Кравчук А.С., Кравчук А.И.

ПРИКЛАДНЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СТЕРЖНЕВОЙ МОДЕЛИ ПОКРЫТИЯ

Санкт-Петербург
Наукоемкие технологии
2019

Кравчук А.С., Кравчук А.И.

ПРИКЛАДНЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СТЕРЖНЕВОЙ МОДЕЛИ ПОКРЫТИЯ

Монография

Электронное текстовое издание

Санкт-Петербург
Наукоемкие технологии
2019

ISBN 978-5-6042710-0-1

УДК 539.3
ББК 22.251
К 78

Рецензенты:
доктор технических наук Белоцерковский М.А.,
доктор технических наук Медведев С.В.

Кравчук А.С., Кравчук А.И.

Прикладные контактные задачи для обобщенной стержневой модели покрытия [Электронный ресурс]: монография. – СПб: Наукоемкие технологии, 2019. – 221 с. – URL: https://publishing.intelgr.com/archive/core_model.pdf.

ISBN 978-5-6042710-0-1

Выполнено систематизированное обобщение стержневой модели Винклера на все наиболее известные уравнения состояния стержня, как без учета реологии, так и с ее учетом. Выполнено обобщение стержневой модели на случай неоднородного композиционного материала моделируемого покрытия. Рассмотрены вопросы моделирования вдавливания индентора в криволинейное покрытие, моделируемое стрежнями. Поставлены и решены все важные с практической точки зрения задачи индентирования покрытий конечной высоты. Предложен геометрический критерий надежности измерений при вдавливании индентора. Определена связь между твердостью поверхности покрытия по Мейеру и абсолютным значением предела текучести при сжатии в рамках упруго-идеально-пластической модели покрытия. Установлено, что абсолютное значение предела текучести при сжатии можно также определить по конечному участку диаграммы вдавливания. Решены также задачи для таких распространенных в технике узлов как цилиндрические подшипники скольжения, и шаровые опоры и наконечники, у которых предусмотрено применение антифрикционного низкомодульного покрытия между контактирующими элементами. Решения учитывают также износ и большую разность радиусов контактирующих элементов.

Книга предназначена для научных сотрудников, инженеров, а также аспирантов и студентов соответствующих специальностей, занимающихся исследованиями в области механики деформируемого твердого тела.

Ил. 44. Библиогр. 71 назв.

Монография публикуется в авторской редакции.

ISBN 978-5-6042710-0-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Основой данной монографии является идея авторов, состоящая в том, что к настоящему времени назрело провести обобщение модели линейно-деформируемого основания Винклера на случаи нелинейного деформирования материала основания (покрытия), а также его реологического поведения. Это дает возможность построить инженерные методы анализа контактного взаимодействия твердых тел во многих важных технологических процессах. Например, провести моделирование определения твердости поверхности покрытий конечной высоты индентерами разной формы.

Кроме того, распространение модели Винклера на нелинейный случай, а также возможность учета ползучести покрытия дает возможность промоделировать процессы взаимодействия в цилиндрических и шаровых опорах скольжения с низкомодульным [1] антифрикционным покрытием, а в некоторых случаях выполнить также расчет изнашивания.

Предлагаемое авторами естественное обобщение модели Винклера на более сложные виды деформирования материалов покрытий делает эту модель практически универсальным средством решения прикладных задач.

Авторы также предлагают использовать модель Винклера для решения контактных задач для слоя переменной глубины. В данной монографии сделан еще одни шаг к созданию на основе стержневой модели покрытия гибкого инструмента анализа влияния геометрических отклонений от макроформы взаимодействующих тел на параметры их физического контакта.

В рамках предлагаемого исследования выполнено также обобщение однородной стержневой модели покрытия на композиционный, в том числе слоистый случай исполнения покрытии.

Поэтому на взгляд авторов обобщенная таким образом модель Винклера должна называться в дальнейшем обобщенной стержневой моделью покрытия, конечной высоты.

ГЛАВА 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1.Гипотезы, применяемые при решении контактных задач

Особенностью решения контактных задач является то, что исследователь в области контакта задает перемещения, хотя на остальной границе задаются равными нулю нормальные напряжения. Поэтому контактные задачи еще называются смешанными [1, 2].

Практическое получение аналитических зависимостей для напряжений и перемещений в замкнутой форме для реальных объектов даже в простейших случаях сопряжено с существенными трудностями. Вследствие этого при рассмотрении контактных задач принято прибегать к идеализации. Так, считается, что если размеры самих тел достаточно велики по сравнению с размерами области контакта, то напряжения в этой зоне слабо зависят от конфигурации тел вдали от области контакта, а также способа их закрепления. При этом напряжения с достаточно хорошей степенью достоверности можно вычислить, рассматривая каждое тело как бесконечную упругую среду, ограниченную плоской поверхностью, т.е. как упругое полупространство [1, 2].

Поверхность каждого из тел предполагается топографически гладкой на микро и макроуровне. На микроуровне это означает отсутствие или не учет микронеровностей контактирующих поверхностей, которые обусловили бы неполное прилегание поверхностей контакта. Поэтому реальная область контакта, которая образуется на вершинах выступов, значительно меньше теоретической. На макроуровне профили поверхностей считаются непрерывными в зоне контакта вместе со вторыми производными [1, 2].

Указанные предположения впервые были использованы Герцем при решении контактной задачи. Дальнейшее развитие механики контактного взаимодействия связано, главным образом с отказом от этих ограничений [1, 2].

1.2.Моделирование испытаний поверхности деформируемых тел на твердость

Нагрузка, при которой начинается пластическое течение в условиях сложного напряженного состояния двух контактирующих тел, определяется пределом текучести более мягкого материала [3]. В этом случае вытеснение материала индентором компенсируется упругими смещениями окружающей среды. Если глубина вдавливания увеличивается, то происходит повышение давления под индентором и все больший объем материала переходит в состояние пластического течения и в конечном итоге для обеспечения необходимого расширения материала пластическая зона выходит на свободную поверхность и вытесненный материал может свободно пластически течь по краям индентора [3].

По широте применения испытания на твердость конкурируют с наиболее распространенными испытаниями на статическое растяжение. Это объясняется простотой, высокой производительностью, отсутствием разрушения образца, возможностью оценки свойств отдельных структурных составляющих и тонких слоев на малой площади [3]. При этом следует отметить разнообразие методов определения твердости и различный физический смысл чисел твердости [3]. В разных методах и при отличающихся друг от друга условиях проведения испытания числа твердости могут характеризовать сопротивление малым или большим пластическим деформациям, сопротивление материала разрушению [3].

Определение твердости всеми методами (кроме микротвердости), измеряет суммарное сопротивление металла вдавливанию в него индентора, усредняющее твердость всех имеющихся структурных составляющих. Неизбежные различия в структуре разных участков образца приводят к разбросу значений твердости, который тем больше, чем меньше размер отпечатка [3].

В настоящее время в зарубежной литературе используются методики, основанные на использовании формулы Герца и ее аналогов для пересчета объема пластических деформаций, вызванных вдавливанием многогранных инденторов в поверхность твердого тела. Основой такого пересчета является приравнивание вдавливаемых объемов для шарового индентора в теории Герца и многогранных инденторов, применяемых на практике.

