T0} u(t) t^{i+k-3} dt.$$

Запишем эту систему в стандартной форме:

$$\sum_{i=1}^{n1+n2} A_{ki} X_i = B_k, \quad k = 1, 2, ..., (n1 + n2),$$

$$A_{ki} = \begin{cases} u(t_1 + T0)(t_1 + T0)^{i+k-2} - u(t_1)(t_1)^{i+k-2} - (i + k - 2)\, I(k,i), & i \le n1 \\ -\dfrac{1}{i + k - n1 - 1} \left[ (t_1 + T0)^{i+k-n1-1} - t_1^{i+k-n1-1} \right] & i > n1 \end{cases} \qquad (9)$$

$$B_k = -I(k, 2).$$

### Четвертый метод – метод повторного интегрирования

Изложим метод получения основной СЛАУ, в основе которого лежит повторное интегрирование заданного дифференциального уравнения, описывающего поведение измерительной системы. Идея повторного интегрирования заданного дифференциального уравнения была использована ранее В. Стрейцем при решении задачи параметрической идентификации [15]. При этом, с целью уменьшения погрешностей, В. Стрейц предложил интегрировать заданное дифференциальное уравнение не более двух раз, а недостающие уравнения СЛАУ получать, используя воздействие на систему различных известных входных воздействий. Если при решении задач идентификации систем возможность воздействия на систему различных известных входных сигналов легко реализуема, то указанная возможность отсутствует при реальных динамических измерениях, так как основной целью измерений является именно определение неизвестных входных сигналов. В связи со сказанным, ниже излагается иная, нежели предложенная В. Стрейцем, реализация идеи повторного интегрирования для получения основной СЛАУ, которая позволяет аналитически свести все повторные интегрирования к однократному интегрированию.

Если $I(t)$ – невязка, то основная СЛАУ получается из условий:

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t} dt \int_{t_1}^{t} dt \ldots \int_{t_1}^{t}}_{k} I(t)dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, (n1 + n2),$$

где $k$ – количество повторных интегрирований.

Воспользуемся известным в анализе соотношением:

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t} dt \int_{t_1}^{t} dt \ldots \int_{t_1}^{t}}_{k} I(t)dt = \frac{1}{(k-1)!} \int_{t_1}^{t} (t - z)^{k-1} \times I(z)\, dz.$$

Тогда указанные выше условия выразятся через однократные интегралы:

$$\int_{t_1}^{t} (t - z)^{k-1} \times I(z)\, dz = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, (n1 + n2).$$

Если в качестве невязки взять невязку в дифференциальной форме, то получим

$$\sum_{i=1}^{n1} \left[ \int_{t_1}^{t} (t - z)^{k-1} \frac{du(z)}{dz} z^{i-1} dz \right] X_i - \sum_{i=n1+1}^{n1+n2} \left[ \int_{t_1}^{t} (t - z)^{k-1} z^{i-n1-1} dz \right] X_i =$$

$$= -\int_{t_1}^{t} (t - z)^{k-1} \times u(z)\, dz, \quad k = 1, 2, \ldots, (n1 + n2).$$

Наконец, полагая $t = t_1 + T0$, запишем эту систему в стандартной форме:

$$\sum_{i=1}^{n1+n2} A_{ki} X_i = B_k, \quad k = 1, 2, \ldots, (n1 + n2),$$

$$A_{ki} = \begin{cases} \int\limits_{t_1}^{t_1+T0} (t_1 + T0 - z)^{k-1} \dfrac{du(z)}{dz} z^{i-1} dz, & i \le n1 \\ -\int\limits_{t_1}^{t_1+T0} (t_1 + T0 - z)^{k-1} \times z^{i-n_1-1} dz, & i > n1 \end{cases} \qquad (10)$$

$$B_k = -\int\limits_{t_1}^{t_1+T0} (t_1 + T0 - z)^{k-1} u(z)\, dz.$$

## 3.2. ПРЯМЫЕ И КОСВЕННЫЕ КРИТЕРИИ ТОЧНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

Этап выбора прямых и косвенных критериев, позволяющих выделять из множества возможных единственное приемлемое решение поставленной задачи, также является важным этапом реализации принципа инвариантности.

### Прямые критерии

К прямым относятся те критерии, которые позволяют по той или иной метрике сравнивать найденные оценки измеряемого сигнала с истинными значениями этого сигнала. При компьютерном моделировании, ввиду известности измеряемого сигнала, такое сравнение возможно, и роль прямых критериев оказывается определяющей в оценке эффективности исследуемого метода восстановления измеряемого сигнала.

В качестве первого прямого критерия можно использовать критерий среднеинтегрального отклонения оценок $\tilde{\alpha}(t)$, $\tilde{X}(t)$ от оцениваемых величин $\alpha(t)$, $X(t)$:

$$\rho\alpha = \frac{1}{T0} \int\limits_{t_1}^{t_1+T0} \left|\alpha(t) - \tilde{\alpha}(t)\right| dt, \quad \rho\alpha_{\text{от}} = \frac{\rho\alpha}{\dfrac{1}{T0} \int\limits_{t_1}^{t_1+T0} \left|\alpha(t)\right| dt}$$

$$\rho X = \frac{1}{T0} \int\limits_{t_1}^{t_1+T0} \left|X(t) - \tilde{X}(t)\right| dt, \quad \rho X_{\text{от}} = \frac{\rho X}{\dfrac{1}{T0} \int\limits_{t_1}^{t_1+T0} \left|X(t)\right| dt} \qquad (11)$$

В качестве второго прямого критерия используем критерий максимального отклонения:

$$\delta\alpha = \max_{t\in[t_1,\, t_1+T0]} \left|\alpha(t) - \tilde{\alpha}(t)\right|, \qquad \delta\alpha_{\text{от}} = \frac{\delta\alpha}{\dfrac{1}{T0}\displaystyle\int_{t_1}^{t_1+T0} \left|\alpha(t)\right| dt}$$

$$\delta X = \max_{t\in[t_1,\, t_1+T0]} \left|X(t) - \tilde{X}(t)\right|, \qquad \delta X_{\text{от}} = \frac{\delta X}{\dfrac{1}{T0}\displaystyle\int_{t_1}^{t_1+T0} \left|X(t)\right| dt} \tag{12}$$

В дальнейшем используется также критерий среднеквадратического отклонения:

$$\sigma\alpha = \left\{\frac{1}{T0}\int_{t_1}^{t_1+T0} [\alpha(t) - \tilde{\alpha}(t)]^2\, dt\right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad \sigma\alpha_{\text{от}} = \frac{\sigma\alpha}{\left[\dfrac{1}{T0}\displaystyle\int_{t_1}^{t_1+T0} \alpha^2(t)\, dt\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sigma X = \left\{\frac{1}{T0}\int_{t_1}^{t_1+T0} [X(t) - \tilde{X}(t)]^2\, dt\right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad \sigma X_{\text{от}} = \frac{\sigma X}{\left[\dfrac{1}{T0}\displaystyle\int_{t_1}^{t_1+T0} X^2(t)\, dt\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{13}$$

Заметим, что в приведенных трех прямых критериях в основу понятия «отклонение оценки от оцениваемой величины» вкладывается смысл разности указанных величин. Однако существует множество других ситуаций, когда в это понятие вкладывается более широкий смысл. Например, часто в приложениях в указанное понятие вкладывается смысл, заключающийся в том, что в нем участвуют как разность оценки и оцениваемой величины, так и разность первых производных этих величин.

## Косвенные критерии

Как отмечалось в п. 2.2, для исследования качества восстановления измеряемого сигнала, наряду с прямыми, могут использоваться косвенные критерии, что имеет место ниже при моделировании. К косвенным критериям оценки близости найденных оценок $\tilde{X}(t)$, $\tilde{\alpha}(t)$ к самим искомым величинам $X(t)$, $\alpha(t)$ отнесем функционалы, которые, во-первых, по своему смыслу косвенно характеризуют степень близости $\tilde{X}(t)$, $\tilde{\alpha}(t)$ к $X(t)$, $\alpha(t)$ соответственно, а во-вторых, содержат в своей структуре только полученные оценки $\tilde{X}(t)$, $\tilde{\alpha}(t)$, другие известные в процессе измерения величины, но не содержат искомые величины $X(t)$, $\alpha(t)$.

В качестве основы построения косвенных критериев можно использовать понятие невязки, которая имеет, например, виды приведенных ранее невязок в дифференциальной и интегральной формах (4), (4а), но может иметь иную, специально составленную структуру.

Пусть $I(t)$ – общее обозначение невязки. Тогда по аналогии с прямыми критериями можно ввести в рассмотрение следующие простые косвенные критерии:

$$\rho I = \frac{1}{T0}\int_{t_1}^{t_1+T0} |I(t)|\, dt, \qquad \rho I_{\text{от}} = \frac{\rho I}{\frac{1}{T0}\int_{t_1}^{t_1+T0} |u(t)|\, dt} \tag{11а}$$

$$\delta I = \max |I(t)|, \quad t \in [t_1, t_1 + T0] \qquad \delta I_{\text{от}} = \frac{\delta I}{\frac{1}{T0}\int_{t_1}^{t_1+T0} |u(t)|\, dt} \tag{12а}$$

$$\sigma I = \left[\frac{1}{T0}\int_{t_1}^{t_1+T0} I^2(t)\, dt\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \sigma I_{\text{от}} = \frac{\sigma I}{\left[\frac{1}{T0}\int_{t_1}^{t_1+T0} u^2(t)\, dt\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{13а}$$

В выражениях косвенных критериев (11а)–(13а), наряду с введенными ранее видами невязок в дифференциальной и интегральной формах (4), (4а), можно использовать также невязку $I_u(t)$ следующей структуры:

$$I_u(t) = u(t) - U(t),$$

где $u(t)$ – фактические показания измерительного прибора, а $U(t)$ – оценка показаний измерительного прибора. Под оценкой показаний прибора (предполагаемыми показаниями прибора) будем иметь в виду показания прибора, которые имели бы место при условии, что, во-первых, вместо неизвестных $X(t)$, $\alpha(t)$, имели бы место найденные оценки $\widetilde{X}(t)$, $\widetilde{\alpha}(t)$, а во-вторых, в момент времени $t = t_1$ (момент начала реализации алгоритма инвариантности) показания $u(t)$, $U(t)$ совпадали бы между собой. При этом имеется в виду, что сравнение процессов $u(t)$, $U(t)$ проводится для $t > t_1$, а момент времени $t_1$ достаточно близок к моменту начала измерений $t = 0$. Другими словами, если, например, при нулевом начальном условии для фактических показаний измерительного прибора (система первого порядка) имеем:

$$u(t)=\int_0^t e^{-\int_\tau^t \frac{1}{\alpha(y)}dy}\times\frac{X(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau,\quad u(t_1)=\int_0^{t_1} e^{-\int_\tau^{t_1} \frac{1}{\alpha(y)}dy}\times\frac{X(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau,$$

то оценка показаний прибора (предполагаемые показания прибора) определится выражением:

$$U(t)=u(t_1)\times e^{-\int_{t_1}^t \frac{1}{\tilde\alpha(y)}dy}+\int_{t_1}^t e^{-\int_\tau^t \frac{1}{\tilde\alpha(y)}dy}\times\frac{\tilde X(\tau)}{\tilde\alpha(\tau)}d\tau,\quad t\ge t_1. \tag{14}$$

Смысл введения косвенного критерия на основе невязки $I_u(t)$ состоит в предположении, что, если при сравнении на интервале $[t_1, t_1 + T0]$ истинного $u(t)$ и предполагаемого $U(t)$ выходных сигналов оказывается, что они, в том или ином смысле, близки друг к другу, то это косвенно свидетельствует и о близости отыскиваемых величин $X(t)$, $\alpha(t)$ к найденным оценкам $\tilde X(t)$, $\tilde\alpha(t)$ соответственно.

Для систем первого порядка использование невязки $I_u(t)$ очень удобно, так как вид функции $U(t)$ общеизвестен и затрачиваемое на ее вычисление время очень мало.

При моделировании значения косвенных критериев не используются в вычислениях конкретных численных значений погрешностей восстановления процессов $X(t)$, $\alpha(t)$. Но моделирование алгоритмов восстановления процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ позволяет зафиксировать такие диапазоны изменения величин косвенных критериев или установить такие правила выбора степеней многочленов, описывающих оценки $\tilde X(t)$, $\tilde\alpha(t)$, при которых погрешности восстановления процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ не выходят за приемлемые границы.

Таким образом, несмотря на то, что значения величин косвенных критериев не участвуют непосредственно в процессе получения численных оценок $\tilde X(t)$, $\tilde\alpha(t)$ восстанавливаемых процессов $X(t)$, $\alpha(t)$, необходимость и ценность введения косвенных критериев заключается в том, что эти критерии позволяют выбрать правильное направление поиска указанных оценок.

## 3.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗМЕРЯЕМЫХ СИГНАЛОВ

Ниже приводятся результаты моделирования процессов восстановления $X(t)$ и параметра $\alpha(t)$ с использованием одноканального принципа инвариантности для измерительной системы первого порядка. При указанном моделировании в качестве исходной математической модели этой системы можно взять модель в виде уравнения (2). В этом случае не возникает необходимость во введении обобщенных неизвестных, поэтому процесс моделирования оказывается простым. Процесс моделирования для этого случая отнесем к первой схеме реализации алгоритма инвариантности. Если в процессе моделирования в качестве исходной математической модели измерительной системы выбирается модель в виде уравнения (1), то введение обобщенных неизвестных становится неизбежным и процесс моделирования существенно усложняется. Процесс моделирования для данного случая отнесем ко второй схеме реализации алгоритма инвариантности.

### 3.3.1. ПЕРВАЯ СХЕМА РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА ИНВАРИАНТНОСТИ

В этой схеме исходные данные задаются алгебраическими многочленами:

$$\alpha(t)=\sum_{i=1}^{N1}\alpha_i t^{i-1},\quad \alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \overline{\alpha_{N1}}\end{pmatrix},\qquad X(t)=\sum_{j=1}^{N2}\beta_j t^{j-1},\quad \beta=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \overline{\beta_{N2}}\end{pmatrix},$$

При моделировании величины $N1$, $N2$, так же как $\alpha_i$, $\beta_j$, задаются, но для алгоритма восстановления процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ эти величины являются неизвестными, и алгоритм инвариантности использует только структуру уравнения (2), описывающего динамические свойства ИС, и показания этой системы $u(t)$.

Прежде всего, выбирается алгоритм восстановления искомых функций $X(t)$, $\alpha(t)$, использующий основную СЛАУ, полученную одним из приведенных в п. 3.1 методов. При реализации выбранного алгоритма оценки $\tilde{X}(t)$, $\tilde{\alpha}(t)$ процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ определяются в виде:

$$\tilde{\alpha}(t)=\sum_{i=1}^{n1}\tilde{\alpha}_i t^{i-1},\quad \tilde{\alpha}=\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_1\\ \tilde{\alpha}_2\\ \overline{\tilde{\alpha}_{n1}}\end{pmatrix},\qquad \tilde{X}(t)=\sum_{j=1}^{n2}\tilde{\beta}_j t^{j-1},\quad \tilde{\beta}=\begin{pmatrix}\tilde{\beta}_1\\ \tilde{\beta}_2\\ \overline{\tilde{\beta}_{n2}}\end{pmatrix}, \tag{16}$$

Процесс моделирования заключается в задании конкретных значений величин $N1$, $N2$, $\alpha$, $\beta$ и решении соответствующей основной СЛАУ, т. е. в определении оценок $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ для различных значений величин $n1$, $n2$.

Результатом моделирования должно быть определение той пары значений величин $n1$, $n2$ и соответствующих ей численных значений величин $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, которые следует принять в качестве оценок для искомых $N1$, $N2$, $\alpha$, $\beta$.

После получения множества оценок $\tilde{X}(t)$, $\tilde{\alpha}(t)$, соответствующих различным значениям величин $n1$, $n2$, необходимо вычислить величины соответствующих косвенных и прямых критериев. Анализ полученных данных заключается: в сопоставлении различных значений величин косвенных критериев и соответствующих им различных пар значений величин $n1$, $n2$; в выборе из всех пар ($n1$, $n2$) единственной пары, обозначим ее ($\bar{n}^*1$, $\bar{n}^*2$), для которой погрешности восстановления процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ оказываются минимальными по сравнению с погрешностями, соответствующими любым другим парам значений величин $n1$, $n2$.

В данном параграфе будут изложены результаты моделирования процесса восстановления измеряемого сигнала, полученные при использовании каждого из приведенных в п. 3.1 методов построения основных СЛАУ.

### Первый метод построения основной СЛАУ

Начнем с изложения результатов моделирования процесса восстановления измеряемого сигнала, относящихся к случаю использования первого метода построения основной СЛАУ, т. е. к использованию СЛАУ (7).

В качестве прямых критериев оценки точности восстановления процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ используем критерии среднеинтегрального, максимального и среднеквадратического отклонений, которые выражаются соотношениями (11)–(13) соответственно. В качестве косвенных критериев используем следующие критерии.

Косвенные критерии среднеинтегрального отклонения невязок:

$$\rho I_{\text{int}} = \rho I_i = \frac{1}{T0}\int_{t_1}^{t_1+T0} \left|I_{\text{int}}(t)\right| dt, \qquad \rho I_{i\,\text{от}} = \frac{\rho I_i}{\dfrac{1}{T0}\displaystyle\int_{t_1}^{t_1+T0} |u(t)|\, dt}, \tag{17}$$

где $I_{\text{int}}(t) = \tilde{\alpha}(t)\, u(t) - \tilde{\alpha}(t_1)\, u(t_1) - \displaystyle\int_{t_1}^{t} u(t)\frac{d\tilde{\alpha}(t)}{dt}\, dt - \int_{t_1}^{t} \tilde{X}(t)\, dt + \int_{t_1}^{t} u(t)\, dt.$

$$\rho I_u(t) = \rho I_u = \frac{1}{T0}\int_{t_1}^{t_1+T0} \left|u(t) - U(t)\right| dt, \qquad \rho I_{u\,\text{от}} = \frac{\rho I_u}{\dfrac{1}{T0}\displaystyle\int_{t_1}^{t_1+T0} |u(t)|\, dt}, \tag{18}$$

где $U(t) = u(t_1) \times e^{-\int_{t_1}^{t}\frac{1}{\tilde{\alpha}(y)}dy} + \displaystyle\int_{t_1}^{t} e^{-\int_{\tau}^{t}\frac{1}{\tilde{\alpha}(y)}dy} \times \frac{\tilde{X}(\tau)}{\tilde{\alpha}(\tau)}\, d\tau, \quad t \ge t_1.$

Косвенные критерии максимального отклонения невязок:

$$\delta I_i = \max\left|I_{\text{int}}(t)\right|, \quad t \in [t_1, t_1 + T0] \qquad \delta I_{i\,\text{от}} = \frac{\delta I_i}{\frac{1}{T0}\int\limits_{t_1}^{t_1+T0} \left|u(t)\right|\,dt}, \tag{19}$$

$$\delta I_u = \max\left|u(t) - U(t)\right|, \quad t \in [t_1, t_1 + T0] \qquad \delta I_{u\,\text{от}} = \frac{\delta I_u}{\frac{1}{T0}\int\limits_{t_1}^{t_1+T0} \left|u(t)\right|\,dt}, \tag{20}$$

Косвенный критерий среднеквадратического отклонения невязки:

$$\sigma I_u(t) = \sigma I_u = \left[\frac{1}{T0}\int\limits_{t_1}^{t_1+T0} I_u^2(t)\,dt\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \sigma I_{u\,\text{от}} = \frac{\sigma I_u}{\left[\frac{1}{T0}\int\limits_{t_1}^{t_1+T0} u^2(t)\,dt\right]^{\frac{1}{2}}}, \tag{21}$$

$I_u(t) = u(t) - U(t)$.

Приведенные косвенные критерии использовались в результатах моделирования, представленных в таблицах 1–3, в которых значения относительных величин косвенных и прямых критериев даны в процентах.

В таблицах 1–3 приведены результаты моделирования, относящиеся к следующим трем различным вариантам исходных данных:

Исходные данные для результатов моделирования, представленных в табл. 1

| $N1$ | $N2$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $t_1$ | $T0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 1 | 10 | 100 | 0 | 2 | 20 | 200 | 2000 | 0,04 | 0,1 |

Исходные данные для результатов моделирования, представленных в табл. 2

| $N1$ | $N2$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $t_1$ | $T0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 1 | 10 | 100 | 1000 | 2 | 20 | 200 | 0 | 0,04 | 0,1 |

Исходные данные для результатов моделирования, представленных в табл. 3

| $N1$ | $N2$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $t_1$ | $T0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 1 | 10 | 100 | 1000 | 2 | 20 | 200 | 2000 | 0,04 | 0,15 |

Приведенные выше численные значения величин $\alpha_i$, $\beta_i$ в исходных многочленах для $\alpha(t)$, $X(t)$ свидетельствуют о том, что рассматриваются чрезвычайно сложные условия измерений: очень быстрый рост инерционности измерительной системы, т. е. очень быстрое ухудшение динамических свойство системы, сопровождающееся еще более быстрым ростом измеряемой характеристики $X(t)$.

Перейдем к непосредственному анализу результатов моделирования, представленных в таблицах 1–3, выделяя три основных этапа указанного анализа.

1. Из всех полученных результатов следует выделить и оставить вне рассмотрения те, которые не имеют физического смысла для измерительных систем. К указанным результатам относятся те, которые дают для оценки $\widetilde{\alpha}(t)$ отрицательные и знакопеременные величины. В таблицах 1–3 таких результатов шесть, три и шесть соответственно, они отмечены знаками «–», «+/–» в колонках № 12 таблиц.

*Таблица 1*. **Восстановление сигнала $X(t)$ и параметра $\alpha(t)$. Первый метод**

| $n1$ | $n2$ | Косвенные критерии | | | | | Прямые критерии | | | | | | Знак $\tilde{\alpha}(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\rho I_{i\,\text{от}}$ | $\rho I_{u\,\text{от}}$ | $\delta I_{i\,\text{от}}$ | $\delta I_{u\,\text{от}}$ | $\sigma I_{u\,\text{от}}$ | $\rho\alpha_{\text{от}}$ | $\rho X_{\text{от}}$ | $\delta\alpha_{\text{от}}$ | $\delta X_{\text{от}}$ | $\sigma\alpha_{\text{от}}$ | $\sigma X_{\text{от}}$ | |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | – |
| 2 | 1 | 0,421 | 0,044 | 0,798 | 0,652 | 0,047 | 229,62 | 205,67 | 352,06 | 262,33 | 231,722 | 193,49 | + |
| 1 | 2 | | | | | | | | | | | | – |
| 2 | 2 | | | | | | | | | | | | +/– |
| 3 | 2 | | | | | | | | | | | | – |
| 2 | 3 | $4{,}693\cdot10^{-6}$ | $1{,}156\cdot10^{-4}$ | $1{,}771\cdot10^{-5}$ | $3{,}172\cdot10^{-4}$ | $1{,}458\cdot10^{-4}$ | 98,66 | 96,15 | 141,70 | 159,80 | 98,802 | 96,38 | + |
| 3 | 3 | | | | | | | | | | | | +/– |
| 4 | 3 | | | | | | | | | | | | – |
| 3 | 4 | $5{,}679\cdot10^{-14}$ | $1{,}987\cdot10^{-14}$ | $1{,}406\cdot10^{-13}$ | $7{,}806\cdot10^{-14}$ | $2{,}582\cdot10^{-14}$ | $6{,}185\cdot10^{-6}$ | $6{,}026\cdot10^{-6}$ | $9{,}09\cdot10^{-6}$ | $1{,}041\cdot10^{-5}$ | $6{,}19\cdot10^{-6}$ | $6{,}036\cdot10^{-6}$ | + |
| 4 | 4 | $4{,}547\cdot10^{-14}$ | $1{,}616\cdot10^{-14}$ | $1{,}295\cdot10^{-13}$ | $1{,}295\cdot10^{-13}$ | $2{,}184\cdot10^{-14}$ | $2{,}463\cdot10^{-5}$ | $2{,}398\cdot10^{-5}$ | $3{,}645\cdot10^{-5}$ | $4{,}19\cdot10^{-5}$ | $2{,}464\cdot10^{-5}$ | $2{,}402\cdot10^{-5}$ | + |
| 5 | 4 | $7{,}202\cdot10^{-14}$ | $2{,}406\cdot10^{-14}$ | $2{,}005\cdot10^{-13}$ | $2{,}005\cdot10^{-13}$ | $3{,}762\cdot10^{-14}$ | $1{,}617\cdot10^{-3}$ | $1{,}575\cdot10^{-5}$ | $2{,}405\cdot10^{-3}$ | $2{,}775\cdot10^{-3}$ | $1{,}618\cdot10^{-3}$ | $1{,}576\cdot10^{-3}$ | + |
| 4 | 5 | $7{,}036\cdot10^{-14}$ | $2{,}680\cdot10^{-14}$ | $3{,}187\cdot10^{-13}$ | $1{,}916\cdot10^{-13}$ | $5{,}151\cdot10^{-14}$ | $5{,}09\cdot10^{-3}$ | $5{,}025\cdot10^{-3}$ | $8{,}577\cdot10^{-3}$ | $9{,}894\cdot10^{-3}$ | $5{,}253\cdot10^{-3}$ | $5{,}224\cdot10^{-3}$ | + |
| 5 | 5 | $9{,}014\cdot10^{-14}$ | $4{,}670\cdot10^{-14}$ | $5{,}125\cdot10^{-13}$ | $3{,}335\cdot10^{-13}$ | $8{,}995\cdot10^{-14}$ | 0,045 | 0,044 | 0,074 | 0,086 | 0,046 | 0,046 | + |
| 6 | 5 | $6{,}345\cdot10^{-14}$ | $2{,}505\cdot10^{-14}$ | $2{,}779\cdot10^{-13}$ | $2{,}768\cdot10^{-13}$ | $4{,}328\cdot10^{-14}$ | 0,045 | 0,045 | 0,073 | 0,085 | 0,046 | 0,046 | + |
| 5 | 6 | $6{,}655\cdot10^{-14}$ | $3{,}206\cdot10^{-14}$ | $3{,}009\cdot10^{-13}$ | $1{,}774\cdot10^{-13}$ | $4{,}868\cdot10^{-14}$ | 0,323 | 0,325 | 0,659 | 0,764 | 0,354 | 0,361 | + |
| 6 | 6 | $7{,}117\cdot10^{-14}$ | $3{,}560\cdot10^{-14}$ | $4{,}311\cdot10^{-13}$ | $4{,}311\cdot10^{-13}$ | $6{,}346\cdot10^{-14}$ | 23,58 | 23,65 | 47,03 | 54,64 | 25,53 | 25,93 | + |

*Таблица 2*. **Восстановление сигнала $X(t)$ и параметра $\alpha(t)$. Первый метод**

| $n1$ | $n2$ | Косвенные критерии | | | | | Прямые критерии | | | | | | Знак $\tilde{\alpha}(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\rho I_{i\ от}$ | $\rho I_{u\ от}$ | $\delta I_{i\ от}$ | $\delta I_{u\ от}$ | $\sigma I_{u\ от}$ | $\rho\alpha_{от}$ | $\rho X_{от}$ | $\delta\alpha_{от}$ | $\delta X_{от}$ | $\sigma\alpha_{от}$ | $\sigma X_{от}$ | |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 1 | 0,19 | 0,089 | $3{,}789\cdot10^{-2}$ | 0,159 | 0,099 | 94,25 | 91,21 | 127,5 | 115,53 | 95,133 | 91,928 | + |
| 2 | 1 | $3{,}173\cdot10^{-3}$ | 0,025 | $6{,}902\cdot10^{-3}$ | 0,044 | 0,027 | 96,82 | 93,81 | 147,47 | 128,22 | 97,432 | 94,31 | + |
| 1 | 2 | 0,025 | 0,026 | 0,052 | 0,054 | 0,029 | 74,96 | 71,40 | 125,22 | 108,85 | 79,24 | 75,011 | + |
| 2 | 2 | | | | | | | | | | | | +/– |
| 3 | 2 | $1{,}741\cdot10^{-5}$ | $1\cdot10^{-4}$ | $7{,}045\cdot10^{-5}$ | $4{,}444\cdot10^{-4}$ | $1{,}653\cdot10^{-4}$ | 94,64 | 91,76 | 158,19 | 133,11 | 95,089 | 92,12 | + |
| 2 | 3 | | | | | | | | | | | | +/– |
| 3 | 3 | $1{,}334\cdot10^{-6}$ | $3{,}189\cdot10^{-5}$ | $6{,}529\cdot10^{-6}$ | $1{,}229\cdot10^{-4}$ | $4{,}863\cdot10^{-5}$ | 98,77 | 95,87 | 167,6 | 139,88 | 98,922 | 96,008 | + |
| 4 | 3 | $6{,}547\cdot10^{-14}$ | $1{,}446\cdot10^{-14}$ | $1{,}644\cdot10^{-13}$ | $1{,}644\cdot10^{-13}$ | $1{,}943\cdot10^{-14}$ | $3{,}668\cdot10^{-8}$ | $3{,}559\cdot10^{-8}$ | $6\cdot10^{-8}$ | $5\cdot10^{-8}$ | $3{,}679\cdot10^{-8}$ | $3{,}568\cdot10^{-8}$ | + |
| 3 | 4 | | | | | | | | | | | | – |
| 4 | 4 | $5{,}968\cdot10^{-14}$ | $2{,}094\cdot10^{-14}$ | $2{,}574\cdot10^{-13}$ | $2{,}574\cdot10^{-13}$ | $3{,}22\cdot10^{-14}$ | $6{,}247\cdot10^{-5}$ | $6{,}068\cdot10^{-5}$ | $1{,}087\cdot10^{-4}$ | $8{,}979\cdot10^{-5}$ | $6{,}248\cdot10^{-5}$ | $6{,}069\cdot10^{-5}$ | + |
| 5 | 4 | $7{,}493\cdot10^{-14}$ | $2{,}024\cdot10^{-14}$ | $2{,}293\cdot10^{-13}$ | $2{,}293\cdot10^{-13}$ | $2{,}777\cdot10^{-14}$ | $3{,}315\cdot10^{-4}$ | $3{,}19\cdot10^{-4}$ | $6{,}309\cdot10^{-4}$ | $5{,}195\cdot10^{-4}$ | $3{,}404\cdot10^{-4}$ | $3{,}259\cdot10^{-4}$ | + |
| 4 | 5 | $8{,}67\cdot10^{-14}$ | $3{,}894\cdot10^{-14}$ | $3{,}402\cdot10^{-13}$ | $2{,}076\cdot10^{-13}$ | $6{,}351\cdot10^{-14}$ | $1{,}528\cdot10^{-3}$ | $1{,}484\cdot10^{-3}$ | $2{,}68\cdot10^{-3}$ | $2{,}206\cdot10^{-3}$ | $1{,}527\cdot10^{-3}$ | $1{,}484\cdot10^{-3}$ | + |
| 5 | 5 | $1{,}162\cdot10^{-13}$ | $5{,}687\cdot10^{-14}$ | $6{,}371\cdot10^{-13}$ | $3{,}893\cdot10^{-13}$ | $1{,}052\cdot10^{-13}$ | $4{,}78\cdot10^{-3}$ | $4{,}661\cdot10^{-3}$ | $8{,}156\cdot10^{-3}$ | $6{,}697\cdot10^{-3}$ | $4{,}731\cdot10^{-3}$ | $4{,}626\cdot10^{-3}$ | + |
| 6 | 5 | $9{,}473\cdot10^{-14}$ | $3{,}324\cdot10^{-14}$ | $4{,}102\cdot10^{-13}$ | $2{,}509\cdot10^{-13}$ | $6{,}722\cdot10^{-14}$ | 0,065 | 0,061 | 0,149 | 0,122 | 0,071 | 0,066 | + |
| 5 | 6 | $8{,}714\cdot10^{-14}$ | $2{,}874\cdot10^{-14}$ | $3{,}421\cdot10^{-13}$ | $2{,}163\cdot10^{-13}$ | $5{,}767\cdot10^{-14}$ | $2{,}894\cdot10^{-3}$ | $2{,}622\cdot10^{-3}$ | $9{,}255\cdot10^{-3}$ | $7{,}583\cdot10^{-3}$ | $3{,}797\cdot10^{-3}$ | $3{,}405\cdot10^{-3}$ | + |
| 6 | 6 | $1{,}52\cdot10^{-13}$ | $1{,}096\cdot10^{-13}$ | $1{,}328\cdot10^{-12}$ | $8{,}219\cdot10^{-13}$ | $2{,}089\cdot10^{-13}$ | 1,373 | 1,299 | 3,112 | 2,545 | 1,491 | 1,394 | + |

*Таблица 3*. **Восстановление сигнала $X(t)$ и параметра $\alpha(t)$. Первый метод**

| $n1$ | $n2$ | Косвенные критерии | | | | | Прямые критерии | | | | | | Знак $\tilde{\alpha}(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\rho I_{i\,\text{от}}$ | $\rho I_{u\,\text{от}}$ | $\delta I_{i\,\text{от}}$ | $\delta I_{u\,\text{от}}$ | $\sigma I_{u\,\text{от}}$ | $\rho\alpha_{\text{от}}$ | $\rho X_{\text{от}}$ | $\delta\alpha_{\text{от}}$ | $\delta X_{\text{от}}$ | $\sigma\alpha_{\text{от}}$ | $\sigma X_{\text{от}}$ | |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | – |
| 2 | 1 | $1{,}105\cdot10^{-3}$ | $1{,}129\cdot10^{-2}$ | $2{,}832\cdot10^{-3}$ | $1{,}518\cdot10^{-2}$ | $1{,}198\cdot10^{-2}$ | 98,521 | 96,625 | 168,656 | 165,894 | 99,217 | 97,484 | + |
| 1 | 2 | | | | | | | | | | | | – |
| 2 | 2 | | | | | | | | | | | | +/– |
| 3 | 2 | | | | | | | | | | | | +/– |
| 2 | 3 | | | | | | | | | | | | +/– |
| 3 | 3 | | | | | | | | | | | | – |
| 4 | 3 | $7{,}462\cdot10^{-8}$ | $2{,}712\cdot10^{-6}$ | $4{,}963\cdot10^{-7}$ | $1{,}141\cdot10^{-5}$ | $4{,}65\cdot10^{-6}$ | 99,45 | 97,53 | 201,28 | 198,28 | 99,559 | 97,814 | + |
| 3 | 4 | $7{,}463\cdot10^{-8}$ | $2{,}728\cdot10^{-6}$ | $4{,}963\cdot10^{-7}$ | $1{,}144\cdot10^{-5}$ | $4{,}676\cdot10^{-6}$ | 99,46 | 97,54 | 201,30 | 198,30 | 99,568 | 97,823 | + |
| 4 | 4 | $1{,}052\cdot10^{-13}$ | $9{,}29\cdot10^{-15}$ | $3{,}775\cdot10^{-13}$ | $3{,}775\cdot10^{-13}$ | $1{,}484\cdot10^{-14}$ | $1{,}568\cdot10^{-5}$ | $1{,}538\cdot10^{-5}$ | $3{,}228\cdot10^{-5}$ | $3{,}181\cdot10^{-5}$ | $1{,}571\cdot10^{-5}$ | $1{,}543\cdot10^{-5}$ | + |
| 5 | 4 | $8{,}517\cdot10^{-14}$ | $1{,}362\cdot10^{-14}$ | $4{,}283\cdot10^{-13}$ | $4{,}283\cdot10^{-13}$ | $2{,}037\cdot10^{-14}$ | $2{,}052\cdot10^{-4}$ | $2{,}012\cdot10^{-4}$ | $4{,}29\cdot10^{-4}$ | $4{,}227\cdot10^{-4}$ | $2{,}057\cdot10^{-4}$ | $2{,}021\cdot10^{-4}$ | + |
| 4 | 5 | $1{,}272\cdot10^{-13}$ | $1{,}531\cdot10^{-14}$ | $6{,}255\cdot10^{-13}$ | $6{,}255\cdot10^{-13}$ | $2{,}213\cdot10^{-14}$ | $2{,}052\cdot10^{-4}$ | $2{,}012\cdot10^{-4}$ | $4{,}29\cdot10^{-4}$ | $4{,}226\cdot10^{-4}$ | $2{,}057\cdot10^{-4}$ | $2{,}021\cdot10^{-4}$ | + |
| 5 | 5 | $5{,}656\cdot10^{-13}$ | $5{,}644\cdot10^{-13}$ | $4{,}832\cdot10^{-12}$ | $2{,}976\cdot10^{-12}$ | $8{,}399\cdot10^{-13}$ | 0,039 | 0,038 | 0,088 | 0,086 | $3{,}992\cdot10^{-2}$ | $3{,}923\cdot10^{-2}$ | + |
| 6 | 5 | $2{,}431\cdot10^{-13}$ | $1{,}577\cdot10^{-13}$ | $1{,}398\cdot10^{-12}$ | $9{,}675\cdot10^{-13}$ | $2{,}341\cdot10^{-13}$ | 0,0135 | 0,0133 | 0,023 | 0,0225 | $1{,}265\cdot10^{-2}$ | $1{,}242\cdot10^{-2}$ | + |
| 5 | 6 | $2{,}676\cdot10^{-13}$ | $1{,}557\cdot10^{-13}$ | $1{,}398\cdot10^{-12}$ | $8{,}628\cdot10^{-13}$ | $2{,}331\cdot10^{-13}$ | 0,0135 | 0,0133 | 0,023 | 0,0226 | $1{,}266\cdot10^{-2}$ | $1{,}242\cdot10^{-2}$ | + |
| 6 | 6 | $6{,}268\cdot10^{-13}$ | $7{,}109\cdot10^{-13}$ | $6{,}928\cdot10^{-12}$ | $4{,}456\cdot10^{-12}$ | $1{,}159\cdot10^{-12}$ | 9,35 | 9,18 | 26,99 | 26,60 | 10,71 | 10,53 | + |

2. После исключения из рассмотрения результатов, не имеющих физического смысла, все результаты моделирования, представленные в каждой из таблиц 1–3, можно условно разделить на две группы, которые резко (на несколько порядков) отличаются друг от друга по значениям выбранных косвенных критериев. Другими словами, при последовательном увеличении величин $n1$, $n2$ и переходе от одной пары ($n1$, $n2$) к другой появляются пары, обозначим их ($n^*1$, $n^*2$), значения косвенных критериев для которых обнаруживают резкое уменьшение. Все пары ($n^*1$, $n^*2$), для которых имеет место резкое снижение значений выбранных косвенных критериев, отнесем к основной группе пар значений величин $n1$, $n2$. Значения величин указанного резкого снижения косвенных критериев для таблиц 1–3 составляют от ~ $10^5$ до $10^{10}$ раз, в то время как значения косвенных критериев для всех пар основной группы ($n^*1$, $n^*2$) очень близки друг к другу. Для таблиц 1–3 основными группами пар являются:

$(3, 4) \le (n^*1, n^*2) \le (6, 6)$ – для таблицы 1;

$(4, 3) \le (n^*1, n^*2) \le (6, 6)$ – для таблицы 2;

$(4, 4) \le (n^*1, n^*2) \le (6, 6)$ – для таблицы 3.

Очевидно, что множества ($n^*1$, $n^*2$) для этих трех случаев можно сузить, взяв в качестве верхней границы пару (5, 5).

3. Остается выбрать из множества возможных решений – множества пар ($n^*1$, $n^*2$) одну единственную ($\bar{n}^*1$, $\bar{n}^*2$), для которой $\bar{n}^*1$, $\bar{n}^*2$ могут служить оценками искомых $N1$, $N2$, а найденные величины $\tilde{X}(t)$, $\tilde{\alpha}(t)$, соответствующие паре ($\bar{n}^*1$, $\bar{n}^*2$), могут служить оценками для искомых $X(t)$, $\alpha(t)$. Совершенно естественно из множества пар ($n^*1$, $n^*2$) основной группы выбрать пару ($\bar{n}^*1$, $\bar{n}^*2$), для которой $\bar{n}^*1$ является наименьшей из всех чисел $n^*1$, а величина $\bar{n}^*2$ является наименьшей из всех чисел $n^*2$. Как следует из таблиц 1–3, указанными парами являются соответственно:

$$(\bar{n}^*1 = 3,\ \bar{n}^*2 = 4),\ (\bar{n}^*1 = 4,\ \bar{n}^*2 = 3),\ (\bar{n}^*1 = 4,\ \bar{n}^*2 = 4).$$

Наконец убеждаемся, что найденные пары ($\bar{n}^*1$, $\bar{n}^*2$) в точности совпадают с исходными парами ($N1$, $N2$) для каждой из таблиц 1–3, а величины соответствующих погрешностей восстановления процессов $X(t)$, $\alpha(t)$, оцениваемые по значениям прямых критериев, оказываются минимальными по сравнению с погрешностями, относящимися к другим парам ($n^*1$, $n^*2$) основной группы.

Из всего изложенного ясно: для того чтобы задача восстановления измеряемого сигнала решалась именно в процессе измерения, необходимо предусматривать применение специальных подпрограмм регистрации при $t \in [t_1, t_1 + T0]$ всех данных, относящихся к показаниям $u(t)$ измерительной системы, которые используются при решении основной СЛАУ для каждого из предполагаемых вариантов поиска.

Таким образом, содержание вывода общего характера заключается в том, что для входного сигнала $X(t)$ и параметра $\alpha(t)$ измерительной системы, представляющих собой алгебраические многочлены, алгоритм инвариантности позволяет, во-первых, точно определить искомые степени этих многочленов, а во-вторых, определять процессы $X(t)$, $\alpha(t)$ по их оценкам $\tilde{X}(t)$, $\tilde{\alpha}(t)$ с минимальными погрешностями.

Как следует из таблиц 1–3, при использовании алгоритма инвариантности и указанного правила выбора единственного решения погрешности определения параметров $\alpha_i$, $\beta_i$ процессов $X(t)$, $\alpha(t)$, а также погрешности определения самих этих процессов оказываются на несколько порядков ниже, чем может понадобиться на практике даже при самых жестких требованиях к точности динамических измерений, т. е. указанные погрешности являются практически пренебрежимо малыми.

В заключение отметим, что выше, при анализе закономерностей поведения косвенных критериев при изменении величин $n1$, $n2$, мы не акцентировали внимания на каком-либо конкретном косвенном критерии, а формулировали эти закономерности относительно всех используемых косвенных критериев одновременно. Связано это с тем, что закономерности поведения всех указанных косвенных критериев при изменении величин $n1$, $n2$ идентичны, хотя, заметим, чувствительность косвенных критериев, использующих невязки $I_u(t)$ и $I_{\text{int}}(t)$ выше, чем, например, чувствительность косвенных критериев, использующих невязку $I_{dif}(t)$, а это, очевидно, важно при выборе из множества возможных решений единственного решения.

### Второй метод построения основной СЛАУ

Естественно, необходимо выяснить, насколько описанные выше закономерности восстановления процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ по их оценкам $\tilde{X}(t)$, $\tilde{\alpha}(t)$ являются характерными для других методов построения основной СЛАУ. В таблице 4 приведены результаты моделирования, относящиеся к основной СЛАУ, полученной вторым из методов, описанных в п. 3.1. Эта СЛАУ имеет вид (8).

В качестве прямых критериев в этом случае использовались критерии $\rho\alpha_{\text{от}}$, $\rho X_{\text{от}}$, имеющие прежний вид. В качестве косвенных критериев использовались критерии $\rho I_u(t) = \rho I_u$, имеющий прежний вид, и $\rho I_{\text{dif}} = \rho I_d$, имеющий вид:

$$\rho I_{dif}(t) = \rho I_d = \frac{1}{T0}\int_{t_1}^{t_1+T0}\left|I_{dif}(t)\right| dt, \qquad \rho I_{d\,\text{от}} = \frac{\rho I_d}{\dfrac{1}{T0}\displaystyle\int_{t_1}^{t_1+T0}\left|u(t)\right| dt}, \tag{22}$$

где $I_{dif}(t) = \tilde{\alpha}(t)\dfrac{du(t)}{dt} + u(t) - \tilde{X}(t).$

Как следует из данных, приведенных в таблице 4, здесь обнаруживаются те же закономерности изменения величин косвенных критериев при изменении $n1$, $n2$, что были описаны выше применительно к первому методу получения основной СЛАУ. Поэтому правило отыскания пары $(\bar{n}^*1, \bar{n}^*2)$, представляющей искомый результат, остается, естественно, прежним.