Однако теория Герца разработана только для упругой деформации твердого тела (объекта индентирования) и дает лишь качественное совпадение с экспериментом для тела, выполненного из стекла [1]. Существуют лишь косвенные подтверждения правомерности теории Герца, заключающиеся в том, что Динник в своих работах 1909 года [4] экспериментально подтвердил теорию Герца, исследованием удара шара о поверхность полупространства. При этом отметим, что на момент проведения Динником своих экспериментальных работ (начало 20 века) еще не было разработано средств контроля микрогеометрии поверхностей.

В настоящее время известно [5], что именно качество поверхностей взаимодействующих тел вносит существенную поправку в реально измеряемые параметры взаимодействия криволинейных тел и при малых нагрузках – полностью определяет их [5]. В связи с этим экспериментальные работы Динника нельзя воспринимать как подтверждение адекватности теории Герца для широкого круга материалов.

Ряд работ отечественных механиков также посвящен исследованию процессов проходящих при вдавливании инденторов различного профиля. Так, используя предположение, что свободная поверхность остается плоской, Ишлинский А.Ю. построил поле линий скольжения для вдавливания без трения жесткого шара в жесткопластическое полупространство. Однако полученные Ишлинским А.Ю. результаты не устраивали практиков, которые на базе экспериментов получали существенно другие зависимости. Более подробный обзор теоретических работ в этой области приведен в монографии Джонсона [1].

Одновременно в литературе получила развитие и другая, упрощенная теория контактного взаимодействия деформируемых тел [6].

1.3.Контактная жесткость взаимодействующих тел

Распределение перемещений в области контакта оказывает существенное влияние на точность работы станков и приборов. При этом различают деформации самих тел (деталей), и контактные деформации на поверхностях в области их сопряжений. Так в технике получил распространение термин «жесткость системы» как определяющий способность деталей сопротивляться изменению формы под действием сил и являющийся, наряду с прочностью, одним из важнейших критериев работоспособности технологического оборудования, связанный с необходимостью обеспечения определенного уровня его точности и виброустойчивости.

Расчет на жесткость машиностроительных конструкций заключается в ограничении упругих перемещений деталей, обусловленные их деформацией, определенными пределами, зависящими от назначения и условий работы конструкции. Сложность обеспечения требуемой жесткости вытекает из наличия в оборудовании многих подвижных соединений со специфическими формами базовых деталей.

Следует отметить, что деформации деталей в целом дополняют контактные, которые в ряде случаев (в точных машинах при относительно малых нагрузках) составляют основную долю (до 85%) в общих перемещениях. Поэтому критерий контактной жесткости, т.е. жесткости поверхностных слоев в зонах контакта играет особую роль в точном машиностроении.

1.4.Моделирование изнашивания в опорах скольжения

1.4.1. Общие положения

Контактные напряжения являются одним из основных факторов определяющих долговечность машиностроительных конструкций. Анализ и классификация отказов изделий машиностроения показали, что основной причиной выхода из строя в условиях эксплуатации являются не поломка деталей, а износ и нестабильность триботехнических характеристик сопряжений [1, 2, 7]. Необходимо отметить, что свойства контакта оказывают существенное влияние на процессы изнашивания, поскольку вследствие дискретности контакта касание микронеровностей происходит только на отдельных площадках, образующих фактическую площадь [7-9]. Но для перехода от расчета изнашивания материалов к задачам конструкционной износостойкости решающее значение приобретают контактные задачи механики деформируемого твердого тела [1, 2, 10].

Анализ результатов исследований приводит к утверждению, что описание всех свойств материалов, имеющих влияние на трибологические характеристики контакта, требует использования большого количества параметров, включающих как индивидуальные свойства каждого из контактирующих тел, так и их взаимосвязи. Эту проблему, очень существенную, с точки зрения воспроизводимости результатов трибологичсеких испытаний, усложняет то, что взаимодействующие элементы часто имеют слоистую структуру, причем поверхностные слои выполнены разными технологиями [8, 9].

Все это требует разработки единого подхода к решению контактных задач с учетом износа, наиболее полно учитывающего как геометрию взаимодействующих деталей, микро-геометрию поверхностей, характеристик их износостойкости, так и возможность получения приближенного решения с наименьшим количеством независимых параметров [10, 11].

1.4.2. К вопросу о постановке контактной задачи с учетом изнашивания поверхностей

При трении имеет место необратимое формоизменение поверхности взаимодействующих тел за счет их изнашивания [12-14]. Понятие об износе сопряжения деталей как макрогеометрической характеристике связанно с потерей служебных свойств машины. Износ сопряжения характеризуется изменением взаимного расположения сопряженных деталей. Расчет сближения деталей в результате износа основан на известных закономерностях изнашивания материалов и эпюры давлений. Изнашивание рассматривается как детерминированный процесс, характеризуемый определенными функциональными связями между интенсивностью изнашивания и многочисленными определяющими его факторами [13, 14].

Исторически эта проблема возникла в связи с разработкой методов расчета на износ подвижных сопряжений. Поскольку давление на контакте зависит от формы сопрягаемых поверхностей, а последняя определяется износом в каждой точке поверхности, который в свою очередь является функцией давления, то возникает износоконтактная задача, в которой граничные условия зависят от координат и от времени. Система определяющих уравнений в такого рода задачах содержит, помимо обычных соотношений, используемых в контактной задаче теории упругости, и закон изнашивания. Учет изнашивания при математической постановке контактных задач позволяет определить кинетику изменения формы изношенной поверхности, распределения давления по площадке контакта, взаимного расположения деталей, т.е. ответить на ряд основных вопросов, возникающих при расчете на износ подвижных сопряжений машин. Предположением здесь является, как правило, то, что необратимые перемещения поверхности за счет износа соизмеримы с упругими перемещениями [12, 15].

Существенный вклад в разработку методических основ решения контактных задач для твердых тел с учетом износа их поверхностей внесли Александров В.М., Галин Л.А., Горячева И.Г., Добычин М.Н., Дроздов Ю.Н., Коровчинский М.В., Теплый М.И. При этом решение задач теории упругости с учетом изнашивания фактически использует решение квазистатической задачи. Т.е. используется поправка на контактное перемещение тел, зависящая от времени [15, 16], т.к. по своему физическому содержанию износ - это накопленные за время t перемещения, обусловленные потоком разрушений, происходящих на малых отрезках времени [14]. Однако необходимо отметить, что квазистатические расчетные модели изнашивания считают приемлемыми, если скорость деформирования и восстановления формы упругих тел существенно больше скорости перемещения деталей [15].

При решении поставленных задач для оценки износа поверхности традиционно используются величина линейного износа - изменения размера детали в направлении перпендикулярном к поверхности трения [17]. Отметим, что линейный износ, приходящийся на единицу пути трения, называется интенсивностью изнашивания, а величина линейного износа за единицу времени - скоростью изнашивания. Эти характеристики связаны между собой очевидным соотношением [13, 14].