Исходные данные для результатов моделирования, представленных в табл. 4, имеют вид:

| $N1$ | $N2$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $t_1$ | $T0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 1 | 10 | 100 | 1000 | 2 | 20 | 200 | 0 | 0,04 | 0,1 |

*Таблица 4*. **Восстановление сигнала $X(t)$ и параметра $\alpha(t)$. Второй метод**

| $n1$ | $n2$ | Косвенные критерии | | | | Прямые критерии | | Знак $\tilde{\alpha}(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\rho I_d$ | $\rho I_{d\,\text{от}}$ | $\rho I_u$ | $\rho I_{u\,\text{от}}$ | $\rho\alpha_{\text{от}}$ | $\rho X_{\text{от}}$ | |
| 1 | 1 | $5{,}4\cdot10^{-3}$ | 3,366 | $1{,}222\cdot10^{-3}$ | 0,761 | 93,972 | 91,031 | + |
| 2 | 1 | $9{,}379\cdot10^{-4}$ | 0,585 | $1{,}918\cdot10^{-4}$ | 0,12 | 96,901 | 93,896 | + |
| 1 | 2 | 0,013 | 7,874 | $2{,}833\cdot10^{-4}$ | 0,177 | 57,28 | 53,275 | + |
| 2 | 2 | | | | | | | +/− |
| 3 | 2 | $7{,}041\cdot10^{-6}$ | $4{,}389\cdot10^{-3}$ | $1{,}728\cdot10^{-6}$ | $1{,}077\cdot10^{-3}$ | 94,776 | 91,89 | + |
| 2 | 3 | | | | | | | +/− |
| 3 | 3 | $6{,}03\cdot10^{-7}$ | $3{,}759\cdot10^{-4}$ | $2{,}771\cdot10^{-7}$ | $1{,}728\cdot10^{-4}$ | 98,837 | 95,942 | + |
| 4 | 3 | $1{,}095\cdot10^{-13}$ | $6{,}826\cdot10^{-11}$ | $1{,}421\cdot10^{-15}$ | $8{,}858\cdot10^{-13}$ | $1{,}307\cdot10^{-5}$ | $1{,}269\cdot10^{-5}$ | + |
| 3 | 4 | | | | | | | − |
| 4 | 4 | $1{,}346\cdot10^{-13}$ | $8{,}39\cdot10^{-11}$ | $1{,}551\cdot10^{-15}$ | $9{,}671\cdot10^{-13}$ | $6{,}145\cdot10^{-5}$ | $5{,}968\cdot10^{-5}$ | + |
| 5 | 4 | $1{,}559\cdot10^{-13}$ | $9{,}72\cdot10^{-11}$ | $3{,}197\cdot10^{-15}$ | $1{,}993\cdot10^{-12}$ | $3{,}601\cdot10^{-3}$ | $3{,}466\cdot10^{-3}$ | + |
| 4 | 5 | $2{,}653\cdot10^{-13}$ | $1{,}654\cdot10^{-10}$ | $8{,}175\cdot10^{-15}$ | $5{,}096\cdot10^{-12}$ | 0,015 | 0,015 | + |
| 5 | 5 | $1{,}007\cdot10^{-13}$ | $6{,}275\cdot10^{-11}$ | $1{,}712\cdot10^{-15}$ | $1{,}067\cdot10^{-12}$ | $3{,}308\cdot10^{-3}$ | $3{,}21\cdot10^{-3}$ | + |
| 6 | 5 | $1{,}067\cdot10^{-13}$ | $6{,}653\cdot10^{-11}$ | $1{,}924\cdot10^{-16}$ | $1{,}199\cdot10^{-13}$ | 0,097 | 0,092 | + |
| 5 | 6 | $1{,}047\cdot10^{-13}$ | $6{,}525\cdot10^{-11}$ | $1{,}381\cdot10^{-16}$ | $8{,}608\cdot10^{-14}$ | 0,012 | 0,011 | + |
| 6 | 6 | $3{,}097\cdot10^{-13}$ | $1{,}931\cdot10^{-10}$ | $9{,}98\cdot10^{-15}$ | $6{,}221\cdot10^{-12}$ | 6,86 | 6,493 | + |

Обратим внимание, что теперь при принятых исходных данных погрешности восстановления процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ оказываются примерно на три порядка выше, чем погрешности, соответствующие этому случаю при первом методе построения основной СЛАУ и приведенные в таблице 2.

Но несмотря на повышение погрешности восстановления процессов $X(t)$, $\alpha(t)$, указанная погрешность для выбранного решения ($\bar{n}^*1$, $\bar{n}^*2$), так же как при использовании первого метода построения основной СЛАУ, оказывается пренебрежимо малой.

### Третий и четвертый методы построения основной СЛАУ

Результаты моделирования, относящиеся к третьему методу (аналог метода моментов) и четвертому методу (метод повторного интегрирования), приведены в таблицах 5 и 6. Использованные в этих таблицах прямые и косвенные критерии имеют тот же смысл, что и в таблицах 1–3, 4.

Результаты моделирования, представленные в таблицах 5, 6, относятся к исходным данным:

| $N1$ | $N2$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $t_1$ | $T0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 1 | 10 | 100 | 0 | 2 | 20 | 200 | 2000 | 0,04 | 0,1 |

*Таблица 5.* **Восстановление сигнала $X(t)$ и параметра $\alpha(t)$. Третий метод**

| $n1$ | $n2$ | Косвенные критерии | | Прямые критерии | | Знак $\tilde{\alpha}(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\rho I_u$ | $\rho I_{u\,\text{от}}$ | $\rho\alpha_{\text{от}}$ | $\rho X_{\text{от}}$ | |
| 1 | 1 | | | | | − |
| 2 | 1 | $9{,}779\cdot10^{-5}$ | $5{,}001\cdot10^{-2}$ | 39,042 | 36,360 | + |
| 1 | 2 | $7{,}828\cdot10^{-5}$ | $4\cdot10^{-2}$ | 103,841 | 100,989 | + |
| 2 | 2 | | | | | +/− |
| 3 | 2 | $7{,}77\cdot10^{-3}$ | 3,973 | 100,68 | 98,071 | + |
| 2 | 3 | $2{,}684\cdot10^{-7}$ | $1{,}372\cdot10^{-4}$ | 98,75 | 96,24 | + |
| 3 | 3 | | | | | +/− |
| 4 | 3 | $7{,}459\cdot10^{-7}$ | $3{,}814\cdot10^{-4}$ | 100,8 | 98,2 | + |
| 3 | 4 | $1{,}3\cdot10^{-14}$ | $6{,}514\cdot10^{-12}$ | $2{,}438\cdot10^{-3}$ | $2{,}375\cdot10^{-3}$ | + |
| 4 | 4 | $5{,}2\cdot10^{-14}$ | $2{,}677\cdot10^{-11}$ | $1{,}066\cdot10^{-1}$ | $1{,}039\cdot10^{-1}$ | + |
| 5 | 4 | $2{,}25\cdot10^{-13}$ | $1{,}152\cdot10^{-10}$ | 10,245 | 9,979 | + |
| 4 | 5 | $1{,}3\cdot10^{-13}$ | $6{,}654\cdot10^{-11}$ | 19,536 | 19,278 | + |
| 5 | 5 | $2{,}28\cdot10^{-13}$ | $1{,}166\cdot10^{-10}$ | 10,873 | 10,596 | + |
| 6 | 5 | | | | | +/− |
| 5 | 6 | $1{,}879\cdot10^{-12}$ | $9{,}609\cdot10^{-10}$ | 12,413 | 11,296 | + |
| 6 | 6 | $1{,}394\cdot10^{-11}$ | $7{,}126\cdot10^{-9}$ | 100,677 | 98,041 | + |

*Таблица 6.* **Восстановление сигнала $X(t)$ и параметра $\alpha(t)$. Четвертый метод**

| $n1$ | $n2$ | Косвенные критерии | | Прямые критерии | | Знак $\tilde{\alpha}(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\rho I_и$ | $\rho I_{и\,от}$ | $\rho\alpha_{от}$ | $\rho X_{от}$ | |
| 1 | 1 | $2{,}814\times10^{-4}$ | $1{,}439\times10^{-1}$ | 107,58 | 104,49 | + |
| 2 | 1 | $9{,}779\times10^{-5}$ | $5\times10^{-2}$ | 39,04 | 36,36 | + |
| 1 | 2 | $7{,}828\times10^{-5}$ | $4{,}003\times10^{-2}$ | 103,84 | 100,99 | + |
| 2 | 2 | | | | | +/– |
| 3 | 2 | $7{,}77\times10^{-3}$ | 3,973 | 100,68 | 98,07 | + |
| 2 | 3 | $2{,}684\times10^{-7}$ | $1{,}372\times10^{-4}$ | 98,75 | 96,24 | + |
| 3 | 3 | | | | | +/– |
| 4 | 3 | $7{,}458\times10^{-7}$ | $3{,}813\times10^{-4}$ | 100,8 | 98,2 | + |
| 3 | 4 | $10^{-15}$ | $4{,}45\times10^{-13}$ | $2{,}365\times10^{-4}$ | $2{,}304\times10^{-4}$ | + |
| 4 | 4 | $1{,}8\times10^{-14}$ | $9{,}285\times10^{-12}$ | $6{,}245\times10^{-2}$ | $6{,}083\times10^{-2}$ | + |
| 5 | 4 | $1{,}42\times10^{-13}$ | $7{,}279\times10^{-11}$ | 9,18 | 8,95 | + |
| 4 | 5 | $1{,}54\times10^{-13}$ | $7{,}883\times10^{-11}$ | 20,35 | 20,08 | + |
| 5 | 5 | $4{,}63\times10^{-13}$ | $2{,}366\times10^{-10}$ | 136 | 134 | + |
| 6 | 5 | $7{,}79\times10^{-13}$ | $3{,}983\times10^{-10}$ | 104 | 101,5 | + |
| 5 | 6 | $2{,}8\times10^{-13}$ | $1{,}432\times10^{-10}$ | 167,7 | 167,5 | + |
| 6 | 6 | | | | | +/– |

Анализ полученных в данном случае результатов моделирования осуществляется так же, как в предыдущих случаях, а закономерности восстановления процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ по их оценкам $\tilde{X}(t)$, $\tilde{\alpha}(t)$ остаются теми же, что были описаны при использовании первого метода получения основной СЛАУ. Отметим лишь, что для $N1 = 3$, $N2 = 4$ погрешности третьего и четвертого методов оказываются соответственно на три и два порядка выше, чем погрешность, которая имела место при использовании первого метода составления основной СЛАУ. Однако, этот факт не имеет существенного значения, так как величины самих погрешностей восстановления процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ с использованием третьего и четвертого методов построения основных СЛАУ могут считаться пренебрежимо малыми.

Таким образом, основываясь на результатах моделирования первой схемы реализации алгоритма инвариантности, использующих четыре различающихся по точности метода построения основных СЛАУ, приходим к следующим выводам:

1. Одноканальный принцип инвариантности оказывается эффективным средством исключения влияния параметрических эффектов на точность динамических измерений.

2. Существует простое правило выбора из множества возможных решений единственного решения задачи восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ и параметра $\alpha(t)$ измерительной системы. Это правило является общим и справедливо независимо ни от метода построения основной СЛАУ, ни от вида используемых косвенных критериев.

3. Погрешности восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ и параметра $\alpha(t)$ измерительной системы с использованием алгоритма инвариантности могут считаться пренебрежимо малыми для динамических измерений: наибольшая погрешность имеет место при использовании третьего метода построения основной СЛАУ и составляет $< 2{,}5 \times 10^{-3}$ %.

Наряду с изложенными методами построения основных СЛАУ при моделировании процесса восстановления измеряемого сигнала использовался также интегральный метод наименьших квадратов. При этом качественные выводы, касающиеся процесса восстановления сигнала, вполне аналогичны тем, которые изложены выше применительно к четырем описанным в п. 3.1 методам составления основных СЛАУ. Что касается погрешностей восстановления сигнала при использовании интегрального метода наименьших квадратов, то они также пренебрежимо малы для динамических измерений, хотя и несколько выше, чем в предыдущих случаях.

Завершим изложение, касающееся первой схемы реализации алгоритма инвариантности, рассмотрением качества восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ и параметра $\alpha(t)$ в зависимости от расположения интервала восстановления $[t_1, t_1 + T0]$ относительно начала процесса измерения $t = 0$.

Вновь обратимся к рассмотренным выше экстремальным условиям измерений: при выбранных значениях параметров $\alpha_i$, $\beta_i$ в процессе измерения происходит стремительное ухудшение динамических свойств измерительной системы, сопровождающееся быстрым ростом самого измеряемого сигнала. Указанные исключительные условия далеки от реальных условий измерений, однако, подобные измерительные ситуации интересны тем, что позволяют исследовать алгоритм инвариантности в весьма неблагоприятных для него обстоятельствах.

Итак, представляется важным исследовать изменение качества функционирования алгоритма инвариантности на последовательных интервалах $[t_1^{(k)}, t_1^{(k)} + T0]$, $k = 1, 2, 3...$ восстановления быстропротекающих процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ при увеличении момента времени $t_1^{(k)}$ – начала процесса восстановления.

Ясно, что, ввиду исключительного характера изменения параметра $\alpha(t)$, в процессе измерения наступает некоторый момент времени, после которого инерционность измерительной системы становится чрезвычайно большой, а следовательно, динамическая чувствительность системы становится крайне низкой. В указанной зоне измерений никакие алгоритмы восстановления искомых процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ по показаниям $u(t)$ измерительной системы, в том числе, естественно, и алгоритм инвариантности, не могут привести к цели.

Таким образом, необходимо установить последний интервал $[t_1^{(k)}, t_1^{(k)} + T0]$, на котором восстановление процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ все еще возможно, а качество восстановления является удовлетворительным. При этом имеется в виду, естественно, что на всех предыдущих интервалах восстановления процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ алгоритм инвариантности дает приемлемый результат.

Результаты моделирования, позволяющие оценить качество функционирования алгоритма инвариантности на нескольких последовательных интервалах восстановления процессов $X(t)$, $\alpha(t)$, представлены в таблице 7. Эти результаты получены с использованием первого метода построения основной СЛАУ и косвенного критерия $\rho I_{u\,\text{от}}$. При этом учитывается, что выбор из множества возможных решений единственного решения уже осуществлен, в результате чего установлено, что $n1 = N1 = 3$, $n2 = N2 = 4$. Кроме основных, в таблице 7 приведены также некоторые дополнительные величины, позволяющие подробно проследить эволюцию самой измерительной ситуации, в которой параметр $\alpha(t)$ имеет смысл изменяющейся во времени «постоянной времени» ИС.

Перейдем непосредственно к анализу данных, представленных в таблице 7. Восстановление процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ начинается с $t_1 =$ $= 0{,}02$ с и заканчивается при $t_1 = 0{,}97$ с, при этом рассматриваются пять последовательных интервалов восстановления: [0,02; 0,12], [0,12; 0,27], [0,27; 0,52], [0,52; 0,97], [0,97; 1,42].

Более или менее близкими к практически возможным являются ситуации измерений, отраженные в первой и второй строках таблица 7, причем ситуация, отраженная во второй строке, уже может рассматриваться как предельно возможная.

Процесс измерения на первом интервале [0,02; 0,12] сопровождается примерно трехкратным ростом $\alpha(t)$, т. е. трехкратным ухудшением динамических свойств измерительной системы. При этом показания $u(t)$ системы в конце первого интервала отстают от соответствующего значения измеряемой величины $X(t)$ в ~ 40 раз, а скорость изменения показаний системы $u'(t)$ отстает от скорости изменения измеряемого сигнала $X'(t)$ в этот момент в ~ 50 раз.

*Таблица 7.* **Восстановление сигнала $X(t)$ и параметра $\alpha(t)$ при резко ухудшающихся динамических свойствах ИС ($n1 = N1 = 3$, $n2 = N2 = 4$)**

| $t_1$ | $T0$ | Среднеинтегральные оценки | | | $\frac{\alpha(t_1)}{\alpha(t_1+T0)}$ | $\frac{u(t_1)}{u(t_1+T0)}$ | $\frac{u'(t_1)}{u'(t_1+T0)}$ | $\frac{X(t_1)}{X(t_1+T0)}$ | $\frac{X'(t_1)}{X'(t_1+T0)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\rho I_{u\ от}$ | $\rho\alpha_{от}$ | $\rho X_{от}$ | | | | | |
| 0,02 | 0,1 | $1{,}222\cdot10^{-14}$ | $1{,}362\cdot10^{-6}$ | $1{,}326\cdot10^{-6}$ | 1,24 | 0,04 | 1,981 | 2,496 | 30,4 |
| | | | | | 3,64 | 0,271 | 2,875 | 10,736 | 154,4 |
| 0,12 | 0,15 | $1{,}246\cdot10^{-14}$ | $6{,}622\cdot10^{-5}$ | $6{,}508\cdot10^{-5}$ | 3,64 | 0,271 | 2,875 | 10,736 | 154,4 |
| | | | | | 10,99 | 0,892 | 5,501 | 61,346 | 565,4 |
| 0,27 | 0,25 | $1{,}978\cdot10^{-14}$ | $3{,}961\cdot10^{-3}$ | $3{,}923\cdot10^{-3}$ | 10,99 | 0,892 | 5,501 | 61,346 | 565,4 |
| | | | | | 33,24 | 2,872 | 10,374 | 347,696 | $1{,}85\cdot10^{3}$ |
| 0,52 | 0,45 | $3{,}089\cdot10^{-14}$ | $7{,}3\cdot10^{-2}$ | $7{,}2\cdot10^{-2}$ | 33,24 | 2,872 | 10,374 | 347,696 | $1{,}85\cdot10^{3}$ |
| | | | | | 104,79 | 9,552 | 19,328 | $2{,}035\cdot10^{3}$ | $6{,}053\cdot10^{3}$ |
| 0,97 | 0,45 | $9{,}898\cdot10^{-15}$ | 7,807 | 7,778 | 104,79 | 9,552 | 19,328 | $2{,}035\cdot10^{3}$ | $6{,}053\cdot10^{3}$ |
| | | | | | 216,84 | 20,271 | 28,316 | $6{,}16\cdot10^{3}$ | $1{,}269\cdot10^{3}$ |

При восстановлении процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ на втором интервале [0,12; 0,27] параметр $\alpha(t)$ принимает в конце указанного интервала значение, которое почти в 10 раз превышает значение этого параметра в начале процесса восстановления измеряемого сигнала, т. е. при $t_1 = 0{,}02$. Как следствие, показания $u(t)$ измерительной системы в конце второго интервала отстают от $X(t)$ уже в ~ 70 раз, а скорость $u'(t)$ отстает от $X'(t)$ уже более, чем в 100 раз. То есть уже на втором интервале восстановления процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ используемое для измерений техническое средство вовсе нельзя считать, в общепринятом смысле, измерительным средством.

Несмотря на указанные особенности ситуации измерений, использование алгоритма инвариантности позволяет, как следует из таблицы 7, восстановить процессы $X(t)$, $\alpha(t)$ как на первом, так и на втором интервалах изменения времени, с весьма высокой точностью.

Что касается интервалов восстановления с помощью алгоритма инвариантности процессов $X(t)$, $\alpha(t)$, соответствующих третьей и четвертой строкам таблицы 7, то, несмотря на достаточно высокую точность восстановления на указанных интервалах, эти результаты практически не имеют отношения к реально возможным условиям измерений и используемым при этом измерительным средствам.

Таким образом, имея в виду поставленный выше вопрос, заключаем, что даже в рассматриваемой исключительной измерительной ситуации алгоритм инвариантности позволяет восстановить искомые процессы $X(t)$, $\alpha(t)$ с высокой точностью вплоть до четвертого интервала [0,52; 0,97] включительно. С момента времени $t \geq t_1 = 0{,}97$ с погрешности восстановления процессов $X(t)$, $\alpha(t)$ становятся заметными, но, как отмечалось выше, в этой временно́й зоне условия измерений не соответствуют реально возможным.

Данные, представленные в таблице 7, в определенной степени свидетельствуют также о проявлении эффекта, являющегося следствием удаления интервала $[t_1,\ t_1 + T0]$ восстановления от начала $t = 0$ процесса измерения и приближения этого интервала к «динамически установившейся стадии» измерения. На этот эффект указывалось при изложении содержания физически одноканального принципа инвариантности в п. 2.2, и состоит он в том, что результатом указанного перемещения интервала восстановления является снижение правомерности использования алгоритма инвариантности и, как следствие, возрастание погрешности восстановления искомых процессов. Как следует из данных таблицы 7, погрешность восстановления сигнала $X(t)$ на четвертом интервале оказывается более чем на четыре порядка выше погрешности восстановления на первом интервале.

Затронутый вопрос будет более подробно рассмотрен в завершении данной главы.

### 3.3.2. ВТОРАЯ СХЕМА РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА ИНВАРИАНТНОСТИ

Вторая схема реализации алгоритма инвариантности основывается на использовании в качестве исходной модели измерительной системы уравнения (1):

$$\frac{du(t)}{dt} + a(t)u(t) = a(t)X(t),$$

которое является частным случаем ($n = 1$) второй общей модели (1.II) ИС с сосредоточенными параметрами.

Вторая схема оказывается сложнее, чем первая, так как теперь необходимо введение обобщенных (промежуточных) неизвестных. Рассмотрение реализации алгоритма инвариантности применительно к модели в форме (1) важно, потому что при выводе уравнений, описывающих поведение ИС, применение известных физических законов часто приводит именно к уравнениям в форме (1), в которую основной физический параметр $a(t)$ входит линейным образом.

Общий подход к построению алгоритма инвариантности для второй общей модели ИС с сосредоточенными параметрами рассматривался в п. 2.3. Теперь, с целью моделирования, конкретизируем построение алгоритма инвариантности применительно к измерительным системам первого порядка, причем, чтобы сохранить единство обозначений в данной главе, несколько отойдем от обозначений, использованных в п. 2.3.

Излагаемые ниже результаты модельной реализации алгоритма инвариантности получены с использованием первого метода построения основной СЛАУ и невязки в интегральной форме.

Итак, пусть оценки $\tilde{a}(t)$, $\tilde{X}(t)$ параметра $\alpha(t)$ и измеряемого сигнала $X(t)$ аппроксимируются алгебраическими многочленами:

$$\tilde{a}(t) = \sum_{i=1}^{n1} \tilde{\alpha}_i t^{i-1}, \quad \tilde{X}(t) = \sum_{j=1}^{n2} \tilde{\beta}_j t^{j-1}. \tag{23}$$

Заметим, что здесь смысл величин $\tilde{\alpha}_i$ уже иной, нежели в первой схеме реализации алгоритма инвариантности.

Так как невязка в интегральной форме, соответствующая модели (1), имеет вид

$$I_{\text{int}}(t) = u(t) - u(t_1) + \int_{t_1}^{t} \tilde{a}(\tau)u(\tau)d\tau - \int_{t_1}^{t} \tilde{a}(\tau)\tilde{X}(\tau)d\tau,$$

то с учетом (23) получим:

$$I_{\text{int}}(t) = u(t) - u(t_1) + \sum_{i=1}^{n1}\left[\int_{t_1}^{t} \tau^{i-1}u(\tau)d\tau\right]\tilde{\alpha}_i -$$

$$\sum_{i=1}^{n1}\sum_{j=1}^{n2}\left[\frac{1}{i+j-1}\left(t^{i+j-1} - t_1^{i+j-1}\right)\right]\tilde{\alpha}_i\tilde{\beta}_j. \tag{24}$$

При построении алгоритма инвариантности для второй общей модели в п. 2.3 отмечалось, что в этом случае алгоритм инвариантности носит нелинейный характер. Чтобы преобразовать этот алгоритм в линейный, необходимо ввести в рассмотрение обобщенные неизвестные $\gamma_1$, $\gamma_2$, ..., $\gamma_q$. Как следует из вида приведенной невязки (24), источниками нелинейностей являются слагаемые, содержащие произведения $\tilde{\alpha}_i \times \tilde{\beta}_j$.

С целью придания наглядности процедуре введения обобщенных (промежуточных) неизвестных, изложим эту процедуру для конкретных степеней $n1$, $n2$ аппроксимирующих многочленов.

Итак, пусть $n1 = 4$, $n2 = 4$, тогда невязка (24) примет вид

$$I_{\text{int}}(t) = u(t) - u(t_1) + \sum_{i=1}^{n1}\left[\int_{t_1}^{t} \tau^{i-1}u(\tau)d\tau\right]\tilde{\alpha}_i - (t - t_1)\,\tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_1 -$$

$$\frac{1}{2}(t^2 - t_1^2)\,(\tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_2 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_1) - \frac{1}{3}(t^3 - t_1^3)\,(\tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_3 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_2 + \tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_1) -$$

$$\frac{1}{4}(t^4 - t_1^4)\,(\tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_4 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_3 + \tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_2 + \tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_1) - \frac{1}{5}(t^5 - t_1^5)\,(\tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_4 + \tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_3 + \tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_2) -$$

$$\frac{1}{6}(t^6 - t_1^6)\,(\tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_4 + \tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_3) - \frac{1}{7}(t^7 - t_1^7)\,\tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_4. \tag{25}$$

Структура обобщенных неизвестных $\gamma_j$ очевидна:

$$\gamma_1 = \tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_1, \quad \gamma_2 = \tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_2 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_1, \quad \gamma_3 = \tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_3 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_2 + \tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_1,$$

$$\gamma_4 = \tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_4 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_3 + \tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_2 + \tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_1, \quad \gamma_5 = \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_4 + \tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_3 + \tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_2,$$

$$\gamma_6 = \tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_4 + \tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_3, \quad \gamma_7 = \tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_4.$$

Обозначим через $n3$ число новых неизвестных $\gamma_j$, оно равно $n3 = n1 + n2 - 1 = 7$. Следовательно, общее число неизвестных, которые теперь подлежат определению, равно $n1 + n3 = 2n1 + n2 - 1$, т. е. на $(n1 - 1)$ больше, чем число исходных неизвестных $\tilde{\alpha}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n1$ и $\tilde{\beta}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n2$.

Теперь невязка принимает вид

$$I_{\text{int}}(t) = u(t) - u(t_1) + \sum_{i=1}^{n1}\left[\int_{t_1}^{t}\tau^{i-1}u(\tau)d\tau\right]\tilde{\alpha}_i - \sum_{j=1}^{n2}\frac{1}{j}(t^j - t_1^j)\,\gamma_j.$$

Основная СЛАУ, полученная с использованием первого метода, приобретает вид

$$\sum_{i=1}^{n1}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}}\tau^{i-1}u(\tau)d\tau\right]\tilde{\alpha}_i - \sum_{j=1}^{n3}\frac{1}{j}(t_{k+1}^j - t_k^j)\,\gamma_j = u(t_k) - u(t_{k+1}), \tag{26}$$

$$k = 1, \ldots, (n1 + n3) = 11,\ t_k = t_1 + T(k-1),\ t_{k+1} = t_1 + Tk,\ T = \frac{T0}{k} = \frac{T0}{11}.$$

Введя единое обозначение неизвестных

$$\tilde{\alpha}_i = X_i,\ i = 1, 2, \ldots, n1,\ \gamma_j = X_{j+n1},\ \ j = 1, 2, \ldots, n3,$$

получим

$$\sum_{i=1}^{n1}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}}\tau^{i-1}u(\tau)d\tau\right]X_i - \sum_{j=1}^{n3}\frac{1}{j}(t_{k+1}^j - t_k^j)\,X_{j+n1} = u(t_k) - u(t_{k+1}).$$

Сделав замену индексов $j + n1 = i$ во второй сумме, имеем

$$\sum_{i=1}^{n1}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}}\tau^{i-1}u(\tau)d\tau\right]X_i - \sum_{i=n1+1}^{n1+n3}\left[\frac{1}{i-n1}(t_{k+1}^{i-n1} - t_k^{i-n1})\right]X_i = u(t_k) - u(t_{k+1}). \tag{27}$$

$$k = 1, 2, \ldots, (n1 + n3) = 11.$$

Запишем эту систему в стандартной форме:

$$\sum_{i=1}^{n1+n3}A_{ki}X_i = B_k,\quad k = 1, 2, \ldots, (n1 + n3) = 11 \tag{28}$$

$$A_{ki} = \begin{cases} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \tau^{i-1} u(\tau) d\tau, & i \le n1 \\ -\dfrac{1}{i-n1}(t_{k+1}^{i-n1} - t_k^{i-n1}), & i > n1 \end{cases}$$

$$B_k = u(t_k) - u(t_{k+1}).$$

После решения системы (28) находим исходные неизвестные постоянные величины $\tilde{\alpha}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n1$ и $\tilde{\beta}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n2$:

$$\tilde{\alpha}_i = X_i,\ i = 1, 2, \ldots, n1,\quad \tilde{\beta}_1 = \frac{\gamma_1}{\tilde{\alpha}_1} = \frac{X_5}{X_1},\ \tilde{\beta}_2 = \frac{X_6 - X_2\tilde{\beta}_1}{X_1},$$

$$\tilde{\beta}_3 = \frac{X_7 - X_2\tilde{\beta}_2 - X_3\tilde{\beta}_1}{X_1},\quad \tilde{\beta}_4 = \frac{X_8 - X_2\tilde{\beta}_3 - X_3\tilde{\beta}_2 - X_4\tilde{\beta}_1}{X_1}.$$

Найденные промежуточные неизвестные $\gamma_5$, $\gamma_6$, $\gamma_7$, т. е. $X_9$, $X_{10}$, $X_{11}$ оказались не использованными, так как в этом не возникло необходимости. Заметим, однако, что без введения этих «лишних» обобщенных неизвестных не удалось бы линеаризовать алгоритм инвариантности.

При изменении величин $n1$, $n2$ вид системы (28) остается неизменным, но изменяются количество исходных неизвестных $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_j$, количество обобщенных неизвестных $\gamma_i$, а также структура взаимосвязи между исходными и промежуточными неизвестными.

Ниже приводятся уравнения, устанавливающие взаимосвязь между исходными и промежуточными неизвестными для различного сочетания значений величин $n1$, $n2$. Выводы всех этих уравнений опускаем, так как они получаются аналогично проиллюстрированному выше случаю ($n1 = 4$, $n2 = 4$):

1. $n1 = 1,\ n2 = 1,\ n3 = 1,\ i = 1, 2,\ k = 1, 2,\ T = T0/2$

$$\tilde{\alpha}_1 = X_1;\quad \tilde{\beta}_1 = X_2/X_1$$

2. $n1 = 2,\ n2 = 1,\ n3 = 2,\ i = 1, \ldots, 4,\ k = 1, \ldots, 4,\ T = T0/4$

$$\tilde{\alpha}_1 = X_1;\quad \tilde{\alpha}_2 = X_2;\quad \tilde{\beta}_1 = X_3/X_1$$

3. $n1 = 1,\ n2 = 2,\ n3 = 2,\ i = 1, \ldots, 3,\ k = 1, \ldots, 3,\ T = T0/3$

$$\tilde{\alpha}_1 = X_1;\quad \tilde{\beta}_1 = X_2/X_1;\quad \tilde{\beta}_2 = X_3/X_1$$

4. $n1 = 2,\ n2 = 2,\ n3 = 3,\ i = 1, \ldots, 5,\ k = 1, \ldots, 5,\ T = T0/5$

$$\tilde{\alpha}_1 = X_1;\quad \tilde{\alpha}_2 = X_2;\quad \tilde{\beta}_1 = X_3/X_1;\quad \tilde{\beta}_2 = (X_4 - X_2 \times \tilde{\beta}_1)/X_1$$

5. $n1 = 3$, $n2 = 1$, $n3 = 3$, $i = 1, \ldots, 6$; $k = 1, \ldots, 6$, $T = T0/6$

$$\tilde{\alpha}_i = X_i; \quad i = 1, \ldots, 3, \quad \tilde{\beta}_1 = X_4/X_1$$

6. $n1 = 3$, $n2 = 2$, $n3 = 4$, $i = 1, \ldots, 7$; $k = 1, \ldots, 7$, $T = T0/7$

$$\tilde{\alpha}_i = X_i; \quad i = 1, \ldots, 3; \quad \tilde{\beta}_1 = X_4/X_1; \quad \tilde{\beta}_2 = (X_5 - X_2 \times \tilde{\beta}_1)/X_1$$

7. $n1 = 2$, $n2 = 3$, $n3 = 4$, $i = 1, \ldots, 6$, $k = 1, \ldots, 6$, $T = T0/6$

$$\tilde{\alpha}_1 = X_1; \quad \tilde{\alpha}_2 = X_2; \quad \tilde{\beta}_1 = X_3/X_1; \quad \tilde{\beta}_2 = (X_4 - X_2 \times \tilde{\beta}_1)/X_1;$$
$$\tilde{\beta}_3 = (X_5 - X_2 \times \tilde{\beta}_2)/X_1$$

8. $n1 = 3$, $n2 = 3$, $n3 = 5$, $i = 1, \ldots, 8$, $k = 1, \ldots, 8$, $T = T0/8$

$$\tilde{\alpha}_i = X_i; \quad i = 1, \ldots, 3; \quad \tilde{\beta}_1 = X_4/X_1; \quad \tilde{\beta}_2 = (X_5 - X_2 \times \tilde{\beta}_1)/X_1;$$
$$\tilde{\beta}_3 = (X_6 - X_2 \times \tilde{\beta}_2 - X_3 \times \tilde{\beta}_1)/X_1$$

9. $n1 = 4$, $n2 = 1$, $n3 = 4$, $i = 1, \ldots, 8$, $k = 1, \ldots, 8$, $T = T0/8$

$$\tilde{\alpha}_i = X_i; \quad i = 1, \ldots, 4; \quad \tilde{\beta}_1 = X_5/X_1$$

10. $n1 = 4$, $n2 = 2$, $n3 = 5$, $i = 1, \ldots, 9$, $k = 1, \ldots, 9$, $T = T0/9$

$$\tilde{\alpha}_i = X_i; \quad i = 1, \ldots, 4; \quad \tilde{\beta}_1 = X_5/X_1; \quad \tilde{\beta}_2 = (X_6 - X_2 \times \tilde{\beta}_1)/X_1$$

11. $n1 = 4$, $n2 = 3$, $n3 = 6$, $i = 1, \ldots, 10$, $k = 1, \ldots, 10$, $T = T0/10$

$$\tilde{\alpha}_i = X_i; \quad i = 1, \ldots, 4; \quad \tilde{\beta}_1 = X_5/X_1; \quad \tilde{\beta}_2 = (X_6 - X_2 \times \tilde{\beta}_1)/X_1;$$
$$\tilde{\beta}_3 = (X_7 - X_2 \times \tilde{\beta}_2 - X_3 \times \tilde{\beta}_1)/X_1$$

12. $n1 = 3$, $n2 = 4$, $n3 = 6$, $i = 1, \ldots, 9$, $k = 1, \ldots, 9$, $T = T0/9$

$$\tilde{\alpha}_i = X_i; \quad i = 1, \ldots, 3; \quad \tilde{\beta}_1 = X_4/X_1; \quad \tilde{\beta}_2 = (X_5 - X_2 \times \tilde{\beta}_1)/X_1;$$
$$\tilde{\beta}_3 = (X_6 - X_2 \times \tilde{\beta}_2 - X_3 \times \tilde{\beta}_1)/X_1; \quad \tilde{\beta}_4 = (X_7 - X_2 \times \tilde{\beta}_3 - X_3 \times \tilde{\beta}_2)/X_1$$

В таблице 8 представлены результаты моделирования процесса восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ и параметра $a(t)$ с использованием второй схемы реализации алгоритма инвариантности. Эти результаты позволяют исследовать качество восстановления указанных характеристик, а также оценить отличие результатов восстановления процессов $X(t)$, $a(t)$, полученных при использовании первой и второй схем реализации алгоритма инвариантности.

В качестве моделей исходных процессов $X(t)$, $a(t)$ взяты алгебраические многочлены:

$$a(t) = \sum_{i=1}^{N1} \alpha_i t^{i-1}, \quad X(t) = \sum_{j=1}^{N2} \beta_j t^{j-1}$$

*Таблица 8.* **Восстановление сигнала $X(t)$ и параметра $\alpha(t)$ по второй схеме реализации алгоритма инвариантности ($t_1 = 0{,}04$; $T0 = 0{,}1$)**

| $N1$, $N2$, $n1$, $n2$ | Косвенные критерии | | | | Прямые критерии | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\rho I_i$ | $\rho I_{i\,\text{от}}$ | $\rho I_u$ | $\rho I_{u\,\text{от}}$ | $\rho a_{\text{от}}$ | $\rho X_{\text{от}}$ |
| $N1 = 3$, $N2 = 4$, $n1 = 3$, $n2 = 4$ | $3{,}192\times10^{-7}$ | $4{,}029\times10^{-5}$ | $3{,}007\times10^{-7}$ | $3{,}795\times10^{-5}$ | $8{,}188\times10^{-5}$ | $1{,}269\times10^{-4}$ |
| $N1 = 4$, $N2 = 3$, $n1 = 4$, $n2 = 3$ | $4{,}551\times10^{-8}$ | $5{,}894\times10^{-6}$ | $4{,}098\times10^{-8}$ | $5{,}307\times10^{-6}$ | $6{,}4\times10^{-5}$ | $6{,}406\times10^{-5}$ |
| $N1 = 4$, $N2 = 4$, $n1 = 4$, $n2 = 4$ | $3{,}184\times10^{-7}$ | $3{,}309\times10^{-5}$ | $2{,}944\times10^{-7}$ | $3{,}059\times10^{-5}$ | $7{,}859\times10^{-4}$ | $7{,}412\times10^{-4}$ |

и рассмотрены три варианта значений пары ($N1$, $N2$):

$$N1 = 3,\ N2 = 4,\ N1 = 4,\ N2 = 3,\ N1 = 4,\ N2 = 4.$$

Численные значения величин $\alpha_i$, $\beta_j$ в многочленах берутся из матриц-столбцов:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 200 \\ 2000 \end{pmatrix}.$$

Так как процедура отбора из результатов моделирования основной группы ($n^*1$, $n^*2$), а затем единственной пары ($\bar{n}^*1$, $\bar{n}^*2$), т. е. выбора из множества возможных решений единственного решения поставленной задачи, во второй схеме реализации алгоритма инвариантности та же, что при реализации алгоритма в первой схеме, то этот этап не приводится в таблице, а приводятся сразу результаты указанного отбора, а именно, варианты реализации алгоритма инвариантности для ($\bar{n}^*1 = 3$, $\bar{n}^*2 = 4$), ($\bar{n}^*1 = 4$, $\bar{n}^*2 = 3$), ($\bar{n}^*1 = 4$, $\bar{n}^*2 = 4$).

Как следует из приведенных в таблице 8 результатов, восстановление процессов $X(t)$, $a(t)$ по их оценкам $\tilde{X}(t)$, $\tilde{a}(t)$ при второй схеме реализации алгоритма инвариантности происходит с высокой точностью.

Далее, сравнение результатов, представленных в таблице 8, с теми, которые были представлены в таблицах 1–3, показывает, что переход от первой ко второй схеме реализации алгоритма инвариантности привел в исследованных случаях к повышению погрешностей восстановления искомых $X(t)$, $a(t)$ на несколько порядков.

Эффект повышения погрешностей при переходе от первой ко второй схеме реализации алгоритма инвариантности объясняется, главным образом, тем, что порядки основных СЛАУ во второй схеме реализации на ($n1 - 1$) выше, чем порядки соответствующих основных СЛАУ в первой схеме реализации. Однако, указанное повышение погрешностей, вообще говоря, не имеет принципиального значения, так как погрешности восстановления искомых $X(t)$, $a(t)$ в обоих случаях пренебрежимо малы.

## 3.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТИПОВЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

В практике измерения неэлектрических величин типовыми сигналами условно принято считать следующие виды измеряемых сигналов:

– сигнал, представляющий собой постоянную во времени величину;

– сигнал, представляющий собой линейно изменяющуюся во времени функцию;

– сигнал, изменяющийся во времени по гармоническому закону;

– сигнал, представляющий собой стационарную случайную функцию времени.

Первые три вида сигналов относятся к детерминированным сигналам, они и будут предметом изучения в данном параграфе.

Роль этих типовых сигналов в теории и практике измерений весьма значительна. Объясняется это тем, что они часто встречаются в практике динамических измерений и тем, что качество измерительных приборов как стационарных измерительных систем часто оценивается по их реакции именно на эти виды сигналов. В связи с этим, в области измерения неэлектрических величин разрабатываются специальные стенды и установки, которые с той или иной степенью приближения генерируют указанные выше сигналы с целью экспериментального исследования динамических свойств измерительных приборов как стационарных измерительных систем. Указанные установки и стенды оказываются, к сожалению, практически бесполезными с точки зрения исследования динамических свойств измерительных приборов, рассматриваемых как нестационарные динамические системы.

При переходе к изучению нестационарных измерительных систем возникает естественный вопрос о том, какие законы изменения параметров ИС можно считать типовыми. Если иметь в виду область измерения неэлектрических величин в целом, то в настоящее время отсутствуют результаты сколько-нибудь общих надежных систематических исследований, позволяющие ответить однозначно на поставленный вопрос. Поэтому в основе проводившихся до сих пор теоретических исследований, ставивших своей целью оценку влияния переменности во времени параметров ИС на точность динамических измерений, лежали лишь предположения о возможных законах изменения параметров ИС. Указанные же предположения основывались, в свою очередь, на анализе особенностей протекания процессов в объектах, характеристики которых подлежат измерению.

Анализ специфики функционирования большого числа технических и технологических объектов, характеристики которых измеряются, приводит к выводу, что в процессе измерения детерминированных сигналов чаще всего проявляются следующие два вида закономерностей детерминированного изменения во времени параметров измерительных приборов. Во-первых, параметры ИС изменяются монотонно между некоторыми начальными и конечными значениями, причем это монотонное изменение может носить как возрастающий, так и убывающий характер. Во-вторых, изменения во времени параметров ИС могут носить периодический характер, что, при определенных условиях и с некоторыми допущениями, в простейшем случае может быть приближенно представлено гармоническим законом.

Если речь идет об измерении сигнала, представляющего собой случайный процесс, в частности, стационарный случайный процесс, то характер изменения параметров ИС в подобных условиях также может быть описан случайной функцией времени, в частности, стационарной случайной функцией. Типичным, причем важнейшим, примером последнего случая является измерение температуры турбулентных потоков жидкостей и газов, т. е. потоков, для которых характерным является случайное изменение во времени как температуры, так и скорости потоков. В этом случае источником переменности параметра $a(t)$ измерительного прибора является переменность во времени коэффициента конвективного теплообмена между термоприемником и потоком, что, в свою очередь, является следствием зависимости коэффициента конвективного теплообмена от скоростей потоков жидкости и газа.

В данном параграфе рассматривается реализация алгоритма инвариантности для трех указанных выше детерминированных типовых сигналов при переменном во времени параметре ИС. Этот выбор объясняется еще и тем, что при восстановлении указанных типовых сигналов с использованием алгоритма инвариантности наглядно проявляются основные особенности функционирования этого алгоритма.

Реализация алгоритма инвариантности для случая, когда измеряемый сигнал $X(t)$ и параметр ИС $a(t)$ представляют собой стационарные случайные процессы, будет рассмотрена в главе 5.

## О распределении частичных интервалов

Прежде чем переходить к изложению непосредственно результатов реализации алгоритма инвариантности для типовых детерминированных сигналов остановимся на одном частном вопросе, касающемся выбора временны́х точек отсчета показаний ИС.

Если длительность всего цикла измерения составляет $\tau$, то очень важно зафиксировать за это время такой объем необходимой исходной информации, касающейся в основном показаний $u(t)$ измерительной системы, который будет достаточным для различных вариантов реализации алгоритма инвариантности – для различного сочетания исходных величин $n1$, $n2$, $T0$, а также различного положения на временно́й оси интервала $[t_1, t_1 + T0]$ восстановления искомых процессов $X(t)$, $a(t)$. Если для процессов моделирования затронутый вопрос не имеет существенного значения, то для практической реализации алгоритма инвариантности в реальных условиях измерения этот вопрос, хотя и носит технический характер, представляется важным. Ситуация значительно усложняется, если реализация алгоритма инвариантности должна осуществляться непосредственно в процессе измерения. Для соответствующей организации процесса измерения в подобных случаях необходимо использование специальной подпрограммы фиксирования, хранения и использования измерительной информации, что, по существу, превращает измерительную систему в измерительно-вычислительную систему.

Вообще говоря, планирование эксперимента в отмеченном смысле может быть чрезвычайно разнообразным, что определяется, естественно, конкретной постановкой задачи измерения, характером объекта и условий измерения.

Не касаясь указанного вопроса сколько-нибудь обстоятельно, приведем одно частное правило распределения частичных интервалов на временно́й оси, которое при заданных $n1$, $n2$ достаточно просто в исполнении.

Допустим, используется первый метод построения основной СЛАУ и первый интервал, на котором реализуется алгоритм инвариантности, есть $[t_1,\ t_1 + T01]$, где $T01$ – длина первого интервала восстановления. Число частичных интервалов $k$, из которых состоит первый интервал, равное числу неизвестных в основной СЛАУ, и длина $T1$ частичного интервала на этом интервале (длина шага дискретности на первом интервале) определяются выражениями:

$$k = n1 + n3,\quad n3 = n1 + n2 - 1,\quad T1 = T01/k.$$

Точками отсчета $t_i$ значений выходного сигнала $u(t_i)$ будут

$$t_i = t_1 + T1(i - 1),\quad i = 1, 2, \ldots, (k + 1).$$

Если, например, $n1 = 4$, $n2 = 4$, т. е. $n3 = 7$, а длина первого интервала равна $T01$, то:

$$k = 11,\quad T1 = T01/11,\quad t_1 = t_1,\quad t_2 = t_1 + T1, \ldots, t_{11} = t_1 + 10T1,$$
$$t_{12} = t_1 + 11T1.$$

Таким образом, на первом интервале реализации алгоритма инвариантности по исходным данным $n1$, $n2$, $T01$ вычисляются необходимые для дальнейшего число частичных интервалов $k$, величина шага дискретности $T1$ и определяются точки отсчета $t_i$ выходного сигнала $u(t_i)$. Переходя ко второму и последующим интервалам, полагаем, что степени аппроксимирующих многочленов для $\widetilde{X}(t)$, $\widetilde{a}_i(t)$ остаются теми же, что на первом интервале, т. е. число неизвестных в СЛАУ, а следовательно, число частичных интервалов $k$ на втором и последующих интервалах остаются теми же, что и на первом интервале.

Второй интервал, на котором будет реализован алгоритм инвариантности, выбирается так, что, во-первых, он включает в себя весь первый интервал, т. е. началом второго интервала так же как первого является точка $t = t_1$, а во-вторых, в отличие от первого интервала, в числе исходных данных для второго интервала используется шаг дискретности $T2$ на этом интервале. При этом длина второго интервала $T02$ определяется уже по исходным данным $n1$, $n2$, $T2$, а именно, $T02 = T2 \times k = T2(n1 + n3)$. Наконец, и это очень важно, шаг дискретности $T2$ на втором интервале следует взять равным длине всего первого интервала, т. е. $T2 = T01$.

Итак, для второго интервала имеем исходные данные: $n1$, $n2$, $T01$, по которым определяются длина второго интервала и точки отсчета:

$$T02 = T2 \times k = T01(n1 + n3),\quad t_i = t_1 + T2(i - 1) = t_1 + T01(i - 1),$$
$$i = 1, \ldots, (k + 1)$$

Таким образом, из значений выходного сигнала, зарегистрированных на первом интервале для реализации на нем алгоритма инвариантности, только два значения $u(t_1)$, $u(t_1 + T01)$, т. е. значения выходного сигнала на границах первого интервала $[t_1,\ t_1 + T01]$, будут необходимы при реализации алгоритма инвариантности на втором интервале, но уже в качестве значений выходного сигнала на границах первого частичного интервала $[t_1,\ t_1 + T2]$ второго интервала $[t_1,\ t_1 + T02]$. Поэтому при реализации алгоритма инвариантности на втором интервале необходимо будет зафиксировать еще значения выходного сигнала $u(t_i)$ только в точках:

$$t_i = t_1 + T2\,(i - 1) = t_1 + T01(i - 1), \quad i = 3, ..., (\ k + 1).$$

Аналогично строится распределение частичных интервалов для последующих интервалов реализации алгоритма инвариантности. Например, начало третьего интервала, так же как начало всех интервалов, определяется точкой $t = t_1$, длина частичного интервала $T3$ на третьем интервале определяется длиной всего второго интервала $T02$, т. е. $T3 = T02$, а длина всего третьего интервала равна $T03 = T3{\times}k = T02{\times}k$. Так как весь второй интервал $[t_1,\ t_1 + T02]$ теперь будет играть роль первого частичного интервала $[t_1,\ t_1 + T3]$ третьего интервала $[t_1,\ t_1 + T03]$, то фиксирование значений выходного сигнала $u(t)$ при реализации алгоритма инвариантности на третьем интервале требуется лишь в точках

$$t_i = t_1 + T3(i - 1) = t_1 + T02(i - 1), \quad i = 3, ..., (\ k + 1).$$

Очевидно, в изложенном правиле распределения частичных интервалов длина каждого интервала, начиная со второго, в $k$ раз больше длины предыдущего интервала.

Особенностью этого правила является то, что, переходя от первого к последующим интервалам восстановления искомых процессов, мы все в большей степени неизбежно включаем в интервал восстановления $[t_1,\ t_1 + T0i]$ отрезки установившейся стадии измерения, а это, очевидно, ведет к повышению погрешности восстановления измеряемого сигнала. Поэтому при использовании описанного правила распределения частичных интервалов в процессе реализации алгоритма инвариантности важно устанавливать тот последний интервал восстановления искомых $X(t)$, $a(t)$, на котором применение алгоритма инвариантности остается правомерным.

## Восстановление первого типового сигнала

Обратимся к результатам моделирования, относящимся к первому типовому сигналу, полагая, что измеряемый сигнал $X(t)$ представляет собой постоянную во времени величину $X(t) = \beta_1 = \text{const}$, а параметр $a(t)$ изменяется по экспоненциальному закону, увеличиваясь в процессе измерения от своего начального значения $a_{\text{н}}$ до конечного значения $a_{\text{к}}$:

$$X(t) = \beta_1, \quad N2 = 1; \quad a(t) = a_{\text{к}} - (a_{\text{к}} - a_{\text{н}})e^{-\mu t}, \quad \mu = \text{const}.$$

Соответствующие результаты приведены в таблице 9, где $p$ – порядковый номер интервала, на котором восстанавливаются искомые $X(t)$, $a(t)$; $TP$ – частичный интервал (шаг дискретности) для $p$-го интервала; $T0P$ – длина всего $p$-го интервала.

*Таблица 9.* **Восстановление первого типового сигнала**

| $P$ | $t_1 \le t \le t_1 + T0P$ | $TP$ | $T0P$ | Косвенные критерии | | Прямые критерии | | $\frac{\text{cond}\,1(A)}{\text{cond}\,2(A)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\rho I_{i\,\text{от}}$ | $\rho I_{n\,\text{от}}$ | $\rho a_{\text{от}}$ | $\rho X_{\text{от}}$ | |
| 1 | $n1 = 3$, $0{,}04 \le t \le 0{,}14$ | 0,017 | 0,1 | $1{,}06 \times 10^{-3}$ | $1{,}03 \times 10^{-3}$ | $5{,}737 \times 10^{-2}$ | $5{,}467 \times 10^{-2}$ | $\frac{2{,}5 \times 10^{12}}{1{,}6 \times 10^{12}}$ |
| 2 | $n1 = 3$, $0{,}04 \le t \le 0{,}64$ | 0,1 | 0,6 | $6{,}639 \times 10^{-3}$ | $5{,}689 \times 10^{-3}$ | $6{,}9 \times 10^{-2}$ | $5{,}749 \times 10^{-2}$ | $\frac{1{,}14 \times 10^{9}}{8{,}73 \times 10^{8}}$ |
| 3 | $n1 = 3$, $0{,}04 \le t \le 3{,}64$ | 0,6 | 3,6 | $1{,}689 \times 10^{-2}$ | $7{,}752 \times 10^{-3}$ | $6{,}244 \times 10^{-2}$ | $1{,}765 \times 10^{-2}$ | $\frac{4{,}67 \times 10^{6}}{3{,}35 \times 10^{6}}$ |
| 4 | $n1 = 4$, $0{,}04 \le t \le 0{,}64$ | 0,075 | 0,6 | $5{,}454 \times 10^{-4}$ | $4{,}667 \times 10^{-4}$ | $3{,}215 \times 10^{-3}$ | $2{,}992 \times 10^{-3}$ | $\frac{1{,}26 \times 10^{13}}{8{,}7 \times 10^{12}}$ |
| 5 | $n1 = 4$, $0{,}04 \le t \le 4{,}84$ | 0,6 | 4,8 | $2{,}63 \times 10^{-3}$ | $9{,}7 \times 10^{-4}$ | $8{,}738 \times 10^{-3}$ | $1{,}714 \times 10^{-3}$ | $\frac{1{,}42 \times 10^{9}}{1{,}08 \times 10^{9}}$ |

В качестве значений постоянных величин, входящих в выражение для $a(t)$, $X(t)$, взяты: $\beta_1 = 100$; $a_{\text{н}} = 1$, $a_{\text{к}} = 2$, $\mu = 0{,}04$. Оценки $\tilde{a}_i(t)$, $\tilde{X}(t)$ искомых $a(t)$, $X(t)$ аппроксимируются алгебраическими многочленами:

$$\tilde{a}(t) = \sum_{i=1}^{n1} \tilde{\alpha}_i t^{i-1}, \quad \tilde{X}(t) = \sum_{j=1}^{n2} \tilde{\beta}_j t^{j-1}.$$

Обратим внимание, в данном случае закон изменения во времени искомого параметра $a(t)$ не совпадает с законом аппроксимации во времени оценки $\tilde{a}_i(t)$: экспоненциальному изменению во времени искомого параметра сопоставляется изменение его оценки по закону, описываемому многочленом степени $n1$.

Как и ранее, выбор из множества возможных решений единственного решения поставленной задачи осуществляется путем выбора из результатов реализации алгоритма инвариантности основной группы пар $(n^*1,\ n^*2)$ с последующим выделением из основной группы единственной пары $(\bar{n}^*1,\ \bar{n}^*2)$ .

При моделировании процесса восстановления искомых $X(t)$, $a(t)$ для первого типового сигнала мы несколько упростили указанный этап выбора единственного решения, а именно, выбрав сразу $\bar{n}^*1 = 3$, изменяли только $n2$ для определения $\bar{n}^*2$. Это позволило почти сразу установить, что $\bar{n}^*2 = N2$, т. е. $\bar{n}^*2 = 1$, поэтому в таблице 9 не приводятся результаты, относящиеся к этапу выбора единственного решения задачи.

Для первого типового сигнала и первого метода построения основной СЛАУ система (28) при $n1 = 3$, $n2 = 1$ принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{6} A_{ki} X_i = B_k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6$$

$$A_{ki} = \begin{cases} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \tau^{i-1} u(\tau)\, d\tau, & i \le n1 = 3 \\ -\dfrac{1}{i - n1}\left(t_{k+1}^{i-n1} - t_k^{i-n1}\right), & i > n1 \end{cases}$$

$$B_k = u(t_k) - u(t_{k+1}).$$

В этом случае имеет место следующая взаимосвязь между исходными $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\alpha}_3$, $\tilde{\beta}_1$ и промежуточными $\gamma_j = X_{j+n1} = X_{3+j}$ неизвестными:

$$\tilde{\alpha}_i = X_i,\ \ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ X_4 = \gamma_1 = \tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_1, \quad X_5 = \gamma_2 = \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_1, \quad X_6 = \gamma_3 = \tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_1.$$

Следовательно, для определения величины $\tilde{\beta}_1$ имеем три уравнения, из которых два последних являются лишними и могут быть отброшены, поэтому $\tilde{\beta}_1 = X_4/\tilde{\alpha}_1 = X_4/X_1$.

В таблице 9 для сравнения приведены также результаты восстановления искомых $X(t)$, $a(t)$ при $n1 = 4$, т. е. при аппроксимации оценки $\tilde{a}(t)$ многочленом третьей степени. Эти результаты содержатся в четвертой и пятой строках таблицы 9, распределение частичных интервалов в которой соответствует описанному выше правилу.

Как следует из значений величин относительных погрешностей, приведенных в таблице 9 в процентах, восстановление первого типового сигнала с исключением влияния параметрических эффектов осуществляется вполне эффективно. Сравнение результатов, представленных во второй и третьей строках таблицы 9, с соответствующими результатами, представленными в четвертой и пятой строках, свидетельствует, что повышение степени аппроксимирующего многочлена для оценки $\widetilde{a}(t)$ позволяет при необходимости добиться дальнейшего уменьшения погрешностей восстановления измеряемого сигнала.

В последнем столбце таблицы 9 приведены числа обусловленности соответствующих основных СЛАУ, которые свидетельствуют о неустойчивости указанных систем. Хотя неустойчивость СЛАУ, получающихся при решении обратных задач динамики систем, – это очень часто встречающееся явление, оно каждый раз требует специального рассмотрения, что будет сделано в следующей главе.

В заключение рассмотрим вопрос, являющийся весьма важным в практике измерений характеристик быстро протекающих процессов, а именно, вопрос коррекции динамических свойств измерительных систем. Суть коррекции динамических характеристик систем, в частности измерительных систем, заключается в том, что к данной инерционной системе присоединяется, так называемая, корректирующая цепь, в результате чего быстродействие объединенной системы (данная система + корректирующая цепь) оказывается существенно выше, чем быстродействие данной системы. Заметим, однако, что коррекция динамических характеристик систем не нашла сколько-нибудь заметного применения в теории и практике динамических измерений неэлектрических величин, так как создание корректирующих цепей требует использования информации, трудно доступной в этой области измерений, а именно, информации о значениях параметров самой ИС в реальных условиях измерений. Что касается нестационарных систем измерения неэлектрических величин, то попытки применения в этом случае традиционных методов коррекции динамических характеристик ИС, по-видимому, заведомо обречены на неудачу.

В свете сказанного вновь обратимся к данным, представленным в таблице 9 для первого типового сигнала. Из данных, содержащихся в первой строке, следует, что, если при восстановлении измеряемого сигнала $X(t)$ ограничиться реализацией алгоритма инвариантности только на первом интервале, то погрешность восстановления сигнала $X(t)$ составляет менее 0,06 %, а длительность $T01$ процесса восстановления – 0,1 с.

В то же время непосредственные вычисления показывают, что без использования алгоритма инвариантности относительное отклонение показаний $u(t)$ измерительной системы от измеряемого сигнала $X(t)$ достигает величины ~0,06 % при $t \approx 4$ с. То есть в данном конкретном режиме измерений применение алгоритма инвариантности приводит, условно говоря, к ~ 40-кратному увеличению быстродействия процесса получения искомой измерительной информации. Понятно, что, уменьшая длину $T01$ первого интервала реализации алгоритма инвариантности, можно получить дальнейшее увеличение быстродействия процесса получения измерительной информации. Что касается времени, затрачиваемого на вычисления при реализации алгоритма инвариантности, то оно, как правило, пренебрежимо мало.

В изложенном состоит свойство физически одноканального принципа инвариантности, которое по существу является коррекцией динамических характеристик данной инерционной измерительной системы.

## Восстановление второго типового сигнала

Ниже излагаются результаты моделирования процесса восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ с использованием алгоритма инвариантности применительно ко второму типовому сигналу, т. е. сигналу, описываемому во времени линейным законом:

$$N2 = 2; \quad X(t) = \beta_1 + \beta_2 t.$$

При этом закон изменения во времени параметра $a(t)$ также принимается линейным:

$$N1 = 2; \quad a(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t.$$

Указанные результаты представлены в таблице 10 с соответствующим Приложением, в которых для постоянных величин $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ взяты значения:

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \beta_1 = 2, \quad \beta_2 = 40.$$

В Приложении к таблице 10, относящемуся к последней (пятой) строке этой таблицы, приведены для сравнения абсолютные значения показаний $u(t)$ измерительной системы, восстанавливаемого сигнала $X(t)$, а также оценки $\tilde{X}(t)$, полученной в результате реализации алгоритма инвариантности.

Оценки $\tilde{a}(t)$, $\tilde{X}(t)$ аппроксимируются теми же алгебраическими многочленами, что в случае первого типового сигнала.

*Таблица 10.* **Восстановление второго типового сигнала**

| $P$ | $t_1 \le t \le t_1 + T0P$ | $TP$ | $T0P$ | Косвенные критерии | | Прямые критерии | | $\frac{\text{cond 1}(A)}{\text{cond 2}(A)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\rho I_{i\,\text{от}}$ | $\rho I_{u\,\text{от}}$ | $\rho a_{\text{от}}$ | $\rho X_{\text{от}}$ | |
| 1 | $0{,}04 \le t \le 0{,}14$ | 0,02 | 0,1 | $4{,}277 \times 10^{-9}$ | $4{,}148 \times 10^{-9}$ | $4{,}209 \times 10^{-8}$ | $4{,}614 \times 10^{-8}$ | $\frac{8{,}83 \times 10^{6}}{5{,}1 \times 10^{6}}$ |
| 2 | $0{,}04 \le t \le 0{,}54$ | 0,1 | 0,5 | $1{,}409 \times 10^{-10}$ | $1{,}183 \times 10^{-10}$ | $2{,}089 \times 10^{-10}$ | $2{,}952 \times 10^{-10}$ | $\frac{8{,}65 \times 10^{4}}{7{,}1 \times 10^{4}}$ |
| 3 | $0{,}04 \le t \le 2{,}54$ | 0,5 | 2,5 | $1{,}62 \times 10^{-12}$ | $4{,}423 \times 10^{-12}$ | $2{,}5 \times 10^{-12}$ | $4{,}9 \times 10^{-12}$ | $\frac{4{,}27 \times 10^{4}}{2{,}8 \times 10^{4}}$ |
| 4 | $0{,}04 \le t \le 12{,}54$ | 2,5 | 12,5 | $4{,}135 \times 10^{-6}$ | $7{,}215 \times 10^{-8}$ | $3{,}11 \times 10^{-8}$ | $7{,}156 \times 10^{-8}$ | $\frac{5{,}532 \times 10^{6}}{2{,}8 \times 10^{6}}$ |
| 5 | $0{,}04 \le t \le 62{,}54$ | 12,5 | 62,5 | 0,497 | $3{,}752 \times 10^{-4}$ | $1{,}9 \times 10^{-4}$ | $3{,}75 \times 10^{-4}$ | $\frac{6{,}247 \times 10^{9}}{3{,}27 \times 10^{9}}$ |

*Приложение к таблице 10* ($p = 5$, $T05 = 62{,}5$)

| $t_i$ | $a(t)$ | $\tilde{a}(t)$ | $X(t)$ | $\tilde{X}(t)$ | $u(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,04 | 1,08 | 1,08 | 3,6 | 3,6 | 0,115 |
| 12,54 | 26,08 | 26,08 | 503,6 | 503,598 | 502,062 |
| 25,04 | 51,08 | 51,08 | 1003,6 | 1003,596 | 1002,816 |
| 37,54 | 76,08 | 76,08 | 1503,6 | 1503,594 | 1503,074 |
| 50,04 | 101,08 | 101,08 | 2003,6 | 2003,592 | 2003,204 |
| 62,54 | 126,08 | 126,08 | 2503,6 | 2503,591 | 2503,283 |

Выбор из множества возможных решений единственного решения осуществляется так же, как и ранее: из результатов реализации алгоритма инвариантности для различного сочетания величин $n1$, $n2$ выбирается основная группа пар ($n^{*}1$, $n^{*}2$) с последующим выделением из основной группы единственной пары ($\bar{n}^{*}1$, $\bar{n}^{*}2$). Поэтому в таблице 10 процесс указанного выбора единственного решения не приводится. Распределение частичных интервалов при восстановлении второго типового сигнала, так же как и при восстановлении первого типового сигнала, соответствует описанному выше правилу.

Выбор единственного решения показывает, что $\bar{n}^{*}1 = N1 = 2$, $\bar{n}^{*}2 = N2 = 2$, а основная СЛАУ при $n1 = 2$, $n2 = 2$, в соответствии с (28), имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{5} A_{ki} X_i = B_k, \quad k = 1, \ldots, 5$$

$$A_{ki} = \begin{cases} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \tau^{i-1} u(\tau) d\tau, & i \le n_1 = 2 \\ -\dfrac{1}{i-n_1}\left(t_{k+1}^{i-n_1} - t_k^{i-n_1}\right), & i > n_1 \end{cases}$$

$$B_k = u(t_k) - u(t_{k+1}).$$

Взаимосвязь между исходными $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2$ и промежуточными $\gamma_j = X_{n1+j} = X_{2+j}$ неизвестными в этом случае имеет вид:

$$\tilde{\alpha}_1 = X_1, \quad \tilde{\alpha}_2 = X_2, \quad \gamma_1 = \tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_1 \Rightarrow \tilde{\beta}_1 = X_3/X_1, \quad \gamma_2 = \tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_2 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_1, \quad \gamma_3 = \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_2.$$

Как видим, для определения остающейся неизвестной величины $\tilde{\beta}_2$ имеем два уравнения. Второе уравнение, как лишнее, можно отбросить, поэтому:

$$\tilde{\beta}_2 = \frac{X_4 - X_2 \frac{X_3}{X_1}}{X_1}.$$

Заметим, кстати, что два приведенных уравнения для определения величины $\tilde{\beta}_2$ во всем диапазоне восстановления сигнала $X(t)$ дают результаты, совпадающие с очень высокой точностью.

Структура таблицы 10 и смысл приведенных в ней величин совпадают с тем, что имело место для таблицы 9, относящейся к первому типовому сигналу.

Как следует из приведенных в таблице 10 данных, во всем исследованном диапазоне $0{,}04 \le t \le 62{,}54$ восстановления второго типового сигнала алгоритм инвариантности, исключающий влияние параметрических эффектов, обладает очень высокой точностью.

Результаты определения оценки второго типового сигнала $\tilde{X}(t)$ на первом интервале реализации алгоритма инвариантности позволяют, так же как в случае первого типового сигнала, существенно повысить быстродействие процесса получения искомой измерительной информации. Действительно, уже на первом интервале [0,04 ≤

$t \leq 0{,}14]$ алгоритм инвариантности позволяет восстановить искомые с погрешностью $\sim 5 \times 10^{-8}$ %, тогда как показания $u(t)$ измерительной системы, по которым обычно судят о величине измеряемого сигнала, как следует из Приложения, даже при $t = 62{,}54$ с все еще отстают от соответствующего значения измеряемого сигнала $X(t)$ на $0{,}012$ %. Сказанное свидетельствует, что использование алгоритма инвариантности приводит к $\sim 1000$-кратному увеличению быстродействия процесса получения искомой измерительной информации.

В заключение еще раз обратимся к вопросу появления на участках монотонного изменения измеряемого сигнала, так называемой, «динамически установившейся стадии» измерения. В п. 2.2 при изложении содержания физически одноканального принципа инвариантности указывалось, что использование этого принципа на интервалах, целиком расположенных в зоне динамически установившегося состояния, является неправомерным, так как в указанной зоне уравнение, описывающее динамические свойства ИС, отличается от исходной модели «вход–выход» данной ИС, по которой строится алгоритм инвариантности. Именно с целью преодоления указанной трудности и предложено описанное выше правило распределения частичных интервалов. В соответствии с этим правилом, для любого интервала восстановления $[t_1,$ $t_1 + T0i]$ измеряемого сигнала первый частичный интервал охватывает начальную переходную стадию измерения, являющуюся наиболее информативной с точки зрения проявления динамических свойств ИС.

Восстановление второго типового сигнала с использованием алгоритма инвариантности является наглядной иллюстрацией как появления затронутой проблемы, так и ее преодоления. Как следует из данных, содержащихся в Приложении к таблице 10, при $t \geq$ $\geq 12{,}54$ относительное отклонение между показаниями ИС и измеряемым сигналом $X(t)$ остается практически неизменным во времени и составляет $< 0{,}3$ %, что и означает «вхождение» ИС в «динамически установившуюся стадию» измерения. Заметим, что для результатов реализации алгоритма инвариантности, относящихся к последней строке таблицы 10, длительность отрезка $[12{,}54;\ 62{,}54]$ установившейся стадии измерения, входящего в общий интервал восстановления $[0{,}04;\ 62{,}54]$, в $\sim 4$ раза больше длительности переходного процесса. Тем не менее, принятое правило распределения частичных интервалов продолжает обеспечивать эффективность алгоритма инвариантности, а следовательно, правомерность применения одноканального принципа инвариантности.

## Восстановление третьего типового сигнала

Общеизвестна исключительная роль гармонических сигналов в теории и практике систем и, в частности, измерительных систем. В связи с этим, а также с тем, что реализация алгоритма инвариантности при восстановлении этих сигналов имеет некоторые отличительные черты, по сравнению с предыдущими двумя видами сигналов, результаты, относящиеся к восстановлению третьего типового сигнала, рассматриваются наиболее подробно.

Пусть искомые измеряемый сигнал $X(t)$ и параметр $a(t)$ измерительной системы описываются выражениями:

$$X(t) = X_0 + A_x \sin wt, \quad a(t) = a_0 + A_a \sin wt, \tag{29}$$

где $X_0$, $A_x$, $a_0$, $A_a$, $w$ – неизвестные постоянные величины.

В этом случае оценки $\tilde{X}(t)$, $\tilde{a}(t)$ искомых $X(t)$, $a(t)$ также естественно искать в виде гармонических функций:

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}_0 + \tilde{A}_x \sin \omega t, \quad \tilde{a}(t) = \tilde{a}_0 + \tilde{A}_a \sin \omega t, \tag{30}$$

где $\tilde{X}_0$, $\tilde{A}_x$, $\tilde{a}_0$, $\tilde{A}_a$, $\omega$ – неизвестные оценки средних значений, амплитуд и частоты измеряемого сигнала $X(t)$ и параметр $a(t)$ соответственно.

Невязка в интегральной форме в этом случае примет вид

$$I_{\text{int}}(t) = u(t) - u(t_1) + \int_{t_1}^{t} \left[ \tilde{a}_0 + \tilde{A}_a \sin \omega\tau \right] u(\tau) d\tau -$$

$$\int_{t_1}^{t} \left[ \tilde{a}_0 + \tilde{A}_a \sin \omega\tau \right] \times \left[ \tilde{X}_0 + \tilde{A}_x \sin \omega\tau \right] d\tau.$$

После выполнения возможного интегрирования, имеем

$$I_{\text{int}}(t) = u(t) - u(t_1) + \left[ \int_{t_1}^{t} u(\tau) d\tau \right] \tilde{a}_0 + \left[ \int_{t_1}^{t} u(\tau) \sin \omega\tau \, d\tau \right] \tilde{A}_a -$$

$$[t - t_1]\, \tilde{a}_0 \tilde{X}_0 + \left[ \frac{1}{\omega} (\cos \omega t - \cos \omega t_1) \right] (\tilde{a}_0 \tilde{A}_x + \tilde{A}_a \tilde{X}_0) -$$

$$\frac{1}{2}\left[(t-t_1)-\frac{1}{2\omega}(\sin 2\omega t-\sin 2\omega t_1)\right]\tilde{A}_a\tilde{A}_x. \qquad (31)$$

Эта невязка имеет нелинейный характер относительно неизвестных оценок $\tilde{a}_0$, $\tilde{A}_a$, $\tilde{X}_0$, $\tilde{A}_x$. Для ее линеаризации относительно этих неизвестных необходимо ввести в рассмотрение обобщенные (промежуточные) неизвестные. После введения обобщенных неизвестных и единого обозначения для всех неизвестных, имеем:

$$X_1=\tilde{a}_0,\quad X_2=\tilde{A}_a,\quad X_3=\tilde{a}_0\tilde{X}_0,\quad X_4=\tilde{a}_0\tilde{A}_x+\tilde{A}_a\tilde{X}_0,\quad X_5=\tilde{A}_a\tilde{A}_x.$$

Как и ранее обозначим через $n1$, $n2$ число исходных неизвестных постоянных величин, входящих в оценки параметра $\tilde{a}(t)$ и сигнала $\tilde{X}(t)$ соответственно. Тогда $n1 = 2$ (это $\tilde{a}_0$, $\tilde{A}_a$), $n2 = 2$ (это $\tilde{X}_0$, $\tilde{A}_x$). Пусть $n3$ – число обобщенных неизвестных, введенных с целью линеаризации невязки, тогда $n3 = n1 + n2 - 1 = 3$. Общее число неизвестных равно $n1 + n3 = 5$, т. е. на $(n1 - 1) = 1$ больше, чем исходное число неизвестных $(n1 + n2) = 4$.

В сформулированной постановке задачи восстановления третьего типового сигнала величины $n1$, $n2$ задаются сразу. В силу указанной особенности рассматриваемого случая теперь этап выбора из множества возможных решений единственного решения поставленной задачи будет заключаться в следующем. Вначале по значениям косвенных критериев, соответствующим различным значениям частоты $\omega$, из результатов реализаций алгоритма инвариантности осуществляется выбор основной группы $(\omega^*)$ значений частоты $\omega$ колебаний оценок $\tilde{a}(t)$, $\tilde{X}(t)$. Затем из основной группы частот $(\omega^*)$ выделяется единственное значение $\bar{\omega}^*$ частоты, которому соответствуют наименьшие значения косвенных критериев. Выбранное значение $\bar{\omega}^*$ частоты принимается за оценку искомой частоты $w$, а найденные при этом величины $\tilde{a}_0$, $\tilde{A}_a$, $\tilde{X}_0$, $\tilde{A}_x$, соответствующие частоте $\bar{\omega}^*$, принимаются в качестве оценок исходных неизвестных величин $a_0$, $A_a$, $X_0$, $A_x$.

Возникает вопрос: в каком диапазоне изменения частоты $\omega$ необходимо искать единственную частоту $\bar{\omega}^*$, а следовательно, и единственное решение поставленной задачи?

Обычно диапазон изменения частоты $\omega$, причем достаточно узкий, удается выбрать, исходя из того, что предполагаемая частота $w$ колебаний измеряемого сигнала $X(t)$ обуславливается, как правило, некоторой известной особенностью протекания основного процесса в исследуемом объекте. Если указанная информация об объекте исследования отсутствует, то можно воспользоваться одним из важных выводов анализа динамики данной нестационарной ИС, сформулированным в п. 1.4. А именно, если входной сигнал $X(t)$ и параметр $a(t)$ изменяются по гармоническому закону, то монохроматическое колебание сигнала $X(t)$ на входе ИС разворачивается в спектр колебаний на выходе ИС, основная частота в котором совпадает с частотой $w$ входного сигнала, остальные же частоты спектра колебаний на выходе ИС оказываются кратными частоте $w$. Следовательно, анализ спектра выходного сигнала $u(t)$ позволяет по значению величины основной частоты спектра установить некоторый диапазон изменения величины ω, в котором следует искать единственное значение $\bar{\omega}^*$ частоты, а следовательно, единственное решение поставленной задачи.

Основная СЛАУ алгоритма инвариантности для третьего типового сигнала, построенная по первому методу с учетом вида невязки (31), примет вид

$$\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} u(\tau)d\tau\right] X_1 + \left[\int_{t_1}^{t_{k+1}} u(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau\right] X_2 -$$

$$[t_{k+1} - t_k]\, X_3 + \left[\frac{1}{\omega}(\cos\omega t_{k+1} - \cos\omega t_k)\right] X_4 -$$

$$\frac{1}{2}\left[(t_{k+1} - t_k) - \frac{1}{2\omega}(\sin 2\omega t_{k+1} - \sin 2\omega t_k)\right] X_5 = u(t_k) - u(t_{k+1}), \tag{32}$$

$$k = 1, ..., 5,\ \ t_k = t_1 + T(k-1),\quad t_{k+1} = t_1 + Tk,\ \ T = \frac{T0}{n1 + n3} = \frac{T0}{5}.$$

где $T0$ – длина интервала восстановления искомых $a(t)$, $X(t)$.

Введем следующие обозначения для составляющих этой системы:

$$A_{k1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(\tau)d\tau;\ \ A_{k2} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(\tau)\sin\omega\tau d\tau;\ \ A_{k3} = -(t_{k+1} - t_k) = -T$$

$$A_{k4} = \frac{1}{\omega}(\cos\omega t_{k+1} - \cos\omega t_k);$$

$$A_{k5} = -\frac{1}{2}\left[(t_{k+1} - t_k) - \frac{1}{2\omega}(\sin 2\omega t_{k+1} - \sin 2\omega t_k)\right]$$

$$B_k = u(t_k) - u(t_{k+1}),\quad k = 1, 2, ..., (n1 + n3) = 5.$$

Тогда основная СЛАУ запишется в стандартной форме:

$$\sum_{i=1}^{n_1+n_3} A_{ki} X_i = B_k, \ k = 1, \ldots, 5.$$

Решив эту систему и найдя $X_i$, $i = 1, \ldots, 5$, затем определяем искомые оценки $\tilde{a}_l(t)$, $\tilde{X}(t)$, учитывая, что:

$$\tilde{a}_0 = X_1, \quad \tilde{A}_a = X_2, \quad \tilde{X}_0 = X_3/X_1, \quad \tilde{A}_x = (X_4 - \tilde{A}_a\tilde{X}_0)/\tilde{a}_0.$$

При этом значение пятой найденной неизвестной величина $X_5$ остается не использованным. Понятно, если для определения $\tilde{A}_x$ использовать величину $X_5$, то получим тот же результат, что и в предыдущем случае (отличие находится на уровне погрешности вычислений).

В таблице 11 приведены результаты моделирования процесса восстановления третьего типового сигнала с использованием алгоритма инвариантности для интервала восстановления [0,04; 0,14]. При этом в качестве значений исходных постоянных величин, входящих в выражения $a(t)$, $X(t)$, взяты:

$$a_0 = 10, \quad A_a = 8, \quad X_0 = 100, \quad A_x = 40;$$

циклическая частота $w = 2\pi F = 6{,}283185$, что соответствует частоте $F = 1$ Гц.

В Приложении к таблице 11 приведены результаты реализации алгоритма инвариантности при восстановлении искомых $a(t)$, $X(t)$ для одного конкретного значения частоты ω, что позволяет сравнить абсолютные значения искомых и полученных для них оценок.

*Таблица 11.* **Восстановление третьего типового сигнала ($t_1 = 0{,}04$; $T0 = 0{,}1$)**

| ω | Косвенные критерии | | Прямые критерии | |
|---|---|---|---|---|
| | $\rho I_{i\,\text{от}}$ | $\rho I_{u\,\text{от}}$ | $\rho a_{\text{от}}$ | $\rho X_{\text{от}}$ |
| 6,27637 | 0,213 | 0,151 | 0,474 | 0,168 |
| 6,282 | $3{,}715\cdot10^{-2}$ | $2{,}63\cdot10^{-2}$ | $8{,}219\cdot10^{-2}$ | $2{,}933\cdot10^{-2}$ |
| 6,283 | $5{,}812\cdot10^{-3}$ | $4{,}114\cdot10^{-3}$ | $1{,}284\cdot10^{-2}$ | $4{,}59\cdot10^{-3}$ |
| 6,283065 | $3{,}773\cdot10^{-3}$ | $2{,}671\cdot10^{-3}$ | $8{,}334\cdot10^{-3}$ | $2{,}98\cdot10^{-3}$ |
| 6,283125 | $1{,}892\cdot10^{-3}$ | $1{,}339\cdot10^{-3}$ | $4{,}179\cdot10^{-3}$ | $1{,}494\cdot10^{-3}$ |
| 6,283185 | $1{,}114\cdot10^{-10}$ | $7{,}885\cdot10^{-11}$ | $4{,}072\cdot10^{-10}$ | $9{,}91\cdot10^{-11}$ |
| 6,283245 | $1{,}872\cdot10^{-3}$ | $1{,}326\cdot10^{-3}$ | $4{,}136\cdot10^{-3}$ | $1{,}479\cdot10^{-3}$ |
| 6,28365 | $1{,}458\cdot10^{-2}$ | $1{,}032\cdot10^{-2}$ | $3{,}219\cdot10^{-2}$ | $1{,}152\cdot10^{-2}$ |
| 6,28437 | $3{,}719\cdot10^{-2}$ | $2{,}633\cdot10^{-2}$ | $8{,}204\cdot10^{-2}$ | $2{,}939\cdot10^{-2}$ |
| 6,290 | 0,2146 | 0,1522 | 0,470 | 0,170 |

*Приложение к таблице 11*

$\omega = 6{,}29$; $\tilde{a}_0 = 9{,}930473$; $\tilde{A}_a = 7{,}997586$; $\tilde{X}_0 = 100{,}701184$; $\tilde{A}_x = 38{,}484971$

| $t$ | $a(t)$ | $\tilde{a}(t)$ | $X(t)$ | $\tilde{X}(t)$ | $u(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,04 | 11,99 | 11,922 | 109,948 | 110,282 | 37,559 |
| 0,06 | 12,945 | 12,878 | 114,725 | 114,883 | 54,097 |
| 0,08 | 13,854 | 13,787 | 119,27 | 119,26 | 68,924 |
| 0,1 | 14,702 | 14,636 | 123,511 | 123,343 | 81,999 |
| 0,12 | 15,476 | 15,41 | 127,382 | 127,069 | 93,36 |
| 0,14 | 16,164 | 16,098 | 130,821 | 130,378 | 103,096 |

Как следует из данных, приведенных в таблице 11, величины косвенных критериев настолько чувствительны к изменению частоты, что как выбор основной группы ($\omega^*$) частот, так и выделения из этой группы единственной частоты ($\bar{\omega}^*$) оказываются очень простыми. Действительно, так как значение косвенного критерия ($\rho I_{i\ \text{от}}$ или $\rho I_{u\ \text{от}}$) для некоторой частоты оказывается минимум на семь порядков меньше, чем значения этого критерия для всех остальных частот, то, очевидно, что частоту, которая соответствует этому минимальному значению косвенного критерия, и следует взять в качестве единственной искомой частоты $\bar{\omega}^*$. Из данных, представленных в таблице, следует, что указанной частотой является $\bar{\omega}^* = 6{,}283185$, которая практически совпадает с исходной постоянной $w$, а соответствующие погрешности восстановления процессов $a(t)$, $X(t)$ пренебрежимо малы.

В Приложении к таблице 11 специально приведены данные, относящиеся к частоте $\omega = 6{,}29$, являющейся одной из границ интервала изменения частоты $\omega$, т. е. данные, представляющие одну из худших реализаций алгоритма инвариантности. Как видим, даже для этого случая оценка $\tilde{X}(t)$ измеряемого сигнала, полученная с использованием алгоритма инвариантности, вполне удовлетворительно согласуется с самим измеряемым сигналом $X(t)$, тогда как показания $u(t)$ измерительной системы очень далеки от истинного характера изменения измеряемого сигнала.

Таким образом, изложенное выше позволяет заключить, что восстановление третьего типового сигнала с использованием алгоритма инвариантности, исключающего влияние параметрических эффектов, осуществляется с весьма высокой точностью.

При периодическом изменении входного сигнала $X(t)$ показания $u(t)$ нестационарной измерительной системы имеют, хотя и более сложный, но также периодический характер. Поэтому для третьего типового сигнала отсутствует стадия монотонного приближения показаний ИС к измеряемому сигналу, а сама измерительная система все время находится в состоянии полного и активного проявления своих динамических свойств. Другими словами, в отличие от первого и второго типовых сигналов, для третьего типового сигнала перестает быть актуальной проблема «вхождения» ИС в такую «динамически установившуюся стадию» измерения, в которой динамические свойства ИС проявляются не в полной мере, так как на указанной стадии измерения динамические свойства ИС описываются более простыми уравнениями, чем исходная модель «вход–выход» измерительной системы.

Изложенное позволяет считать, что для третьего типового сигнала применение сформулированного ранее правила распределения частичных интервалов возможно, но не обязательно.

Для третьего типового сигнала интервал $[t_1,\ t_1 + T0]$ восстановления искомых процессов $a(t)$, $X(t)$ может включать начальную, т. е. переходную, стадию измерения (табл. 11), но может и не включать. Более того, интервал восстановления $[t_1,\ t_1 + T0]$ может располагаться, вообще говоря, на любом участке временно́й оси, что не должно существенно сказываться на качестве восстановления искомых процессов. Отмеченные факты существенно упрощают процесс восстановления третьего типового сигнала с использованием алгоритма инвариантности.

В таблице 12 приведены результаты моделирования процесса восстановления третьего типового сигнала с использованием алгоритма инвариантности, в которых интервалы восстановления $[t_1,\ t_1 + T0P]$ не содержат начальную стадию измерения и расположены на различных участках временно́й оси.

*Таблица 12.* **Восстановление третьего типового сигнала при различном расположении интервала восстановления**

| $P$ | $t_1 \le t \le t_1 + T0P$ | $TP$ | $T0P$ | Косвенные критерии | | Прямые критерии | | $\dfrac{\text{cond } 1(A)}{\text{cond } 2(A)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\rho I_{i\,\text{от}}$ | $\rho I_{u\,\text{от}}$ | $\rho a_{\text{от}}$ | $\rho X_{\text{от}}$ | |
| 1 | $3 \le t \le 3{,}5$ | 0,1 | 0,5 | $1{,}093 \times 10^{-4}$ | $2{,}534 \times 10^{-5}$ | $1{,}575 \times 10^{-5}$ | $2{,}651 \times 10^{-5}$ | $\dfrac{1{,}4 \times 10^4}{7{,}7 \times 10^3}$ |
| 2 | $10 \le t \le 10{,}5$ | 0,1 | 0,5 | $5{,}729 \times 10^{-5}$ | $5{,}875 \times 10^{-6}$ | $6{,}889 \times 10^{-6}$ | $6{,}474 \times 10^{-6}$ | $\dfrac{1{,}4 \times 10^4}{7{,}7 \times 10^3}$ |
| 3 | $15 \le t \le 15{,}5$ | 0,1 | 0,5 | $1{,}901 \times 10^{-3}$ | $4{,}96 \times 10^{-4}$ | $6{,}327 \times 10^{-4}$ | $5{,}157 \times 10^{-4}$ | $\dfrac{1{,}4 \times 10^4}{7{,}7 \times 10^3}$ |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | $24 \le t \le 24{,}5$ | 0,1 | 0,5 | $1{,}482 \times 10^{-3}$ | $3{,}128 \times 10^{-4}$ | $6{,}904 \times 10^{-5}$ | $3{,}117 \times 10^{-4}$ | $\frac{1{,}4 \times 10^{4}}{7{,}7 \times 10^{3}}$ |
| 5 | $60 \le t \le 60{,}5$ | 0,1 | 0,5 | $5{,}956 \times 10^{-4}$ | $2{,}258 \times 10^{-5}$ | $5{,}033 \times 10^{-6}$ | $2{,}249 \times 10^{-5}$ | $\frac{1{,}4 \times 10^{4}}{7{,}7 \times 10^{3}}$ |

Этап выбора из множества возможных решений единственного решения поставленной задачи, т. е. этап определения единственной частоты, в таблице 12 не приводится, так как он отражен уже в таблице 11; приведенные в таблице 12 данные относятся к частоте $\bar{\omega}^* = 6{,}283185$.

Как следует из приведенных результатов моделирования, восстановление искомых $a(t)$, $X(t)$ на каждом из интервалов $[t_1,\ t_1 + TP]$ диапазона исследования [3; 60,5] осуществляется с высокой точностью, что подтверждает отмеченные выше особенности восстановления третьего типового сигнала. Что касается наблюдаемых по данным таблицы 12 различий в значениях погрешностей восстановления искомых при переходе от одного интервала к другому, то эти различия не носят какого-либо закономерного характера, и в силу малости ими можно пренебречь.

Заметим, что при некотором соотношении между периодом колебаний искомых и длительностью ТР частичного интервала матрица основной СЛАУ для третьего типового сигнала может оказаться сингулярной. Понятно, что указанные случаи следует исключать из рассмотрения как неприемлемые.

Изложенным завершим анализ процесса моделирования, относящегося к третьему типовому сигналу. В более общем случае периодических колебаний измеряемого сигнала $X(t)$ и параметра $a(t)$ алгоритм инвариантности можно строить на основе аппроксимации соответствующих оценок тригонометрическими многочленами.

Приведенные в данной главе результаты модельной реализации физически одноканального принципа инвариантности позволяют сделать следующее заключение.

Физически одноканальный принцип инвариантности, содержательно представляющий собой постановку и решение расширенной задачи динамических измерений, является достаточно эффективным средством исключения влияния параметрических эффектов на точность динамических измерений в условиях детерминированного изменения во времени измеряемого сигнала и параметров измерительной системы.

Содержание этого принципа, наряду с решением основной задачи – исключением влияния параметрических эффектов, позволяет также решать одновременно, непосредственно в процессе измерения, и задачу параметрической идентификации линейной нестационарной измерительной системы.

Кроме того, реализация одноканального принципа инвариантности сопровождается коррекцией динамических характеристик измерительной системы, что ведет к повышению быстродействия процесса получения измерительной информации на несколько порядков.

Некоторые обобщения полученных до сих пор результатов в направлении расширения класса как измерительных систем, так и измеряемых сигналов, приводятся в последующих главах.

ГЛАВА 4

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРИНЦИПА ИНВАРИАНТНОСТИ

## 4.1. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ АЛГОРИТМОВ ИНВАРИАНТНОСТИ

Как и следовало ожидать при решении обратной задачи измерения, основные СЛАУ для алгоритма инвариантности, независимо от использованных методов их составления, оказываются существенно неустойчивыми, а следовательно, и алгоритм восстановления искомых сигнала $X(t)$ и параметра $a(t)$ оказывается неустойчивым.

Попытки повысить устойчивость алгоритма инвариантности путем непосредственного использования общих методов регуляризации – метод регуляризации А. Н. Тихонова [13], в том числе с применением расширенных матриц [7], метод регуляризации, основанный на сингулярном разложении [14], не всегда приводят к приемлемому результату: иногда требуемое повышение устойчивости достигается только при неприемлемом повышении погрешностей восстановления сигнала $X(t)$ и параметра $a(t)$.

В связи со сказанным, наряду с использованием указанных общих методов регуляризации исследователи часто обращаются также к некоторым частным приемам повышения устойчивости при решении обратных задач. Эти частные приемы связаны, как правило, с конкретным содержанием решаемой задачи или с особенностями модели исследуемого объекта.