Аналитический путь требует совместного решения задач формоизменения в результате изнашивания и изменения напряженного состояния на контакте [12, 15, 17]. Так как интенсивность (скорость) изнашивания материалов зависит от напряженного состояния, то использование закона изнашивания основано на дискретном рассмотрении состояний системы и заключается в том, что решение и без того сложных задач формообразования и контактного взаимодействия искусственно разделяется. Исходя из того, что форма деталей и напряженное состояние за шаг износа меняются незначительно, решение контактной задачи достаточно производить в узловых точках состояния и рассматривать узел трения как квазистатическую систему. Т.е. непрерывный процесс изнашивания представим в виде дискретного процесса изменения формы поверхностей деталей за шаг износа, за который принимается малый конечный промежуток времени [15].

Подчеркнем, что закон изнашивания, т.е. зависимость интенсивности (скорости) изнашивания от давления, механических и микрогеометрических характеристик изнашиваемой поверхности, фрикционных параметров сопряжения, скорости скольжения температуры строится на основании экспериментальных исследований [14, 17]. Часто используется соотношение в виде прямой пропорциональности скорости (интенсивности) изнашивания контактному давлению [14, 17]. Такая зависимость наблюдается при режимах изнашивания абразивными частицами и в некоторых случаях при усталостном изнашивании. Общее аналитическое выражение для стационарной скорости (интенсивности) изнашивания в случае фрикционной усталости имеет вид степенной зависимости от номинального давления в области контакта [12-14], определяемой условиями эксплуатации того или иного изделия.

Наряду с этим в последнее время стали применяться и более сложные модели изнашивания. К ним относятся модель стареющего тела, у которого коэффициент износа есть некоторая функция времени и наследственная модель, которая учитывает релаксацию вклада в общий износ всех предшествующих возмущений с помощью функции памяти [2].

1.5. Упрощенные модели линейно-деформируемого основания (покрытия конечной высоты)

1.5.1. Модель Винклера

Трудности определения контактных напряжений в рамках механики деформируемого твердого тела обусловлены тем, что перемещения в определенной точке поверхности зависят от распределения давлений по всей области контакта [1]. Следовательно, определение аналитической зависимости для контактных давлений в какой-либо точке области контакта твердых тел требует решения интегрального уравнения. Эти трудности устраняются, если упругое тело рассматриваются не как полупространство, а моделируются простейшим упругим основанием, состоящим из элементов способных деформироваться только в одном направлении без взаимодействия между собой (без сдвига и трения). При этом поперечное сечение элементов считается малым по сравнению с областью контакта. В случае линейной связи напряжений и деформаций элемента - это основание Винклера, подобную модель можно представить как пружинный матрац [1].

1.5.2. Стержневые модели с балками, пластинами и мембранами на поверхностях слоев

Модель Филоненко-Бородича М.М. заключается в том [18], что в плоском случае деформация одного упругого слоя постоянной высоты моделируется не только одномерными элементами, деформирующимися вдоль направления вдавливания индентора, но на поверхности слоя изгибающейся балкой (Рисунок 1).

Модель Власова В.З. в двумерном случае заключается в том, что деформация рассматривается для двух слоев постоянной высоты, расположенных друг над другом. Эти слои моделируется не только одномерными элементами, деформирующимися вдоль направления вдавливания индентора, но на поверхности каждого из слоев изгибающимися балками [19]. В пространственном же случае модель Власова заключается в моделировании слоя с помощью плиты или мембраны, лежащей на линейно-деформируемом сновании Винклера [19].

Необходимо также отметить вклад в разработку моделей деформируемого основания такого известного механика как Попов Г.Я. [20], который обобщил известные работы на случай произвольного количества слоев с мембранами на их границах.

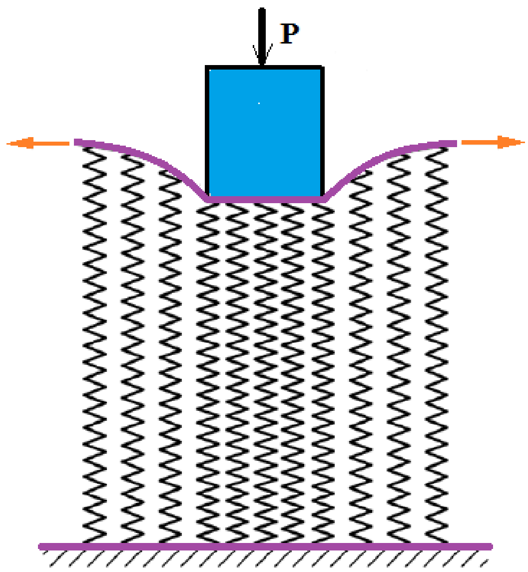

Рисунок 1. Схема однослойной плоской модели Филоненко-Бородича

1.5.3. Модель Пастернака

Модель Пастернака П.Л. [21] выделятся из предыдущих моделей тем, что рассматривается однослойное основание, а деформационные характеристики покрывающей мембраны определяется исходя из наличия трения между одномерно деформируемыми элементами подстилающего основания Винклера.

Отметим, что в силу требования парности сдвигов и касательных напряжений необходимо, что бы сдвиги не выходили за пределы области контакта. Это существенное уточнение, указывающее на ошибочность предложенного Пастернаком решения задачи для сосредоточенной силы. Т.к. за пределами точки приложения силы искривление поверхности есть (сдвиги можно вычислить), но на поверхности не приложены касательные напряжения, т.к. там отсутствует индентор, а, следовательно, гипотеза о парности сдвигов и касательных напряжений в этом случае не верна (Рисунок 2).

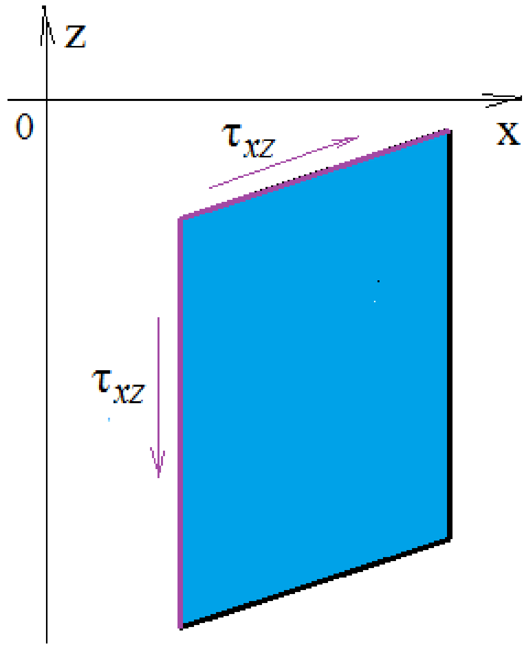

Рисунок 2. Сдвиг в деформируемом элементе в плоскости X0Z в области контакта

1.5.4. Обоснование выбора упрощенной модели деформируемого покрытия конечной высоты

Исходя из изложенного выше можно сделать вывод, что наиболее приемлемой моделью для построения прикладной теории вдавливания инденторов является использование основания Винклера.