Добиться существенного повышения устойчивости алгоритма инвариантности с сохранением вполне приемлемых погрешностей восстановления сигнала $X(t)$ и параметра $a(t)$ удается приемом, суть которого заключается в использовании, наряду с невязкой, обозначаемой в этом параграфе $R(t)$, производных некоторого порядка этой невязки. В результате оказывается возможным перейти от исходной основной СЛАУ АХ = В алгоритма инвариантности к совокупности некоторой СЛАУ более низкого порядка АОХ = В0 и нескольких независимых уравнений.

Изложим конкретное содержание указанного приема применительно к трем рассмотренным ранее типовым сигналам и ко второму методу составления основной СЛАУ, хотя ни вид сигнала, ни метод получения основной СЛАУ, вообще говоря, не имеют принципиального значения при применении этого приема.

### Первый типовой сигнал

Для первого типового сигнала и его оценки имеем:

$$a(t) = a_к - (a_к - a_н)e^{-\mu t}, \quad \mu = \text{const}, \quad X(t) = \beta_1 = \text{const},$$

$$\tilde{a}(t) = \sum_{j=1}^{n1} \tilde{\alpha}_j t^{j-1}, \quad n1 = 3, \quad \tilde{X}(t) = \tilde{\beta}_1, \quad n2 = 1.$$

Рассматриваем случай, когда структура $\tilde{a}(t)$ и тот факт, что неизвестная $X(t)$ – постоянная величина, уже установлены по изложенной ранее схеме.

Общая форма невязки $R(t)$:

$$R(t) = u(t)\,\tilde{a}(t) - \tilde{X}(t) \times \tilde{a}(t) + v(t), \quad v(t) = \frac{du(t)}{dt} \tag{1}$$

принимает вид

$$R(t) = u(t)\,(\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 t + \tilde{\alpha}_3 t^2) - \tilde{\beta}_1\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1\tilde{\alpha}_2 t - \tilde{\beta}_1\tilde{\alpha}_3 t^2 + v(t) \tag{2}$$

или

$$R(t) = \sum_{i=1}^{3} [u(t) t^{i-1}] X_i - \sum_{i=4}^{6} [t^{i-4}] X_i + v(t). \tag{3}$$

Применение второго метода составления основной СЛАУ к этому выражению невязки приводит к следующей основной СЛАУ шестого порядка

$$\sum_{i=1}^{6} A_{ki} X_i = B_k, \; k = 1, \ldots, 6, \quad T = T0/5, \quad t_k = t_1 + T(k-1),$$

$$B_k = -v(t_k), \quad i = 1, \ldots, 6$$

$$A_{ki} = \begin{cases} u(t_k) t_k^{i-1}, & i \le 3 \\ -t_k^{i-4}, & i > 3 \end{cases} \tag{4}$$

где $X_1 = \tilde{\alpha}_1$; $X_2 = \tilde{\alpha}_2$; $X_3 = \tilde{\alpha}_3$; $X_4 = \tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_1 \Rightarrow \tilde{\beta}_1 = X_4/X_1$; $X_5 = \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_1$; $X_6 = \tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_1$.

Перейдем к составлению системы, имеющей меньший порядок, чем основная СЛАУ.

Для первых трех производных невязки имеем:

$$\frac{dR(t)}{dt} = v(t)\,\tilde{\alpha}_1 + [v(t) \times t + u(t)]\,\tilde{\alpha}_2 + [v(t) \times t^2 + 2u(t) \times t]\tilde{\alpha}_3 - \tilde{\beta}_1\tilde{\alpha}_2 - 2\tilde{\beta}_1\tilde{\alpha}_3 t + w_0(t) \tag{5}$$

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} = w_0(t)\,\tilde{\alpha}_1 + [w_0(t) \times t + 2v(t)]\,\tilde{\alpha}_2 + [w_0(t) \times t^2 + 4v(t) \times t + 2u(t)]\,\tilde{\alpha}_3 - 2\tilde{\beta}_1\tilde{\alpha}_3 + h(t) \tag{6}$$

$$\frac{d^3R(t)}{dt^3} = h(t)\,\tilde{\alpha}_1 + [h(t)\cdot t + 3w_0(t)]\,\tilde{\alpha}_2 + [h(t)\cdot t^2 +$$
$$+ 6w_0(t)\cdot t + 6v(t)]\,\tilde{\alpha}_3 + p(t), \qquad (7)$$

где $w_0(t) = \dfrac{d^2u(t)}{dt^2}$, $h(t) = \dfrac{d^3u(t)}{dt^3}$, $p(t) = \dfrac{d^4u(t)}{dt^4}$.

Обратим внимание на структуру каждого из этих выражений.

Если в выражении (5) ввести новые неизвестные $\tilde{\beta}_1\tilde{\alpha}_2 = \gamma_1$, $\tilde{\beta}_1\tilde{\alpha}_3 = \gamma_2$ и потребовать равенства нулю этого выражения в точках $k = 1, ..., M$, $M \geq 5$, $t_k = t_1 + T(k-1)$, $T = T0/(M-1)$, то получим новую СЛАУ пятого порядка, из которой можно найти все искомые величины $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\alpha}_3$, $\tilde{\beta}_1$. При этом одно из двух выражений $\gamma_1 = \tilde{\beta}_1\tilde{\alpha}_2$, $\gamma_2 = \tilde{\beta}_1\tilde{\alpha}_3$ для определения параметра $\tilde{\beta}_1$ является лишним и мы не используем основное условие для невязки, а именно $R(t_k) = 0$.

Если в выражении (6) ввести новую неизвестную $\tilde{\beta}_1\tilde{\alpha}_3 = \gamma_2$ и потребовать равенства нулю этого выражения в точках $k = 1, ..., M$, $M \geq 4$, $T = T0/(M-1)$, $t_k = t_1 + T(k-1)$, то получим новую СЛАУ четвертого порядка, из которой можно найти все искомые величины $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\alpha}_3$, $\tilde{\beta}_1$.

Если потребовать равенства нулю выражения (7) в точках $k = 1, ..., M$, $M \geq 3$, $T = T0/(M-1)$, $t_k = t_1 + T(k-1)$, то получим новую СЛАУ третьего порядка, из которой можно найти только искомые $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\alpha}_3$, а искомую $\tilde{\beta}_1$ можно найти из одного из выражений (2), (5), (6), приравняв это выражение нулю в любой точке $t_k$ соответствующего интервала восстановления искомых.

Естественно обратиться к третьей из указанных возможностей, а именно, использовать систему третьего порядка для определения $\tilde{\alpha}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$:

$$\sum_{i=1}^{3} A0_{ki}\tilde{\alpha}_i = B0_k, \; k = 1, ..., M, \; M \geq 3, \; T = T0/(M-1), \; t_k = t_1 + T(k-1),$$
$$A0_{k1} = h(t_k), \quad A0_{k2} = t_k \cdot h(t_k) + 3w_0(t_k),$$
$$A0_{k3} = t_k^2 \cdot h(t_k) + 6w_0(t_k)\cdot t_k + 6v(t_k), \quad B0_k = -p(t_k), \qquad (8)$$

а затем исходное, основное, выражение невязки (2) для определения величины $\tilde{\beta}_1$. При этом для неизвестной $\tilde{\beta}_1$ будем иметь:

$$\tilde{\beta}_1 = u(t) + \frac{v(t)}{\tilde{a}(t)}, \qquad (9)$$

где $t$ принимает любое значение из $t_k = t_1 + T(k-1)$, $k = 1, ..., 6$, $T = T0/5$.

Итак, с точки зрения решения задачи восстановления искомых сигнала $X(t)$ и параметра $a(t)$, совокупность системы третьего порядка (8) и уравнения $R(t_k) = 0$, т. е. выражения (9), равносильна исходной основной системе (4) шестого порядка.

Следовательно, теперь устойчивость алгоритма инвариантности определяется устойчивостью системы третьего порядка (8), а погрешность определения $\widetilde{\beta}_1$ по формуле (9) находится практически на уровне погрешностей определения параметра $\widetilde{a}(t)$.

В табл. 1 приведены результаты реализации алгоритма инвариантности для первого типового сигнала и второго метода получения основной СЛАУ в трех вариантах:

*Таблица 1.* **Повышение устойчивости алгоритма восстановления первого типового сигнала**

| $P$ | $t_1 \le t \le t_1 + T0P$ | $T0P$ | Косвенный критерий $\rho I_{u\,\text{от}}$ | Прямые критерии | | cond 1 $(A)$<br>cond$_s(A)$<br>cond 1 $(A0)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\rho a_{\text{от}}$ | $\rho X_{\text{от}}$ | |
| 1 | $0{,}04 \le t \le 0{,}34$ | 0,3 | $2{,}903\times10^{-3}$<br>0,248<br>$1{,}435\times10^{-3}$ | $7{,}1\times10^{-2}$<br>4,341<br>0,054 | $6{,}4\times10^{-2}$<br>4,177<br>0,048 | $8{,}3\times10^{9}$<br>366<br>$\sim10^{4}$ |
| 2 | $0{,}04 \le t \le 1{,}54$ | 1,5 | $9{,}015\times10^{-3}$<br>0,986<br>$7{,}75\times10^{-3}$ | $6{,}5\times10^{-2}$<br>5,882<br>0,062 | $4{,}1\times10^{-2}$<br>4,169<br>0,038 | $1{,}3\times10^{7}$<br>378<br>352 |
| 3 | $0{,}04 \le t \le 7{,}54$ | 7,5 | $1{,}8\times10^{-3}$<br>2,177<br>0,011 | $8{,}2\times10^{-2}$<br>76,195<br>0,032 | $2{,}9\times10^{-3}$<br>5,907<br>0,012 | $7{,}3\times10^{5}$<br>$7{,}6\times10^{3}$<br>$1{,}5\times10^{3}$ |
| 4 | $0{,}04 \le t \le 15{,}04$ | 15 | $3{,}522\times10^{-4}$<br>$4{,}934\times10^{4}$<br>$9{,}228\times10^{-3}$ | 0,235<br>154,81<br>0,86 | $4{,}458\times10^{-5}$<br>1,94<br>0,011 | $2{,}8\times10^{7}$<br>$3\times10^{4}$<br>330 |

– использование для восстановления сигнала $X(t)$ и параметра $a(t)$ основной СЛАУ – системы шестого порядка (4);

– использование для восстановления сигнала $X(t)$ и параметра $a(t)$ сингулярного разложения, которое применяется непосредственно к системе (4). При этом из шести сингулярных чисел $s_i$ матрицы $A$ оставляются только первые четыре, а пятое и шестое сингулярные числа приравниваются нулю. Число обусловленности матрицы $A$ вычисляется по формуле cond$_s$ $(A) = s_1/s_4$, где $s_1$, $s_4$ – наибольшее и наименьшее (из оставленных) сингулярные числа;

– использование для восстановления искомых $X(t)$, $a(t)$ системы третьего порядка (8) и уравнения (9) при $t = t_1$.

При любом $p = 1, ..., 4$ порядковый номер строки чисел в таблице 1 соответствует порядковому номеру описанных выше вариантов. Так, при любом $p$ первая строка относится к результатам восстановления искомых, полученным по первому из описанных выше вариантов, а третья строка – к результатам, полученным по третьему из описанных вариантов.

Обращаясь непосредственно к результатам, представленным в таблице 1 (относительные величины даны в процентах), и исходя из общепринятых представлений об устойчивости систем, заключаем, что основная СЛАУ (4) (первые строки при $p = 1, ..., 4$) явно неустойчива, так как число обусловленности этой системы на интервале восстановления искомых от $[t_1, t_1 + 0{,}3]$ до $[t_1, t_1 + 15]$ изменяется в пределах от $\mathrm{cond1}(A) = 7{,}3{\times}10^5$ до $\mathrm{cond1}(A) = 8{,}3{\times}10^9$.

Далее, использование при восстановлении искомых сингулярного разложения матрицы $A$ дает результаты (вторые строки при $p = 1, ..., 4$), являющиеся удовлетворительными по устойчивости во всем диапазоне восстановления, но не удовлетворительными по точности на интервалах $0{,}04 \le t \le 7{,}54$ ($p = 3$), $0{,}04 \le t \le 15{,}04$ ($p = 4$); увеличение при этом числа уравнений в СЛАУ (4) (числа точек $M$) не улучшает результатов восстановления искомых.

Наконец, использование при восстановлении искомых системы (8) и выражения (9) (третьи строки при $p = 1, ..., 4$) дает результаты, оказывающиеся в зоне устойчивости и приемлемые по точности во всем диапазоне восстановления искомых (число обусловленности удалось снизить до ~ $10^6$ раз при $p = 1$).

Отметим, что вместо алгоритма восстановления, основанного на (8)–(9), можно построить алгоритм восстановления, основанный на СЛАУ второго порядка для определения $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ и двух выражений для определения $\tilde{\alpha}_3$, $\tilde{\beta}_1$. Это позволяет снизить число обусловленности еще, по крайней мере, на порядок, сохраняя приемлемый уровень погрешностей восстановления искомых, что требует, однако, использования производной следующего порядка.

Таким образом, переход от основной СЛАУ шестого порядка (4) к СЛАУ третьего порядка (8) и соотношению (9) позволяет решить задачу придания алгоритму инвариантности устойчивого характера.

### Второй типовой сигнал

Для второго типового сигнала и его оценки имеем:

$$a(t) = \sum_{j=1}^{N1} \alpha_j t^{j-1}, \;\; N1 = 2, \quad X(t) = \sum_{j=1}^{N2} \beta_j t^{j-1}, \;\; N2 = 2,$$

$$\tilde{a}(t) = \sum_{j=1}^{n1} \tilde{\alpha}_j t^{j-1}, \;\; n1 = 2, \quad \tilde{X}(t) = \sum_{j=1}^{n2} \tilde{\beta}_j t^{j-1}, \;\; n2 = 2.$$

Как следует из приведенных выражений, полагаем, что этап поиска величин $n1$, $n2$ (число неизвестных постоянных величин в выражениях для $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{X}(t)$) уже пройден, и теперь необходимо обратиться к поиску устойчивого алгоритма инвариантности.

Вместо прежних выражений невязки (2) и производных первого–третьего порядков невязки (5)–(7) в данном случае имеем:

$$R(t) = u(t)\times\tilde{\alpha}_1 + t\times u(t)\times\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_1 - t(\tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_2 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_1) - t^2(\tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_2) + v(t) \qquad (2а)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = v(t)\,\tilde{\alpha}_1 + [t\times v(t) + u(t)]\,\tilde{\alpha}_2 - (\tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_2 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_1) - 2t(\tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_2) + w_0(t) \qquad (5а)$$

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} = w_0(t)\,\tilde{\alpha}_1 + [t\times w_0(t) + 2v(t)]\,\tilde{\alpha}_2 - 2(\tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_2) + h(t) \qquad (6а)$$

$$\frac{d^3R(t)}{dt^3} = h(t)\,\tilde{\alpha}_1 + [t\times h(t) + 3w_0(t)]\,\tilde{\alpha}_2 + p(t) \qquad (7а)$$

Здесь обозначения имеют тот же смысл, что для первого типового сигнала. Применение второго метода составления основной СЛАУ к выражению невязки (2а) дает основную СЛАУ в виде:

$$\sum_{i=1}^{5} A_{ki}X_i = B_k, \quad k = 1, \dots, 5, \quad T = T0/4, \quad t_k = t_1 + T(k-1),$$

$$B_k = -v(t_k),$$

$$A_{ki} = \begin{cases} t_k^{i-1}\times u(t_k), & i \le 2 \\ (-1)t_k^{i-3}, & i > 2 \end{cases} \qquad (10)$$

Между исходными и новыми неизвестными существует следующая связь:

$X_1 = \tilde{\alpha}_1$; $X_2 = \tilde{\alpha}_2$; $X_3 = \tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_1 \Rightarrow \tilde{\beta}_1 = X_3/X_1$; $X_4 = (\tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_2 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_1)$; $X_5 = \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_2$.

Анализируя структуры выражений производных невязки (5а)–(7а), замечаем, что, используя выражение третьей производной невязки (7а), можно найти неизвестные $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, для чего достаточно потребовать равенства нулю этого выражения в точках $k = 1, \dots, M \ge 2$, $t_k = t_1 + T(k-1)$, $T = T0/(M-1)$. Это приводит к системе второго порядка:

$$\sum_{i=1}^{2} A0_{ki}\tilde{\alpha}_i = B0_k, \quad k = 1, \dots, \quad M \ge 2, \quad B0_k = -p(t_k), \qquad (11)$$

$$i = 1, 2, \quad A0_{k1} = h(t_k), \quad A0_{k2} = h(t_k)\times t_k + 3w_0(t_k).$$

Остается найти неизвестные $\tilde{\beta}_1$ и $\tilde{\beta}_2$.

Величину $\tilde{\beta}_2$ находим, используя выражение для производной второго порядка невязки, из уравнения $\frac{d^2R(t)}{dt^2} = 0,\ t = t_k$. Это дает:

$$\tilde{\beta}_2 = \frac{1}{2\tilde{\alpha}_2} \times \{ w_0(t)\,\tilde{\alpha}_1 + [t \times w_0(t) + 2v(t)]\,\tilde{\alpha}_2 + h(t) \}, \quad t = t_k. \tag{12}$$

Наконец, величину $\beta_1$ можно найти, используя либо выражение первой производной невязки (5а), либо выражение самой невязки (2а). Используя вторую возможность, имеем

$$\tilde{\beta}_1 = u(t) - t\,\tilde{\beta}_2 + \frac{v(t)}{\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 \times t}, \quad t = t_k. \tag{12a}$$

Таким образом, реализация алгоритма инвариантности на базе основной СЛАУ пятого порядка (10) свелась к реализации этого алгоритма на основе системы второго порядка (11) и двух уравнений:

$$\left. \frac{d^2R(t)}{dt^2} \right|_{t=t_k} = 0, \quad R(t_k) = 0. \tag{13}$$

Следовательно, устойчивость алгоритма инвариантности теперь определяется устойчивостью системы второго порядка (11).

В таблице 2 представлены результаты реализации алгоритма инвариантности для второго типового сигнала и второго метода составления основой СЛАУ при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 40$. Верхние цифры относятся к случаю использования основой СЛАУ пятого порядка (10), а нижние – к использованию системы второго порядка (11) и уравнений (13). Так как диапазон восстановления искомых довольно широк ($0{,}24 \le T0 \le 61{,}44$), то при использовании системы второго порядка (11) было взято 16 точек ($M = = 16$), а решение этой системы находилось с использованием сингулярного разложения.

*Таблица 2.* **Повышение устойчивости алгоритма восстановления второго типового сигнала**

| $P$ | $t_1 \le t \le t_1 + T0P$ | $T0P$ | Косвенный критерий $\rho I_{u\,\text{от}}$ | Прямые критерии | | cond 1 ($A$)<br>cond$_s$($A0$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\rho a_{\text{от}}$ | $\rho X_{\text{от}}$ | |
| 1 | $0{,}04 \le t \le 0{,}28$ | 0,24 | $6{,}1\times10^{-10}$<br>$2{,}6\times10^{-6}$ | $2{,}3\times10^{-9}$<br>$9{,}9\times10^{-6}$ | $2{,}3\times10^{-9}$<br>$3{,}1\times10^{-6}$ | $1{,}6\times10^{5}$<br>5,8 |
| 2 | $0{,}04 \le t \le 1$ | 0,96 | $2{,}2\times10^{-10}$<br>$1{,}1\times10^{-6}$ | $2{,}2\times10^{-10}$<br>$1{,}8\times10^{-7}$ | $3{,}6\times10^{-10}$<br>$1{,}1\times10^{-6}$ | $1{,}4\times10^{4}$<br>1,9 |
| 3 | $0{,}04 \le t \le 3{,}88$ | 3,84 | $2{,}2\times10^{-10}$<br>$2{,}3\times10^{-7}$ | $2{,}1\times10^{-10}$<br>$6{,}4\times10^{-7}$ | $2{,}3\times10^{-10}$<br>$3{,}2\times10^{-7}$ | $6{,}9\times10^{4}$<br>1,7 |
| 4 | $0{,}04 \le t \le 15{,}4$ | 15,36 | $10^{-7}$<br>$6{,}2\times10^{-8}$ | $3{,}9\times10^{-8}$<br>$1{,}2\times10^{-6}$ | $10^{-7}$<br>$7{,}6\times10^{-8}$ | $2{,}5\times10^{6}$<br>6 |
| 5 | $0{,}04 \le t \le 61{,}48$ | 61,44 | $3{,}8\times10^{-6}$<br>$4{,}9\times10^{-7}$ | $1{,}3\times10^{-6}$<br>$8{,}8\times10^{-4}$ | $3{,}8\times10^{-6}$<br>$2{,}5\times10^{-7}$ | $1{,}3\times10^{8}$<br>602 |

Как следует из результатов, представленных в табл. 2, алгоритм инвариантности, основанный на использовании основой СЛАУ (10), является неустойчивым, в то время как алгоритм инвариантности, базирующихся на использовании системы второго порядка (11) и двух уравнений (13), оказывается вполне устойчивым, по сравнению со случаем использования основой СЛАУ, число обусловленности снизилось до $\sim 2\times 10^5$ раз.

Кстати, если для самых тяжелых условий восстановления сигнала $X(t)$ и параметра $a(t)$, а именно, для $p = 5$ (самый широкий интервал восстановления) взять $M = 32$, то число обусловленности для СЛАУ второго порядка снизится еще в $\sim 20$ раз и станет всего 30 (вместо 602).

Что касается погрешностей восстановления сигнала $X(t)$ и параметра $a(t)$ при использовании системы второго порядка (11), то они, как и в случае использования основой СЛАУ, оказываются пренебрежимо малыми.

### Третий типовой сигнал

Для третьего типового сигнала и его оценки имеем:

$$a(t) = a_0 + A_a \sin wt, \quad X(t) = X_0 + A_x \sin wt,$$

$$\tilde{a}(t) = \tilde{a}_0 + \tilde{A}_a \sin \omega t, \quad \tilde{X}(t) = \tilde{X}_0 + \tilde{A}_x \sin \omega t,$$

Рассматриваем случай, когда циклическая частота $\omega$ уже определена и $\omega = w$.

Выражение для невязки в этом случае принимает вид:

$$R(t) = u(t)\times\tilde{a}_0 + [u(t)\sin\omega t]\times\tilde{A}_a - \tilde{X}_0\tilde{a}_0 - [\tilde{a}_0\tilde{A}_x + \tilde{X}_0\tilde{A}_a]\times\sin\omega t -$$

$$\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)\right]\times\tilde{A}_x\tilde{A}_a + v(t). \tag{2b}$$

Производными первого–третьего порядков невязки являются:

$$\frac{dR(t)}{dt} = v(t)\times\tilde{a}_0 + [v(t)\sin\omega t + u(t)\omega\cos\omega t]\times\tilde{A}_a -$$

$$[\omega\sin 2\omega t]\tilde{A}_x\tilde{A}_a - [\omega\cos\omega t](\tilde{a}_0\tilde{A}_x + \tilde{X}_0\tilde{A}_a) + w_0(t) \tag{5b}$$

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} = w_0(t)\times\tilde{a}_0 + [w_0(t)\sin\omega t + 2v(t)\omega\cos\omega t - u(t)\omega^2\sin\omega t]\times\tilde{A}_a -$$

$$[2\omega^2\cos 2\omega t]\tilde{A}_x\tilde{A}_a + [\omega^2\sin\omega t](\tilde{a}_0\tilde{A}_x + \tilde{X}_0\tilde{A}_a) + h(t) \tag{6b}$$

$$\frac{d^3R(t)}{dt^3} = h(t)\times\tilde{a}_0 + [h(t)\sin\omega t + 3w_0(t)\omega\cos\omega t - 3v(t)\omega^2\sin\omega t -$$

$$u(t)\omega^3\cos\omega t]\tilde{A}_a + [4\omega^3\sin 2\omega t]\tilde{A}_x\tilde{A}_a + [\omega^3\cos\omega t](\tilde{a}_0\tilde{A}_x + \tilde{X}_0\tilde{A}_a) + p(t) \tag{7b}$$

В выражениях (5b)–(7b) функция $w_0(t)$, как и ранее, обозначает производную функцию $v(t)$.

Применение второго метода составления основной СЛАУ к выражению невязки (2b) дает основную СЛАУ пятого порядка в виде:

$$\sum_{i=1}^{5} A_{ki} X_i = B_k,\ k = 1, \ldots, 5, \quad T = T0/4, \quad t_k = t_1 + T(k-1),$$

$$B_k = -v(t_k), \quad i = 1, \ldots, 5, \quad A_{k1} = u(t_k),\ A_{k2} = u(t_k)\sin\omega t_k,$$

$$A_{k3} = -1,\ A_{k4} = -\sin\omega t_k, \quad A_{k5} = \frac{1}{2}(\cos 2\omega t_k - 1). \tag{14}$$

$$X_1 = \tilde{a}_0,\ X_2 = \tilde{A}_a,\ X_3 = \tilde{X}_0\tilde{a}_0 \Rightarrow \tilde{X}_0 = \frac{X_3}{X_1},\ X_4 = \tilde{a}_0\tilde{A}_x + \tilde{X}_0\tilde{A}_a \Rightarrow$$

$$\tilde{A}_x = \frac{X_4 - \tilde{X}_0\tilde{A}_a}{X_1},\ X_5 = \tilde{A}_a\tilde{A}_x.$$

Анализируя структуры выражений (5b)–(7b), замечаем, что неизвестные $\tilde{a}_0, \tilde{A}_a, \tilde{X}_0, \tilde{A}_x$ можно найти, используя любое из этих выражений, потребовав равенства нулю выбранного выражения в точках $t_k$, $k = 1, \ldots, M \geq 4$. При этом, с целью линеаризации следовало бы ввести новые неизвестные $\gamma_1 = \tilde{A}_x\tilde{A}_a$, $\gamma_2 = \tilde{a}_0\tilde{A}_x + \tilde{X}_0\tilde{A}_a$, что привело бы к системе четвертого порядка. Однако, целесообразно осуществить некоторые преобразования, имея в виду снижение порядка СЛАУ, которые будут положены в основу алгоритма инвариантности.

Потребуем равенства нулю каждого из выражений (5b)–(7b) в точках $t = t_k$. Рассмотрим полученные выражения для $\left.\frac{dR(t)}{dt}\right|_{t=t_k}$, $\left.\frac{d^2R(t)}{dt^2}\right|_{t=t_k}$ и исключим из них неизвестную $(\tilde{a}_0\tilde{A}_x + \tilde{X}_0\tilde{A}_a)$; затем рассмотрим, например, полученные выражения для $\left.\frac{d^2R(t)}{dt^2}\right|_{t=t_k}$, $\left.\frac{d^3R(t)}{dt^3}\right|_{t=t_k}$ и исключим из них ту же неизвестную $(\tilde{a}_0\tilde{A}_x + \tilde{X}_0\tilde{A}_a)$. В результате, опуская указание точек $t_k$, получим два новых выражения:

$$\begin{gathered}\phi_1(t)\tilde{a}_0 + \phi_2(t)\tilde{A}_a + \phi_3(t)\tilde{A}_a\tilde{A}_x + f(t) = 0 \\ \psi_1(t)\tilde{a}_0 + \psi_2(t)\tilde{A}_a + \psi_3(t)\tilde{A}_a\tilde{A}_x + F(t) = 0,\end{gathered} \tag{15}$$

где: $$\phi_1(t) = v(t)\omega^2 \sin\omega t + \omega\cos\omega t \times w_0(t)$$

$$\phi_2(t) = \omega^2 \sin^2 \omega t \times v(t) + \frac{1}{2}\omega \sin 2\omega t \times w_0(t) + 2\omega^2 \cos^2 \omega t \times v(t)$$

$$\phi_3(t) = \omega^3 \sin\omega t \times \sin 2\omega t + 2\omega^3 \cos\omega t \times \cos 2\omega t$$

$$f(t) = \omega^2 \sin\omega t \times w_0(t) + \omega\cos\omega t \times h(t)$$

$$\psi_1(t) = \omega^3 \cos\omega t \times w_0(t) - \omega^2 \sin\omega t \times h(t)$$

$$\psi_2(t) = 2\omega^4 \cos^2 \omega t \times v(t) - \omega^2 \sin^2 \omega t \times h(t) - \omega^3 \sin 2\omega t \times w_0(t) +$$

$$+3\omega^4 \sin^2 \omega t \times v(t)$$

$$\psi_3(t) = 2\omega^5 \cos\omega t \times \cos 2\omega t + 4\omega^5 \sin\omega t \times \sin 2\omega t$$

$$F(t) = \omega^3 \cos\omega t \times h(t) - \omega^2 \sin\omega t \times p(t)$$

Теперь замечаем, что каждое из выражений (15) может быть положено в основу построения СЛАУ третьего порядка для определения искомых $\tilde{a}_0, \tilde{A}_a, \tilde{A}_x$, если положить $\tilde{A}_a \times \tilde{A}_x = \gamma$.

Останавливаясь, например, на первом из выражений (15), для определения искомых имеем следующую СЛАУ третьего порядка:

$$\sum_{i=1}^{3} A0_{ki} X_i = B0_k, \quad k = 1, \ldots, \quad M \geq 3, \quad T = T0/(M-1),$$

$$t_k = t_1 + T(k-1), \quad i = 1, \ldots, 3,$$

$$A0_{k1} = \phi_1(t_k), \quad A0_{k2} = \phi_2(t_k), \quad A0_{k3} = \phi_3(t_k), \quad B0_k = -f(t_k), \tag{16}$$

$$X_1 = \tilde{a}_0, \quad X_2 = \tilde{A}_a, \quad X_3 = \tilde{A}_a \tilde{A}_x \Rightarrow \tilde{A}_x = \frac{X_3}{X_2}.$$

Остающаяся неизвестной величина $\tilde{X}_0$ может быть найдена из любого из выражений (2b), (5b)–(7b), потребовав равенства нулю выбранного выражения в любой точке $t_k \in [t_1, t_1 + T0]$. При использовании выражения невязки (2b) для неизвестной $\tilde{X}_0$ получим

$$\tilde{X}_0 = \frac{u(t)\tilde{a}_0 + u(t)\sin\omega t \times \tilde{A}_a - \tilde{a}_0 \tilde{A}_x \sin\omega t - \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)\tilde{A}_x \tilde{A}_a + v(t)}{\tilde{a}_0 + \tilde{A}_a \sin\omega t}. \tag{17}$$

Таким образом, вместо основной системы пятого порядка (14), теперь имеем систему третьего порядка (16) для определения $\tilde{a}_0, \tilde{A}_a, \tilde{A}_x$ и одно уравнение $R(t) = 0$, $t = t_k$ для определения $\tilde{X}_0$, а устойчивость алгоритма инвариантности определяется устойчивостью системы третьего порядка (16).

Наконец, при необходимости можно прийти к системе второго порядка. Действительно, исключая из выражений (15) неизвестную $\tilde{A}_a \times \tilde{A}_x$, получим выражение:

$$\phi_1(t)\psi_3(t) - \phi_3(t)\psi_1(t) \times \tilde{a}_0 + [\phi_2(t)\psi_3(t) - \phi_3(t)\psi_2(t)\tilde{A}_a =$$
$$= \phi_3(t)F(t) - \psi_3(t)f(t)$$

Записав это соотношение для точек $t_k$, $k = 1, ..., M \geq 2$, получим СЛАУ второго порядка. Определив из этой системы $\tilde{a}_0, \tilde{A}_a$, неизвестную $A_x$ находим из любого из выражений (15) в произвольной точке $t_k \in [t_1, t_1 + T0]$. Оставшуюся неизвестной величину $\tilde{X}_0$ находим как в предыдущем случае, т. е. по формуле (17).

Однако, как будет видно из нижеследующего, для третьего типового сигнала нет необходимости в переходе к системе второго порядка. Поэтому остановимся на реализации алгоритма инвариантности для третьего типового сигнала на основе использования системы третьего порядка (16) и одного уравнения $R(t) = 0$.

В таблице 3 представлены результаты реализации алгоритма инвариантности для третьего типового сигнала и второго метода составления основной СЛАУ при следующих значениях параметров искомых $X(t)$ и $a(t)$:

$$a_0 = 10, \quad A_a = 8, \quad X_0 = 100, \quad A_x = 40.$$

Приведенные в этой таблице результаты получены при числе уравнений в системе третьего порядка (16), равном 12 ($M = 12$), а решение этой системы находилось с использованием сингулярного разложения. Верхние цифры в таблице относятся к случаю, когда алгоритм инвариантности реализуется на базе основной системы пятого порядка (14), нижние – на основе использования системы третьего порядка (16) и выражения (17) для определения $\tilde{X}_0$.

*Таблица 3.* **Повышение устойчивости алгоритма восстановления третьего типового сигнала**

| $P$ | $t_1 \leq t \leq t_1 + T0P$ | $T0P$ | Косвенный критерий $\rho I_{п\,от}$ | Прямые критерии | | cond 1 $(A)$<br>cond$_S(A0)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\rho a_{0\,от}$ | $\rho X_{от}$ | |
| 1 | $0{,}04 \leq t \leq 0{,}16$ | 0,12 | $1{,}3\times10^{-10}$<br>$1{,}8\times10^{-10}$ | $5{,}9\times10^{-11}$<br>$5{,}49\times10^{-10}$ | $2\times10^{-10}$<br>$4{,}3\times10^{-10}$ | $8\times10^{5}$<br>116 |
| 2 | $0{,}04 \leq t \leq 0{,}52$ | 0,48 | $10^{-13}$<br>$4\times10^{-5}$ | $5\times10^{-13}$<br>$3{,}4\times10^{-5}$ | $10^{-13}$<br>$4{,}6\times10^{-5}$ | $6{,}5\times10^{3}$<br>112 |
| 3 | $0{,}04 \leq t \leq 1{,}96$ | 1,92 | $1{,}7\times10^{-9}$<br>$2\times10^{-2}$ | $2{,}8\times10^{-9}$<br>$2\times10^{-2}$ | $2{,}2\times10^{-9}$<br>$2\times10^{-2}$ | $1{,}3\times10^{4}$<br>232 |
| 4 | $0{,}04 \leq t \leq 7{,}72$ | 7,68 | $4{,}9\times10^{-7}$<br>$5{,}7\times10^{-4}$ | $7{,}6\times10^{-7}$<br>$4{,}9\times10^{-4}$ | $6{,}6\times10^{-7}$<br>$5\times10^{-4}$ | $1{,}1\times10^{4}$<br>117 |

Как следует из результатов, представленных в табл. 3, алгоритм инвариантности, реализуемый на основе использования системы третьего порядка (16) и одного уравнения для определения четвертой неизвестной, оказывается достаточно устойчивым, а погрешности восстановления сигнала $X(t)$ и параметра $a(t)$, как и в случае использования неустойчивой основной СЛАУ пятого порядка, пренебрежимо малы.

Как следует из вышеизложенного, построенные устойчивые алгоритмы восстановления второго и третьего типовых сигналов основаны на совместном использовании предложенного частного приема повышения устойчивости и метода решения получающихся новых СЛАУ с помощью сингулярного разложения.

Выше, с целью сокращения изложения, при построении устойчивых алгоритмов предполагалось, что этап выбора структуры оценок $\widetilde{X}(t)$, $\widetilde{a}(t)$ уже пройден и ставилась только задача повышения устойчивости алгоритмов. Понятно, однако, что создание устойчивых алгоритмов инвариантности, вообще говоря, должно предшествовать этапу поиска структуры оценок $\widetilde{X}(t)$, $\widetilde{a}(t)$.

Таково содержание одного из возможных путей повышения устойчивости алгоритмов инвариантности при восстановлении измеряемого сигнала $X(t)$.

## 4.2. АЛГОРИТМ ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Описание динамических свойство систем измерения неэлектрических величин основывается обычно на использовании тех или иных физических законов, что позволяет сформировать математическую модель поведения этих систем, например, в виде конкретных обыкновенных дифференциальных уравнений, причем эти уравнения часто оказываются линейными. Построению алгоритмов инвариантности для указанных измерительных систем известной структуры и посвящено все предыдущее изложение.

Следует отметить, однако, что существуют системы, которые не могут быть описаны дифференциальными уравнениями. Поэтому, общности ради, интересно рассмотреть ситуацию, когда об измерительной системе известен лишь факт ее линейности и отсутствует какая-либо информация об ее структуре.

Из общей теории систем известно, что для любых непрерывных линейных систем с сосредоточенными параметрами произвольной структуры с нулевыми начальными условиями справедливо интегральное соотношение:

$$u(t) = \int_0^t \tilde{w}(t,\tau) X(\tau) d\tau, \quad (18)$$

где: $u(t)$, $X(t)$ – выходной и входной сигналы системы соответственно; $\tilde{w}(t,\tau)$ – некоторая обобщенная характеристика динамических свойств системы, называемая импульсной переходной функцией системы.

В различных областях динамики систем по-разному формулируется содержательная задача, связанная с использованием математической модели (18).

В частности, если известны входная $X(t)$ и выходная $u(t)$ величины динамической системы и необходимо найти характеристику $\tilde{w}(t,\tau)$ системы, то это область теории идентификации систем. Если же известны выходной сигнал $u(t)$ системы и характеристика $\tilde{w}(t,\tau)$ и необходимо найти входной сигнал $X(t)$, то это область теории динамических измерений, имея в виду традиционную постановку задач динамических измерений.

Хотя анализу модели (18) в отмеченных двух областях посвящено огромное число работ [3, 5, 8, 15], интенсивные исследования модели (18) в этих областях продолжаются.

В соответствии с идеей и принципом построения алгоритма инвариантности восстановление измеряемого сигнала $X(t)$ по выходному сигналу $u(t)$ должно осуществляться по алгоритму, который не зависит от параметров измерительной системы. До сих пор при исследовании измерительных систем известной структуры указанной цели удавалось достичь включением переменных во времени параметров в число неизвестных в модели измерительной системы.

Следовательно, теперь, по аналогии, при исследовании измерительных систем произвольной (неизвестной) структуры целесообразно включить в число неизвестных в модели (18) обобщенную характеристику системы $\tilde{w}(t,\tau)$.

Другими словами, в данной, более общей задаче восстановления измеряемого сигнала, также как и при рассмотрении линейных ИС известной структуры, необходимо перейти в расширенной задаче измерения.

Итак, для линейных измерительных систем (с сосредоточенными параметрами) произвольной структуры в качестве математической модели, характеризующей ее динамические свойства, теперь имеем соотношение (18), в котором известен выходной сигнал $u(t)$ и не известны измеряемый сигнал $X(t)$ и характеристика системы $\tilde{w}(t,\tau)$.

Ясно, что при такой постановке задачи измерения соотношение (18) не может быть отнесено к какому-либо типу интегральных уравнений в общепринятом смысле этого понятия. Поэтому соотношение (18) рассматривается в дальнейшем просто как некоторое функциональное соотношение, устанавливающее взаимосвязь между входным и выходным сигналами измерительной системы.

Не имея в виду детального рассмотрения здесь указанной общей постановки задачи измерения с целью построения алгоритма инвариантности, покажем, однако, что такая постановка задачи имеет смысл и при определенных условиях приводит к цели, и обратим внимание на некоторые возникающие при этом новые вопросы.

Как и в случае измерительных систем известной структуры оценку $\tilde{X}(t)$ измеряемого сигнала $X(t)$ можно представить в виде алгебраического многочлена:

$$\tilde{X}(t) = \sum_{j=1}^{n2} \tilde{\beta}_j t^{j-1}. \tag{19}$$

Обобщенная характеристика $\tilde{w}(t,\tau)$ измерительной системы является функцией двух переменных $t$, $\tau$ и простейшим представлением для ее модели может быть выражение:

$$g(t,\tau) = g_1 + g_2 t + g_3 \tau, \tag{20}$$

где $g(t,\tau)$ – модель для истинной, но неизвестной импульсной переходной функции $\tilde{w}(t,\tau)$ измерительной системы; $g_1$, $g_2$, $g_3$ – постоянные, но неизвестные величины.

В приводимых далее результатах моделирования принимается именно вид (20) функции $g(t,\tau)$, т. е. величина $n1$ – число неизвестных постоянных величин в модели $g(t,\tau)$ фиксируется значением $n1 = 3$.

Невязка, характеризующая процесс восстановления измеряемого сигнала $X(t)$, принимает вид:

$$I_u(t) = u(t) - \int_0^t g(t,\tau) \times \tilde{X}(\tau) d\tau. \tag{21}$$

Легко заметить, что после подстановки выражений (19), (20) в (21), можно ввести промежуточные неизвестные $X_i$, $i = 1, 2, \ldots$ и, используя любой из изложенных ранее методов, получить систему линейных алгебраических уравнений относительно промежуточных неизвестных $X_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Однако, переход от промежуточных неизвестных к исходным неизвестным $g_1$, $g_2$, $g_3$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ в общем случае может быть осуществлен только путем решения нелинейной системы алгебраических уравнений. Вообще говоря, описанную процедуру можно рассматривать как одно из возможных направлений построения алгоритма инвариантности для измерительных систем произвольной структуры.

Так как в данной работе при построении алгоритма инвариантности мы ограничиваемся использованием только линейных систем алгебраических уравнений, то рассмотрим иной путь построения алгоритмов инвариантности для измерительных систем произвольной структуры.

Поставленной цели можно достигнуть, например, либо путем выбора специального вида модели $g(t,\tau)$, либо путем изменения исходной общей модели (18). На втором из указанных направлений мы и остановимся.

Наряду с общей исходной моделью (18), рассмотрим функциональное соотношение:

$$u(t)+\int_0^t \tilde{w}(t,\tau)\psi(\tau)d\tau=\int_0^t \tilde{w}(t,\tau)X(\tau)d\tau, \tag{22}$$

где $\psi(\tau)$ – некоторая известная функция.

Пусть восстановление измеряемого сигнала осуществляется на некотором временно́м интервале $[t_1,\ t_1+T0]$, на котором выполняется условие:

$$\left|\Psi(t)\right| << \left|X(t)\right|. \tag{23}$$

Далее предположим, что задачи, описываемые соотношениями (18) и (22), имеют решения, позволяющие найти исходные неизвестные величины. Тогда, с учетом условия (23), можно ожидать, что решения этих двух задач будут близки друг к другу. При этом, чем сильнее выполняется неравенство (23), тем ближе решение задачи (22) к решению основной исходной задачи (18). Таким образом, при указанных предположениях можно решить вспомогательную задачу (22) и принять это решение за приближенное решение основной задачи (18).

Очевидно, существуют различные виды функций $\Psi(t)$, удовлетворяющие условию (23). В качестве одной из указанных зависимостей может служить следующая:

$$\Psi(t)=u(t). \tag{24}$$

Логическим основанием такого выбора является то, что для устойчивых линейных измерительных систем с нулевыми начальными условиями можно выбрать настолько узкий интервал восстановления измеряемого сигнала, что на этом интервале будет выполняться условие:

$$\left|u(t)\right| << \left|X(t)\right|,$$

а следовательно, и условие (23).

При этом предполагается, что начало процесса восстановления $t = t_1$ сигнала достаточно близко к началу процесса измерения $t = 0$.

Таким образом, наряду с общей моделью (18) линейной измерительной системы рассматривается вспомогательная модель, описываемая функциональным соотношением

$$u(t) = \int_0^t \tilde{w}(t,\tau)X(\tau)d\tau - \int_0^t \tilde{w}(t,\tau)u(\tau)d\tau. \qquad (25)$$

Заметим, что описанный подход к получению решения исходной задачи путем перехода с той или иной целью к некоторой вспомогательной задаче довольно часто используется в теории интегральных уравнений, например, при регуляризации интегрального уравнения Вольтерра первого рода [8]. Суть указанной регуляризации заключается в следующем.

Пусть дано интегральное уравнение Вольтерра первого рода:

$$\int_0^x K(x,t)q(t)dt = f(x),$$

где $K(x,t)$ – известное ядро интегрального уравнения; $f(x)$ – известная функция; $q(t)$ – неизвестная функция.

Приведенное уравнение имеет неустойчивое решение. Наряду с данным уравнением рассматривается вспомогательное интегральное уравнение с положительным параметром $\alpha$:

$$\alpha q(x) + \int_0^x K(x,t)q(t)dt = f(x).$$

Последнее уравнение является уравнением Вольтерра второго рода, а его решение является устойчивым.

Доказано, что при малости параметра $\alpha$ и выполнении определенных условий, накладываемых на функцию $K(x,t)$, решение вспомогательного уравнения близко к решению данного исходного уравнения. Поэтому в качестве приближенного решения данного интегрального уравнения Вольтерра первого рода принимается устойчивое решение вспомогательного интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Таким образом, добавка к данному уравнению малого слагаемого $\alpha q(x)$ имеет вполне конкретную цель – использование вместо неустойчивого решения данного уравнения близкого к нему, но устойчивого решения вспомогательного уравнения. Такой подход к решению данной исходной задачи часто оказывается вполне эффективным.

В нашем случае введение дополнительного слагаемого преследует совершенно иную цель, а именно, построение алгоритма инвариантности, реализация которого использует только линейные системы алгебраических уравнений. Поэтому естественно, что содержание дополнительного слагаемого в постановке задачи построения алгоритма инвариантности совершенно иное, нежели в рассмотренном выше интегральном уравнении Вольтерра.

Вернемся к построению алгоритма инвариантности, обратившись к соотношению (25).

В качестве иллюстрации применимости описанного подхода рассмотрим основные фрагменты построения алгоритма инвариантности и процесса восстановления измеряемого сигнала для трех рассмотренных ранее типовых сигналов. При этом, с целью сокращения изложения, положим, что во всех трех случаях переменные параметры измерительной системы изменяются во времени единообразно и, следовательно, обобщенная характеристика $\tilde{w}(t,\tau)$ измерительной системы является одной и той же для указанных трех случаев восстановления измеряемого сигнала $X(t)$.

Итак, ниже последовательно рассматривается процесс построения алгоритма инвариантности и восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ для трех конкретных случаев:

для первого типового сигнала

$$X(t) = \beta_1 = \text{const};$$

для второго типового сигнала

$$X(t) = \beta_1 + \beta_2 t, \quad \beta_1 = \text{const}, \quad \beta_2 = \text{const};$$

для третьего типового сигнала

$$X(t) = X_0 + A_x \sin wt, \;\; X_0 = \text{const}, \;\; A_x = \text{const}, \;\; w = \text{const}.$$

При моделировании в качестве измерительной системы использовалась линейная система первого порядка, описываемая уравнением

$$\frac{du(t)}{dt} + a(t) \times u(t) = a(t) \times X(t),$$

а для параметра $a(t)$ во всех трех случаях принималась линейная зависимость:

$$a(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t, \quad \alpha_1 = \text{const}, \quad \alpha_2 = \text{const}.$$

Разумеется, указанные исходные данные о входных сигналах $X(t)$, о параметре $a(t)$, а также о структуре истинной измерительной системы, как и должно быть, не используются в процессе построения алгоритма инвариантности и восстановления измеряемого сигнала $X(t)$. Далее, в процессе моделирования мы не ищем наилучшее приближение для импульсной переходной функции $\tilde{w}(t,\tau)$, а в качестве ее модели берем простейшее из возможных представлений, а именно, представление $g(t,\tau)$ в виде (20).

Ясно, что при таком простейшем представлении $g(t,\tau)$ не приходится ожидать, что, наряду с высокоточным восстановлением измеряемого сигнала $X(t)$, можно будет попутно восстановить с высокой точностью и импульсную переходную функцию $\tilde{w}(t,\tau)$ измерительной системы. Стремление повысить точность восстановления и импульсной переходной функции $\tilde{w}(t,\tau)$ потребовало бы усложнения ее модели $g(t,\tau)$, например, добавлением в представление (20) членов с более высокими степенями переменных $t$, $\tau$. При этом, как и везде ранее, из результатов реализации алгоритма инвариантности, относящихся к различным значениям $n1$, $n2$ – число неизвестных постоянных величин в оценках $g(t, \tau)$, $\tilde{X}(t)$ соответственно, необходимо было бы определить основную группу пар $(n^*1,\ n^*2)$, из которой затем выделить единственную приемлемую пару $(\bar{n}^*1,\ \bar{n}^*2)$, чего мы здесь делать не будем, ограничиваясь лишь случаем $n1 = 3$.

Наконец отметим, что при изложении ниже результатов моделирования мы, как уже неоднократно делали ранее, опускаем изложение предварительного этапа восстановления измеряемого сигнала, т. е. этапа установления типа входного сигнала. Таким образом, приведенные ниже результаты восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ представляют собой уже этап определения зависимости от длительности $T0$ интервала восстановления $[t_1,\ t_1 + T0]$ числовых характеристик параметров оценки $\tilde{X}(t)$ измеряемого сигнала $X(t)$, для которого функциональный закон изменения во времени уже установлен.

**Первый типовой сигнал**

Для этого сигнала в качестве оценки $\tilde{X}(t)$ измеряемого сигнала $X(t)$ имеем $\tilde{X} = \beta_1$, а в качестве модели $g(t,\tau)$ импульсной переходной функции $\tilde{w}(t,\tau)$ принимаем представление (20). Подставив эти величины в соотношение (25) вместо $X(t)$ и $\tilde{w}(t,\tau)$, получим выражение для невязки:

$$I(t) = u(t) + \int_0^t g(t,\tau)u(\tau)\,d\tau - \int_0^t g(t,\tau)\tilde{X}(\tau)d\tau,$$

или после преобразований:

$$I(t) = u(t) + \left[\int_0^t u(\tau)\,d\tau\right] g_1 + \left[t\int_0^t u(\tau)d\tau\right] g_2 + \left[\int_0^t \tau\, u(\tau)\,d\tau\right] g_3 -$$

$$tg_1\tilde{\beta}_1 - t^2(g_2\tilde{\beta}_1 + \frac{1}{2}g_3\tilde{\beta}_1).$$

Введя в рассмотрение промежуточные искомые:

$$X_1 = g_1,\ X_2 = g_2,\ X_3 = g_3,\ X_4 = g_1\tilde{\beta}_1,\ X_5 = g_2\tilde{\beta}_1 + \frac{1}{2}g_3\tilde{\beta}_1,$$

имеем:

$$I(t) = u(t) + \left[\int_0^t u(\tau)\,d\tau\right]X_1 + \left[t\int_0^t u(\tau)d\tau\right]X_2 + \left[\int_0^t \tau\,u(\tau)\,d\tau\right]X_3 - tX_4 - t^2X_5. \quad (26)$$

Наконец, применяя второй метод составления основной системы, получаем необходимое СЛАУ:

$$\sum_{i=1}^{5} A_{ki}X_i = B_k,\quad k = 1, \dots, 5,\ T = T0/4,\ t_k = t_1 + T(k-1), \quad (27)$$

где $B_k = u(t_k)$, $A_{k1} = -\int_0^{t_k} u(\tau)\,d\tau$, $A_{k2} = -t_k\int_0^{t_k} u(\tau)\,d\tau$, $A_{k3} = -\int_0^{t_k} \tau \times u(\tau)\,d\tau$, $A_{k4} = t_k$,

$A_{k5} = t_k^2$.

Здесь $t_1$ и $T0$ – начало и длина интервала восстановления сигнала $X(t)$ соответственно.

После решения системы (27) исходные искомые величины определяются из соотношений:

$$g_1 = X_1,\ g_2 = X_2,\ g_3 = X_3,\ \tilde{\beta}_1 = \frac{X_4}{g_1}.$$

Выражение $X_5 = g_2\tilde{\beta}_1 + \frac{1}{2}g_3\tilde{\beta}_1$, из которого также можно найти величину $\tilde{\beta}_1$, оказывается лишним, оно может быть отброшено; естественно, оно дает то же числовое значение величины $\tilde{\beta}_1$, что и первое выражение для $\tilde{\beta}_1$.

Ниже приводится таблица 4 восстановления первого типового сигнала с помощью алгоритма инвариантности, основанного на использовании СЛАУ (27). Эта таблица относится к случаю, когда в качестве числовых значений параметров в исходных данных при моделировании приняты:

$$\beta_1 = 100;\ \ \alpha_1 = 0{,}1;\ \ \alpha_2 = 0{,}2.$$

Приведенные в этой таблице критерии $\rho X_{\text{от}}$ и $\rho I_{u\ \text{от}}$ имеют смысл:

$$\rho X_{\text{от}} = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T0}\left|X(t) - \tilde{X}(t)\right|dt}{\int_{t_1}^{t_1+T0}\left|X(t)\right|dt} \ -$$

прямой критерий оценки погрешности восстановления сигнала $X(t)$;

$$\rho I u_{\text{от}} = \frac{\int\limits_{t_1}^{t_1+T0} \left| u(t) - U(t) \right| dt}{\int\limits_{t_1}^{t_1+T0} \left| u(t) \right| dt} \ -$$

косвенный критерий, в котором в качестве оценки $U(t)$ выходного сигнала $u(t)$ фигурирует сигнал:

$$U(t) = \int\limits_{0}^{t} g(t,\tau)\, \tilde{X}(\tau) d\tau.$$

Обратим внимание: при построении системы (27) использовалась функция $I(t)$, которая является невязкой для вспомогательной задачи (25). Функция же $I_u(t)$ является невязкой исходной задачи (18) и, что важно, при использовании критерия $\rho I_{u\,\text{от}}$, в отличие от рассмотренных ранее систем заданной структуры, теперь, при рассмотрении систем произвольной структуры, нет необходимости в знании конкретного вида функции $u(t)$ как решения соответствующего дифференциального уравнения с переменными коэффициентами.

Как следует из приведенных в табл. 4 данных, для первого типового сигнала задача восстановления измеряемого сигнала инвариантно к параметрическим явлениям решается вполне эффективно и для случая измерительной системы произвольной (неизвестной) структуры.

*Таблица 4.* **Реализация алгоритма инвариантности для первого типового сигнала при неизвестной структуре измерительной системы**

| $P$ | $t_1 \le t \le t_1 + T0$ | $T0P$ | Косвенный критерий $\rho I_{u\,\text{от}}$ | Прямой критерий $\rho X_{\text{от}}$ | Восстановленный сигнал $\tilde{X}(t) = \beta_1$ | cond 1 ($A$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | [0,04; 0,09] | 0,05 | 0,367 | $3,6\times10^{-5}$ | 100,000036 | $4,5\times10^{9}$ |
| 2 | [0,04; 0,14] | 0,1 | 0,554 | $2,4\times10^{-6}$ | 100,000002 | $2,7\times10^{8}$ |
| 3 | [0,04; 0,24] | 0,2 | 0,985 | $1,4\times10^{-7}$ | 99,999999 | $1,6\times10^{7}$ |
| 4 | [0,04; 0,34] | 0,3 | 1,48 | $4,4\times10^{-8}$ | 99,999999 | $4,6\times10^{6}$ |
| 5 | [0,04; 0,44] | 0,4 | 2,036 | $3,4\times10^{-9}$ | 99,999999 | $1,9\times10^{6}$ |
| 6 | [0,04; 0,54] | 0,5 | 2,654 | $4,1\times10^{-10}$ | 100,000000 | $9,7\times10^{5}$ |
| 7 | [0,04; 0,64] | 0,6 | 3,332 | $5,8\times10^{-10}$ | 99,999999 | $6,3\times10^{5}$ |
| 8 | [0,04; 0,74] | 0,7 | 4,073 | $1,004\times10^{-10}$ | 100,000000 | $4,3\times10^{5}$ |
| 9 | [0,04; 0,84] | 0,8 | 4,875 | $4,86\times10^{-11}$ | 100,000000 | $3,1\times10^{5}$ |
| 10 | [0,04; 0,94] | 0,9 | 5,741 | $1,45\times10^{-10}$ | 100,000000 | $2,3\times10^{5}$ |
| 11 | [0,04; 1,04] | 1,0 | 6,67 | $4,1\times10^{-10}$ | 100,000000 | $1,76\times10^{5}$ |

**Второй типовой сигнал**

Подставляя в (25) вместо $\tilde{w}(t,\tau)$ и $X(t)$ выражение (20) для модели импульсной переходной функции $g(t,\tau)$ и выражение для модели измеряемого сигнала

$$\tilde{X}(t) = \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 t,$$

получаем выражение невязки для второго типового сигнала в виде:

$$I(t) = u(t) + \left[\int_0^t u(\tau)\,d\tau\right] g_1 + \left[t\int_0^t u(\tau) d\tau\right] g_2 + \left[\int_0^t \tau\, u(\tau)\,d\tau\right] g_3 -$$

$$t\,(g_1\tilde{\beta}_1) - t^2(g_2\tilde{\beta}_1 + \frac{1}{2}g_3\tilde{\beta}_1 + \frac{1}{2}g_1\tilde{\beta}_2) - t^3(\frac{1}{2}g_2\tilde{\beta}_2 + \frac{1}{3}g_3\tilde{\beta}_2).$$

Введем в рассмотрение промежуточные искомые:

$$X_1 = g_1,\ X_2 = g_2,\ X_3 = g_3,\ X_4 = g_1\tilde{\beta}_1,\ X_5 = g_2\tilde{\beta}_1 + \frac{1}{2}g_3\tilde{\beta}_1 + \frac{1}{2}g_1\tilde{\beta}_2,$$

$$X_6 = \frac{1}{2}g_2\tilde{\beta}_2 + \frac{1}{3}g_3\tilde{\beta}_2.$$

Тогда невязка примет вид:

$$I(t) = u(t) + \left[\int_0^t u(\tau)\,d\tau\right] X_1 + \left[t\int_0^t u(\tau) d\tau\right] X_2 + \left[\int_0^t \tau\, u(\tau)\,d\tau\right] X_3 -$$

$$tX_4 - t^2 X_5 - t^3 X_6. \tag{28}$$

Применяя второй метод составления основной СЛАУ, получаем:

$$\sum_{i=1}^{6} A_{ki}X_i = B_k, \quad k = 1, ..., 6,\ T = T0/5,\ t_k = t_1 + T(k-1), \tag{29}$$

где $B_k = u(t_k)$, $A_{k1} = -\int_0^{t_k} u(\tau)\,d\tau$, $A_{k2} = -t_k\int_0^{t_k} u(\tau)\,d\tau$, $A_{k3} = -\int_0^{t_k} \tau \times u(\tau)\,d\tau$, $A_{k4} = t_k$, $A_{k5} = t_k^2$, $A_{k6} = t_k^3$.

После решения системы (29) исходные неизвестные величины определяются из соотношений:

$$g_1 = X_1,\ g_2 = X_2,\ g_3 = X_3,\ \tilde{\beta}_1 = \frac{X_4}{g_1},\ \tilde{\beta}_2 = \frac{2X_5 - 2X_2\tilde{\beta}_1 - X_3\tilde{\beta}_1}{X_1}.$$

Выражение $X_6 = \frac{1}{2}g_2\tilde{\beta}_2 + \frac{1}{3}g_3\tilde{\beta}_2$, из которого также можно определить величину $\tilde{\beta}_2$, оказывается лишним; после решения системы (29) это выражение может быть оставлено без рассмотрения.

В таблице 5 приведены результаты восстановления второго типового сигнала с помощью алгоритма инвариантности, основанного на использовании СЛАУ (29). В этом случае в качестве числовых значений параметров в исходных данных при моделировании взяты:

$$\beta_1 = 2; \quad \beta_2 = 40; \quad \alpha_1 = 0{,}1; \quad \alpha_2 = 0{,}2.$$

Приведенные в табл. 5 результаты свидетельствуют, что для измерительных систем неизвестной структуры восстановление второго типового сигнала с помощью алгоритма инвариантности оказывается столь же эффективным, что и в случае восстановления первого типового сигнала.

*Таблица 5.* **Реализация алгоритма инвариантности для второго типового сигнала при неизвестной структуре измерительной системы**

| $P$ | $t_1 \le t \le t_1 + T0$ | $T0P$ | Косвенный критерий $\rho I_{и\,от}$ | Прямой критерий $\rho X_{от}$ | Восстановленный сигнал | | cond 1 ($A$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $\tilde{\beta}_1$ | $\tilde{\beta}_2$ | |
| 1 | [0,04; 0,09] | 0,05 | 0,322 | $2{,}4\times10^{-4}$ | 1,999972 | 39,999829 | $4\times10^{12}$ |
| 2 | [0,04; 0,14] | 0,1 | 0,479 | $2{,}18\times10^{-5}$ | 1,999999 | 39,999995 | $1{,}2\times10^{11}$ |
| 3 | [0,04; 0,24] | 0,2 | 0,835 | $2{,}07\times10^{-7}$ | 1,999999 | 39,999999 | $3{,}6\times10^{9}$ |
| 4 | [0,04; 0,34] | 0,3 | 1,242 | $1{,}63\times10^{-8}$ | 1,999999 | 39,999999 | $4{,}4\times10^{8}$ |
| 5 | [0,04; 0,44] | 0,4 | 1,701 | $1{,}33\times10^{-8}$ | 2,000000 | 40,000000 | $9{,}7\times10^{7}$ |
| 6 | [0,04; 0,54] | 0,5 | 2,213 | $5{,}1\times10^{-9}$ | 2,000000 | 40,000000 | $2{,}955\times10^{7}$ |
| 7 | [0,04; 0,64] | 0,6 | 2,78 | $3{,}3\times10^{-9}$ | 2,000000 | 39,999999 | $1{,}1\times10^{7}$ |
| 8 | [0,04; 0,74] | 0,7 | 3,396 | $1{,}06\times10^{-9}$ | 2,000000 | 40,000000 | $4{,}8\times10^{6}$ |
| 9 | [0,04; 0,84] | 0,8 | 4,069 | $1{,}43\times10^{-10}$ | 2,000000 | 40,000000 | $2{,}3\times10^{6}$ |
| 10 | [0,04; 0,94] | 0,9 | 4,797 | $1{,}13\times10^{-10}$ | 2,000000 | 40,000000 | $1{,}2\times10^{6}$ |
| 11 | [0,04; 1,04] | 1,0 | 5,581 | $2{,}59\times10^{-10}$ | 2,000000 | 40,000000 | $7{,}45\times10^{6}$ |

Заметим, что аналогичные результаты получаются при моделировании процесса восстановления измеряемого сигнала с помощью алгоритма инвариантности, если этот сигнал описывается алгебраическим многочленом более высокой степени.

### Третий типовой сигнал

Подставляя в (25) вместо $\tilde{w}(t,\tau)$ и $X(t)$ выражение (20) для модели импульсной переходной функции $g(t,\tau)$ и выражение для модели измеряемого сигнала

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}_0 + \tilde{A}_x \sin \omega t,$$

получаем следующее соотношение для невязки:

$$I(t)=u(t)+\left[\int_0^t u(\tau)\,d\tau\right]g_1+\left[t\int_0^t u(\tau)d\tau\right]g_2+\left[\int_0^t \tau\, u(\tau)\,d\tau\right]g_3-$$

$$t\,(g_1\tilde{X}_0)-t^2(g_2\tilde{X}_0+\frac{1}{2}g_3\tilde{X}_0)-(g_1\tilde{A}_x)\left[\frac{1}{\omega}(1-\cos\omega t)\right]-(g_2\tilde{A}_x)\left[\frac{1}{\omega}t(1-\cos\omega t)\right]-$$

$$(g_3\tilde{A}_x)\left[\frac{1}{\omega^2}\sin wt-\frac{1}{\omega}t\cos\omega t\right].$$

Введем в рассмотрение промежуточные искомые:

$$X_1=g_1,\;\; X_2=g_2,\;\; X_3=g_3,\;\; X_4=g_1\tilde{X}_0,\;\; X_5=g_2\tilde{X}_0+\frac{1}{2}g_3\tilde{X}_0,$$

$$X_6=g_1\tilde{A}_x,\;\; X_7=g_2\tilde{A}_x,\;\; X_8=g_3\tilde{A}_x.$$

Тогда невязку можно записать в виде:

$$I(t)=u(t)+\left[\int_0^t u(\tau)\,d\tau\right]X_1+\left[t\int_0^t u(\tau)d\tau\right]X_2+\left[\int_0^t \tau\, u(\tau)\,d\tau\right]X_3-$$

$$tX_4-t^2X_5-\left[\frac{1}{\omega}(1-\cos\omega t)\right]X_6-\left[\frac{1}{\omega}t(1-\cos\omega t)\right]X_7-$$

$$\left[\frac{1}{\omega^2}\sin\omega t-\frac{1}{\omega}t\cos\omega t\right]X_8.$$

Применяя второй метод составления основной СЛАУ, имеем:

$$\sum_{i=1}^{8}A_{ki}X_i=B_k,\quad k=1,\,\ldots,\,8,\;\; T=T0/7,\;\; t_k=t_1+T(k-1),$$

где $B_k = u(t_k)$, $A_{k1}=-\int_0^{t_k}u(\tau)\,d\tau$, $A_{k2}=-t_k\int_0^{t_k}u(\tau)\,d\tau$, $A_{k3}=-\int_0^{t_k}\tau\times u(\tau)\,d\tau$, $A_{k4}=t_k$,

$A_{k5}=t_k^2$, $A_{k6}=\frac{1}{\omega}(1-\cos\omega t_k)$, $A_{k7}=\frac{1}{\omega}t_k(1-\cos\omega t_k)$, $A_{k8}=\frac{1}{\omega^2}\sin\omega t_k-$ $\frac{1}{\omega}t_k\cos\omega t_k$.

Исходные неизвестные величины определяются соотношениями:

$$g_1=X_1,\;\; g_2=X_2,\;\; g_3=X_3,\;\; \tilde{X}_0=\frac{X_4}{g_1},\;\; \tilde{A}_x=\frac{X_6}{g_1}.$$

Выражение для $X_5$, из которого также может быть определена исходная неизвестная $\widetilde{X}_0$, а также выражения для $X_7$ и $X_8$, из которых может быть определена исходная неизвестная $\widetilde{A}_x$, оказываются лишними. После решения системы указанные выражения оставляются без рассмотрения.

В таблице 6 приведены результаты восстановления третьего типового сигнала с использованием алгоритма инвариантности, основанного на решении приведенной выше СЛАУ. Здесь в качестве числовых значений параметров в исходных данных при моделировании взяты:

$$\alpha_1 = 0{,}1,\quad \alpha_2 = 0{,}2,\quad X_0 = 100,\quad A_x = 40,\quad \omega = 2\pi F,\quad F = 1\ \text{Гц}.$$

Как видно из результатов, приведенных в табл. 6, для измерительной системы произвольной (неизвестной) структуры восстановление третьего типового сигнала с помощью алгоритма инвариантности оказывается вполне приемлемым.

*Таблица 6.* **Реализация алгоритма инвариантности для третьего типового сигнала при неизвестной структуре измерительной системы**

| $P$ | $t_1 \le t \le t_1 + T0$ | $T0P$ | Косвенный критерий $\rho I_{u\,\text{от}}$ | Прямой критерий $\rho X_{\text{от}}$ | Восстановленный сигнал | | cond 1 ($A$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $\widetilde{X}_0$ | $\widetilde{A}_x$ | |
| 1 | [0,04; 0,09] | 0,05 | 0,407 | 0,499992 | 100,503347 | 40,191307 | $2{,}8{\times}10^{12}$ |
| 2 | [0,04; 0,14] | 0,1 | 0,539 | $3{,}35{\times}10^{-3}$ | 100,003377 | 40,001297 | $1{,}76{\times}10^{12}$ |
| 3 | [0,04; 0,24] | 0,2 | 0,951 | $3{,}54{\times}10^{-5}$ | 100,000035 | 40,000013 | $1{,}1{\times}10^{10}$ |
| 4 | [0,04; 0,34] | 0,3 | 1,432 | $1{,}65{\times}10^{-5}$ | 100,000016 | 40,000006 | $7{,}68{\times}10^{8}$ |
| 5 | [0,04; 0,44] | 0,4 | 1,991 | $2{,}62{\times}10^{-7}$ | 100,000000 | 40,000000 | $2{,}43{\times}10^{8}$ |
| 6 | [0,04; 0,54] | 0,5 | 2,637 | $5{,}88{\times}10^{-7}$ | 100,000000 | 40,000000 | $9{,}4{\times}10^{7}$ |
| 7 | [0,04; 0,64] | 0,6 | 3,38 | $1{,}84{\times}10^{-7}$ | 100,000000 | 40,000000 | $4{,}2{\times}10^{7}$ |
| 8 | [0,04; 0,74] | 0,7 | 4,22 | $2{,}02{\times}10^{-7}$ | 99,999999 | 39,999999 | $2{,}1{\times}10^{7}$ |
| 9 | [0,04; 0,84] | 0,8 | 5,139 | $4{,}99{\times}10^{-8}$ | 100,000000 | 40,000000 | $1{,}2{\times}10^{7}$ |
| 10 | [0,04; 0,94] | 0,9 | 6,116 | $5{,}82{\times}10^{-8}$ | 100,000000 | 40,000000 | $7{,}1{\times}10^{6}$ |
| 11 | [0,04; 1,04] | 1,0 | 7,113 | $4{,}92{\times}10^{-9}$ | 100,000000 | 40,000000 | $4{,}77{\times}10^{6}$ |

Обратим внимание на то, что, как и следовало ожидать, системы, на основе которых реализуются алгоритмы инвариантности в рассматриваемом общем случае, так же как в случае измерительных систем заданной структуры, оказываются неустойчивыми. Однако, решению этой проблемы посвящен весь предыдущий параграф, поэтому здесь на этом вопросе останавливаться не будем.

## 4.3. ОДНОКАНАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### Постановка задачи

При попытке использования принципа инвариантности в динамике ИС с распределенными параметрами, конкретно ИС, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, мы сталкиваемся с таким большим количеством различных математических моделей, что попытки взять за основу исследования математическую модель, сколько-нибудь общую для теории измерения в целом, оказываются заведомо обреченными. Более того, если даже обратиться к какой-либо конкретной области измерения, то и в этом случае разнообразие физических принципов функционирования и конструктивных особенностей ИС приводит к такому большому числу принципиально различных математических моделей, что практически полезные результаты можно получить, лишь удовлетворившись рассмотрением математических моделей, являющихся общими хотя бы для некоторых групп ИС.

В связи со сказанным мы обратимся к области измерений, в которой параметрические эффекты проявляются наиболее сильно, поэтому любые средства уменьшения влияния этих эффектов крайне желательны. Такой областью измерений является термометрия, причем наиболее сложная ситуация имеет место при измерении температур потоков жидкостей и газов.

Физические и математические модели современных систем измерения температур жидкостей и газов, которые обычно называют термоприемниками, хорошо известны [10]. Из этой области мы выбираем для исследования группу термоприемников, имеющих формы канонических тел, математические модели поведения которых приведены в первой главе.

Изложение процессов и результатов построения алгоритмов инвариантности для термоприемников указанных форм оказываются настолько единообразными, что вполне достаточно ограничиться подробным изложением процесса и результата построения алгоритма инвариантности только для термоприемников, имеющих форму неограниченной пластины.

Математически задача взаимодействия среды, температуру которой необходимо измерить, и термоприемника в форме неограниченной пластины формулируется в виде:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \ -R < x < +R, \tag{30}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=-R} + H(t)\left[\theta(t) - u(x,t)\big|_{x=-R}\right] = 0, \tag{31}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=R} + H(t)\left[u(x,t)\big|_{x=R} - \theta(t)\right] = 0, \tag{32}$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_0, \tag{33}$$

где $H(t) = \dfrac{\alpha_k(t)}{\lambda}$; $a_0^2$, $\lambda$ – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности материала термоприемника; $\theta(t)$ – измеряемая температура среды; $\alpha_k(t)$ – коэффициент конвективного теплообмена между термоприемником и средой; $R$ – половина толщины пластины.

Так как, в соответствии с (31) и (32), теплообмен между поверхностями плоского термоприемника и средой происходит одинаково, то, с учетом (33), можно считать, что распределение температуры внутри термоприемника является симметричным. С учетом сказанного, условие (31) можно заменить условием симметрии

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0. \tag{34}$$

Уравнения для необходимых нам неизвестных функций, получаемые на основе анализа и использования задачи (30)–(34) при переменном во времени параметре $H(t)$, точные решения которых, как правило, не могут быть получены, должны в частном случае постоянства параметра $H(t) \equiv H = \text{const}$ приводить к решениям для указанных функций, которые получаются при непосредственном точном решении исходной задачи (30)–(34) при постоянном значении параметра $H(t) \equiv H$.

Поэтому предварительно приведем результаты точного решения задачи (30)–(34) при постоянном значении параметра $H$, которые понадобятся нам в дальнейшем. Как известно, простейшим методом точного решения указанной задачи является операционный метод [10].

Осуществляя преобразование Лапласа над всеми составляющими задачи (30)–(34) в предположении постоянства параметра $H(t) \equiv H = \text{const}$, запишем ее в образах:

$$\frac{a_0^2 d^2 U(x,s)}{dx^2} - sU(x,s) + \frac{1}{s}u_0 = 0, \tag{35}$$

$$\frac{dU(0,s)}{dx} = 0, \tag{36}$$

$$\frac{dU(R,s)}{dx} + H\,[U(R,s) - \theta_L(s)] = 0, \tag{37}$$

где $U(x, s)$ – образ функции (оригинала) $u(x, t)$; $\theta_L(s)$ – образ функции $\theta(t)$.

Решение уравнения (35) имеет вид:

$$U(x,s) - \frac{u_0}{s} = A\,\mathrm{ch}\frac{\sqrt{s}}{a_0}x + B\,\mathrm{sh}\frac{\sqrt{s}}{a_0}x.$$

Из условия симметрии (36) следует, что $B = 0$, поэтому

$$U(x,s) - \frac{u_0}{s} = A\,\mathrm{ch}\frac{\sqrt{s}}{a_0}x. \tag{38}$$

Подставляя (38) в условие (37), находим выражение для $A$:

$$A = \frac{\theta_L(s) - \dfrac{u_0}{s}}{\mathrm{ch}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R + \dfrac{1}{H}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}\mathrm{sh}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}.$$

Само решение в образах приобретает вид:

$$U(x,s) - \frac{u_0}{s} = \frac{\left[\theta_L(s) - \dfrac{u_0}{s}\right]\mathrm{ch}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}x}{\mathrm{ch}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R + \dfrac{1}{H}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}\mathrm{sh}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}. \tag{39}$$

При переходе к оригиналам ограничимся рассмотрением частного случая, а именно, пусть температура среды постоянна, т. е. $\theta(t) \equiv \theta = \text{const}$. Тогда $\theta_L(s) = \frac{1}{s}\theta$ и для решения в оригиналах получаем [10]:

$$\frac{u(x,t) - u_0}{\theta - u_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\mu_n \frac{x}{R} \times \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a_0^2 t}{R^2}\right), \tag{40}$$

где $A_n = \dfrac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n}$, $\mu_n$ – корни уравнения $\mathrm{ctg}\,\mu = \dfrac{\mu}{HR}$.

Для дальнейшего нам нужны среднеповерхностная температура в образах, т. е. $U(R,s)$ и среднеобъемная температура в образах, т. е.

$$U_v(s) = \frac{1}{R}\int_0^R U(x,s)\,dx.$$

Из решения в образах (39) имеем:

$$U(R,s) - \frac{u_0}{s} = \frac{\left[\theta_L(s) - \frac{u_0}{s}\right]\operatorname{ch}\frac{\sqrt{s}}{a_0}R}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{s}}{a_0}R + \frac{1}{H}\frac{\sqrt{s}}{a_0}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{s}}{a_0}R}. \qquad (41)$$

$$U_v(s) - \frac{u_0}{s} = \frac{\left[\theta_L(s) - \frac{u_0}{s}\right]}{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{s}}{a_0}R + \frac{1}{H}\frac{\sqrt{s}}{a_0}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{s}}{a_0}R} \times \frac{\operatorname{sh}\frac{\sqrt{s}}{a_0}R}{\frac{\sqrt{s}}{a_0}R}. \qquad (42)$$

В заключении постановки задачи напомним сказанное в первой главе о рассматриваемой второй модели ИС с распределенными параметрами, а именно, термоприемники, имеющие форму канонических тел, часто конструируются в двух вариантах. В одном варианте регистрирующими элементами являются сами электропроводящие канонические тела. В этом варианте исполнения показания термоприемников соответствуют их среднеобъемным температурам $u_v(t)$. В другом варианте канонические тела, выполненные из неэлектропроводящих материалов, используют в качестве, так называемых, подложек, на которые наносится тончайший слой электропроводящих пленок, которые служат регистрирующими элементами. При этом, ввиду пренебрежимо малой толщины пленки, считается, что по толщине пленки отсутствуют градиенты температур, и температура пленки совпадает с температурой поверхности подложки. Следовательно, во втором варианте исполнения показания термоприемников соответствуют температуре пленки или, что то же самое, температуре поверхности канонических тел.

## Взаимосвязь между показаниями измерительных систем и измеряемым сигналом

Построение алгоритма инвариантности основано на использовании уравнения, устанавливающего взаимосвязь между показаниями измерительной системы и измеряемым сигналом.

Выше отмечалось, что в первом варианте исполнения термоприемников канонических форм регистрируется среднеобъемная температура $u_v(t)$ электропроводящего канонического тела. Следовательно, для этой группы термоприемников необходимо найти уравнение, устанавливающее взаимосвязь между среднеобъемными температурами $u_v(t)$ термоприемников и измеряемой температурой среды $\theta(t)$.

Во втором варианте исполнения термоприемников канонических форм регистрируется температура поверхности канонического тела – температура электропроводящей пленки. Следовательно, для этой группы термоприемников необходимо найти уравнение, устанавливающее взаимосвязь между температурой поверхности $u_п(t) = u(R, t)$ термоприемников и измеряемой температурой среды $\theta(t)$. Поиск указанных двух уравнений и является нашей ближайшей целью.

### Уравнения взаимосвязи между температурой поверхности и среднеобъемной температурой канонических тел

Найдем два уравнения, устанавливающие указанную взаимосвязь. Обращаясь к схеме решения в образах задачи (30)–(33), имеем

$$U(x,s)-\frac{u_0}{s}=A\,\mathrm{ch}\frac{\sqrt{s}}{a_0}x.$$

Обратим внимание: это решение имеет место независимо от того, является ли параметр $H(t)$ функцией времени или нет.

Запишем это решение для образа температуры поверхности канонического тела $U_п(s) = U(R, s)$:

$$U_п(s)-\frac{u_0}{s}=A\,\mathrm{ch}\frac{\sqrt{s}}{a_0}R. \tag{43}$$

Далее, усредним приведенное решение в образах по объему тела:

$$U_v(s)-\frac{u_0}{s}=A\frac{1}{\frac{\sqrt{s}}{a_0}R}\times\mathrm{sh}\frac{\sqrt{s}}{a_0}R. \tag{44}$$

Взяв отношение левых и правых частей (43) и (44), получим:

$$\frac{U_{\text{п}}(s)-\dfrac{u_0}{s}}{U_v(s)-\dfrac{u_0}{s}}=\frac{\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R\times\operatorname{ch}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}{\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}. \tag{45}$$

Вывод, имеющий важное значение для дальнейшего, заключается в том, что отношение в левой части (45) оказалось не зависящим от величины $A$, а следовательно, не зависящим ни от граничного условия, ни, в частности, от параметра $H(t)$.

Выражение (45) можно рассматривать как первое уравнение, устанавливающее взаимосвязь между образами температуры на поверхности тела и среднеобъемной температурой тела. Оно может быть использовано либо в виде

$$U_{\text{п}}(s)-\frac{u_0}{s}=\frac{\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R\times\operatorname{ch}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}{\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}\left[U_v(s)-\frac{u_0}{s}\right], \tag{46}$$

либо в виде

$$U_v(s)-\frac{u_0}{s}=\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}{\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R\times\operatorname{ch}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}\times\left[U_{\text{п}}(s)-\frac{u_0}{s}\right]. \tag{47}$$

Теперь необходимо перейти в выражениях (46), (47) к оригиналам. Этот переход осложнен тем, что дроби в правых частях (46), (47), являющиеся сомножителями к $\left[U_v(s)-\dfrac{u_0}{s}\right]$ и $\left[U_{\text{п}}(s)-\dfrac{u_0}{s}\right]$ соответственно, не являются обобщенными полиномами. Для того чтобы эти сомножители оказались обобщенными полиномами, запишем соотношения (46) и (47) в виде:

$$\frac{1}{s}\left[U_{\text{п}}(s)-\frac{u_0}{s}\right]=F(s)\left[U_v(s)-\frac{u_0}{s}\right] \tag{48}$$

$$\frac{1}{s}\left[U_v(s)-\frac{u_0}{s}\right]=\Phi(s)\left[U_{\text{п}}(s)-\frac{u_0}{s}\right], \tag{49}$$

где $F(s) = \dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}{s \times \dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}{\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}}$, $\Phi(s) = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}{\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}}{s \times \operatorname{ch}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}$.

Функции $F(s)$, $\Phi(s)$ представляют собой отношение двух обобщенных полиномов и условия теоремы разложения при переходе к оригиналам выполнены. Пусть функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ являются оригиналами образов $F(s)$ и $\Phi(s)$, т. е. $L^{-1}F(s) = f(t)$, $L^{-1}\Phi(s) = \varphi(t)$, где L – символ преобразования Лапласа. Тогда, переходя в (48), (49) к оригиналам, получим:

$$\int_0^t [u_\text{п}(\tau) - u_0]\, d\tau = \int_0^t f(t-\tau)[u_v(\tau) - u_0]\, d\tau \tag{50}$$

$$\int_0^t [u_v(\tau) - u_0]\, d\tau = \int_0^t \phi(t-\tau)[u_\text{п}(\tau) - u_0]\, d\tau. \tag{51}$$

Таким образом, выражения в оригиналах (50), (51) являются аналогами выражений (46), (47).

Для завершения изложения, относящегося к первому уравнению, устанавливающему взаимосвязь между среднеобъемной температурой канонических тел и температурой на их поверхности, осталось найти фигурирующие в (50) и (51) оригиналы $f(t)$ и $\varphi(t)$.

Найти оригинал $\varphi(t)$ по образу $\Phi(s)$ можно, воспользовавшись существующей таблицей преобразования Лапласа [10], в соответствии с которой

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{k \times s \times \sqrt{s}} th(k\sqrt{s})\right\} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2} \times e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 \times t}{4k^2}}.$$

В нашем случае $k = \dfrac{R}{a_0}$, поэтому выражение для оригинала $\varphi(t)$ имеет вид

$$\phi(t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2} \times e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4} \times \frac{a_0^2 t}{R^2}}. \tag{52}$$

Кстати, при $t = 0$ в правой части получается сходящийся ряд, сумма которого равна единице. Поэтому при $t = 0$ имеем $\varphi(0) = 0$.

Обратимся к определению оригинала $f(t)$. Запишем выражение для $f(t)$ в виде:

$$f(t) = \mathrm{L}^{-1} F(s) = \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{F_1(s)}{F_2(s)}\right],$$

где $F_1(s) = \operatorname{ch}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R$, $\quad F_2(s) = \dfrac{s \times \operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}{\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}$.

В соответствии с теоремой разложения имеем:

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{F_1(s)}{F_2(s)}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_1(s_n)}{F_2'(s_n)} \times e^{s_n t},$$

где $s_n$ – корни полинома $F_2(s)$.

Находим корни полинома $F_2(s)$:

$$F_2(s) = 0, \quad s \times \operatorname{sh}\frac{\sqrt{s}}{a_0}R = 0,$$

откуда имеем простой корень $s = 0$ и бесчисленное множество корней $s_n$, определяемых из соотношения:

$$\operatorname{sh}\frac{\sqrt{s}}{a_0}R = 0, \quad \frac{1}{i}\sin\left(i\frac{\sqrt{s}}{a_0}R\right) = 0, \quad i\frac{\sqrt{s}}{a_0}R = n\pi = \mu_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Теперь находим выражение для производной функции $F_2(s)$:

$$F_2'(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R} \times \operatorname{sh}\frac{\sqrt{s}}{a_0}R + \operatorname{ch}\frac{\sqrt{s}}{a_0}R\right).$$

Учитывая, что

$$\frac{\sqrt{s_n}}{a_0}R = \frac{1}{i}\mu_n, \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{i}\sin(ix), \quad \operatorname{ch} x = \cos(ix), \quad \operatorname{sh}(ix) = i\sin x, \quad \operatorname{ch}(ix) = \cos x,$$

$$s_n = -n^2\pi^2\frac{a_0^2}{R^2},$$

получим

$$\lim_{s\to 0}\frac{F_1(s)}{F_2'(s)} = 1, \qquad \lim_{s\to s_n}\frac{F_1(s)}{F_2'(s)} = 2.$$

Следовательно, в соответствии с теоремой разложения имеем выражение для оригинала $f(t)$:

$$f(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 a_0^2 t}{R^2}}. \qquad (53)$$

Таким образом, первое уравнение, устанавливающее взаимосвязь между среднеобъемной температурой канонических тел и температурой на их поверхности, представлено соотношением (50) или (51), в которых оригиналы $\varphi(t)$ и $f(t)$ определятся выражениями (52) и (53) соответственно.

Теперь найдем второе уравнение, устанавливающее взаимосвязь между среднеобъемной температурой $u_v(t)$ термоприемника и температурой на его поверхности $u_п(t) = u(R, t)$. Усредним по объему все члены уравнения теплопроводности (30). Это даст:

$$\frac{\partial u_v(t)}{\partial t} = \frac{a_0^2}{R}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0}^{x=R}.$$

Учитывая граничные условия (32) и (34), получим

$$\frac{du_v(t)}{dt} + \frac{a_0^2}{R} H(t)\,[u_п(t) - \theta(t)] = 0. \qquad (54)$$

Это и есть второе искомое уравнение.

Введя обозначения $u_п(t) - u_0 = \upsilon_п(t)$, $u_v(t) - u_0 = \upsilon_v(t)$, $\theta(t) - u_0 = \theta_c(t)$, запишем найденные соотношения (50), (51) и (54) в виде:

$$\int_0^t \upsilon_п(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\,\upsilon_v(\tau)\,d\tau \qquad (55)$$

$$\int_0^t \upsilon_v(\tau)\,d\tau = \int_0^t \phi(t-\tau)\,\upsilon_п(\tau)\,d\tau \qquad (56)$$

$$\frac{d\upsilon_v(t)}{dt} + \frac{a_0^2}{R} H(t)\,[\upsilon_п(t) - \theta_c(t)] = 0. \qquad (57)$$

Теперь вернемся к указанной выше основной задаче, а именно, к отысканию уравнений, устанавливающих взаимосвязь между показаниями ИС и измеряемым сигналом. Как ясно из вышеизложенного, необходимо найти два независимых уравнения, одно из которых относится к термоприемникам канонических форм в первом исполнении и должно устанавливать взаимосвязь между среднеобъемной температурой $u_v(t)$ и измеряемым сигналом $\theta_c(t)$ –

температурой среды, другое уравнение относится к термоприемникам канонических форм во втором исполнении и должно устанавливать взаимосвязь между температурой поверхности $u_п(t)$ термоприемника и измеряемой температурой среды.

В дальнейшем термоприемники канонических форм в первом исполнении будем называть термоприемниками первой группы, а термоприемники канонических форм во втором исполнении будем называть термоприемниками второй группы. Разделим обе части (57) на $a_0^2 H(t)/R,$ обозначим $\alpha(t) = R / a_0^2 H(t)$ и проинтегрируем полученное соотношение в пределах от 0 до $t$. Это даст:

$$\int_0^t \alpha(\tau) \frac{d\upsilon_v(\tau)}{d\tau}\, d\tau - \int_0^t \theta_c(\tau)\, d\tau + \int_0^t \upsilon_п(\tau)\, d\tau = 0.$$

Вместо третьего слагаемого подставим его выражение из (55), получим

$$\int_0^t \alpha(\tau) \frac{d\upsilon_v(\tau)}{d\tau}\, d\tau - \int_0^t \theta_c(\tau)\, d\tau = -\int_0^t f(t-\tau)\, \upsilon_v(\tau)\, d\tau. \tag{58}$$

Это и есть окончательная форма искомого уравнения, устанавливающего взаимосвязь между показаниями термоприемников первой группы и измеряемой температурой среды.

Уравнение (58) можно рассматривать также как уравнение для среднеобъемной температурой $\upsilon_V(t)$ при переменном во времени параметре $H(t)$. Получение точного решения указанного уравнения относительно $\upsilon_V(t)$ представляет собой такую же сложную задачу, как и решение исходной задачи (30)–(33) при переменном во времени параметре $H(t)$. Заметим, однако, что с точки зрения построения алгоритмов инвариантности этот факт не имеет принципиального значения, так как построение указанных алгоритмов не требует решения упомянутых уравнений.

Теперь построим уравнение, устанавливающее взаимосвязь между показаниями термоприемников второй группы и измеряемой температурой среды. Проинтегрируем все составляющие уравнения (57) в пределах от 0 до $t$. Это даст:

$$\upsilon_v(t) + \frac{a_0^2}{R} \int_0^t H(\tau)\, \upsilon_п(\tau) d\tau - \frac{a_0^2}{R} \int_0^t H(\tau)\, \theta_c(\tau)\, d\tau = 0. \tag{59}$$

Пользуясь формулой Лейбница, продифференцируем обе части уравнения (56). Тогда, учитывая, что $\varphi(0) = 0$, получим

$$\upsilon_v(t)=\int_0^t \frac{d}{dt}[\phi(t-\tau)]\,\upsilon_\text{п}(\tau)d\tau. \tag{60}$$

Подставив выражение для $\upsilon_v(t)$ из (60) в (59), имеем:

$$\int_0^t a(\tau)\upsilon_\text{п}(\tau)d\tau-\int_0^t a(\tau)\theta_c(\tau)d\tau=-\int_0^t \frac{d}{dt}[\phi(t-\tau)]\,\upsilon_\text{п}(\tau)d\tau=0. \tag{61}$$

где $a(t)=\dfrac{a_0^2H(t)}{R}$.