В отличие от всех остальных моделей сильной стороной выбранной является то, что она пригодна как для малых, так и для конечных деформаций покрытия. С другой стороны стержневая модель покрытия легко обобщается на случаи нелинейного деформирования материала покрытия. Все это определяет возможность ее применения к решению задач пластического вдавливания инденторов, т.к. при их вдавливании перемещения приповерхностных слоев соизмеримы с размерами внедряемой части индентора, что полностью отрицает возможность применения геометрических гипотез Герца, гарантирующих малую глубину вдавливания индентора в полупространство по сравнению с размерами области контакта.

Более того возможность беспрепятственно учесть реологию материала покрытия делает эту модель незаменимым инструментом при решении задач ползучести как для полимерных покрытий, так и для биологических объектов.

Возможность с помощью стержневой модели покрытия наиболее просто учесть отклонения макроформы поверхностей контакта от простейшей плоскости позволяет рассмотреть ряд контактных задач для объектов, для которых аналитическое решение в принципе не могло быть раньше построено.

1.6. Модели нелинейностей в механике твердого тела

Многие материалы, особенно при высоких нагрузках и температурах характеризуются нелинейной связью напряжений, деформаций, а иногда и скоростей деформаций [1, 22]. Приложение строгих нелинейных теорий деформирования к исследованию сложного напряженного состояния при силовом контакте тел разработаны не достаточно хорошо. Однако установлена пригодность некоторых упрощенных аналитических моделей [1, 22].

Заслуживают внимания следующие аналитические выражения с нелинейной связью напряжений и деформаций [1, 22].

1.6.1. Степенной закон Бюльфингера

Это первая (после закона Гука) форма связи между напряжениями и деформациями предложена в 1729 г. Бюльфингером Г.Б. Его степенной закон для растяжения образца при $\beta \neq 1$ представляет нелинейную зависимость, которую можно записать в виде [22]:

$$\sigma = C \cdot \varepsilon^{\beta}, \tag{1}$$

где σ, ε - напряжения и деформации на диаграмме растяжения, C, β - константы, определяемые из эксперимента. Очевидно, что C имеет размерность напряжений, а β - безразмерный коэффициент [22].

1.6.2. Параболическая зависимость Гестнера. Общий вид аппроксимирующей кривой

Зависимость была предложена Гестнером Ф.И. в 1831 г. Ее можно записать в следующем виде [22]:

$$\sigma = C_1 \cdot \varepsilon - C_2 \cdot \varepsilon^2, \tag{2}$$

где C_i $(i = \overline{1,2})$ – константы, определемые из эксперимента на растяжение и имеющие размерность напряжений.

Для того чтобы обобщить (2) еще и на сжатие (в случае центрально симметричной диаграммы растяжения/сжатия), то, очевидно, в (2) во втором слагаемом вторую степень необходимо заменить третьей [22]:

$$\sigma = C_1 \cdot \varepsilon - C_3 \cdot \varepsilon^3.$$

Делая дальнейшие обобщения, выражение для аппроксимирующей кривой в общем виде (учитывая малость ε) можно написать в виде отрезка ряда Маклорена [22, 23]:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \varepsilon^i, \tag{3}$$

где C_i $(i = \overline{1,n})$ – константы, определяемые из эксперимента.

Отметим, что (3) определеет связь напряжений и деформаций и при растяжении и при сжатии.

1.6.3. Диаграмма Соколовского

В 1960 г. Соколовский В.В. предложил следующую зависимость [22]:

$$\sigma = \frac{C_1 \cdot \varepsilon}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\varepsilon}{C_2}\right)^2}}, \tag{4}$$

где C_i $(i = \overline{1,2})$ – константы, определяемые по диаграмме или сжатия или растяжения, при условии их центральной симметричности для материала.

1.6.4. Нелинейная зависимость Сен-Венана

Предложеную в 1864 г. Сен-Венаном С. зависимость запишем в следующей форме [22]:

$$\sigma = C \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{эт}}\right)^{\beta}\right), \tag{5}$$

где C, $\varepsilon_{эт}$, β - константы, определяемые по диаграмме.

1.6.5. Диаграммы Прандтля

Схематично класс аппроксимаций диаграммами Прандтля нелинейной связи напряжений и деформаций сводится к аппроксимации диаграммы растяжения или сжатия с помощью кусочно-линейного приближения. В литературе выделяется отдельно билинейная диаграмма Прандтля – это непрерывная аппроксимация нелинейной функции двумя прямыми отрезками, имеющими одну общую точку, а также многолинейная диаграмма Прандтля – это непрерывная аппроксимация нелинейной функции более чем двумя отрезками прямой, при этом соседние отрезки имею одну общую точку.

1.6.6. Другие аппроксимации

Наряду с законом Бюльфингера (1) диаграммы Прандтля в настоящее время являются самыми распространенными способами аппроксимации нелинейностей в уравнениях математической физики и механики.

Это объясняется, прежде всего, их вычислительной простотой. Практически все интегралы, в случае использования подобных аппроксимаций вычисляются в квадратурах. Корневое выражение в (1) хорошо и очень быстро приближается вычислительной техникой формулами Ньютона. Применение же альтернативных выражений с более сложными в вычислительном отношении функциями [24]:

$$\sigma = A \cdot th\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{эт}}\right)$$

могут приводить как к потере точности решения задачи, так и к неоправданному увеличению времени решаемой задачи.

ГЛАВА 2. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТЕРЖНЕВОЙ МОДЕЛИ ОДНОРОДНОГО ПОКРЫТИЯ ПОСТОЯННОЙ ВЫСОТЫ НА ПЛОСКОЙ И ЖЕСТКОЙ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

2.1. Основные гипотезы, используемые в простейшей модели деформируемого покрытия

Предполагается, что поверхность покрытия плоская. Это значит, что отклонения поверхности малы в сравнении с глубиной вдавливания индентора. Деформируемое покрытие покрывает гладкое плоское жесткое полупространство. Плоскости поверхности покрытия и основания параллельны.

Предполагается, что покрытие может быть заменено призматическими стержнями с постоянным квадратным сечением $\Delta x \Delta$ в плоскости X0Y и высоты h (Рисунок 3). Стержни могут перемещаться только в Z-направлении, при этом их напряженно-деформированное состояние призматического элемента является однородным. Размер Δ пренебрежимо мал в сравнении с наименьшим характерным размером область контакта в плоскости X0Y (Рисунок 3).