Можно показать справедливость соотношения

$$\int_0^t \frac{d}{dt}[\phi(t-\tau)]\,\upsilon_\text{п}(\tau)d\tau=\int_0^t \phi(t-\tau)\frac{d}{d\tau}[\upsilon_\text{п}(\tau)]\,d\tau.$$

Поэтому, вместо уравнения (61), можно пользоваться эквивалентным ему уравнением:

$$\int_0^t a(\tau)\upsilon_\text{п}(\tau)d\tau-\int_0^t a(\tau)\theta_c(\tau)d\tau=-\int_0^t \phi(t-\tau)\frac{d}{d\tau}[\upsilon_\text{п}(\tau)]\,d\tau. \tag{62}$$

Уравнение (61) и есть искомое уравнение, устанавливающее взаимосвязь между показаниями термоприемников второй группы и измеряемой температурой среды.

Уравнение (61) можно рассматривать также как уравнение для определения температуры поверхности термометрического тела $\upsilon_\text{п}(t)$ при переменном во времени параметре $H(t)$. Получение точного решения этого уравнения относительно $\upsilon_\text{п}(t)$ также проблематично.

Теперь, когда построены оба основных уравнения (58) и (61), устанавливающих взаимосвязь между показаниями термоприемников обеих групп и измеряемой температурой среды при переменном параметре $H(t)$, необходимо выяснить, вытекают ли из решений этих уравнений, как частные случаи, результаты (41) и (42), полученные ранее для канонических тел при $H(t) = H =$ $=$ const.

Пусть параметр $H(t)$ постоянен во времени, т. е. $H(t) \equiv H =$ $=$ const. Следовательно, $\alpha(t) \equiv \alpha =$ const, $a(t) \equiv a =$ const. Тогда, осуществляя преобразование Лапласа над уравнением для среднеобъемных температур (58), получим:

$$\alpha\upsilon_{v\text{L}}(s)-\frac{1}{s}\theta_{c\text{L}}(s)=-F(s)\,\upsilon_{v\text{L}}(s),$$

где $\upsilon_{v\text{L}}(s)$, $\theta_{c\text{L}}(s)$ – образы функций $\upsilon_v(t)$, $\theta_c(t)$ соответственно.

Из последнего соотношения находим выражение для образа среднеобъемной температуры $\upsilon_{vL}(s)$:

$$\upsilon_{vL}(s) = \frac{\theta_{cL}(s)}{\alpha + F(s)} \times \frac{1}{s},$$

или после подстановки выражения для $F(s)$ и упрощения:

$$U_v(s) - \frac{u_0}{s} = \frac{\theta_L(s) - \dfrac{u_0}{s}}{\operatorname{ch}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R + \dfrac{1}{H}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0} \times \operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R} \times \frac{\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}{\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}. \qquad (63)$$

Совершенно аналогично осуществим преобразование Лапласа над уравнением для температуры поверхности термоприемника (61) и найдем выражение для образа температуры поверхности термоприемника. Тогда с учетом выражения для $\Phi(s)$ получим:

$$U_п(s) - \frac{u_0}{s} = \frac{\left[\theta_L(s) - \dfrac{u_0}{s}\right]\operatorname{ch}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}{\operatorname{ch}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R + \dfrac{1}{H}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0} \times \operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{s}}{a_0}R}. \qquad (64)$$

Сравнивая выражения (63) с (42) и (64) с (41), замечаем, что сравниваемые выражения совпадают. Следовательно, если в найденных общих уравнениях (58) и (61), справедливых при переменном во времени параметре $H(t)$, положить $H(t) \equiv H = \text{const}$, то получающиеся выражения (63) и (64) для образов среднеобъемной температуры $U_V(s)$ и температуры на поверхности $U_п(s)$ термоприемника совпадают с соответствующими выражениями (42) и (41), полученными в результате непосредственного точного решения исходной краевой задачи (30)–(33) при $H(t) \equiv H = \text{const}$. Очевидно, сказанное справедливо также и для оригиналов среднеобъемных температур и температур поверхности термоприемников.

## Построение алгоритмов, инвариантных к параметрическим эффектам

В предыдущем изложении получены два общих уравнения, характеризующие взаимосвязь между показаниями измерительных систем с распределенными параметрами и измеряемым сигналом: уравнение (58), описывающее взаимосвязь между среднеобъемной температурой термоприемника и измеряемой температурой среды (термоприемники первой группы), и уравнение (61), описывающее взаимосвязь между температурой поверхности термоприемника и измеряемой температурой среды (термоприемники второй группы).

При построении алгоритмов, инвариантных к параметрическим эффектам, каждую из указанных групп измерительных систем рассмотрим отдельно.

Не теряя общности дальнейших результатов, можно положить начальное условие нулевым, т. е. $u_0 = 0$, тогда $\upsilon_v(t) = u_v(t)$, $\upsilon_п(t) = u_п(t)$, $\theta_c(t) = \theta(t)$. Далее при построении алгоритмов инвариантности мы будем опускать индексы «$v$», «п» и обозначать выходной сигнал $u(t)$, имея в виду, однако, что если алгоритм строится для термоприемников первой группы, то $u(t)$ означает среднеобъемную температуру термоприемников, а если алгоритм строится для термоприемников второй группы, то $u(t)$ означает температуру поверхности термоприемников. Кроме того, измеряемую температуру среды $\theta(t)$, т. е. входной сигнал, как и в предыдущих параграфах, будем обозначать $X(t)$. С учетом изложенного приступим к построению алгоритмов, инвариантных к параметрическим эффектам.

### Алгоритм инвариантности для термоприемников первой группы

Для этой группы ИС с распределенными параметрами справедливо уравнение (58). После интегрирования по частям в первом слагаемом левой части и учета указанных выше обозначений это уравнение принимает вид:

$$\alpha(t)u(t) - \int_0^t \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau} u(\tau)d\tau - \int_0^t X(\tau)d\tau = -\int_0^t f(t-\tau)u(\tau)d\tau. \quad (65)$$

Задача заключается в построении на основе соотношения (65) такого алгоритма восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ по показаниям $u(t)$ измерительной системы, который был бы инвариантным к параметрическим эффектам, т. е. не зависел бы от величины переменного во времени параметра $\alpha(t)$.

Пусть, как и ранее, $\tilde{\alpha}(t)$, $\tilde{X}(t)$ являются оценками неизвестных $\alpha(t)$, $X(t)$. Тогда выражение для невязки примет вид

$$I_{\text{int}\,p}(t) = \tilde{\alpha}(t)u(t) - \int_0^t \frac{d\tilde{\alpha}(\tau)}{d\tau} u(\tau)d\tau - \int_0^t \tilde{X}(\tau)d\tau + \int_0^t f(t-\tau)u(\tau)d\tau. \quad (66)$$

Как и в п. 3.1 положим, что оценки $\tilde{\alpha}(t)$, $\tilde{X}(t)$ описываются алгебраическими многочленами:

$$\tilde{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^{n1} \tilde{\alpha}_i \times t^{i-1}, \quad \tilde{X}(t) = \sum_{j=1}^{n2} \tilde{\beta}_j \times t^{j-1},$$

тогда невязка (66) запишется в виде

$$I_{\text{int } p}(t) = \sum_{i=1}^{n1} \left\{ t^{i-1} u(t) - (i-1) \int_0^t \tau^{i-2} u(\tau) d\tau \right\} \tilde{\alpha}_i - \sum_{j=1}^{n2} \frac{1}{j} t^j \tilde{\beta}_j + \int_0^t f(t-\tau) u(\tau) d\tau. \quad (67)$$

Как и везде ранее, вместо обозначений неизвестных $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_j$, введем единое обозначение для неизвестных:

$$\tilde{\alpha}_i = X_i,\ i = 1, ..., n1; \quad \tilde{\beta}_j = X_{n1+j},\ j = 1, ..., n2.$$

Тогда невязка приобретает вид

$$I_{\text{int } p}(t) = \sum_{i=1}^{n1} \left\{ t^{i-1} u(t) - (i-1) \int_0^t \tau^{i-2} u(\tau) d\tau \right\} X_i -$$

$$\sum_{i=n1+1}^{n1+n2} \frac{1}{i-n1} t^{i-n1} X_i + \int_0^t f(t-\tau) u(\tau) d\tau, \quad (68)$$

в котором фигурируют $(n1 + n2)$ неизвестных $X_i$.

Для составления основной СЛАУ запишем невязку (68) для $(n1 + n2 + 1)$ точек $t_1, ..., t_{n1+n2+1}$, потребовав равенства нулю невязки в указанных точках. Затем, начиная с уравнения, записанного для точки $t = t_2$, вычтем из каждого уравнения предыдущее уравнение, это даст следующую СЛАУ порядка $(n1 + n2)$ для определения $(n1 + n2)$ неизвестных $X_i$:

$$\sum_{i=1}^{n1} \left\{ t_{k+1}^{i-1} u(t_{k+1}) - t_k^{i-1} u(t_k) - (i-1) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \tau^{i-2} u(\tau) d\tau \right\} X_i -$$

$$\sum_{i=n1+1}^{n1+n2} \left\{ \frac{1}{i-n1} \left[ t_{k+1}^{i-n1} - t_k^{i-n1} \right] \right\} X_i =$$

$$\int_0^{t_k} f(t_k - \tau) u(\tau) d\tau - \int_0^{t_{k+1}} f(t_{k+1} - \tau) u(\tau) d\tau, \quad k = 1, ..., (n1+n2).$$

Пусть $T0$ – длина интервала восстановления измеряемого сигнала $X(t)$, тогда шаг дискретности $T$ равен $T0/(n1 + n2)$ и $t_k = t_1 + T(k-1)$, $k = 1, ..., (n1 + n2 + 1)$.

Учитывая сказанное, запишем приведенную СЛАУ в виде

$$\sum_{i=1}^{n1}\Big\{ (t_1+Tk)^{i-1}\times u(t_1+Tk)-[t_1+T(k-1)]^{i-1}\times u[t_1+T(k-1)]-$$

$$(i-1)\int\limits_{t_1+T(k-1)}^{t_1+Tk}\tau^{i-2}u(\tau)d\tau\Big\}\,X_i-\sum_{i=n1+1}^{n1+n2}\Big\{\frac{1}{i-n1}\big[(t_1+Tk)^{i-n1}-[t_1+T(k-1)]^{i-n1}\big]\Big\}\,X_i=$$

$$\int\limits_0^{t_1+T(k-1)} f\,[t_1+T(k-1)-\tau]\,u(\tau)d\tau-\int\limits_0^{t_1+Tk} f\,[t_1+Tk-\tau]\,u(\tau)d\tau. \qquad (69)$$

Наконец, введя обозначения

$$I(k,i)=(i-1)\int\limits_{t_1+T(k-1)}^{t_1+Tk}\tau^{i-2}u(\tau)d\tau,$$

$$\Psi_k=\int\limits_0^{t_1+Tk} f\,[t_1+Tk-\tau]\,u(\tau)d\tau-\int\limits_0^{t_1+T(k-1)} f\,[t_1+T(k-1)-\tau]\,u(\tau)d\tau,$$

запишем приведенную СЛАУ в стандартной форме:

$$\sum_{i=1}^{n1+n2}A_{ki}X_i=B_k,\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,(n1+n2), \qquad (70)$$

где $B_k = -\Psi_k$.

$$A_{ki}=\begin{cases}(t_1+Tk)^{i-1}u(t_1+Tk)-[t_1+T(k-1)]^{i-1}u[t_1+T(k-1)]-I(k,i), & i\le n1\\ -\dfrac{1}{i-n1}\Big[(t_1+Tk)^{i-n1}-[t_1+T(k-1)]^{i-n1}\Big], & i>n1\end{cases}$$

Это и есть основная СЛАУ алгоритма инвариантности при применении одноканального принципа инвариантности к рассматриваемым здесь измерительным система с распределенными параметрами – к термоприемникам первой группы.

## Алгоритм инвариантности для термоприемников второй группы

Для этой группы ИС с распределенными параметрами справедливо уравнение (62), которое теперь можно записать в виде

$$\int\limits_0^t a(\tau)u(\tau)d\tau-\int\limits_0^t a(\tau)X(\tau)d\tau=-\int\limits_0^t \phi(t-\tau)\frac{d}{d\tau}u(\tau)d\tau. \qquad (71)$$

На основе уравнения (71) необходимо построить такой алгоритм восстановления измеряемого сигнала $X(t)$ по показаниям $u(t)$ измерительной системы, который не зависел бы от величины переменного во времени параметра $a(t)$.

Пусть $\tilde{a}(t)$, $\tilde{X}(t)$ являются оценками неизвестных $a(t)$, $X(t)$ соответственно, тогда выражение для невязки примет вид

$$I_{\text{int }p}(t)=\int_0^t \tilde{a}(\tau)u(\tau)d\tau-\int_0^t \tilde{a}(\tau)\tilde{X}(\tau)d\tau+\int_0^t \phi(t-\tau)\frac{d}{dt}u(\tau)d\tau. \qquad (72)$$

Далее для выражений оценок используем алгебраические многочлены:

$$\tilde{a}(t)=\sum_{i=1}^{n1}\tilde{\alpha}_i \times t^{i-1}, \quad \tilde{X}(t)=\sum_{j=1}^{n2}\tilde{\beta}_j \times t^{j-1},$$

где $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_j$ – неизвестные постоянные величины, причем $\tilde{\alpha}_i$ имеет теперь иной смысл, чем в предыдущем случае.

Теперь невязка (72) запишется в виде

$$I_{\text{int }p}(t)=\sum_{i=1}^{n1}\left\{\int_0^t \tau^{i-1}u(\tau)d\tau\right\}\tilde{\alpha}_i-\sum_{i=1}^{n1}\sum_{j=1}^{n2}\left\{\frac{1}{i+j-1}t^{i+j-1}\right\}\tilde{\alpha}_i\tilde{\beta}_j+$$

$$+\int_0^t \phi(t-\tau)\frac{d}{d\tau}u(\tau)d\tau. \qquad (73)$$

При рассмотрении второй группы ИС с распределенными параметрами реализуется описанная ранее вторая схема построения алгоритма инвариантности. В указанной схеме, вследствие нелинейного характера выражения (73) относительно неизвестных $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_j$, необходимо ввести новую группу неизвестных величин, что позволит свести основную нелинейную систему к некоторой линейной системе. Введение новой группы неизвестных рассмотрим для конкретных значений $n1$, $n2$. Пусть $n1 = 4$, $n2 = 4$. Тогда невязка примет вид

$$I_{\text{int }p}(t)=\sum_{i=1}^{n1}\left\{\int_0^t \tau^{i-1}u(\tau)d\tau\right\}\tilde{\alpha}_i-t\tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_1-\frac{1}{2}t^2(\tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_2+\tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_1)-$$

$$\frac{1}{3}t^3(\tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_3+\tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_2+\tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_1)-\frac{1}{4}t^4(\tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_4+\tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_3+\tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_2+\tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_1)-$$

$$\frac{1}{5}t^5(\tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_4+\tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_2+\tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_2)-\frac{1}{6}t^6(\tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_4+\tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_3)-\frac{1}{7}t^7\tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_4+$$

$$+\int_0^t \phi(t-\tau)\frac{d}{d\tau}u(\tau)d\tau.$$

Новые неизвестные $\gamma_1, \ldots, \gamma_7$ введем в соответствии с соотношениями:

$$\gamma_1 = \tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_1, \quad \gamma_2 = \tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_2 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_1, \quad \gamma_3 = \tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_3 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_2 + \tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_1,$$

$$\gamma_4 = \tilde{\alpha}_1\tilde{\beta}_4 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_3 + \tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_2 + \tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_1, \quad \gamma_5 = \tilde{\alpha}_2\tilde{\beta}_4 + \tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_2 + \tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_2,$$

$$\gamma_6 = \tilde{\alpha}_3\tilde{\beta}_4 + \tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_3, \quad \gamma_7 = \tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_4.$$

Число новых неизвестных равно $n3 = n1 + n2 - 1 = 7$. Теперь общее число неизвестных $\alpha_1, \ldots, \alpha_4, \gamma_1, \ldots, \gamma_7$ равно $n1 + n3 = 2n1 + n2 - 1 = 11$, т. е. на $(n1 - 1) = 3$ больше, чем число исходных неизвестных $\tilde{\alpha}_i$, $i = 1, \ldots, 4$; $\beta_j$, $j = 1, \ldots, 4$.

После введения новой группы неизвестных невязка принимает вид

$$I_{\text{int}\,p}(t) = \sum_{i=1}^{n1}\left\{\int_0^t \tau^{i-1}u(\tau)d\tau\right\}\tilde{\alpha}_i - \sum_{j-1}^{n3}\frac{1}{j}t^j\gamma_j + \int_0^t \phi(t-\tau)\frac{d}{d\tau}u(\tau)d\tau.$$

Введем единое обозначение неизвестных:

$$\tilde{\alpha}_i = X_i,\ i = 1, \ldots, n1; \quad \gamma_j = X_{j+n1},\ j = 1, \ldots, n3,$$

тогда невязка запишется в виде:

$$I_{\text{int}\,p}(t) = \sum_{i=1}^{n1}\left\{\int_0^t \tau^{i-2}u(\tau)d\tau\right\}X_i - \sum_{i=n1+1}^{n1+n3}\frac{1}{i-n1}t^{i-n1}X_i + \int_0^t \phi(t-\tau)\frac{d}{dt}u(\tau)d\tau.$$

Для составления основной СЛАУ запишем это выражение невязки для $(n1 + n3 + 1) = (2n1 + n2) = 12$ точек $t_1, \ldots, t_{12}$ и потребуем равенства нулю невязок в указанных точках. Затем, начиная с уравнения, записанного для точки $t = t_2$, вычтем из каждого уравнения предыдущее уравнение. Указанные действия приведут к основной СЛАУ одиннадцатого порядка с одиннадцатью неизвестными $X_i$:

$$\sum_{i=1}^{n1}\left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \tau^{i-1}u(\tau)d\tau\right\}X_i - \sum_{i=n1+1}^{n1+n3}\frac{1}{i-n1}\left[t_{k+1}^{i-n1} - t_k^{i-n1}\right]X_i =$$

$$-\int_0^{t_{k+1}} \phi(t_{k+1}-\tau)\frac{d}{d\tau}u(\tau)d\tau + \int_0^{t_k} \phi(t_k-\tau)\frac{d}{d\tau}u(\tau)d\tau.$$

Пусть $T0$ – длина интервала восстановления измеряемого сигнала $X(t)$, тогда шаг дискретности $T$ равен $T0/(n1 + n3)$ и $t_k = t_1 + T(k - 1)$, $k = 1, \ldots, (n1 + n3 + 1)$. Теперь запишем полученную основную СЛАУ в стандартной форме:

$$\sum_{i=1}^{n1+n3} A_{ki} X_i = B_k, \quad k = 1, \ldots, (n1 + n3) = 11,$$

где $$B_k = \int_0^{t_k} \phi(t_k - \tau) \frac{d}{d\tau} u(\tau) d\tau - \int_0^{t_{k+1}} \phi(t_{k+1} - \tau) \frac{d}{d\tau} u(\tau) d\tau \qquad (74)$$

$$A_{ki} = \begin{cases} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \tau^{i-1} u(\tau) d\tau, & i \le n1 \\ -\frac{1}{i - n1} (t_{k+1}^{i-n1} - t_k^{i-n1}), & i > n1 \end{cases}$$

Система (74) и есть основная СЛАУ алгоритма инвариантности при применении одноканального принципа инвариантности к рассматриваемым измерительным системам с распределенными параметрами – к термоприемникам второй группы.

После решения этой системы исходные неизвестные $\tilde{\alpha}_i$, $i = 1, \ldots, 4$; $\tilde{\beta}_j$, $j = 1, \ldots, 4$ определяются из выражений:

$$\tilde{\alpha}_i = X_i, \; i = 1, \ldots, 4, \quad \tilde{\beta}_1 = \frac{\gamma_1}{\tilde{\alpha}_1} = \frac{X_5}{X_1}, \quad \tilde{\beta}_2 = \frac{X_6 - X_2 \tilde{\beta}_1}{X_1},$$

$$\tilde{\beta}_3 = \frac{X_7 - X_2 \tilde{\beta}_2 - X_3 \tilde{\beta}_1}{X_1}, \quad \tilde{\beta}_4 = \frac{X_8 - X_2 \tilde{\beta}_3 - X_3 \tilde{\beta}_2 - X_4 \tilde{\beta}_1}{X_1}.$$

Отметим, что найденные промежуточные неизвестные $\gamma_5$, $\gamma_6$, $\gamma_7$, т. е. $X_9$, $X_{10}$, $X_{11}$, оказались лишними, поэтому не использовались.

При изменении величин $n1$, $n2$ вид системы (74) не изменяется, изменяются лишь количество неизвестных $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_j$, количество промежуточных неизвестных $\gamma_i$, а также структура взаимосвязи между исходными и промежуточными неизвестными.

Легко показать, что если предположить отсутствие градиентов температур внутри рассматриваемых термометрических тел, т. е. $u_v(t) = u_п(t)$, то полученные выше основные СЛАУ для ИС с распределенными параметрами переходят в основные СЛАУ для ИС с сосредоточенными параметрами.

ГЛАВА 5

# ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Параметрические явления в статистической динамике измерительных систем подробно рассмотрены в работе [1]. Приводимые ниже результаты дают общие представления о закономерностях проявления параметрических эффектов в статистической динамике ИС. В дальнейшем часть этих результатов используется при разработке алгоритма исключения влияния параметрических эффектов на точность восстановления статистических характеристик измеряемого сигнала.

В качестве методов статистического анализа ИС используются как точные, так и приближенные методы, а анализ динамических свойств ИС ограничивается рамками корреляционной теории. Получаемые аналитические выражения, устанавливающие взаимосвязь между статистическими характеристиками реакции ИС и измеряемого сигнала, позволяют оценивать погрешности определения важных для практики характеристик – математического ожидания и дисперсии измеряемого сигнала. Очевидно, указанная оценка возможна лишь при некоторых предположениях о статистических характеристиках измеряемого сигнала и параметров ИС, а также о значениях постоянных величин, входящих в эти характеристики.

Таким образом, традиционная методика оценки погрешностей определения статистических характеристик измеряемого сигнала – случайного процесса вполне аналогична традиционной методике оценки погрешностей, которая используется при определении характеристик детерминированных сигналов, а именно, она основывается на получении решений прямых задач и необходимых предположениях о свойствах измеряемого сигнала и параметров ИС.

В завершении данной главы приводятся результаты модельной реализации принципа инвариантности применительно к статистической динамике измерительных систем.

## 5.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Приведем краткие сведения из этой теории, следуя ее изложению, содержащемуся в работе [6].

В общем случае системы, параметры которых являются случайными функциями времени, могут быть описаны стохастическими дифференциальными уравнениями вида:

$$\dot{Y}_i = \sum_{j=1}^{n} [C_{ij}(\boldsymbol{U}, t) - V_{ij}(t)]\phi_{ij}(\boldsymbol{Y}) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(\boldsymbol{U}, t)\; X_j(t) + Y_{i0}\delta(t - t_0),$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{1}$$

Здесь введены следующие обозначения:
$\boldsymbol{Y}$ – вектор фазовых координат, т. е. вектор выходных сигналов; $C_{ij}(\boldsymbol{U}, t)$, $F_{ij}(\boldsymbol{U}, t)$ – детерминированные функции времени и вектора случайных параметров $\boldsymbol{U}$; $V_{ij}(t)$ – параметрические шумы; в области измерений это составляющие параметров измерительной системы, представляющие собой случайные процессы, природа которых и обуславливает появление параметрических эффектов; $\varphi_{ij}(\boldsymbol{Y})$ – нелинейные функции вектора фазовых координат $\boldsymbol{Y}$; $X_j(t)$ – входной сигнал на $j$-м входе системы, который для случая аддитивной комбинации полезного сигнала $S_j(t)$ и помехи $N_j(t)$ может быть представлен в виде:

$$X_j(t) = S_j(t) + N_j(t).$$

Полезный сигнал $S_j(t)$ может содержать как регулярную часть $S(\boldsymbol{U}, t)$, зависящую от времени и вектора случайных параметров, так и нерегулярную часть $S^{\circ}(t)$.

Параметрические $V_{ij}(t)$ и аддитивные $N_j(t)$ шумы, которые в общем случае могут быть коррелированны, рассматриваются как белые гауссовские шумы с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями:

$$k_{ijkl}^{V}(t, \tau) = M[V_{ij}(t)V_{kl}(\tau)] = G_{ijkl}^{V}(t) \times \delta(t - \tau),$$

$$k_{ij}^{N}(t, \tau) = M[N_i(t)N_j(\tau)] = G_{ij}^{N}(t) \times \delta(t - \tau), \tag{2}$$

где $M$ – символ операции математического ожидания; $G_{ijkl}^{V}(t)$, $G_{ij}^{N}(t)$ – интенсивности параметрических и аддитивных шумов, которые в частности, могут быть постоянными величинами; $\delta(t - \tau)$ – $\delta$-функция, введение которой позволило также заменить начальные условия эквивалентными входными сигналами.

Если случайные функции $V_{ij}(t)$, $N_j(t)$ не являются белыми шумами, но могут быть представлены как результат преобразования белых шумов формирующими фильтрами, описываемыми дифференциальными уравнениями, то считая $V_{ij}(t)$, $N_j(t)$ дополнительными компонентами вектора фазовых координат системы и присоединяя к уравнениям (1) уравнения формирующих фильтров, получают расширенную систему уравнений, отличающуюся от системы (1) только размерностью $m > n$.

Частным случаем модели (1) являются системы линейных стохастических уравнений вида:

$$\dot{Y}_i = \sum_{j=1}^{n} [C_{ij}(\boldsymbol{U},t) + V_{ij}(t)]\, Y_j + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(\boldsymbol{U},t)\; X_j(t) + Y_{i0}\delta(t-t_0),$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{3}$$

Из теории известно, что фазовые координаты систем, описываемых моделями (1), (3), представляют собой многомерный марковский случайный процесс, который, в отличие от случайных процессов общего вида, полностью характеризуется двумерным законом распределения: закон распределения ординат марковского случайного процесса в любой будущий момент времени $t$ зависит только от значения ординаты в данный момент времени $\tau$ и не зависит от того, какие ординаты имел случайный процесс в прошлом.

Вводятся обозначения:
$f_2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_\tau;\ t, \tau)$ – двумерная плотность вероятности значений векторов $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y}_\tau$ в моменты времени $t$ и $\tau$ соответственно, т. е. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$, и $\boldsymbol{y}_\tau =$ $= \boldsymbol{y}(\tau)$; $f(\boldsymbol{y}_\tau; \tau)$ – одномерная плотность вероятности; $p(\boldsymbol{y};\ t \,|\, \boldsymbol{y}_\tau; \tau)$ – условная плотность вероятности или плотность вероятности перехода из состояния $\boldsymbol{y}_\tau = \boldsymbol{y}(\tau)$ в состояние $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$; $\boldsymbol{y}$ имеет смысл вектора фазовых координат.

Так как справедливо соотношение

$$f_2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_\tau;\ t, \tau) = f(\boldsymbol{y}_\tau; \tau) \times p(\boldsymbol{y};\ t \,|\, \boldsymbol{y}_\tau; \tau).$$

то для полного описания марковского случайного процесса необходимо иметь уравнения одномерной плотности вероятности и плотности вероятности перехода.

Зная плотность вероятности перехода и начальное распределение вероятности, можно интегрированием определить одномерную плотность вероятности для произвольного момента времени:

$$f(\boldsymbol{y};t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\boldsymbol{y},t \,|\, \boldsymbol{y}_\tau;\tau)\ ]\ f(\boldsymbol{y}_\tau;\tau)\,d\boldsymbol{y}_\tau,$$

где $f(\boldsymbol{y}_\tau; \tau)$ – плотность вероятности начального значения вектора фазовых координат.

Доказано, что обе вероятностные характеристики – одномерная плотность вероятности $f(\boldsymbol{y}; t)$ и плотность вероятности перехода $p(\boldsymbol{y};\ t \,|\, \boldsymbol{y}_\tau; \tau)$ определяются одним и тем же линейным дифференциальным уравнением в частных производных – уравнением

Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК), но при различных начальных условиях.

Для одномерной плотности вероятности непрерывного марковского процесса уравнение ФПК в скалярной форме имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left[A_i(\boldsymbol{y},t)f\right]+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\left[B_{ij}(\boldsymbol{y},t)f\right], \tag{4}$$

где $A_i(\boldsymbol{y}, t)$, $B_{ij}(\boldsymbol{y}, t)$ – так называемые коэффициенты сноса и диффузии.

В частном случае одномерного марковского случайного процесса уравнение (4) принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}\left[A(y,t)f(y)\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\left[B(y,t)f(y)\right]}{\partial y^2}. \tag{5}$$

Если в качестве начального условия для уравнения (4) задать одномерную плотность вероятности $f(\boldsymbol{y};\tau)$, удовлетворяющую условиям:

$$f(\boldsymbol{y};\tau)\geq 0,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{y};\tau)\,d\boldsymbol{y}=1,$$

то решением этого уравнения будет одномерная плотность вероятности $f(\boldsymbol{y}; t)$, удовлетворяющая условиям неотрицательности и нормировки. Если в качестве начального условия уравнения (4) взять δ-функцию $\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_\tau)$, то решением уравнения будет плотность вероятности перехода $p(\boldsymbol{y};\ t\,|\,\boldsymbol{y}_\tau;\tau)$. Из этого следует, что плотность вероятности перехода является одновременно весовой функцией или функцией Грина уравнения (4).

Пусть марковский случайный процесс описывается линейной системой:

$$\dot{Y}_i=\sum_{j=1}^{n}[C_{ij}(t)+V_{ij}(t)]\,Y_j+N_i(t),\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{6}$$

где $C_{ij}(t)$ – матрица известных коэффициентов; $Y_j$ – компоненты вектора фазовых координат; $N_i(t)$, $V_{ij}(t)$ – аддитивные и мультипликативные гауссовские коррелированные шумы с математическими ожиданиями $m_i^N(t)$, $m_{ij}^V(t)$ соответственно и корреляционными функциями вида (2), а также взаимными корреляционными функциями:

$$k_{ijk}^{VN}(t,\tau)=M[\overset{\circ}{V}_{ij}(t)\overset{\circ}{N}_k(\tau)]=G_{ijk}^{VN}(t)\times\delta(t-\tau),$$

символ «∘» означает центрированность случайных функций.

В этом случае коэффициенты сноса и диффузии определяются выражениями:

$$A_i(\boldsymbol{y},t) = \sum_{p,q=1}^{n}\left[C_{ip}(t) + m_{ip}^{V}(t) + \frac{1}{2}G_{iqqp}^{V}\right] y_p + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} G_{ipp}^{VN} + m_i^N, \qquad (7)$$

$$B_{ij}(\boldsymbol{y},t) = \sum_{p,q=1}^{n} G_{ipjq}^{V} y_p y_q + \sum_{p=1}^{n}(G_{ipj}^{VN} + G_{jpi}^{VN}) y_p + G_{ij}^{N}, \qquad (8)$$

$$i, j = 1, \ldots, n.$$

В статистической динамике измерительных систем обычно ограничиваются рамками корреляционной теории. Поэтому остановимся только на уравнениях для первых двух моментов фазовых координат, которые получаются как частный результат из общей теории. Из указанной теории известно, что уравнения для первого и второго начальных моментов фазовых координат в скалярной форме имеют вид:

$$\dot{m}_i = M[A_i(\boldsymbol{Y},t)], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (9)$$

$$\dot{\theta}_{ij} = M[Y_i A_j + A_i Y_j + B_{ij}]. \qquad (10)$$

Первые из этих уравнений интегрируются при математическом ожидании начальных условий, а вторые уравнения интегрируются при вторых моментах начальных значений вектора фазовых координат. Полагая в формулах (7), (8) фазовые координаты случайными, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y}$, подставим коэффициенты сноса и диффузии в уравнения (9), (10) и осуществим операцию математического ожидания по фазовым координатам. В результате получаются следующие уравнения для первых и вторых начальных моментов:

$$\dot{m}_i = \sum_{p,q=1}^{n}\left[C_{ip}(t) + m_{ip}^{V}(t) + \frac{1}{2}G_{iqqp}^{V}\right] m_p + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} G_{ipp}^{VN} + m_i^N(t), \qquad (11)$$

$$\dot{\theta}_{ij} = \sum_{p,q=1}^{n}\left[C_{jp}(t) + \frac{1}{2}G_{iqqp}^{V} + m_{jp}^{V}(t)\right]\theta_{ip} + \left(\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} G_{jpp}^{VN} + m_j^N(t)\right) m_i +$$

$$+ \sum_{p,q=1}^{n}\left[C_{ip}(t) + \frac{1}{2}G_{iqqp}^{V} + m_{ip}^{V}(t)\right]\theta_{pj} + \left(\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} G_{ipp}^{VN} + m_i^N(t)\right) m_j +$$

$$+ \sum_{p,q=1}^{n} G_{ipjq}^{V}\theta_{pq} + \sum_{p=1}^{n}\left(G_{ipj}^{VN} + G_{jpi}^{VN}\right) m_p + G_{ij}^{N}. \qquad (12)$$

Так как корреляционные моменты $\boldsymbol{K_{ij}}$ и вторые начальные моменты связаны соотношением

$$\theta_{ij} = K_{ij} + m_i m_j,$$

то из (12) получаются уравнения для корреляционных моментов:

$$\dot{K}_{ij} = \sum_{p,q=1}^{n}\left[\left(C_{ip} + \frac{1}{2}G_{iqqp}^{V} + m_{ip}^{V}(t)\right)K_{pj} + \left(C_{jp} + \frac{1}{2}G_{jqqp}^{V} + m_{jp}^{V}(t)\right)K_{ip} +\right.$$

$$\left. + G_{ipjq}^{V}K_{pq}\right] + \sum_{p=1}^{n}\left(G_{ipj}^{VN} + G_{jpi}^{VN}\right)m_p + G_{ij}^{N}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Определение корреляционных функций фазовых координат системы, описываемой (6), осуществляется в следующей последовательности:

1. Вычисление матрицы весовых функций $\boldsymbol{G}(t, \tau)$ путем решения уравнения:

$$\frac{d\boldsymbol{G}(t,\tau)}{dt} = \tilde{\boldsymbol{C}}(t)\boldsymbol{G}(t,\tau) + \boldsymbol{I}\delta(t-\tau), \quad \boldsymbol{G}(\tau,\tau) = 0 \tag{14}$$

где матрица $\tilde{\boldsymbol{C}}(t)$ имеет компоненты:

$$\tilde{C}_{ip} = C_{ip}(t) + \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{n}G_{iqqp}^{V}(t) + m_{ip}^{V}(t);$$

$\boldsymbol{I}$ – единичная матрица.

Вместо δ-функции в правой части (14) можно взять единичные начальные условия для $(m-1)$ производной, где $m$ – порядок дифференциального уравнения. Поэтому, если, например, $m = 1$, то, вместо (14), можно решать уравнение:

$$\frac{d\boldsymbol{G}(t,\tau)}{dt} = \tilde{\boldsymbol{C}}(t)\boldsymbol{G}(t,\tau), \quad \boldsymbol{G}(\tau,\tau) = \boldsymbol{I}. \tag{15}$$

2. Вычисление матрицы весовых функций $\boldsymbol{G}'(\tau, t)$, сопряженной с матрицей весовых функций $\boldsymbol{G}(t, \tau)$, путем решения уравнения:

$$\frac{d\boldsymbol{G}'(\tau,t)}{d\tau} = -\tilde{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{G}'(\tau,t), \quad \boldsymbol{G}'(t,t) = \boldsymbol{I}, \tag{16}$$

где матрица $\tilde{\boldsymbol{C}}$ – матрица, сопряженная с матрицей $\tilde{\boldsymbol{C}}(t)$.

3. Вычисление матрицы корреляционных моментов $\boldsymbol{K}(t)$ путем решения уравнений для корреляционных моментов (13).

4. Вычисление матрицы корреляционных функций $\boldsymbol{k}(t, \tau)$ фазовых координат по формуле:

$$\boldsymbol{k}(t,\tau) = 1(t-\tau)\,\boldsymbol{G}(t,\tau)\,\boldsymbol{K}(\tau) + 1(\tau-t)\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{G}'(\tau,t), \tag{17}$$

где $1(t-\tau)$, $1(\tau-t)$ – единичные функции.

Выражение (17) определяет матрицу корреляционных функций как при $t > \tau$, так и при $t < \tau$: при $t > \tau$ в нем остается только первое слагаемое, а при $t < \tau$ остается только второе слагаемое.

Большое число примеров применения теории марковских случайных процессов рассматривается в работе [6]. Приведем простейший из них, который в [6] интерпретируется как модель, описывающая поведение некоторой линейной следящей системы. Но этот же пример можно интерпретировать как частный случай первой общей модели (1.I) измерительной системы с сосредоточенными параметрами.

Итак, пусть $n = 1$, т. е. исследуется ИС первого порядка, тогда исходной моделью является:

$$\frac{dY(t)}{dt} + a(t)Y(t) = X(t), \quad Y(0) = 0, \tag{18}$$

в которой начальное условие принято нулевым, и для простоты записи индекс «0» у параметра $a(t)$ опущен.

Пусть параметр $a(t)$ и измеряемый сигнал $X(t)$ являются нормально распределенными стационарными и стационарно коррелированными белыми шумами. В обозначениях, использованных выше, модель (18) можно записать в виде:

$$\dot{Y}(t) = -[C + V(t)]Y(t) + X(t), \tag{19}$$

где $C$ – известная постоянная величина, которая по своему смыслу является математическим ожиданием параметра $a(t)$; $V(t)$ – параметрический белый шум с нулевым математическим ожиданием и интенсивностью $G^V$, а по смыслу – это случайная составляющая параметра $a(t)$, т. е. это центрированная случайная величина $\mathring{a}(t) = \left(a(t) - C\right)$ с интенсивностью $G^a = = G^V$; $X(t) = m_x + N(t)$, $m_x$ – математическое ожидание входного сигнала, $N(t)$ – аддитивный белый шум с нулевым математическим ожиданием и интенсивностью $G^N = G^x$.

Предполагается, что корреляционные и взаимная корреляционная функции имеют вид

$$k_a(t,\tau) = k_V(t,\tau) = G^V\delta(t-\tau), \quad k_x(t,\tau) = k_N(t,\tau) = G^N\delta(t-\tau),$$

$$k_{ax}(t,\tau) = k_{VN}(t,\tau) = G^{VN}\delta(t-\tau).$$

Найдем уравнение и соответствующее решение для математического ожидания выходного сигнала. Из общего уравнения (11) для данной одномерной системы при постоянстве интенсивностей имеем:

$$\dot{m} + \left(C - \frac{1}{2}G^V\right)m = -\frac{1}{2}G^{VN} + m_x, \quad m(0) = 0. \tag{20}$$

Здесь $m = M[Y(t)]$ – математическое ожидание выходного сигнала.

Решение уравнения (20) имеет вид

$$m(t)=\frac{m_x-0{,}5G^{VN}}{C-0{,}5G^{V}}\times\left[1-e^{-(C-0{,}5G^{V})t}\right]. \tag{21}$$

Из (21) вытекает условие устойчивости системы по математическому ожиданию: $C>0{,}5G^V$.

В случае отсутствия корреляции между процессами $V(t)$ и $N(t)$ имеем:

$$m(t)=\frac{m_x}{C-0{,}5G^{V}}\times\left[1-e^{-(C-0{,}5G^{V})t}\right]. \tag{21a}$$

Для этого же случая, т. е. при отсутствии корреляции между процессами $V(t)$ и $N(t)$, из общего уравнения (13) находится уравнение для дисперсии выходного сигнала:

$$\dot{D}+2(C-G^V)D=G^N, \quad D(0)=0. \tag{22}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$D(t)=\frac{G^N}{2(C-G^V)}\times\left[1-e^{-2(C-G^V)t}\right]. \tag{23}$$

Из (23) вытекает условие устойчивости системы по дисперсии: $C>G^V$.

Выражение для корреляционной функции выходного сигнала имеет вид:

$$k_Y(t,\tau)=1(t-\tau)\,g(t,\tau)D(\tau)+1(\tau-t)D(t)g'(\tau,t), \tag{24}$$

где весовые функции $g(t,\tau)$, $g'(\tau, t)$, согласно (14) и (16), имеют вид:

$$g(t,\tau)=e^{-(C-0{,}5G^V)(t-\tau)}, \quad g'(\tau,t)=e^{-(C-0{,}5G^V)(\tau-t)}.$$

В заключение отметим, аппарат теории марковский случайных процессов позволяет решать значительно более широкий и сложный класс задач, чем задачи корреляционного анализа. Однако, сложность этой теории побуждает исследователей, даже в рамках корреляционного анализа систем, обращаться к поиску альтернатив – более простых, приближенных методов исследования.

## 5.2. СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД УРАВНЕНИЙ МОМЕНТОВ

Одним из приближенных методов является метод, позволяющий по исходной модели систем строить уравнения для математического ожидания и корреляционной функции выходного сигнала, используя, по существу, только определения понятий математического ожидания, корреляционной функции, взаимной корреляционной функции и свойства действия линейного оператора на случайную функцию. Насколько нам известно, этот метод широко используется исследователями, по крайней мере, с 60-х годов XX века, хотя при этом авторы не идентифицировали его как самостоятельный метод. В работе [1] для удобства ссылок он был назван статистическим методом уравнений моментов; этим названием будем пользоваться и в данной работе. Приближенность этого метода обусловлена тем, что при построении уравнений для математического ожидания и корреляционной функции выходного сигнала в первом приближении отбрасываются смешанные моменты третьего порядка. Исследование круга вопросов, связанных с применением этого метода, в том числе его применение при анализе ИС с распределенными параметрами, содержится в работе [1]. Здесь ограничимся применением этого метода только к установлению взаимосвязи между математическими ожиданиями входного и выходного сигналов ИС, т. е. к нахождению важнейшего соотношения для статистического анализа динамики измерительных систем.

Пусть указанные системы описываются линейным дифференциальным уравнением $n$-го порядка, коэффициенты $a_i(t)$ которого, а также правая часть $X(t)$ – входной сигнал представляют собой стационарные и стационарно коррелированные случайные функции. Запишем это уравнение в операторной форме:

$$L[Y(t); a_i(t)] = X(t), \quad i = 0, 1, ..., (n-1); \quad Y(0) = Y'(0) = ... Y^{(n-1)}(0) = 0. \quad (25)$$

Найдем математическое ожидание обеих частей этого уравнения, затем умножим справа обе части уравнения (25) на центрированную случайную функцию $\mathring{Y}(t_1) = Y(t_1) - \bar{Y}(t_1)$, где $\bar{Y}(t_1)$ – математическое ожидание выходного сигнала, и найдем математическое ожидание обеих частей полученного после умножения выражения. В результате, учитывая линейность оператора, получим уравнения для математического ожидания и корреляционной функции выходного сигнала измерительной системы.

$$L[\bar{Y}(t); \bar{a}_i, \ k_{a_iY}(t,t)] = \bar{X}(t), \quad (26)$$

$$L[k_Y(t,t_1); \bar{Y}(t), \bar{a}_i, k_{a_iY}(t,t_1)] = k_{XY}(t,t_1), \quad i = 0, 1, ..., (n-1), \quad (27)$$

где введены следующие обозначения: $\bar{Y}(t), \bar{X}(t), \bar{a}_i$ – математические ожидания выходного и входного сигналов, параметров $a_i(t)$ соответственно; $k_Y(t,t_1)$ – корреляционная функция выходного сигнала; $k_{a_iY}(t,t_1)$ – взаимная корреляционная функция параметра $a_i(t)$ и выходного сигнала; $k_{XY}(t,t_1)$ – взаимная корреляционная функция входного и выходного сигналов.

Как видим, полученные уравнения для математического ожидания и корреляционной функции выходного сигнала содержат новые неизвестные функции $k_{a_iY}(t,t_1)$ и $k_{XY}(t,t_1)$. Построение уравнений для новых неизвестных осуществляется аналогично тому, как это сделано для корреляционной функции. Чтобы получить уравнения для новых неизвестных $k_{a_iY}(t,t_1)$, умножим слева исходное уравнение (25), записанное по переменной $t_1$ (вместо $t$), на центрированные случайные функции $\mathring{a}_j(t) = a_j(t) - \bar{a}_j(t)$, $j = 0, 1, ..., (n-1)$ и найдем математическое ожидание обеих частей полученного после умножения выражения. Чтобы получить уравнение для новой неизвестной $k_{XY}(t,t_1)$, умножим слева исходное уравнение (25), записанное по переменной $t_1$, на центрированную случайную функцию $\mathring{X}(t) = X(t) - \bar{X}(t)$ и найдем математическое ожидание обеих частей полученного после умножения выражения. В результате указанных действий к уже имеющимся уравнениям (26), (27) добавляются уравнения для новых неизвестных:

$$L[k_{a_jY}(t,t_1); \bar{Y}(t_1), \bar{a}_i, k_{a_ja_i}(t,t_1)] = k_{a_jX}(t,t_1), \quad i, j = 0, 1, ..., (n-1), \tag{28}$$

$$L[k_{XY}(t,t_1); \bar{Y}(t_1), \bar{a}_i, k_{Xa_i}(t,t_1)] = k_X(t,t_1). \tag{29}$$

Для определения математического ожидания выходного сигнала необходимо решить систему из $(n+1)$ уравнений, состоящую из уравнения (26) и уравнений (28). После решения указанной системы оказываются известными функции $\bar{Y}(t), k_{a_iY}(t,t_1)$, поэтому для определения корреляционной функции выходного сигнала достаточно решить систему, состоящую из уравнений (27) и (29). Изложенное и представляет собой содержание статистического метода уравнений моментов. Применение этого метода, вообще говоря, не накладывает никаких ограничений ни на законы распределения случайных параметров системы и измеряемого сигнала $X(t)$, ни на структуру корреляционных функций параметров и сигнала.