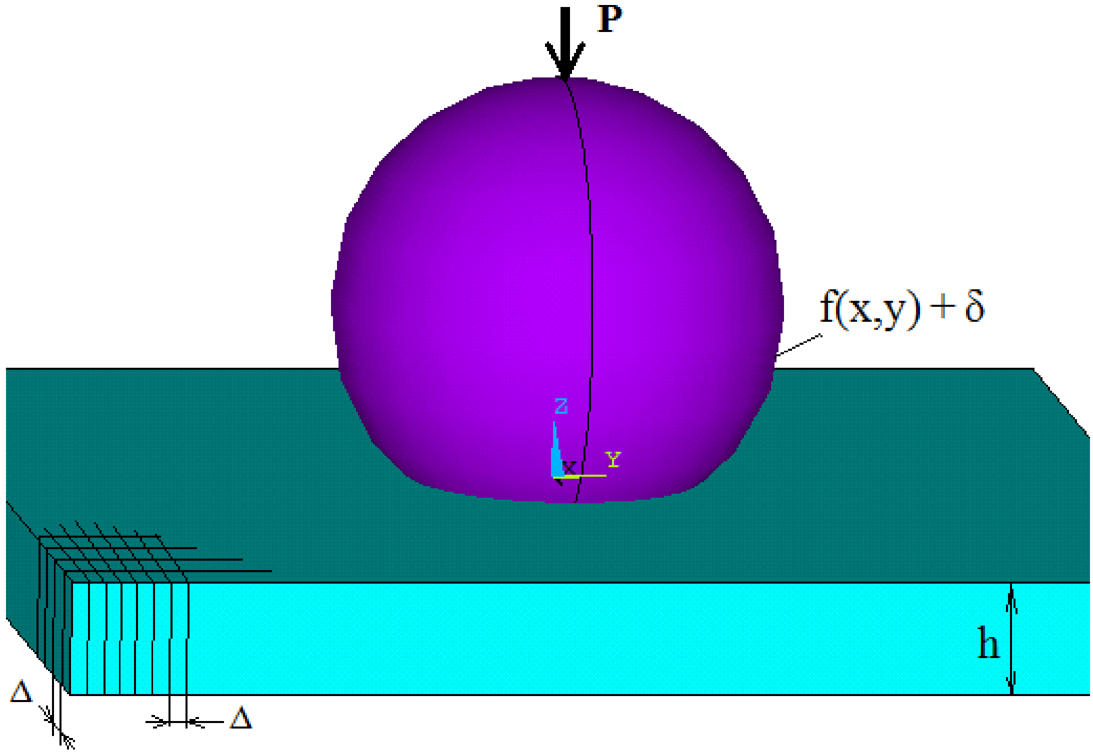

Рисунок 3. Вдавливание недеформируемого криволинейного индентора в стержневую модель деформируемого покрытия

2.2. Краевое условие по перемещениям

В рамках задач механики контактного взаимодействия внедряемое в покрытие тело является недеформируемым, т.е. жестким штампом. Пусть открытое множество $S \subset X0Y$ является внутренностью области контакта, т.е. $S = \{(x, y) | \sigma_Z(x, y, 0) \neq 0\}$, где $\sigma_Z(x, y, 0)$ - контактные напряжения. Тогда замыкание $\overline{S}$ является областью контакта. Учитывая, что в рамках простейшей модели деформируемого покрытия контактные напряжения $\sigma_Z(x, y, 0) \neq 0$ могут возникнуть только в точке, в которой перемещение в области контакта $w(x, y, 0) \neq 0$, то внутренность области контакта гораздо проще определить как $S = \{(x, y) | w(x, y, 0) \neq 0\}$.

Пусть уравнение поверхности внедряемого недеформируемого штампа описывается уравнением $f(x, y)$, и точка $(0,0,0)$ является точкой первичного касания штампа и плоскости X0Y. Тогда краевое условие по перемещениям определяется следующим уравнением:

$$w(x, y, 0) = \begin{cases} f(x, y) + \delta, (x, y) \in \overline{S}, \\ 0, (x, y) \notin \overline{S}, \end{cases} \tag{6}$$

где δ - глубина максимального вдавливания штампа. Она определяется из геометрических соображений, т.е. на границе области контакта $(x, y) \in \overline{S} \setminus S$ контактные перемещения равны нулю ($w(x, y, 0)\big|_{(x, y) \in \overline{S} \setminus S} = 0$). Принимая во внимание верхнее уравнение (6), получаем, что для любой достоверно определенной точки на границе области контакта $(x, y) \in \overline{S} \setminus S$ выполнено равенство:

$$\delta = -f(x, y)\big|_{\forall (x, y) \in \overline{S} \setminus S}. \tag{7}$$

2.3. Формальное определение напряжений в области контакта без учета реологических эффектов

Для определения напряжений, действующих в области контакта, достаточно использовать соответствующее поставленной задаче уравнение состояния $\sigma = \Im(\varepsilon)$. Используя предположение о деформируемости призматических стержней только в Z-направлении и определения деформации стержня высотой h, получаем:

$$\sigma_z(x,y,0)=\Im(\varepsilon(x,y,0))=\Im\left(\frac{w(x,y,0)}{h}\right) \text{ при } (x,y)\in\overline{S}. \qquad (8)$$

В литературе по строительной механике ограничиваются простейшим случаем уравнения состояния $\Im(\varepsilon)=E\cdot\varepsilon$. Эта линейная модель называется основанием Винклера.

2.4. Виды нелинейных уравнений состояния, используемых в дальнейших исследованиях

Одним из наиболее простых и одновременно общих уравнений состояния одноосно нагруженного образца произвольного сечения является нелинейное уравнение (Рисунок 4):

$$\sigma=\Im(\varepsilon),$$

где $\Im(\ )$ нелинейная обычно не убывающая функция, полностью соответствующая истинной диаграмме деформирования материала.

Обычно рассматриваются экспериментальные кривые для растяжения образца, при этом предполагается, что диаграмма растяжения и диаграмма сжатия центрально симметричны относительно начала координат (Рисунок 5).

Указанное выше предположение само по себе верно, только для линейно упругого материала. Если же необходимо решать задачи для сжатия образцов за пределами гипотезы о линейной упругости материала, то очевидно, необходимо предварительно построить аппроксимации истинные диаграмм сжатия (Рисунок 6).

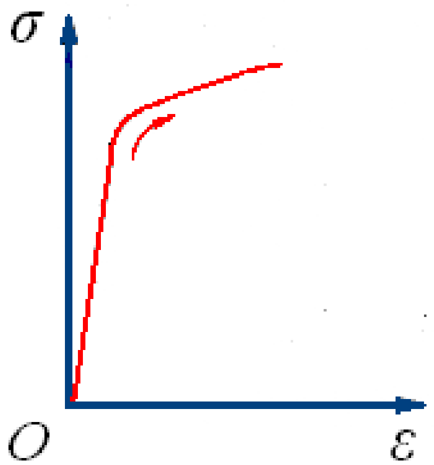

Рисунок 4. Кривая одноосного растяжения

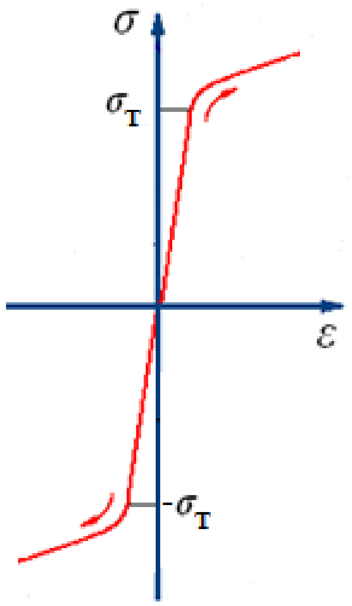

Рисунок 5. Гипотеза о симметрии нелинейной диаграммы растяжения/сжатия

Далее нелинейная функция $\Im(\ )$ в диаграмме сжатия (Рисунок 6, а) будет определяться либо билинейной диаграммой Прандтля:

$$\Im(\varepsilon) = \begin{cases} E \cdot \varepsilon, & \dfrac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{E} < \varepsilon \le 0, \\ \sigma_{эт}^{сжатия} + E_{эт}^{сжатия} \cdot \left(\varepsilon - \dfrac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{E} \right), & \varepsilon \le \dfrac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{E}, \end{cases} \tag{9}$$