Так как в данном пункте преследуется цель иллюстрации применения статистического метода уравнений моментов, а анализ собственно параметрических эффектов проводится в дальнейшем, то рассмотрим ситуацию измерения, при которой случайные составляющие параметров ИС и входного сигнала представляют собой стационарные и стационарно коррелированные белые шумы; при этом никакие ограничения на законы распределения белых шумов не накладываются.

Введем следующие обозначения:
$X(t) = \bar{X} + N(t)$, $a_i(t) = \bar{a}_i + \mathring{a}_i(t)$, где $\bar{X}$ и $\bar{a}_i$ – постоянные величины, $\mathring{a}_i(t)$ и $N(t)$ – стационарные и стационарно коррелированные белые шумы с нулевыми математическими ожиданиями и интенсивностями $G^{a_i}$, $G^N$, $G^{a_iN}$, $G^{a_ja_i}$, $j = 0, 1, ..., (n-1)$.

### Первая общая модель ИС с сосредоточенными параметрами

Пусть, в соответствии с (1.I), поведение нестационарных ИС описывается уравнением

$$\frac{d^n Y(t)}{dt^n}+\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\frac{d^i Y(t)}{dt^i}=X(t),\quad Y(0)=Y'(0)=\ldots=Y^{(n-1)}(0)=0 \tag{30}$$

Согласно общей схеме применения статистического метода уравнений моментов, от исходной модели необходимо перейти к статистической модели исследуемых ИС. Для исходной модели (30) статистическая модель (26)–(29) принимает вид:

$$\frac{d^n \overline{Y}(t)}{dt^n}+\sum_{i=0}^{n-1}\overline{a}_i\frac{d^i \overline{Y}(t)}{dt^i}=\overline{X}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{d^i}{dt_1^i}k_{a_iY}(t,t_1)\Big|_{t_1=t} \tag{31}$$

$$\frac{d^n}{dt_1^n}k_{a_jY}(t,t_1)+\sum_{i=0}^{n-1}\overline{a}_i\frac{d^i}{dt_1^i}k_{a_jY}(t,t_1)=k_{a_jX}(t,t_1)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{d^i\overline{Y}(t_1)}{dt_1^i}k_{a_ja_i}(t,t_1) \tag{32}$$

$$\frac{d^n}{dt_1^n}k_{XY}(t,t_1)+\sum_{i=0}^{n-1}\overline{a}_i\frac{d^i}{dt_1^i}k_{XY}(t,t_1)=k_X(t,t_1)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{d^i\overline{Y}(t_1)}{dt_1^i}k_{Xa_i}(t,t_1) \tag{33}$$

$$\frac{d^n}{dt^n}k_Y(t,t_1)+\sum_{i=0}^{n-1}\overline{a}_i\frac{d^i}{dt_1^i}k_Y(t,t_1)=k_{XY}(t,t_1)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{d^i\overline{Y}(t)}{dt^i}k_{a_iY}(t,t_1) \tag{34}$$

Здесь и в дальнейшем, если не оговорено обратное, полагаем $t_1 > t$. Так как нас будет интересовать только выражение для математического ожидания выходного сигнала $Y(t)$, то для достижения этой цели достаточно рассмотреть только систему (31)–(32). Пусть $g(t_1-\tau)$ – импульсная переходная функция линейной стационарной системы, описываемой уравнением

$$\frac{d^n z(t_1)}{dt_1^n}+\sum_{i=0}^{n-1}\overline{a}_i\frac{d^i z(t_1)}{dt_1^i}=X(t_1). \tag{35}$$

Тогда решение уравнений (32) можно представить в виде

$$k_{a_jY}(t,t_1)=\int_0^{t_1} g(t_1-\eta)\times\left[k_{a_jN}(t,\eta)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{d^i\overline{Y}(\eta)}{d\eta^i}k_{a_ja_i}(t,\eta)\right]d\eta. \tag{36}$$

Пусть корреляционные и взаимные корреляционные функции имеют вид:

$$k_X(t,t_1)=k_N(t,t_1)=G^N\times\delta(t_1-t),\;\; k_{a_i}(t,t_1)=G^{a_i}\times\delta(t_1-t),$$

$$k_{a_iN}(t,t_1)=G^{a_iN}\times\delta(t_1-t),\;\; k_{a_ia_j}(t,t_1)=G^{a_ia_j}\times\delta(t_1-t).$$

Обратимся к вычислению суммы, входящей в правую часть выражения (31), т. е.:

$$I_1(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{d^i}{dt_1^i}k_{a_iY}(t,t_1)\Big|_{t_1=t}. \tag{37}$$

Заменив в (36) индекс $j$ на $i$, а индекс суммирования $i$ – на $k$, имеем

$$k_{a_iY}(t,t_1)=\int_0^{t_1}g(t_1-\eta)\times\left[k_{a_iN}(t,\eta)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{d^k\overline{Y}(\eta)}{d\eta^k}k_{a_ia_k}(t,\eta)\right]d\eta. \tag{38}$$

Подставим выражение (38) в (37) и воспользуемся правилом Лейбница дифференцирования интеграла с переменными пределами. Если далее учесть свойства δ-функции и то, что импульсная переходная функция $g(t_1-\eta)$ удовлетворяет условиям:

$$\frac{d^ig(t_1-\eta)}{dt_1^i}\Big|_{\eta=t_1}=\begin{cases}0 \text{ при } i=0,1,...,(n-2)\\ 1 \text{ при } i=(n-1),\end{cases}$$

то можно убедиться, что все члены суммы (37), за исключением последнего, равны нулю. Для последнего члена суммы, а следовательно, для всей суммы имеем

$$I_1(t)=\left\{\int_0^{t_1}g_{t_1}^{(n-1)}(t_1-\eta)\times\left[G^{a_{n-1}N}\times\delta(\eta-t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{d^k\overline{Y}(\eta)}{d\eta^k}G^{a_{n-1}a_k}\times\delta(\eta-t)\right]d\eta\right\}\Bigg|_{t_1=t}=$$

$$=\int_0^{t}g_{t}^{(n-1)}(t-\eta)\times\delta(\eta-t)\left[G^{a_{n-1}N}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{d^k\overline{Y}(\eta)}{d\eta^k}G^{a_{n-1}a_k}\right]d\eta=$$

$$=\frac{1}{2}g_t^{(n-1)}(t-\eta)\Big|_{\eta=t}\times\left[G^{a_{n-1}N}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{d^k\overline{Y}(t)}{dt^k}G^{a_{n-1}a_k}\right],$$

или так как $g_t^{(n-1)}(t-\eta)\Big|_{\eta=t}=1,$ то, переходя к прежнему индексу суммирования, окончательно получим

$$I_1(t)=\frac{1}{2}\left[G^{a_{n-1}N}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{d^i\overline{Y}(t)}{dt^i}G^{a_{n-1}a_i}\right]. \tag{39}$$

Множитель $\frac{1}{2}$ появляется в выражении (39) вследствие того, что здесь δ-функция отлична от нуля в точке $\eta=t$, совпадающей с одним из пределов интегрирования. Подставляя (39) в выражение для математического ожидания (31), получим

$$\frac{d^n\overline{Y}(t)}{dt^n}+\sum_{i=0}^{n-1}\left[\overline{a}_i-\frac{1}{2}G^{a_{n-1}a_i}\right]\frac{d^i\overline{Y}(t)}{dt^i}=\overline{X}-\frac{1}{2}G^{a_{n-1}N}. \tag{40}$$

Пусть $g_1(t-\tau)$ – импульсная переходная функция системы, описываемой уравнением

$$\frac{d^n z(t)}{dt^n}+\sum_{i=0}^{n-1}\left[\bar{a}_i-\frac{1}{2}G^{a_{n-1}a_i}\right]\frac{d^i z(t)}{dt^i}=X(t). \quad (41)$$

Тогда решение уравнения (40) при нулевых начальных условиях дает искомое аналитическое выражение для математического ожидания выходного сигнала:

$$\bar{Y}(t)=\left[\bar{X}-\frac{1}{2}G^{a_{n-1}N}\right]\times\int_0^t g_1(\tau)d\tau. \quad (42)$$

Между функциями $g(t_1-\tau)$ и $g_1(t-\tau)$ существует очевидная взаимосвязь: если известна функция $g(t_1-\tau)$, то для получения функции $g_1(t-\tau)$ достаточно заменить в выражении $g(t_1-\tau)$ постоянные величины $\bar{a}_i$ на постоянные величины $\bar{a}_i-\frac{1}{2}G^{a_{n-1}a_i}$, а переменную $t_1$ – на $t$.

Рассмотрим установившийся режим измерения. Используя понятие передаточной функции $\Phi(s)$ системы, описываемой уравнением (41), имеем:

$$\left\{\int_0^t g_1(\tau)d\tau\right\}\Bigg|_{t\to\infty}=\lim_{s\to0}\left\{sL_s\left[\int_0^t g_1(\tau)d\tau\right]\right\}=\lim_{s\to0}\left(s\frac{1}{s}L_s\left[g_1(t)\right]\right)=$$

$$=\lim_{s\to0}\Phi(s)=\lim_{s\to0}\frac{1}{\left(\bar{a}_0-\frac{1}{2}G^{a_{n-1}a_0}\right)+s^n+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(\bar{a}_i-\frac{1}{2}G^{a_{n-1}a_i}\right)\times s^i}=$$

$$=\frac{1}{\bar{a}_0-\frac{1}{2}G^{a_{n-1}a_0}},$$

где $L_s$ – символ преобразования Лапласа.

Следовательно, для установившегося режима измерения имеем:

$$\bar{Y}(\infty)=\left(\bar{X}-\frac{1}{2}G^{a_{n-1}N}\right)\frac{1}{\bar{a}_0-\frac{1}{2}G^{a_{n-1}a_0}}. \quad (43)$$

Рассмотрим частный случай данной модели ИС. Пусть $n = 1$, тогда, вместо уравнения (30), имеем:

$$\frac{dY(t)}{dt}+a(t)Y(t)=X(t),\quad Y(0)=0, \quad (44)$$

где индекс «0» у параметра $a(t)$ опущен.

Так как в этом случае

$$g_1(t-\tau) = \exp\left[-\left(\bar{a} - \frac{1}{2}G^a\right)(t-\tau)\right],$$

то для математического ожидания показаний ИС из (42) сразу получим:

$$\bar{Y}(t) = \frac{\bar{X} - \frac{1}{2}G^{aN}}{\bar{a} - \frac{1}{2}G^a} \times \left[1 - e^{-\left(\bar{a} - \frac{1}{2}G^a\right)t}\right]. \tag{45}$$

Сравним этот результат с тем, который был получен ранее при исследовании нестационарной системы первого порядка методом теории марковских случайных процессов, когда исходное уравнение было взято в форме:

$$\dot{Y}(t) = -[C + V(t)]Y(t) + X(t), \quad X(t) = m_x + N(t). \tag{46}$$

Сравнивая (44) и (46), имеем $a(t) = C + V(t)$, $\bar{a} = C$, $G^a = G^V$, $G^{aN} = G^{VN}$, $m_x = \bar{X}$. Следовательно, уравнение (40) для $n = 1$ и решение (45) могут быть представлены в виде:

$$\frac{d\bar{Y}(t)}{dt} + \left[C - \frac{1}{2}G^V\right]\bar{Y}(t) = m_x - \frac{1}{2}G^{VN},$$

$$\bar{Y}(t) = \frac{m_x - \frac{1}{2}G^{VN}}{C - \frac{1}{2}G^V} \times \left[1 - e^{-\left(C - \frac{1}{2}G^V\right)t}\right].$$

Сравнивая эти уравнение и решение с полученным ранее методом теории марковских случайных процессов соответствующими уравнением (20) и решением (21), замечаем, что в данном частном случае сравниваемые результаты для математического ожидания совпадают между собой.

Отметим, что использование общего соотношения (42) для математического ожидания выходного сигнала оказывается очень простым и в случае измерительных систем более высокого порядка. Аналогично применяется изложенный метод ко второй модели ИС с сосредоточенными параметрами и к ИС с распределенными параметрами.

## 5.3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ДИНАМИКЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Теперь, в отличие от принятых ранее условий, положим, что параметры ИС и входной сигнал представляют собой стационарные и стационарно коррелированные нормально распределенные случайные процессы, которые по своим статистическим свойствам могут отличаться от белых гауссовских шумов.

В проводимом ниже анализе основное внимание будет сосредоточено на установлении источников параметрических эффектов и выяснении общих закономерностей их проявления, т. е. первостепенное значение теперь будет придаваться качественной, физической стороне процесса восстановления измеряемого сигнала. Как и в случае детерминированного анализа, проведенного в п. 1.4, исследование указанных вопросов можно провести применительно к простейшим представителям измерительных систем, так как уже в этом случае удается выяснить наиболее важные особенности, характерные для нестационарных ИС. Понятно, что изучение общих закономерностей проявления параметрических эффектов предпочтительно проводить на основе точных результатов анализа. Указанные результаты могут быть получены, например, методом статистического анализа, использующем понятие характеристической функции [12].

## Параметрические эффекты в динамике ИС с сосредоточенными параметрами

Ниже последовательно рассматриваются частные случаи, а именно $n = 1$, обеих общих моделей (1.I), (1.II) измерительных систем с сосредоточенными параметрами.

### *Первая модель ИС*

Итак, рассматриваются измерительные системы, поведение которых описывается уравнением

$$\frac{dY(t)}{dt} + a(t)Y(t) = X(t), \quad Y(0) = 0, \tag{47}$$

где $a(t)$, $X(t)$ – стационарные и стационарно коррелированные нормально распределенные случайные процессы.

Требуется найти выражение для математического ожидания $\bar{Y}(t)$ и корреляционной функции $k_Y(t, t_1)$ выходного сигнала, предполагая произвольность структур корреляционных и взаимной корреляционной функций $k_a(t, t_1)$, $k_X(t, t_1)$, $k_{aX}(t, t_1)$.

Решение уравнения (47) имеет вид

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) \times e^{-\int_\tau^t a(\eta)d\eta} d\tau. \tag{48}$$

Математическое ожидание выходного сигнала $\bar{Y}(t)$ описывается выражением:

$$\bar{Y}(t)=\int_0^t M\,[X(\tau)\times e^{-\mu(\tau)}]d\tau\,,\quad \mu(\tau)=\int_\tau^t a(\eta)d\eta, \tag{49}$$

где $M$ – символ операции математического ожидания.

Введем в рассмотрение систему случайных величин с компонентами $z_1 = X(\tau)$, $z_2 = \mu(\tau)$. Тогда выражение (49) можно записать в виде

$$\bar{Y}(t)=\frac{1}{i}\int_0^t \left.\frac{\partial E(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial\lambda_1}\right|_{\lambda_1=0,\,\lambda_2=i} d\tau, \tag{50}$$

где $E(\lambda_1, \lambda_2)$ – характеристическая функция рассматриваемой системы случайных величин; $i$ – мнимая единица.

В силу нормальности системы случайных величин характеристическая функция имеет вид

$$E(\lambda_1,\lambda_2)=\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j,p=1}^{2}k_{jp}\lambda_j\lambda_p+i\sum_{j=1}^{2}\bar{z}_j\lambda_j\right], \tag{51}$$

где $\bar{z}_j$ – математические ожидания, а $k_{jp}$ – корреляционные моменты компонент случайного вектора.

Так как

$$\left.\frac{\partial E(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial\lambda_1}\right|_{\lambda_1=0,\,\lambda_2=i}=\left[-ik_{12}+i\bar{z}_1\right]\exp\left[-\bar{z}_2+\frac{1}{2}k_{22}\right],$$

то выражение для математического ожидания принимает вид

$$\bar{Y}(t)=\int_0^t[\bar{z}_1-k_{12}]\exp\left[-\bar{z}_2+\frac{1}{2}k_{22}\right]d\tau. \tag{52}$$

Входящие в это выражение величины имеют следующий смысл:

$$\bar{z}_1=M[X(\tau)]=\bar{X},\quad \bar{z}_2=M\left[\int_\tau^t a(\eta)d\eta\right]=\bar{a}(t-\tau)$$

$$k_{12}=M\left([X(\tau)-\bar{X}][\mu(\tau)-\bar{\mu}(\tau)]\right)=\int_\tau^t k_{Xa}(\tau,\eta)d\eta=\int_0^{t-\tau}k_{Xa}(\varepsilon)d\varepsilon$$

$$k_{22}=M\left([\mu(\tau)-\bar{\mu}(\tau)][\mu(\tau)-\bar{\mu}(\tau)]\right)=\int_\tau^t\int_\tau^t k_a(\eta_1,\eta_2)d\eta_1 d\eta_2$$

Справедлива следующая формула для двойного интеграла от корреляционной функции стационарного случайного процесса:

$$\int_{\tau}^{t}\int_{\tau_1}^{t_1} k(\eta_2-\eta_1)d\eta_1 d\eta_2 = \int_{\tau}^{t} d\eta_1 \int_{\tau_1}^{t_1} k(\eta_2-\eta_1)d\eta_2 =$$

$$= (t-t_1)\int_0^{t_1-t} k(\eta)d\eta + (\tau-\tau_1)\int_0^{\tau_1-\tau} k(\eta)d\eta + (t_1-\tau)\int_0^{t_1-\tau} k(\eta)d\eta +$$

$$+(\tau_1-t)\int_0^{\tau_1-t} k(\eta)d\eta - \int_{\tau_1-\tau}^{\tau_1-t} \eta\times k(\eta)d\eta - \int_{t_1-t}^{t_1-\tau} \eta\times k(\eta)d\eta. \quad (53)$$

Применяя эту формулу к выражению для $k_{22}$, имеем:

$$k_{22} = 2\left[(t-\tau)\int_0^{t-\tau} k_a(\eta)d\eta - \int_0^{t-\tau} \eta\times k_a(\eta)d\eta\right].$$

Следовательно, для математического ожидания выходного сигнала окончательно получим

$$\bar{Y}(t) = \int_0^t \left[\bar{X} - \int_0^{t-\tau} k_{Xa}(\varepsilon)d\varepsilon\right] \exp\left[-\bar{a}(t-\tau) + (t-\tau)\int_0^{t-\tau} k_a(\eta)d\eta - \right.$$

$$\left. \int_0^{t-\tau} \eta\times k_a(\eta)d\eta\right] d\tau. \quad (54)$$

Легко убедиться, что из общего соотношения (54) вытекает как частный случай результат (21), относящийся к белым шумам и приведенный ранее при исследовании модели (47) методом теории марковских случайных процессов. Обратимся к выводам качественного характера, вытекающим из общего соотношения (54).

Пусть ИС представляют собой стационарные системы, т. е. $a(t) = \bar{a} = a$, $k_{Xa}(\varepsilon) = 0$, $k_a(\eta) = 0$, тогда из (54) имеем

$$\bar{Y}(t) = \frac{1}{a}\bar{X}(1-e^{-at}), \quad (55)$$

что в установившемся режиме дает $\bar{Y}(\infty) = \frac{1}{a}\bar{X}$. В данном случае множитель $\frac{1}{a}$ можно рассматривать как коэффициент согласования размерностей.

Далее, если параметр $a(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс, не коррелированный с измеряемым сигналом $X(t)$, то взаимосвязь между математическими ожиданиями показаний ИС $\bar{Y}(t)$ и измеряемого сигнала $\bar{X}(t)$ определится соотношением:

$$\Delta_1(t)=\overline{X}(t)-\overline{Y}(t)=\overline{X}\left\{1-\int_0^t \exp\left[-\overline{a}(t-\tau)+(t-\tau)\int_0^{t-\tau} k_a(\eta)d\eta-\right.\right.$$

$$\left.\left.\int_0^{t-\tau}\eta\times k_a(\eta)d\eta\right]d\tau\right\}. \qquad (56)$$

Из выражения (56) следует, что в этом случае между математическими ожиданиями $\overline{Y}(t)$ и $\overline{X}(t)$ в установившемся режиме измерения существует смещение, причем абсолютное значение величины указанного смещения зависит от значения математического ожидания измеряемого сигнала.

Наконец, при коррелированности параметра $a(t)$ и измеряемого сигнала $X(t)$ к смещению $\Delta_1(t)$ добавляется составляющая:

$$\Delta_2=\int_0^t\left\{\left[\int_0^{t-\tau}k_{Xa}(\varepsilon)d\varepsilon\right]\exp\left[-\overline{a}(t-\tau)+(t-\tau)\int_0^{t-\tau}k_a(\eta)d\eta-\int_0^{t-\tau}\eta\times k_a(\eta)d\eta\right]\right\}d\tau. \qquad (57)$$

Теперь найдем выражение для корреляционной функции выходного сигнала, для чего предварительно найдем выражение для смешанного момента второго порядка. Учитывая вид решения (48), имеем:

$$M\left[Y(t)Y(t_1)\right]=\int_0^t\int_0^{t_1}M\left[X(\tau)\times e^{-\mu(\tau)}\times X(\tau_1)\times e^{-\mu(\tau_1)}\right]d\tau\, d\tau_1, \qquad (58)$$

$$\mu(\tau)=\int_\tau^t a(\eta_1)d\eta_1,\quad \mu(\tau_1)=\int_{\tau_1}^{t_1}a(\eta_2)d\eta_2,$$

Введем в рассмотрение нормальную систему случайных величин с компонентами:

$$z_1=X(\tau),\quad z_2=\mu(\tau),\quad z_3=X(\tau_1),\quad z_4=\mu(\tau_1).$$

Используя характеристическую функцию $E(\lambda_1, \ldots, \lambda_4)$ системы имеем:

$$M\left[Y(t)Y(t_1)\right]=\frac{1}{i^2}\int_0^t\int_0^{t_1}\left.\frac{\partial E(\lambda_1,\ldots,\lambda_4)}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_3}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_3=0\\ \lambda_2=\lambda_4=i}}d\tau\, d\tau_1. \qquad (59)$$

Так как характеристическая функция для нормальной системы теперь имеет вид

$$E(\lambda_1,\ldots,\lambda_4)=\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j,p=1}^4 k_{jp}\lambda_j\lambda_p+i\sum_{j=1}^4\overline{z}_j\lambda_j\right],$$

то

$$\left.\frac{\partial E(\lambda_1,\ldots,\lambda_4)}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_3}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_3=0\\ \lambda_2=\lambda_4=i}}=\left[-k_{13}-(k_{12}+k_{14}-\overline{z}_1)\,(k_{23}+k_{34}-\overline{z}_3)\right]\times$$

$$\times\exp\left[-(\bar{z}_2+\bar{z}_4)+\frac{1}{2}(k_{22}+k_{44})+k_{24}\right].$$

Подставляя это выражение в (59), получим соотношение для смешанного момента второго порядка:

$$M\left[Y(t)Y(t_1)\right]=\int_0^t\int_0^{t_1}\left[k_{13}+(k_{12}+k_{14}-\bar{z}_1)\,(k_{23}+k_{34}-\bar{z}_3)\right]\times$$

$$\times\exp\left[-(\bar{z}_2+\bar{z}_4)+\frac{1}{2}(k_{22}+k_{44})+k_{24}\right]d\tau d\tau_1. \tag{60}$$

Корреляционная функция выходного сигнала определится выражением:

$$k_Y(t,t_1)=M\left[Y(t)Y(t_1)\right]-\bar{Y}(t)\bar{Y}(t_1), \tag{61}$$

в котором слагаемые уже найдены.

Раскроем смысл величин, входящих в общее выражение (60):

$$\bar{z}_1=\bar{X},\quad \bar{z}_2=\bar{a}(t-\tau),\quad \bar{z}_3=\bar{X},\quad \bar{z}_4=\bar{a}(t_1-\tau_1)$$

$$k_{12}=\int_\tau^t k_{aX}(\tau-\eta_1)d\eta_1,\quad k_{13}=k_X(\tau_1-\tau),\quad k_{14}=\int_{\tau_1}^{t_1}k_{aX}(\tau-\eta_2)d\eta_2,$$

$$k_{23}=\int_\tau^t k_{aX}(\tau_1-\eta_1)d\eta_1,\quad k_{34}=\int_{\tau_1}^{t_1}k_{aX}(\tau_1-\eta_2)d\eta_2,\quad k_{22}=\int_\tau^t\int_\tau^t k_a(\eta_2-\eta_1)d\eta_1 d\eta_2,$$

$$k_{24}=\int_\tau^t\int_{\tau_1}^{t_1}k_a(\eta_2-\eta_1)d\eta_1 d\eta_2,\quad k_{44}=\int_{\tau_1}^{t_1}\int_{\tau_1}^{t_1}k_a(\eta_2-\eta_1)d\eta_1 d\eta_2.$$

Для вычисления двойных интегралов можно вновь воспользоваться формулой (53).

Заметим, что если параметр $a(t)$ и измеряемый сигнал $X(t)$ не коррелированы, то из общих соотношений (60), (61) вытекают как частные случаи результаты (23), (24), относящиеся к белым шумам и приведенные ранее при исследовании модели (47) методом теории марковских случайных процессов.

Обратимся к выводам качественного характера, относящимся к различным условиям измерения. Так как относительно математического ожидания выходного сигнала указанные выводы сделаны выше, то здесь проведем этот анализ только применительно к смешанному моменту второго порядка.

Обращаясь к общему соотношению (60), рассмотрим те же три ситуации, что при анализе математического ожидания.

Пусть ИС представляют собой стационарные системы, тогда $a(t)=\bar{a}=a$; $k_a(\eta)=k_{aX}(\eta)=0\Rightarrow k_{12}=k_{14}=k_{23}=k_{34}=k_{22}=k_{24}=k_{44}\equiv 0$. В этом случае для смешанного момента второго порядка имеем:

$$\left(M\left[Y(t)Y(t_1)\right]\right)_1 = \int_0^t\int_0^{t_1}\left[\overline{X}^2 + k_X(\tau_1-\tau)\right]\exp\left[-a(t+t_1-\tau-\tau_1)\right]d\tau d\tau_1. \qquad (62)$$

Пусть теперь параметр $a(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс, не коррелированный с измеряемым сигналом $X(t)$, тогда $k_{12} = k_{14} = k_{23} = k_{34} \equiv 0$ и из соотношения (60) имеем

$$\left(M\left[Y(t)Y(t_1)\right]\right)_2 = \int_0^t\int_0^{t_1}\left[\overline{X}^2 + k_X(\tau_1-\tau)\right]\exp\left[-(\overline{z}_2+\overline{z}_4)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(k_{22}+k_{44})+k_{24}\right]d\tau d\tau_1, \qquad (63)$$

где $\overline{z}_2, \overline{z}_4,\ k_{22}, k_{24}, k_{44}$ определяются приведенными выше выражениями.

Рассматривая совместно соотношения (62), (63), можно оценить влияние на качество измерений параметрического эффекта, обусловленного именно статистическим характером параметра $a(t)$, но не его коррелированностью с измеряемым сигналом. Указанная оценка имеет вид:

$$\delta = \left(M\left[Y(t)Y(t_1)\right]\right)_2 - \left(M\left[Y(t)Y(t_1)\right]\right)_1.$$

Наконец, при коррелированности параметра $a(t)$ и измеряемого сигнала $X(t)$ смешанный момент второго порядка для выходного сигнала определяется общим соотношением (60), из которого следует, что в этом случае к уже указанному выше добавляется параметрический эффект, обусловленный именно коррелированностью параметра $a(t)$ и измеряемого сигнала $X(t)$. Для оценки этого параметрического эффекта достаточно вычислить разность правых частей соотношений (60) и (63).

*Вторая модель ИС*

Рассматриваем измерительные системы, поведение которых описывается уравнением

$$\frac{dY(t)}{dt} + a(t)Y(t) = a(t)X(t), \quad Y(0) = 0. \qquad (64)$$

Решение уравнения (64) имеет вид

$$\overline{Y}(t) = \int_0^t a(\tau)X(\tau)\exp[-\mu(\tau)]d\tau, \quad \mu(\tau) = \int_\tau^t a(\eta)d\eta. \qquad (65)$$

Найдем математическое ожидание обеих частей (65), это даст:

$$\overline{Y}(t)=\int_0^t M\left\{a(\tau)\,X(\tau)\exp\left[-\mu(\tau)\right]\right\}d\tau. \tag{66}$$

Введем в рассмотрение систему нормально распределенных случайных величин с компонентами:

$$z_1 = a(\tau),\ \ z_2 = X(\tau),\ \ z_3 = \mu(\tau).$$

Пусть $E(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$ – характеристическая функция этой системы. Тогда

$$\overline{Y}(t)=\frac{1}{i^2}\int_0^t \left.\frac{\partial^2 E(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_2=0\\ \lambda_3=i}} d\tau, \tag{67}$$

где

$$E(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j,p=1}^{3}k_{jp}\lambda_j\lambda_p+i\sum_{j=1}^{3}\overline{z}_j\lambda_j\right].$$

Из выражения $E(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$ имеем:

$$\left.\frac{\partial^2 E(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}\right|_{\substack{\lambda_1=\lambda_2=0\\ \lambda_3=i}}=$$

$$-\left[k_{12}+k_{13}k_{23}-k_{13}\overline{z}_2-k_{23}\overline{z}_1+\overline{z}_1\overline{z}_2\right]\exp\left[-\overline{z}_3+\frac{1}{2}k_{33}\right].$$

Подставляя это выражение в (67), получим

$$\overline{Y}(t)=\int_0^t e^{(-\overline{z}_3+\frac{1}{2}k_{33})}\left[k_{12}+k_{13}k_{23}-k_{13}\overline{z}_2-k_{23}\overline{z}_1+\overline{z}_1\overline{z}_2\right]d\tau. \tag{68}$$

Раскроем смысл величин, входящих в выражение (68):

$$\overline{z}_1=\overline{a},\quad \overline{z}_2=\overline{X},\quad \overline{z}_3=M\left[\int_\tau^t a(\eta)d\eta\right]=\overline{a}(t-\tau);$$

$$k_{12}=k_{aX}(0),\ \ k_{13}=\int_\tau^t k_a(\tau,\eta)d\eta,\ \ k_{23}=\int_\tau^t k_{Xa}(\tau,\eta)d\eta,\ \ k_{33}=\int_\tau^t\int_\tau^t k_a(\eta_1,\eta_2)d\eta_1 d\eta_2$$

Применяя формулу (53) к вычислению $k_{33}$, получим:

$$k_{33}=2\left[(t-\tau)\int_0^{t-\tau}k_a(\eta)d\eta-\int_0^{t-\tau}\eta k_a(\eta)d\eta\right],$$

Далее учтем, что:

$$k_{13}=\int_\tau^t k_a(\eta-\tau)d\eta=\int_0^{t-\tau}k_a(\eta)d\eta,\quad k_{23}=\int_\tau^t k_{Xa}(\eta-\tau)d\eta=\int_0^{t-\tau}k_{Xa}(\eta)d\eta.$$

Подставляя выражения для $k_{12}$, $k_{13}$, $k_{23}$, $k_{33}$ в (68) и сделав замену $t-\tau=\varepsilon$, получим окончательное выражение для математического ожидания показаний измерительной системы:

$$\bar{X}-\bar{Y}(t)=\bar{X}\times\exp\left[-\bar{a}t+t\int_0^t k_a(\eta)d\eta-\int_0^t \eta k_a(\eta)d\eta\right]+$$

$$+\int_0^t\left[k_{aX}(0)+\left(\int_0^{t-\tau}k_a(\eta)d\eta\right)\times\left(\int_0^{t-\tau}k_{Xa}(\eta)d\eta\right)-\bar{a}\int_0^{t-\tau}k_{Xa}(\eta)d\eta\right]\times$$

$$\times\exp\left[-\bar{a}(t-\tau)+(t-\tau)\int_0^{t-\tau}k_a(\eta)d\eta-\int_0^{t-\tau}\eta k_a(\eta)d\eta\right]d\tau. \quad (69)$$

Рассмотрим те же три ситуации измерений, что в предыдущих случаях. Пусть ИС представляют собой стационарные системы, тогда $a(t)=\bar{a}=a$; $k_a(\eta)=k_{aX}(\eta)\equiv 0$, и из общего соотношения (69) получим

$$\bar{Y}(t)-\bar{X}=-\bar{X}\exp[-at],\quad \bar{Y}(\infty)=\bar{X}. \quad (70)$$

То есть в установившемся режиме для стационарных ИС данной модели математические ожидания показаний ИС и измеряемого сигнала совпадают между собой.

Если параметр $a(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс, не коррелированный с измеряемым сигналом $X(t)$, то из (69) имеем

$$\Delta_1(t)=\bar{X}(t)-\bar{Y}(t)=\bar{X}\exp\left[-\bar{a}t+t\int_0^t k_a(\eta)d\eta-\int_0^t \eta k_a(\eta)d\eta\right],\quad \Delta_1(\infty)=0. \quad (71)$$

Из выражения (71) следует, что для ИС, описываемых второй моделью (64), параметрический эффект, обусловленный только статистическим характером параметра $a(t)$, но не его коррелированностью с измеряемым сигналом, проявляется только в переходной стадии измерения; в установившемся режиме измерения влияние этого эффекта исчезает. В этом заключается основное отличие поведения ИС, описываемых второй моделью (64), от поведения ИС, описываемых первой моделью (47).

Наконец, если параметр $a(t)$ и измеряемый сигнал $X(t)$ коррелированы между собой, то в показаниях ИС появляется новая составляющая, обусловленная именно коррелированностью процессов $a(t)$ и $X(t)$. Влияние этого параметрического эффекта оценивается вторым слагаемым правой части общего соотношения (69). Использование понятия характеристической функции позволяет также выяснить для второй модели ИС закономерности влияния параметрических эффектов на дисперсию показаний ИС [1].

## Параметрические эффекты в динамике ИС с распределенными параметрами

В завершение рассмотрим первую из приведенных в главе 1 моделей измерительных систем с распределенными параметрами, описываемых уравнениями в частных производных параболического типа.

Эта модель имеет вид:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + m(t)\times[\theta(t) - u(x,t)], \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{72}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \ u(l,t) = u_{\text{ст}} = \text{const}, \ u(x,0) = u_0 = \text{const}, \ m(t) = \frac{\beta}{c\gamma}\times\alpha_k(t).$$

Физический смысл всех используемых здесь обозначений указан в главе 1, но теперь будем считать параметр $m(t)$ и измеряемых сигнал $\theta(t)$ стационарными и стационарно коррелированными нормально распределенными случайными процессами.

Как и ранее для этой модели, с целью упрощения анализа, не ограничивая общности, положим $u_0 = u_{\text{ст}}$. Сделав замену $\upsilon(x, t) = u(x, t) - u_0$, запишем модель (72) в виде:

$$\frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial^2 \upsilon(x,t)}{\partial x^2} + m(t)\times[V_0(t) - \upsilon(x,t)], \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{73}$$

$$\frac{\partial \upsilon(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \upsilon(l,t) = 0, \ \upsilon(x,0) = 0, \quad V_0(t) = \theta(t) - u_0.$$

В первой главе было показано, что если решение краевой задачи (73) искать в виде

$$\upsilon(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\,\phi_i(x), \tag{74}$$

где $\varphi_i(x)$ – известные координатные функции

$$\phi_i(x) = \sin\,(2i-1)\frac{\pi}{2l}(x+l),$$

то неизвестные функции $a_i(t)$ должны определяться из дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_i(t)}{dt} + [\nu_i + m(t)]\,a_i(t) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{2i-1} m(t) V_0(t), \quad \nu_i = a_0^2\left[\frac{(2i-1)\pi}{2l}\right]^2, \tag{75}$$

решениями которых являются:

$$a_i(t) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{2i-1}\int_0^t m(\tau)V_0(\tau)\exp\left[-\nu_i(t-\tau) - \int_\tau^t m(\eta)d\eta\right]d\tau. \tag{76}$$

Установим взаимосвязь между математическими ожиданиями локальной реакции ИС и измеряемым сигналом. Введя в рассмотрение бесконечное множество функций $\{\varphi_i(x)\}$, $\{a_i(t)\}$, получим решение краевой задачи:

$$\upsilon(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2i-1}\sin\left[(2i-1)\frac{\pi}{2l}(x+l\right]\times\int_0^t m(\tau)\,V_0(\tau)\,e^{\left[-\nu_i(t-\tau)-\int_\tau^t m(\eta)d\eta\right]}d\tau. \quad (77)$$

Если, например, выходной сигнал соответствует локальной реакции системы в очке $x=0$, то решение становится:

$$\upsilon(0,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}\int_0^t m(\tau)V_0(\tau)\exp\left[-\nu_i(t-\tau)-\int_\tau^t m(\eta)d\eta\right]d\tau. \quad (78)$$

Легко заметить, что каждое слагаемое в (78) сходно с выражением для решения (65), соответствующим ИС с сосредоточенными параметрами первого порядка, описываемых уравнением (64). Чтобы воспользоваться полученными ранее результатами, запишем выражение математического ожидания для решения (78) в виде:

$$\bar{\upsilon}(0,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}\int_0^t e^{-\nu_i(t-\tau)}M\left[m(\tau)V_0(\tau)\times e^{-\mu(\tau)}\right]d\tau, \quad (79)$$

где $\mu(\tau)=\int_\tau^t m(\eta)\,d\eta.$

Теперь замечаем, что выражение для математического ожидания в правой части (79) совпадает по форме с выражением для математического ожидания в правой части (66). Следовательно, пользуясь точными результатами, полученными ранее, можно сразу записать выражение для математического ожидания выходного сигнала $\bar{\upsilon}(0,t)$. На основании соотношения (68) оно имеет вид:

$$\bar{\upsilon}(0,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}\left\{\int_0^t\left[\bar{V}_0\bar{m}-\bar{V}_0\times\int_0^\tau k_m(\eta)d\eta+k_{m\theta}(0)+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^\tau k_m(\eta)d\eta\right)\left(\int_0^\tau k_{\theta m}(\eta)d\eta\right)-\bar{m}\int_0^\tau k_{\theta m}(\eta)d\eta\right]\times e^{-(\nu_i+\bar{m})\tau+\tau\int_0^\tau k_m(\eta)d\eta-\int_0^\tau \eta k_m(\eta)d\eta}d\tau. \quad (80)$$

Рассмотрим вытекающие из общего соотношения (80) частные случаи.

Пусть измерительная система является стационарной, т. е. $m(t)\equiv\bar{m},\ k_m(\tau)=k_{m\theta}(\tau)\equiv 0.$ Тогда из (80) получаем:

$$\bar{\upsilon}(0,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}\times\frac{\bar{m}\bar{V}_0}{\bar{m}+\nu_i}\times\left[1-e^{-(\bar{m}+\nu_i)t}\right]. \quad (81)$$

Так как $\overline{\upsilon}(0,t) = \overline{u}(0,t) - u_0$, $\overline{V}_0(t) = \overline{\theta}(t) - u_0$, то из (81) следует, что, даже в отсутствии параметрических эффектов, между математическими ожиданиями показаний ИС $\overline{u}(0,t)$ и измеряемого сигнала $\overline{\theta}(t)$ в установившемся режиме существует систематическое смещение, обусловленное особенностью физической модели данного вида ИС. На указанную особенность этих ИС обращалось внимание также при детерминированном анализе в п. 1.4.

При отсутствии корреляции между параметром $m(t)$ и измеряемым сигналом $\theta(t)$ из соотношения (80) следует:

$$\overline{\upsilon}(0,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}\times\int_0^t\left[\overline{V}_0\overline{m} - \overline{V}_0\times\int_0^\tau k_m(\eta)d\eta\right]\times$$

$$\times\exp\left[-(\overline{m}+\nu_i)\tau + \tau\times\int_0^\tau k_m(\eta)d\eta - \int_0^\tau \eta k_m(\eta)d\eta\right]d\tau. \qquad (82)$$

На основании выражений (81), (82) можно оценить величину параметрического смещения между $\overline{u}(0,t)$ и $\overline{\theta}(t)$, обусловленного только переменностью параметра $m(t)$, а с учетом общего соотношения (80), можно оценить также величину параметрического смещения, обусловленного только коррелированностью параметра $m(t)$ и измеряемого сигнала $\theta(t)$.

Статистический анализ динамики других видов ИС с распределенными параметрами, в том числе приближенными методами, приведен в [1].

## 5.4. ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Приведенные фрагменты из результатов статистического анализа измерительных систем свидетельствуют, что наличие параметрических эффектов в динамике ИС существенно изменяет представление о процессах, протекающих в реальных условиях измерения, и о качестве измерений.

В связи с этим, также как в случае детерминированных процессов измерения, возникает проблема исключения влияния параметрических эффектов на качество измерений в условиях, когда измеряемый сигнал и параметры ИС представляют собой случайные процессы. Так как при статистических измерениях основной задачей является обычно определение математического ожидания и дисперсии измеряемого сигнала, то возникающая проблема означает необходимость поиска такого алгоритма восстановления математического ожидания и дисперсии измеряемого сигнала, который был бы инвариантным к статистическим свойствам случайных параметров измерительной системы.

Использование для решения указанной проблемы физически одноканального принципа инвариантности предусматривает необходимость построения некоторых соотношений, устанавливающих взаимосвязь между основными искомыми величинами, статистическими характеристиками параметров измерительной системы, влияние которых следует исключить, и статистическими характеристиками показаний ИС.

Таким образом, из сказанного следует, что использование одноканального принципа инвариантности обуславливает необходимость перехода от исходной математической модели ИС, заданной обычно в виде дифференциального или интегрального уравнения, устанавливающих взаимосвязь между показаниями ИС $Y(t)$ и измеряемым сигналом $X(t)$, к некоторой статистической модели, которая устанавливает взаимосвязь между статистическими характеристиками сигналов $Y(t)$, $X(t)$ и параметров ИС. Как следует из содержания предыдущих параграфов данной главы, существуют различные точные и приближенные методы указанного перехода.

Любой метод перехода к статистическим моделям может сопровождаться также использованием существующих методов разложения случайных функций, корреляционных и взаимных корреляционных функций, в том числе, естественно, широко известного и глубоко разработанного метода канонических разложений. Важно, однако, во всех случаях иметь в виду, что получаемые статистические модели должны быть линейными относительно основных искомых или линеаризуемыми с помощью введения вспомогательных искомых величин.

Из предыдущего изложения следует, что, с точки зрения применения принципа инвариантности, для осуществления указанного перехода к статистической модели ИС наиболее эффективным оказывается метод, основанный на теории марковских случайных процессов. Связано это как с общностью и точностью метода, так и с формой, в которой получается статистическая модель ИС: модель оказывается линейной или легко линеаризуемой относительно искомых величин. Поэтому излагаемые ниже результаты относятся к построению статистической модели ИС с использованием методов теории марковских случайных процессов.

Рассмотрим первую модель ИС с сосредоточенными параметрами, полагая $n = 1$. В этом случае исходная модель ИС имеет вид:

$$\frac{dY(t)}{dt} + a(t)Y(t) = X(t), \quad Y(0) = 0. \tag{83}$$

Рассмотрим две из возможных ситуаций измерения:

1 – входной сигнал $X(t)$ и параметр системы $a(t)$ являются нормально распределенными стационарными некоррелированными белыми шумами;

2 – входной сигнал $X(t)$ и параметр системы $a(t)$ являются нормально распределенными стационарными и стационарно коррелированными белыми шумами.

**1. Входной сигнал $X(t)$ и параметр системы $a(t)$ – нормально распределенные стационарные некоррелированные белые шумы.**

Как следует из (20) и (22), в этом случае статистической моделью данной ИС служат уравнения:

$$\dot{m} + (C - \frac{1}{2}G^V)m = m_x, \quad m(0) = 0 \tag{84}$$

$$\dot{D} + 2(C - G^V)D = G^N, \quad D(0) = 0 \tag{85}$$

Первое из этих уравнений – это уравнение для математического ожидания показаний ИС, а второе – для дисперсии показаний ИС. Все обозначения в уравнениях (84), (85) имеют тот же смысл, что в п. 5.1.

Итак, в данном случае, в соответствии с принципом инвариантности, необходимо построить такой алгоритм восстановления статистических характеристик измеряемого сигнала – математического ожидания $m_x$ и интенсивности $G^N$, который был бы инвариантным к параметрическим эффекта, т. е. был бы инвариантным к значениям неизвестных величин: $C$ – математического ожидания параметра $a(t)$ и $G^V$ – интенсивности этого параметра.

По аналогии со случаем детерминированных сигналов и параметров, применение принципа инвариантности при случайных измеряемых сигналах и параметрах ИС основывается на переходе к расширенной задаче измерения, но теперь уже к расширенной статистической задаче измерения.

Пусть $\tilde{m}_x, \tilde{G}^N, \tilde{C}, \tilde{G}^V$ – оценки величин $m_x$, $G^N$, $C$, $G^V$ соответственно, которые предполагается найти в процессе восстановления искомых величин $m_x$, $G^N$.