либо модифицированной степенной функцией (1) (Рисунок 6, б):

$$\Im(\varepsilon) = \sigma_{эт}^{сжатия} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{эт}^{сжатия}} \right)^{\beta}, \tag{10}$$

где E, $E_{эт}^{сжатия}$, $\sigma_{эт}^{сжатия}$, $\varepsilon_{эт}^{сжатия}$, β $(\beta < 1)$ - характерные для материала константы, определяемые исходя из аппроксимации с помощью (9) или (10) диаграммы одноосного сжатия образца материала. Отметим, что константы $\sigma_{эт}^{сжатия}$, $\varepsilon_{эт}^{сжатия}$ в (9) и (10) должны при сжатии быть отрицательными.

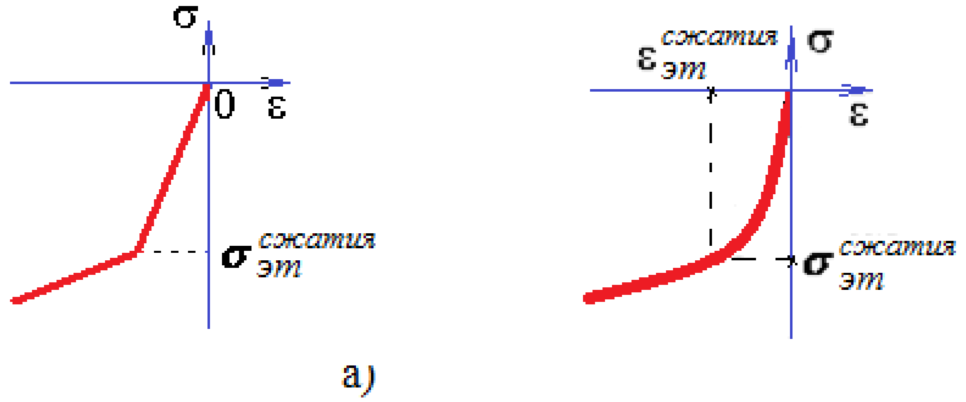

Рисунок 6. Аппроксимация диаграммы сжатия материала слоя: а) билинейная аппроксимация Прандтля; б) модифицированная степенная аппроксимация Бюльфингера;

2.5. Уравнения равновесия штампа на границе без учета реологических эффектов

Уравнение (8) будет иметь параметры, которые должны определять конкретные размеры и форму области контакта по величине приложенной нагрузки. Задавая все константы уравнения состояния (9) или (10) и выполняя интегрирование контактных напряжений $\sigma_z(x, y, 0)$, определенных по (8) можно определить величину необходимой величины силы P для получения указанной области контакта $\overline{S}$ формуле:

$$P = -\iint_{\overline{S}} \sigma_z(x, y, 0) dxdy. \qquad (11)$$

Кроме этого можно определить еще два опрокидывающих штамп главных момента M_x и M_y, действующих в плоскостях X0Z и Y0Z соответственно и уравновешивающих несимметрично вдавливаемый штамп:

$$M_x = -\iint_{\overline{S}} \sigma_z(x, y, 0) \cdot x\, dxdy, \quad M_y = -\iint_{\overline{S}} \sigma_z(x, y, 0) \cdot y\, dxdy. \quad (12)$$

Обычно в прикладных задачах и далее по тексту монографии предполагается, что их постановка имеет геометрическую и физическую симметрию и, соответственно, главные моменты (12) равны нулю $M_x = M_y = 0$.

2.6. Решение плоских задач

2.6.1. Преобразование общих формул

При решении плоских задач всегда используется следующая методика: предполагается, что уравнение границы индентора касающегося плоского, ровного покрытия описывается уравнением от одной переменной x, т.е. $f(x,y)=f(x)$ (Рисунок 7). Предполагается, что вторая переменная y в уравнении поверхности индентора произвольно изменяется на отрезке $[0,\ell]$, при этом линейный размер модели покрытия вдоль оси 0Y, на которой рассматривается вдавливание штампа, также составляет ℓ. В этом случае область контакта $\overline{S}$ составляет полоса $\overline{S}=[a,b]\times[0,\ell]$ (Рисунок 7). Исходя из (6) можно поставить следующее краевое условие по перемещениям на границе слоя:

$$w(x,0,0)=\begin{cases} f(x)+\delta, & x\in[a,b], \\ 0, & x\notin[a,b], \end{cases} \tag{13}$$

где δ - глубина максимального вдавливания штампа (7):

$$\delta=-f(x)\big|_{x=a\wedge b}. \tag{14}$$

С учетом (13) и (14) напряжения в области контакта определяются выражением аналогичным (8):

$$\sigma_z(x,0,0)=\Im(\varepsilon(x,0,0))=\Im\left(\frac{w(x,0,0)}{h}\right)=\Im\left(\frac{f(x)+\delta}{h}\right). \tag{15}$$

Уравнения равновесия (11) и (12) в случае зеркальной симметричности штампа относительно плоскости $Y0Z$ $(b=-a)$ и выражения для контактных напряжений (15) сократиться до одного уравнения (11), которое примет вид (Рисунок 7):

$$P=-\ell\cdot\int_a^b\sigma_z(x,0,0)dx=-2\cdot\ell\cdot\int_0^b\sigma_z(x,0,0)dx.$$

Откуда следует, что

$$\frac{P}{\ell} = -2 \cdot \int_0^b \sigma_z(x,0,0)dx. \qquad (16)$$

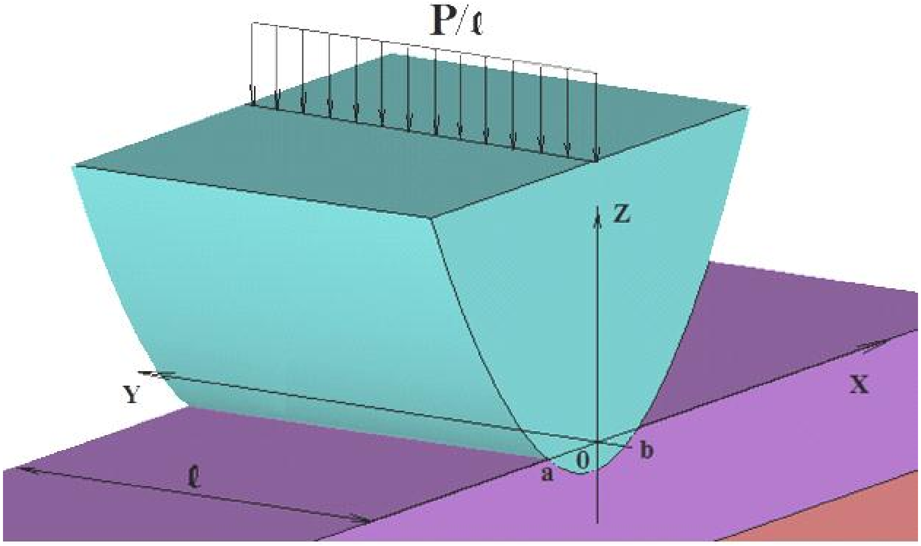

Рисунок 7. Постановка плоской контактной задачи

Уравнение (17) показывает, что при решении плоских контактных задач при определении величины действующей силы, необходимой для получения области контакта $[a,b]$ на оси 0X, определяем погонную нагрузку $\frac{P}{\ell}$, действующую равномерно на глубине ℓ, относительно плоскости рисунка (Рисунок 7). Для упрощения восприятия всегда делается предположение, что $\ell = 1$ м и ширина призматического стержня Δ существенно меньше, чем размер области контакта $\Delta << (b-a)$ (Рисунок 3).

2.6.2. Решение плоской задачи о вдавливании параболического цилиндра в ровное покрытие конечной высоты

Пусть $f(x) = \frac{x^2}{2 \cdot R}$ (параболический цилиндр), где R - радиус кривизны индентора. Погонная нагрузка P (Н/м) приложена вертикально вниз ($\ell = 1$ м), а краевой условие по перемещениям приобретает вид:

$$w(x,0,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{2 \cdot R} + \delta, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b], \end{cases} \qquad (17)$$

Тогда (14) и (17) в силу симметрии тела глубина вдавливания параболического цилиндра δ определяется по формуле:

$$\delta = -\frac{b^2}{2 \cdot R}. \qquad (18)$$

где b - полуразмер симметричной области контакта $[-b,b]$. Тогда перемещения в области контакта (17) определяются следующим способом на отрезке $[-b,b]$:

$$w(x,0,0) = \frac{1}{2 \cdot R}\left(x^2 - b^2\right). \qquad (19)$$

С учетом (19), при вдавливании параболического цилиндра в линейно упругое покрытие (15) напряженное состояние в области контакта $[-b,b]$ описывается уравнением:

$$\sigma_z(x,0,0) = E \cdot \varepsilon_z(x,0,0) = E \cdot \frac{w_z(x,0,0)}{h} = E \cdot \frac{1}{2 \cdot h \cdot R}\left(x^2 - b^2\right). \qquad (20)$$

Формула (20) содержит в качестве параметра неопределенный до настоящего времени полуразмер области контакта b, который определяется одним уравнением (16) (Рисунок 7):

$$P = -\int_{-b}^{b} \sigma_z(x,0,0)dx = -2 \cdot \int_{0}^{b} \sigma_z(x,0,0)dx = \frac{E}{h \cdot R}\int_{0}^{b}\left(b^2 - x^2\right)dx = \frac{2 \cdot E}{3 \cdot h \cdot R} b^3. \qquad (21)$$

Уравнение (21) связывающее полуразмер b области контакта с величиной действующей нагрузки P завершает решение контактной задачи, т.к. по заданной нагрузке P можно определить b и далее распределение $\sigma_z(x,0,0)$.

2.6.3. Замечание к решению контактной задачи для круглого ролика

В данном случае центр ролика радиуса R, касающегося покрытия в точке $(0,0)$ находится в точке с координатами $(0,R)$ и, соответственно, уравнение профиля его поверхности имеет вид $f(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2}$ (Рисунок 8). В этом случае область контакта $\overline{S}$ составляет полосу шириной $2b$. Очевидно выполнено неравенство $b < R$. Тогда в области контакта $|x| < b < R$ и, следовательно, $f(x)$ ($x \in [-b,b]$) может быть представлено в виде сходящегося ряда [23]:

$$f(x)=R-\sqrt{R^2-x^2}=R\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\right)=$$
$$=R\cdot\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{x}{R}\right)^4+O\left(\left(\frac{x}{R}\right)^6\right)\right). \qquad (22)$$

Из (22) следует, что если предположить, что $\frac{1}{8}\left(\frac{b}{R}\right)^4<0.01$ (т.е. $b<\sqrt[4]{0.08}\cdot R\approx 0.5318...\cdot R$), то при использовании на практике в качестве индентора ролика в широком практически важном диапазоне изменения полразмера b полосы контакта роликовый индентор геометрически можно заменить параболическим цилиндром $f(x)\approx R\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2=\frac{x^2}{2\cdot R}$ ($x\in[-b,b]$), что существенно упростит решение соответствующей контактной задачи.

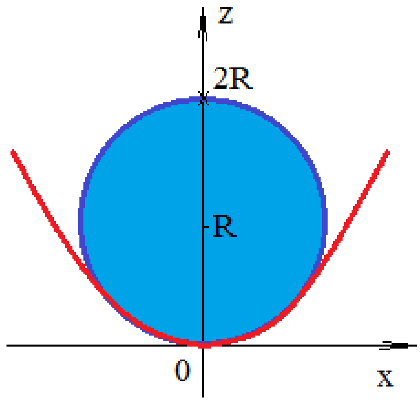

Рисунок 8. Касание ролика и поверхности деформируемого слоя в декартовой системе координат и его замещение параболическим цилиндром

2.7. Решение осесимметричных контактных задач

2.7.1. Преобразование общих формул

В данном случае $f(x,y)=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=f^*(r)$. Область контакта $\overline{S}$ составляет круг радиуса a (Рисунок 9). Исходя из (6) можно поставить следующее краевое условие по перемещениям на границе слоя:

$$w(r,0)=\begin{cases} f^*(r)+\delta, & r\in[0,a),\\ 0, & r\notin[0,a),\end{cases} \tag{23}$$

где δ - глубина максимального вдавливания штампа и из (7) следует, что:

$$\delta=-f(r)\big|_{r=a}. \tag{24}$$

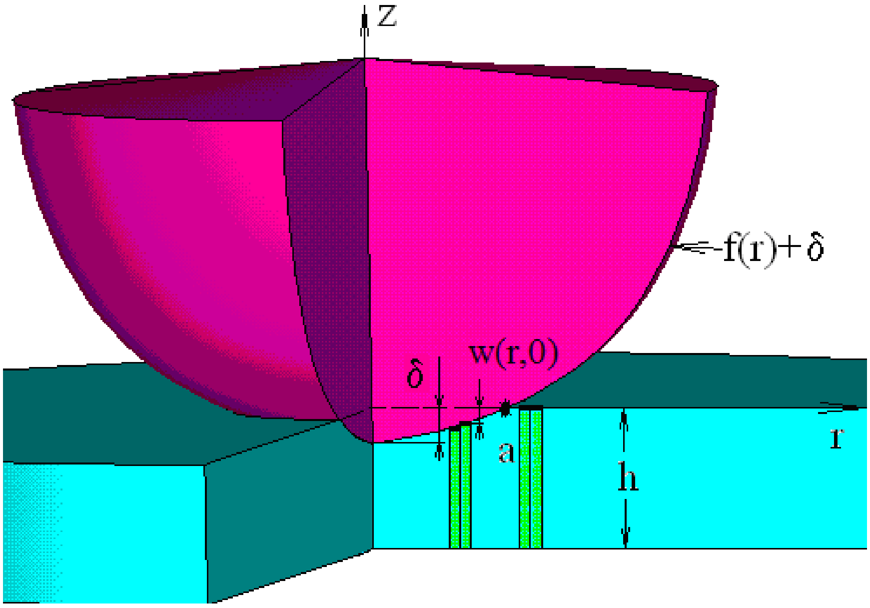

Рисунок 9. Вдавливание осесимметричного индентора в покрытие конечной высоты

Напряжения в области контакта определяются выражением аналогичным (8):

$$\sigma_z^{\ *}(r,0)=\Im(\varepsilon(r,0))=\Im\left(\frac{w(r,0)}{h}\right)=\Im\left(\frac{f(r)+\delta}{h}\right). \tag{25}$$