В соответствии с (84), (85), имеем две невязки в дифференциальной форме $I_{m\,dif}(t)$, $I_{D\,dif}(t)$:

$$I_{m\,dif}(t) = \dot{m} + (\tilde{C} - \frac{1}{2}\tilde{G}^V)m - \tilde{m}_x,$$

$$I_{D\,dif}(t) = \dot{D} + 2(\tilde{C} - \tilde{G}^V)D - \tilde{G}^N, \tag{86}$$

первая из которых характеризует невязку по математическому ожиданию, вторая – по дисперсии.

Так как, согласно методике построения алгоритма инвариантности, наряду с основными неизвестными величинами $\tilde{m}_x, \tilde{G}^N$, характеристики параметра $a(t)$, т. е. $\tilde{C}, \tilde{G}^V$, также следует включить в число неизвестных, то общее число неизвестных оказывается равным 4.

Введем единое обозначение неизвестных:

$$X_1 = \tilde{C} - \frac{1}{2}\tilde{G}^V, \quad X_2 = \tilde{m}_x, \quad X_3 = 2(\tilde{C} - \tilde{G}^V), \quad X_4 = \tilde{G}^N.$$

Тогда невязки примут вид:

$$I_{m\,dif}(t) = \dot{m} + m(t) \times X_1 - X_2, \tag{87}$$

$$I_{D\,dif}(t) = \dot{D} + D(t) \times X_3 - X_4. \tag{88}$$

Так как теперь в статистической динамике ИС имеются две невязки, то для каждой из них необходимо строить свою основную СЛАУ. Допустим, считая математическое ожидание и дисперсию показаний ИС известными и используя любой из рассмотренных в главе 3 методов построения основных СЛАУ, для каждой из невязок $I_{m\,dif}(t)$, $I_{D\,dif}(t)$ построена и решена своя СЛАУ. Найдя таким образом величины $X_1$, ..., $X_4$, возвращаемся к прежним неизвестным. Очевидно, основные неизвестные $\tilde{m}_x, \tilde{G}^N$ определяются выражениями $\tilde{m}_x = X_2, \tilde{G}^N = X_4$. Дополнительные неизвестные $\tilde{C}, \tilde{G}^V$ находятся из системы:

$$\tilde{C} - \frac{1}{2}\tilde{G}^V = X_1,$$

$$2(\tilde{C} - \tilde{G}^V) = X_3,$$

откуда имеем

$$\tilde{C} = \frac{4X_1 - X_3}{2}, \quad \tilde{G}^V = 2X_1 - X_3.$$

Таким образом, построен алгоритм восстановления статистических характеристик $m_x$, $G^N$ измеряемого сигнала, причем этот алгоритм инвариантен к значениям величин $C$, $G^V$, характеризующим статистические свойства параметра $a(t)$ измерительной системы.

**2. Входной сигнал $X(t)$ и параметр системы $a(t)$ – нормально распределенные стационарные и стационарно коррелированные белые шумы.**

Рассмотрим более сложную ситуацию измерений: пусть к условиям, рассмотренным в предыдущем случае, добавляется условие коррелированности измеряемого сигнала $X(t)$ и параметра $a(t)$. Тогда при переходе от исходной модели (83) к статистической модели для математического ожидания выходного сигнала $m(t)$, в соответствии с (20), имеем:

$$\dot{m} + \left(C - \frac{1}{2}G^V\right)m = m_x - \frac{1}{2}G^{VN}, \quad m(0) = 0. \tag{89}$$

В уже упоминавшейся работе [6] для рассматриваемой системы приводится следующее выражение дисперсии выходного сигнала

$$D(t) = \frac{G^N}{2(C - G^V)}\left[1 - e^{-2(C-G^V)t}\right] + 2G^{VN}\frac{m_x - 0{,}5G^{VN}}{C - 0{,}5G^V}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2(C-G^V)}\left[1 - e^{-2(C-G^V)t}\right] - \frac{1}{C - \frac{3}{2}G^V}\left[e^{-(C-0{,}5G^V)t} - e^{-2(C-G^V)t}\right]\right\}. \tag{89а}$$

Легко убедиться непосредственной подстановкой, что это выражение является решением дифференциального уравнения:

$$\dot{D} + 2(C - G^V)D = G^N + 2G^{VN} \times m(t). \tag{90}$$

Таким образом, статистической моделью для данной ситуации измерений является совокупность уравнений (89) – для математического ожидания показаний ИС и (90) – для дисперсии показаний ИС, в которых процессы $m(t)$, $D(t)$, относящиеся к показаниям ИС, считаются, естественно, известными.

Теперь, в соответствии с принципом инвариантности, необходимо построить такой алгоритм восстановления статистических характеристик измеряемого сигнала – математического ожидания $m_x$ и интенсивности $G^N$, который был бы инвариантным к значениям неизвестных величин: $C$ – математического ожидания параметра $a(t)$, $G^V$ – интенсивности этого параметра, а также $G^{VN}$ – взаимной интенсивности параметра $a(t)$ и измеряемого сигнала $X(t)$.

Если обозначить оценку величины $G^{VN}$ как $\tilde{G}^{VN}$, то, аналогично (86), теперь имеем следующие выражения невязок в дифференциальной форме для математического ожидания и дисперсии показаний ИС:

$$I_{m\,dif}(t) = \dot{m} + \left(\tilde{C} - \frac{1}{2}\tilde{G}^V\right)m - \tilde{m}_x + \frac{1}{2}\tilde{G}^{VN} \tag{91}$$

$$I_{D\,dif}(t) = \dot{D} + 2(\tilde{C} - \tilde{G}^V)D - \tilde{G}^N - 2\tilde{G}^{VN}m(t) \tag{92}$$

Согласно методике построения алгоритмов инвариантности, в число неизвестных, наряду с основными величинами $\tilde{m}_x, \tilde{G}^N$, включим также величины $\tilde{C}, \tilde{G}^V, \tilde{G}^{VN}$. Поэтому общее число неизвестных теперь равно 5. Введем единое обозначение неизвестных:

$$X_1 = \tilde{C} - \frac{1}{2}\tilde{G}^V;\; X_2 = \tilde{m}_x - \frac{1}{2}\tilde{G}^{VN};\; X_3 = 2(\tilde{C} - \tilde{G}^V);\; X_4 = \tilde{G}^N;\; X_5 = 2\tilde{G}^{VN},$$

тогда выражения невязок примут вид:

$$I_{m\,dif}(t) = \dot{m} + m(t) \times X_1 - X_2, \tag{93}$$

$$I_{D\,dif}(t) = \dot{D} + D(t)X_3 - X_4 - m(t)X_5. \tag{94}$$

Построив каким-либо методом основную СЛАУ для каждой из этих невязок и решив эти независимые друг от друга СЛАУ, получаем значения неизвестных величин $X_1$, ..., $X_5$.

Решение основной СЛАУ для искомых $X_3$, $X_4$, $X_5$ дает:

$$\tilde{G}^N = X_4,\ \tilde{G}^{VN} = \frac{1}{2}X_5,\ 2(\tilde{C} - \tilde{G}^V) = X_3.$$

Решение основной СЛАУ для искомых $X_1$, $X_2$ дает:

$$\tilde{C} - \frac{1}{2}\tilde{G}^V = X_1,\quad \tilde{m}_x - \frac{1}{2}\tilde{G}^{VN} = X_2 \Rightarrow \tilde{m}_x = X_2 + \frac{1}{4}X_5.$$

Наконец, рассматривая совместно выражения для $X_1$ и $X_3$, находим:

$$\tilde{C} = \frac{4X_1 - X_3}{2},\quad \tilde{G}^V = 2X_1 - X_3.$$

Таким образом, найдены оценки как основных искомых $m_x$, $G^N$, характеризующих статистические свойства измеряемого сигнала, так и оценки дополнительных искомых $C$, $G^V$, $G^{VN}$, характеризующих статистические свойства параметра измерительной системы, а также степень коррелированности этого параметра с измеряемым сигналом. В этом и заключается построение алгоритма восстановления статистических характеристик измеряемого сигнала $X(t)$, который является инвариантным к параметрическим эффектам, обусловленным статистическим характером изменения параметра $a(t)$ измерительной системы.

### Модельная реализация алгоритма восстановления статистических характеристик измеряемого сигнала

Ниже приводятся результаты моделирования процесса восстановления статистических характеристик измеряемого сигнала, относящиеся ко второй, более общей, ситуации измерения, а именно, к условиям измерения, при которых измеряемый сигнал $X(t)$ и параметр $a(t)$ коррелированны. Для моделирования необходимо выбрать метод составления основных СЛАУ, а также прямые и косвенные критерии оценки точности получаемых результатов.

В качестве метода составления основных СЛАУ выберем второй из изложенных в главе 3 методов (аналог метода коллокации). В соответствии с этим методом, при составлении основной СЛАУ для определения неизвестных $X_3$, $X_4$, $X_5$ необходимо потребовать равенства нулю невязки $I_{D\,dif}(t)$ в трех точках. Если, например, восстановление искомых величин начинается с точки $t = t_1$ и используется некоторый $p$-й интервал восстановления, имеющий длительность $T0P$, то этими точками будут $t_k = t_1 + TP(k - 1)$, $k = 1, 2, 3$, $TP = T0P/2$, а основная СЛАУ для определения $X_3$, $X_4$, $X_5$ имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{3} A_{ki} X_{i+2} = B_k, \quad k = 1, 2, 3$$

$$A_{k1} = D(t_k), \;\; A_{k2} = -1, \quad A_{k3} = -m(t_k), \quad B_k = -\left(\frac{d}{dt} D(t)\right)\bigg|_{t=t_k}$$

Совершенно аналогично составляется основная СЛАУ для определения величин $X_1$, $X_2$, при этом используется невязка $I_{m\,dif}(t)$, а интервал восстановления $T0P$ остается тем же, что в предыдущем случае, но $TP = T0P/1 = T0P$.

При решении основных СЛАУ в качестве математического ожидания $m(t)$ и дисперсии $D(t)$ выходного сигналов используются приведенные ранее решения прямых задач (89), (90) соответственно.

В качестве прямых критериев оценки точности получаемых результатов используются следующие простейшие критерии:

$$\delta_1 = \frac{|m_x - \tilde{m}_x|}{|m_x|}, \;\; \delta_2 = \frac{|G^N - \tilde{G}^N|}{G^N}, \;\; \delta_3 = \frac{|C - \tilde{C}|}{C},$$

$$\delta_4 = \frac{|G^V - \tilde{G}^V|}{G^V}, \;\; \delta_5 = \frac{|G^{VN} - \tilde{G}^{VN}|}{|G^{VN}|}.$$

В качестве косвенного критерия близости получаемых оценок оцениваемым величинам можно использовать как критерии, основанные на математическом ожидании показаний ИС, так и критерии, основанные на дисперсии показаний ИС. Ниже используется первый из них, причем в качестве конкретного вида косвенного критерия выбираем следующий:

$$\rho I_m = \frac{1}{T0P} \int_{t_1}^{t_1 + T0P} |m(t) - M(t)|\, dt, \quad \rho I_{m\,\text{от}} = \frac{\rho I_m}{\dfrac{1}{T0P} \displaystyle\int_{t_1}^{t_1 + T0P} |m(t)|\, dt}, \tag{95}$$

где $T0P$ – $p$-й интервал восстановления искомых величин; $m(t)$ – фактическое значение математического ожидания показаний ИС, т. е. значение, представленное выражением (21); $M(t)$ – оценка математического ожидания выходного сигнала (предполагаемое значение математического ожидания выходного сигнала), т. е. это математическое ожидание выходного сигнала, которое имело бы место, если бы в выражении (21) вместо истинных значений $m_x$, $C$, $G^V$, $G^{VN}$ фигурировали найденные оценки $\tilde{m}_x, \tilde{C}, \tilde{G}^V, \tilde{G}^{VN}$.

Так как оценивание начинается с точки $t = t_1$, то предполагаемое решение берется с начальным условием при $t = t_1$, и начальное значение $M(t_1)$ берется равным значению $m(t)$ в точке $t = t_1$ (так же, как при восстановлении детерминированных сигналов в главе 3). Таким образом, предполагаемое значение математического ожидания выходного сигнала определяется выражением:

$$M(t) = m(t_1) \times e^{-(\tilde{C} - \frac{1}{2}\tilde{G}^V)(t - t_1)} + \frac{\tilde{m}_x - \frac{1}{2}\tilde{G}^{VN}}{\tilde{C} - \frac{1}{2}\tilde{G}^V} \times \left[1 - e^{-(\tilde{C} - \frac{1}{2}\tilde{G}^V)(t - t_1)}\right]. \quad (96)$$

В третьей главе при восстановлении изменяющихся во времени детерминированных сигналов использовался критерий $\rho I_{u\,\text{от}}$, который отличается от приведенного выше критерия $\rho I_{т\,\text{от}}$ только тем, что в нем, вместо математических ожиданий $m(t)$, $M(t)$ выходных сигналов, использовались сами выходные сигналы $u(t)$, $U(t)$. При этом отмечалось, что попадание интервала восстановления $[t_1, t_1 + T0P]$ в область установившейся стадии измерения сопровождалось резким повышением значений этого критерия и соответствующим повышением погрешностей восстановления измеряемых сигналов. Особенность рассмотренных ранее искомых детерминированных сигналов (кроме первого типового сигнала) заключалась в том, что в установившейся стадии измерения влиянием начальных условий на значения $u(t)$, $U(t)$ можно пренебречь, но значения фактического $u(t)$ и предполагаемого $U(t)$ выходных сигналов продолжали оставаться различными и зависящими от времени функциями. Благодаря этому, между значениями критерия $\rho I_{u\,\text{от}}$ и точностью восстановления измеряемого сигнала продолжала сохраняться зависимость.

Как следует из выражений (21), (96), для устойчивой измерительной системы математические ожидания $m(t)$, $M(t)$ в установившейся стадии измерения оказываются величинами постоянными. Следовательно, на этой стадии процесса восстановления статистических характеристик измеряемого сигнала величина критерия $\rho I_{т\,\text{от}}$ оказывается постоянной, близкой к нулю, в то время как погрешность восстановления растет. Сказанное означает, что на указанной стадии измерения связь этого критерия с погрешностью получаемых оценок утрачивается. Таким образом, критерий $\rho I_{т\,\text{от}}$ важен только для переходной стадии, где только его значения косвенно характеризуют близость найденных оценок оцениваемым параметрам.

Так как речь идет о восстановлении статистических характеристик стационарных случайных сигналов, т. е. характеристик, являющихся постоянными величинами, то, вообще говоря, достаточно осуществить оценку этих характеристик на первом интервале [$t_1$, $t_1$ + $T01$], а их оценки на последующих интервалах [$t_1$, $t_1$ + + $T0P$], $p$ = 2, 3, ... могут служить лишь подтверждением правильности информации, полученной на первом интервале. Как только оценки на $p$-м интервале окажутся резко отличными от своих значений на предыдущих интервалах, то это будет свидетельствовать о том, что значительную часть $p$-го интервала составляет уже установившаяся стадия измерения. Поэтому процесс восстановления искомых статистических характеристик можно считать завершенным на ($p$ – 1)-м интервале.

Вообще говоря, можно ввести простой критерий $\Delta_{\text{от}}$, который на каждом интервале получения оценок характеризует степень достижения установившейся стадии измерения:

$$\Delta_{\text{от}} = \frac{\left|m[t_1 + TP(k-1)] - m[t_1 + TP(k-2)]\right|}{\left|m[t_1 + TP(k-1)]\right|}, \quad TP = \frac{T0P}{k-1},$$

где $k$ – число неизвестных в основной СЛАУ.

Это выражение представляет собой относительную разность между значениями математического ожидания показаний ИС в последней и предпоследней точках коллокации $p$-го интервала восстановления. В данном случае, применительно, например, к основной СЛАУ, содержащей неизвестные $X_3$, $X_4$, $X_5$, величин $k$ = = 3, поэтому

$$\Delta_{\text{от}} = \frac{\left|m(t_1 + 2TP) - m(t_1 + TP)\right|}{\left|m(t_1 + 2TP)\right|}.$$

Очевидно, чем меньше значение критерия $\Delta_{\text{от}}$, тем выше степень достижения установившейся стадии измерения.

В таблицах 1 и 2 приведены результаты восстановления статистических характеристик измеряемых сигналов в условиях, при которых измеряемый сигнал $X(t)$ и параметр $a(t)$ являются нормально распределенными стационарными и стационарно коррелированными белыми шумами.

Значения величин $\Delta_{\text{от}}$, $\rho I_{T\text{от}}$, $\delta_1$, ..., $\delta_5$, приведенные в таблицах, даны в процентах. Указанные числа обусловленности относятся к основной СЛАУ, содержащей искомые $X_3$, $X_4$, $X_5$. Числа обусловленности, относящиеся к основной СЛАУ, содержащей искомые $X_1$, $X_2$, не приводятся, так как они существенно меньше, чем для предыдущей основной СЛАУ.

Приведенные в таблице 1 результаты соответствуют описанному выше характеру процесса восстановления статистических характеристик измеряемого сигнала. А именно вплоть до шестого интервала восстановления искомых характеристик, значения полученных оценок практически совпадают со значениями оцениваемых характеристик.

На седьмом интервале восстановления появляются погрешности, но максимальная величина погрешности ($\delta_4$), относящаяся к параметру $G^V$, составляет всего 0,014 %, что для статистических исследований может считаться пренебрежимо малой величиной. Но уже на следующем, восьмом, интервале восстановления значения оценок резко отличаются от значений этих оценок на предыдущих интервалах: указанные отличия составляют от 7,7 % – для параметра $m_x$, до 393 % – для параметра $G^V$. Следовательно, процесс восстановления искомых характеристик с использованием алгоритма инвариантности должен завершиться на седьмом интервале.

Заметим, величина критерия $\Delta_{от}$ на седьмом интервале составляет всего 0,003 %, а это также свидетельствует о том, что уже седьмой интервал восстановления, которым завершается использование алгоритма инвариантности, частично охватывает установившуюся стадию измерения. На восьмом интервале значение этого критерия практически равно нулю, т. е. восьмой интервал восстановления в значительной степени охватывает установившуюся стадию измерения.

Наконец, приведенные в табл. 1 результаты, относящиеся к девятому интервалу восстановления, показывают, что этот интервал состоит в основном из установившейся стадии измерения, поэтому значение критерия $\Delta_{от}$ оказывается равным нулю, а сама основная СЛАУ становится сингулярной.

Обратимся к результатам модельной реализации алгоритма инвариантности, представленным в таблице 2.

*Таблица 1*. **Результаты восстановления статистических характеристик измеряемого сигнала и параметра ИС**

Исходные данные: $m_x = 100$, $G^N = 40$, $C = 10$, $G^V = 4$, $G^{VN} = 8$

| $P$ | $\Delta_{\text{от}}$ | $t_1 \le t \le t_1 + T0P$ | $TP$ | $T0P$ | Косвенный критерий $\rho I_{m\ \text{от}}$ | Прямые критерии | | | | | cond 1 ($A$)<br>cond 2 ($A$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | $\delta_1 \cdot 10^6$ | $\delta_2 \cdot 10^6$ | $\delta_3 \cdot 10^6$ | $\delta_4 \cdot 10^6$ | $\delta_5 \cdot 10^6$ | |
| 1 | 19,36 | [0,04; 0,08] | 0,02 | 0,04 | 0,002 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 382<br>217 |
| 2 | 28,4 | [0,04; 0,12] | 0,04 | 0,08 | 0,002 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 177<br>116 |
| 3 | 22,68 | [0,04; 0,2] | 0,08 | 0,16 | 0,001 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 120<br>89 |
| 4 | 15,44 | [0,04; 0,36] | 0,16 | 0,32 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 135<br>100 |
| 5 | 5,2 | [0,04; 0,68] | 0,32 | 0,64 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 305<br>219 |
| 6 | 0,43 | [0,04; 1,32] | 0,64 | 1,28 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3015<br>2229 |
| 7 | 0,003 | [0,04; 2,6] | 1,28 | 2,56 | 0 | 277 | 5984 | 2823 | 14118 | 6933 | 467645<br>347818 |
| 8 | $9{,}3 \cdot 10^{-8}$ | [0,04; 5,16] | 2,56 | 5,12 | 0 | $7{,}7 \cdot 10^6$ | $167 \cdot 10^6$ | $78{,}6 \cdot 10^6$ | $393 \cdot 10^6$ | $193 \cdot 10^6$ | $13 \cdot 10^9$<br>$9{,}7 \cdot 10^9$ |
| 9 | 0 | [0,04; 10,28] | 5,12 | 10,24 | – | – | – | – | – | – | сингу-<br>лярность |

*Таблица 2*. **Результаты восстановления статистических характеристик измеряемого сигнала и параметра ИС**

Исходные данные: $m_x = 100$, $G^N = 40$, $C = 1$, $G^V = 0{,}4$, $G^{VN} = 3$

| $P$ | $\Delta_{от}$ | $t_1 \le t \le t_1 + T0P$ | $TP$ | $T0P$ | Косвенный критерий $\rho I_{m\ от}$ | Прямые критерии | | | | | cond 1 ($A$)<br>cond 2 ($A$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | $\delta_1 \cdot 10^6$ | $\delta_2 \cdot 10^6$ | $\delta_3 \cdot 10^6$ | $\delta_4 \cdot 10^6$ | $\delta_5 \cdot 10^6$ | |
| 1 | 24,4 | [0,04; 0,08] | 0,02 | 0,04 | 0,009 | 0 | 0,001 | 0,002 | 0,102 | 0,005 | 427<br>217 |
| 2 | 32,3 | [0,04; 0,12] | 0,04 | 0,08 | 0,006 | 0 | 0 | 0,003 | 0,016 | 0,001 | 174<br>102 |
| 3 | 38,1 | [0,04; 0,2] | 0,08 | 0,16 | 0,004 | 0 | 0 | 0,001 | 0,004 | 0 | 89<br>76 |
| 4 | 40,9 | [0,04; 0,36] | 0,16 | 0,32 | 0,002 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 103<br>94 |
| 5 | 40,36 | [0,04; 0,68] | 0,32 | 0,64 | 0,001 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 199<br>166 |
| 6 | 35,66 | [0,04; 1,32] | 0,64 | 1,28 | 0,001 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 423<br>333 |
| 7 | 25,47 | [0,04; 2,6] | 1,28 | 2,56 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 802<br>604 |
| 8 | 11,1 | [0,04; 5,16] | 2,56 | 5,12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1179<br>875 |
| 9 | 1,59 | [0,04; 10,28] | 5,12 | 10,24 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1901<br>1804 |
| 10 | 0,027 | [0,04; 20,52] | 10,24 | 20,48 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,001 | 0 | 106374<br>84104 |
| 11 | $7 \cdot 10^{-6}$ | [0,04; 41] | 20,48 | 40,96 | 0 | 0,126 | 4,418 | 4,647 | 23,236 | 8,404 | $3{,}8 \cdot 10^8$<br>$3 \cdot 10^8$ |
| 12 | $6 \cdot 10^{-13}$ | [0,04; 81,96] | 40,96 | 81,92 | 0 | $1{,}7 \cdot 10^6$ | $59{,}5 \cdot 10^6$ | $62{,}6 \cdot 10^6$ | $313 \cdot 10^6$ | $113 \cdot 10^6$ | $4{,}9 \cdot 10^{15}$<br>$3{,}9 \cdot 10^{15}$ |
| 13 | 0 | [0,04;163,88] | 81,92 | 163,84 | – | – | – | – | – | – | сингу-<br>лярность |

В таблице 2 приведены результаты восстановления статистических характеристик измеряемого сигнала для измерительных систем, которые примерно на порядок более инерционны, чем в предыдущем случае. Не будем приводить качественного анализа процесса восстановления искомых характеристик для этого случая, так как указанный анализ вполне аналогичен сделанному выше. Отметим лишь, что, согласно приведенным в табл. 2 результатам, теперь последним интервалом, на котором восстановление искомых характеристик с использованием алгоритма инвариантности оказывается целесообразным, является одиннадцатый интервал ($p = 11$). Как видим, теперь, ввиду большей инерционности измерительной системы, длина интервала, на котором возможно эффективное использование алгоритма инвариантности, увеличилась в $\sim 16$ раз.

Общий вывод, вытекающий из приведенных результатов модельной реализации алгоритма инвариантности, заключается в том, что использование одноканального принципа инвариантности позволило с очень высокой точностью и инвариантно к параметрическим эффектам восстановить статистические характеристики измеряемого сигнала.

В заключение затронем вопрос о предварительном этапе реализации принципа инвариантности. При реализации алгоритма инвариантности для детерминированных измерительных систем и измеряемых сигналов предварительный этап заключался в выборе математических моделей оценок $\widetilde{a}(t)$, $\widetilde{X}(t)$. В простейшем случае – это выбор для оценок $\widetilde{a}(t)$, $\widetilde{X}(t)$ степеней аппроксимирующих алгебраических многочленов и указанный выбор осуществляется с помощью того или иного косвенного критерия.

Аналогичный этап имеет место и в случае реализации принципа инвариантности при восстановлении статистических характеристик измеряемого сигнала. В разобранных простых примерах не потребовалось использования аппроксимаций для оценок искомых характеристик случайных процессов. Поэтому для рассмотренных моделей измерительных систем содержание предварительного этапа заключается в выборе конкретной, наиболее адекватной статистической модели измерительной системы. Так как априори неизвестно, какая из статистических моделей (84), (85) или (89), (90) наиболее адекватно отражает измерительную ситуацию, фактически имеющую место, то необходимо испытать обе указанные модели.

Возможна ситуация, при которой ни один из рассмотренных случаев не дает удовлетворительного результата. Указанная ситуация означает, что необходимо обратиться к уточнению либо исходной модели ИС, по которой строятся статистические модели, либо метода перехода от исходной модели к статистической модели ИС. Понятно, что все описанные выше действия, в том числе уточнения моделей, могут выполняться по единой программе.

### Об оценке погрешности восстановления измеряемого сигнала в реальных условиях измерения

При использовании одноканального принципа инвариантности в реальных условиях измерения возникает важный вопрос об оценке погрешности восстановления измеряемого сигнала с использованием прямых критериев. Прямые критерии, в той или иной форме, используют понятие отклонения $|\tilde{X}(t)-X(t)|$ измеряемого сигнала $X(t)$ от его оценки $\tilde{X}(t)$. При моделировании сигнал $X(t)$ известен априори, а его оценка $\tilde{X}(t)$ получается в процессе восстановления измеряемого сигнала с использованием алгоритма инвариантности. Поэтому при вычислении указанного отклонения в процессе моделирования не возникает никаких вопросов.

При использовании одноканального принципа инвариантности в реальных условиях измерения сигнал $X(t)$ не известен и, следовательно, возникает задача оценки указанного отклонения.

Ниже приводится один из возможных путей решения этой задачи.

Пусть рассматривается ИС первого порядка, описываемая уравнением (3.2), а восстанавливаемые процессы $\alpha(t)$, $X(t)$ представлены алгебраическими многочленами

$$\alpha(t)=\sum_{i=1}^{N1}\alpha_i t^{i-1},\qquad X(t)=\sum_{j=1}^{N2}\beta_j t^{j-1}$$

Уравнение (3.2) запишем в виде

$$0=\frac{du(t)}{dt}\sum_{i=1}^{N1}\alpha_i t^{i-1}+u(t)-\sum_{j=1}^{N2}\beta_j t^{j-1}, \tag{a}$$

где оцениваемыми являются величины $N1$, $N2$, $\alpha_i$, $\beta_j$.

Невязка в дифференциальной форме $I_{dif}(t)$ описывается выражением

$$I_{dif}(t)=\frac{du(t)}{dt}\sum_{i=1}^{n1}\tilde{\alpha}_i t^{i-1}+u(t)-\sum_{j=1}^{n2}\tilde{\beta}_j t^{j-1}, \tag{b}$$

где $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_j$ – оценки величин $\alpha_i$, $\beta_j$ соответственно.

Допустим, что задача восстановления процессов $\alpha(t)$, $X(t)$ решена. Это означает, что найдены величины $n1$, $n2$, $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_j$, а следовательно, и оценки $\tilde{\alpha}(t)$, $\tilde{X}(t)$, причем, по методике выбора единственного из множества возможных решений обратной задачи установлено: $n1 = N1$, $n2 = N2$. Остается найти отклонения $|\tilde{\alpha}(t)-$

$\alpha(t)|$, $|\tilde{X}(t)-X(t)|$ и соответствующие им прямые оценки погрешностей восстановления процессов $\alpha(t)$ и $X(t)$.

Так как оценки $\tilde{\alpha}(t)$, $\tilde{X}(t)$ уже известны, то выражение (b) позволяет теперь вычислять $I_{dif}(t)$ в произвольной точке интервала восстановления.

Вычитая из выражения (b) выражение (a) и учитывая, что $n1 = N1$, $n2 = N2$, имеем

$$\frac{du(t)}{dt}\sum_{i=1}^{N1}(\Delta\alpha)_i t^{i-1} - \sum_{j=1}^{N2}(\Delta\beta)_j t^{j-1} = I_{dif}(t), \tag{c}$$

где: $(\Delta\alpha)_i = (\tilde{\alpha}_i - \alpha_i)$, $(\Delta\beta)_j = (\tilde{\beta}_j - \beta_j)$.

При этом сами отклонения имеют вид

$$\Delta\alpha(t) = [\tilde{\alpha} - \alpha(t)] = \sum_{i=1}^{N1}(\Delta\alpha)_i t^{i-1}, \quad \Delta X(t) = [\tilde{X}(t) - X(t)] = \sum_{j=1}^{N2}(\Delta\beta)_j t^{j-1}$$

Таким образом, найдя величины $(\Delta\alpha)_i$, $(\Delta\beta)_j$, можно найти и искомые отклонения.

Соотношение (c) можно рассматривать как уравнение, устанавливающее взаимосвязь между известными функциями $u(t)$, $I_{dif}(t)$ и неизвестными постоянными величинами $(\Delta\alpha)_i$, $(\Delta\beta)_j$. То есть ситуация здесь вполне аналогична той, которая имела место ранее при построении алгоритма инвариантности. Поэтому для определения величин $(\Delta\alpha)_i$, $(\Delta\beta)_j$, по аналогии с построением основных СЛАУ, построим СЛАУ для погрешностей.

Введем единое обозначение неизвестных. Пусть

$$(\Delta\alpha)_i = \tilde{X}_i,\ i = 1, 2, \ldots, N1, \quad (\Delta\beta)_j = \tilde{X}_{N1+j},\ j = 1, 2, \ldots, N2$$

Тогда соотношение (c) запишется в виде

$$\frac{du(t)}{dt}\sum_{i=1}^{N1} t^{i-1} \times \tilde{X}_i - \sum_{i=N1+1}^{N1+N2} t^{i-N1-1} \times \tilde{X}_i = I_{dif}(t)$$

При построении СЛАУ для погрешностей можно использовать те же методы, что при построении основных СЛАУ. Используя, например, второй метод, потребуем удовлетворения соотношения (c) в точках $t'_k = t'_1 + T'(k-1)$, $k = 1, 2, \ldots, (N1 + N2)$, где $T' = T0/(N1 + N2 - 1)$, $T0$ – интервал оценки погрешностей, а $T'$ – частичный интервал.

Удовлетворение указанных условий дает СЛАУ для погрешностей, которая в стандартной форме имеет вид

$$\sum_{i=1}^{N1+N2} \tilde{A}_{ki}\tilde{X}_i = \tilde{B}_k, \quad \tilde{B}_k = I_{dif}[t_1' + T'(k-1)], \quad k = 1, 2, \ldots, (N1+N2) \tag{d}$$

$$\tilde{A}_{ki} = \begin{cases} \left.\dfrac{du(t)}{dt}\right|_{t=t_1'+T'(k-1)} \times [t_1' + T'(k-1)]^{i-1}, \ i \le N1 \\ -[t_1' + T'(k-1)]^{i-N1-1}, \ i > N1 \end{cases}$$

Как видим, матрица СЛАУ для погрешностей (d) при $N1 = n1$, $N2 = n2$ совпадает по структуре с матрицей основной СЛАУ (3.8) для определения оценок $\tilde{\alpha}(t)$, $\tilde{X}(t)$. Обратим внимание, что СЛАУ (3.8) построена с использованием точек $t_k = t_1 + T(k-1)$, $k = 1, 2, \ldots, (N1 + N2)$, где $T = T0/(N1 + N2 - 1)$, $T0$ – интервал восстановления искомых $\alpha(t)$, $X(t)$, а $T$ – частичный интервал. То есть точки $t_k'$, используемые при составлении СЛАУ для погрешностей (d), отличаются от точек $t_k$, используемых при составлении основной СЛАУ. Сделано это с целью избежать однородности СЛАУ (d), так как по смыслу построения основной СЛАУ (3.8) в точках $t_k$ должны выполняться условия $I_{dif}(t_k) = 0$. Понятно, что на выбор точек $t_k'$ накладывается ограничение: интервал $[t_1'; t_1' + T'0]$ должен включаться в интервал $[t_1; t_1 + T0]$.

Таким образом, для оценки погрешностей восстановления процессов $\alpha(t)$, $X(t)$ в реальных условиях измерения достаточно, решив систему (d), найти величины $(\Delta\alpha)_i$, $(\Delta\beta)_j$, а затем и отклонения $\Delta\alpha(t)$, $\Delta X(t)$. Погрешности восстановления искомых $\alpha(t)$, $X(t)$ вычисляются в соответствии, например, с прямыми критериями

$$(\rho\alpha_{\text{от}})_{\text{в}} = \frac{\int_{t_1'}^{t_1'+T'0} \Delta\alpha(t)\,dt}{\int_{t_1'}^{t_1'+T'0} \left|\tilde{\alpha}(t)\right| dt}, \qquad (\rho X_{\text{от}})_{\text{в}} = \frac{\int_{t_1'}^{t_1'+T'0} \Delta X(t)\,dt}{\int_{t_1'}^{t_1'+T'0} \left|\tilde{X}\right| dt}$$

Здесь в знаменателях используются оценки, так как в реальных условиях измерения известными могут быть именно оценки искомых величин.

В изложенном и состоит методика оценки погрешностей восстановления процессов $\alpha(t)$, $X(t)$ при использовании одноканального принципа инвариантности в реальных условиях измерения. Эта методика может быть использована и при рассмотрении других видов ИС, а также при случайном характере процессов $\alpha(t)$, $X(t)$, причем независимо от методов построения основных СЛАУ.

Перейдем к численным оценкам, для чего обратимся к конкретным условиям измерения. Пусть для данной ИС исходными условиями являются

| $N1$ | $N2$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $t_1$ | $T0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 1 | 10 | 100 | 1000 | 2 | 20 | 200 | 0,04 | 0,1 |

и пусть в результате восстановления процессов $\alpha(t)$, $X(t)$ с помощью одноканального принципа инвариантности установлено (см. таблицу 3.4):

$$n1 = N1 = 4,\ n2 = N2 = 3,\ \rho\alpha_{\text{от}} = 1{,}307\times10^{-5}\ \%,\ \rho X_{\text{от}} = 1{,}269\times10^{-5}\ \%$$

Приведенные погрешности определены в предположении, что известны процессы $\alpha(t)$, $X(t)$, как это имело место при моделировании. Величины этих погрешностей можно рассматривать как «точные» и использовать их для сравнения с оценками $(\rho\alpha_{\text{от}})_{\text{в}}$, $(\rho X_{\text{от}})_{\text{в}}$, полученными по изложенной выше методике.

Если в качестве точек $t'_k$ использовать точки: $t'_1 = 0{,}0405$, $T'0 = 0{,}0995$, $t'_k = t'_1 + T'(k-1)$, $T' = T'0/(N1 + N2 - 1)$, $k = 1, 2, \ldots, (N1 + N2)$, т. е., сдвинув вправо первую точку исходного интервала $t \in [0{,}04; 0{,}14]$ на 0,0005, взять интервал $t' \in [0{,}0405; 0{,}14]$, то, используя найденные оценки $\tilde{\alpha}(t)$, $\tilde{X}(t)$, в соответствии с изложенной методикой, получим

$$(\rho\alpha_{\text{от}})_{\text{в}} = 4{,}363\times10^{-3}\ \%,\quad (\rho X_{\text{от}})_{\text{в}} = 4{,}236\times10^{-3}\ \%.$$

Практически тот же результат получается, если только сдвинуть влево на 0,0005 последнюю точку исходного интервала или осуществить оба указанных сдвига.

Из изложенного следуют два вывода. Во-первых, решение приведенного уравнения для погрешности оценок (с) позволяет выделять из множества возможных единственное решение обратной задачи, причем как в условиях реальных измерений, так в условиях моделирования. Во-вторых, даже в соответствии с завышенными оценками погрешностей $(\rho\alpha_{\text{от}})_{\text{в}}$, $(\rho X_{\text{от}})_{\text{в}}$, вычисленными для реальных условий измерения, восстановление искомых $\alpha(t)$, $X(t)$ с использованием одноканального принципа инвариантности действительно осуществляется с пренебрежимо малой для динамических измерений погрешностью. Заметим, что существенно более точные оценки погрешностей $(\rho\alpha_{\text{от}})_{\text{в}}$, $(\rho X_{\text{от}})_{\text{в}}$ получаются при использовании первого метода построения СЛАУ.

В заключение рассмотрим более сложный случай. Пусть ИС описывается уравнением (3.1)

$$\frac{du(t)}{dt} + a(t)u(t) = a(t)X(t), \tag{a$'$}$$

то есть теперь имеем дело со второй схемой реализации алгоритма инвариантности.

Интегрируя (a′), получим исходную модель в интегральной форме

$$u(t) - u(t_1) + \int_{t_1}^{t} a(\tau)u(\tau)d\tau - \int_{t_1}^{t} a(\tau)X(\tau)d\tau = 0 \tag{b$'$}$$

Невязка в интегральной форме опишется выражением

$$I_{\text{int}}(t) = u(t) - u(t_1) + \int_{t_1}^{t} \tilde{a}(\tau)u(\tau)d\tau - \int_{t_1}^{t} \tilde{a}(\tau)\tilde{X}(\tau)d\tau, \tag{c$'$}$$

где $\tilde{a}(t)$, $\tilde{X}(\tau)$ – известные оценки неизвестных $a(t)$, $X(t)$, найденные в соответствии со второй схемой реализации алгоритма инвариантности, описанной в п. 3.3.2.

Невязка $I_{\text{int}}(t)$ теперь также считается известной, так как известны оценки $\tilde{a}(t)$, $\tilde{X}(t)$.

Вычтем из выражения (c′) выражение (b′), получим

$$\int_{t_1}^{t} u(\tau)[\tilde{a}(\tau) - a(t)]d\tau - \int_{t_1}^{t} [\tilde{a}(\tau)\tilde{X}(\tau) - a(\tau)X(\tau)]d\tau = I_{\text{int}}(t)$$

Обозначив $\Delta a(t) = \tilde{a}(t) - a(t)$, $\Delta X(t) = \tilde{X}(t) - X(t)$ и воспользовавшись представлением

$$\tilde{a}(t)\tilde{X}(t) - a(t)X(t) = \Delta a(t)\times\tilde{X}(t) + \tilde{a}(t)\Delta X(t) - \Delta a(t)\times\Delta X(t),$$

получим искомое уравнение для погрешностей оценок в виде

$$\int_{t_1}^{t} [u(\tau) - \tilde{X}(\tau)]\times\Delta a(\tau)d\tau - \int_{t_1}^{t} \tilde{a}(\tau)\Delta X(\tau)d\tau + \int_{t_1}^{t} \Delta a(\tau)\Delta X(\tau)d\tau = I_{\text{int}}(t) \tag{d$'$}$$

Так же, как в предыдущем случае, представляя $a(t)$, $X(t)$ и $\tilde{a}(t)$, $\tilde{X}(t)$ в виде алгебраических многочленов и полагая $n1 = N1$ и $n2 = N2$, получим представления для погрешностей $\Delta a(t)$, $\Delta X(t)$

$$\Delta a(t) = \sum_{i=1}^{N1} (\Delta a)_i \times t^{i-1}, \quad \Delta X(t) = \sum_{j=1}^{N2} (\Delta\beta)_j \times t^{j-1}$$

и нелинейное уравнение для погрешностей оценки (d′), в котором искомыми неизвестными будут уже постоянные величины $(\Delta a)_i$, $(\Delta\beta)_j$.

Решение уравнения (d′) относительно неизвестных $(\Delta a)_i$, $(\Delta\beta)_j$, а следовательно, определение погрешностей оценок $\Delta a(t)$, $\Delta X(t)$ осуществляется так же, как описано в п. 3.3.2, что связано с линеаризацией и введением промежуточных обобщенных неизвестных.

В данном случае области интегрирования в (d′) следует выбирать таким образом, чтобы сохранялась неоднородность соответствующей СЛАУ. То есть при использовании первого метода составления СЛАУ интервалы интегрирования при составлении СЛАУ для уравнения (d′) $\big($для определения $\Delta a(t)$, $\Delta X(t)\big)$ должны быть смещены относительно интервалов интегрирования, которые использовались при составлении СЛАУ для определения самих оценок $\tilde{a}(t)$, $\tilde{X}(t)$.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из содержания монографии понятно, почему изложение физически одноканального принципа инвариантности дано именно применительно к измерительным системам: указанный принцип инвариантности позволяет решить сложную проблему теории и практики измерений, привлекавшую к себе особое внимание специалистов уже на протяжении многих десятилетий – проблему исключения влияния параметрических эффектов на точность динамических измерений.

Однако, одноканальный принцип инвариантности может быть применен в любой другой области, где по реакции линейного нестационарного динамического объекта на некоторое входное воздействие требуется определить само входное воздействие. Такие объекты исследования существуют в большом количестве во многих областях науки и техники – в астрономии, физике, химии, экономике и т. д. Поэтому, переходя на язык обобщенных понятий «объект», «вход», «выход» и учитывая содержание п. 4.2, где рассматривалось применение одноканального принципа инвариантности к динамике линейной нестационарной измерительной системы произвольной (неизвестной) структуры, можно утверждать, что по реакции линейного объекта с сосредоточенными параметрами на некоторое входное воздействие может быть решена расширенная обратная задача – определение входного воздействия и импульсной переходной функции, характеризующей динамические свойства объекта.

Основные общие методические вопросы, связанные с применением одноканального принципа инвариантности в динамике линейных объектов, были затронуты в данной монографии. Вместе с тем, понятно, что применение этого принципа в любой конкретной области может иметь некоторые свои особенности.

В п. 2.4 рассмотрено построение алгоритма инвариантности для одного довольно узкого класса нелинейных измерительных систем. Логическим продолжением проведенных в данной работе исследований является исследование возможностей реализации одноканального принципа инвариантности применительно к некоторым общим моделям нелинейных измерительных систем. В указанном направлении представляется перспективным использование функциональных рядов Вольтерра, которые могут служить моделями достаточно широкого класса нелинейных систем и являются естественным обобщением моделей линейных систем.

# ЛИТЕРАТУРА


1. *Азизов А. М.* Информационные системы контроля параметров технологических процессов. Л.: Химия, 1983. 327 с.
2. *Азизов А. М.* Анализ технологических процессов. Л.: Химия, 1992. 336 с.
3. *Воскобойников Ю. Е.* Устойчивые алгоритмы решения обратных измерительных задач. Новосибирск: СИБСТРИН, 2007. 175 с.
4. *Гордов А. Н.* Температурное поле тел в условиях переменной температуры среды и меняющейся теплоотдачи. «Труды ВНИИМ», 1958, вып. 35 (95). С. 129–252.
5. *Дейч А. М.* Методы идентификации динамических объектов. М.: Энергия, 1979. 240 с.
6. *Евланов Л. Г., Константинов В. М.* Системы со случайными параметрами. М.: Наука, 1976. 568 с.
7. *Жданов А. И.* Регуляризация неустойчивых конечномерных линейных задач на основе расширенных систем. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. № 11. С. 1919–1927.
8. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 456 с.
9. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
10. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.
11. *Михеев М. А., Михеева И. М.* Краткий курс теплопередачи. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1961. 208 с.
12. *Свешников А. А.* Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. 463 с.
13. *Тихонов А. Н., Арсеньев В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1985. 285 с.
14. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.
15. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 683 с.
16. *Pfriem H.* Forsch. Geb. Ing. 1936. Bd. 7. H. 2. P. 85–92.

Научное издание

**АЗИЗОВ** Азиз Мустафаевич

# ОДНОКАНАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ в ДИНАМИКЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Монография
Электронное текстовое издание

Редактор Л. Н. Захаров
Компьютерная верстка Т. М. Лебедевой

Монография разработана с помощью программного обеспечения
Microsoft Office Word, Adobe Acrobat Pro
Гарнитура SchoolBookAC, AvantGardeCTT

Подписано к использованию 24.06.2019.
Объем издания – 5,1 МБ

Издательство «Наукоемкие технологии»
ООО «Корпорация «Интел Групп»
http://publishing.intelgr.com
E.mail: publishing@ intelgr.com
Тел.: (812)945-50-63