Уравнение равновесия (11) примет вид (предполагается, что функция $\sigma_z(x,y)$ непрерывная на $\overline{S}$) [23] (Рисунок 10):

$$P=-\iint\limits_{\overline{S}}\sigma_z(x,y,0)dxdy=-\iint\limits_{G}\sigma_z(x(r,\theta),y(r,\theta),0)\cdot|J|drd\theta,$$

где $|J|drd\theta$ - элемент площади в криволинейных координатах r, θ, а J определяется следующим образом:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \neq 0 .$$

В случае полярных координат $x = r \cdot \cos(\theta)$, $y = r \cdot \sin(\theta)$. Тогда определитель $|J|$ равен [23]:

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r .$$

Таким образом, уравнение равновесия в осесимметричном случае (т.е. когда распределение напряжений не зависит от угла θ) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} P &= -\iint\limits_G \sigma_z(x(r,\theta), y(r,\theta), 0) \cdot |J| dr d\theta = -\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^a \sigma_z(x(r,\theta), y(r,\theta), 0) \cdot r dr d\theta = \\ &= -2\pi \int\limits_0^a \sigma_z{}^*(r,0) \cdot r dr. \end{aligned} \tag{26}$$

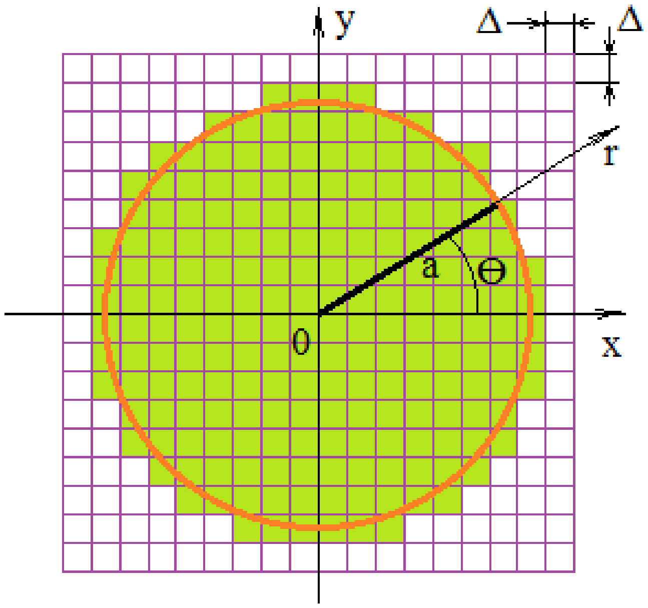

Рисунок 10. Область контакта при вдавливании осесимметричного индентора ($\sqrt{2} \cdot \Delta << a$)

2.7.2. Вдавливание параболоида вращения в плоский слой постоянной высоты

В данном случае $f(r) = \frac{r^2}{2R}$. В этом случае область контакта $\overline{S}$ составляет круг радиуса a (Рисунок 9). Исходя из (23) и (24) можно поставить следующее краевое условие по перемещениям на границе слоя:

$$w(r,0) = \begin{cases} \frac{r^2}{2R} + \delta, & r \in [0,a), \\ 0, & r \notin [0,a), \end{cases} \tag{27}$$

где δ - глубина максимального вдавливания параболоида вращения:

$$\delta = -\frac{a^2}{2R}. \tag{28}$$

Исходя из (27), (28) напряжения в области контакта будут определяться выражением аналогичным (25):

$$\sigma_z{}^*(r,0) = \Im(\varepsilon(r,0)) = \Im\left(\frac{r^2 - a^2}{2R \cdot h}\right). \tag{29}$$

Используя (29) уравнение равновесия (26) примет вид:

$$P = -2\pi \int_0^a \sigma_z{}^*(r,0) \cdot rdr = -2\pi \int_0^a \Im\left(\frac{r^2 - a^2}{2R \cdot h}\right) \cdot rdr. \tag{30}$$

2.7.3. Замечание о моделировании вдавливания шара

Совершенно, аналогично повторяя рассуждения в уже в цилиндрической системе координат для шара радиуса R с центром в точке с координатами $(0,R)$, касающегося покрытия в точке $(0,0)$ (Рисунок 11), можно получить уравнение его поверхности в виде $f(r) = R - \sqrt{R^2 - r^2}$ ($r \in [0,a]$). В этом случае область контакта $\overline{S}$ составляет круг радиуса a, для которого выполнено неравенство $a < R$. Тогда, разлагая в ряд $f(r)$ на отрезке $[0,a]$, с высокой относительной точностью для всех радиусов контакта $a < \sqrt[4]{0.08} \cdot R \approx 0.5318... \cdot R$ шаровидный индентор геометрически можно заменить параболоидом вращения $f(r) \approx R \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{r^2}{2 \cdot R}$ $(r \in [0, a])$.

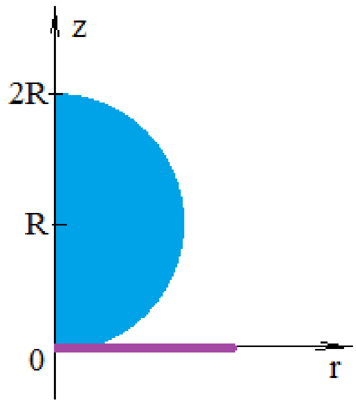

Рисунок 11. Касание шара и поверхности деформируемого слоя в цилиндрической системе координат

2.7.4. Вдавливание конуса

Пусть $f(r) = tg(\alpha) \cdot r$, где $tg(\alpha)$ - тангенс угла наклона образующей конуса к плоской поверхности покрытия. В этом случае область контакта $\overline{S}$ составляет круг радиуса a (Рисунок 12). Исходя из (23) и (24) можно поставить следующее краевое условие по перемещениям на границе слоя:

$$w(r,0) = \begin{cases} tg(\alpha) \cdot r + \delta, & r \in [0, a), \\ 0, & r \notin [0, a), \end{cases} \qquad (31)$$

где δ - глубина максимального вдавливания конуса:

$$\delta = -tg(\alpha) \cdot a\,. \qquad (32)$$

Тогда, исходя из (31) и (32), перемещения в области контакта (31) определяются следующим уравнением на интервале $[0, a)$:

$$w(r,0) = tg(\alpha) \cdot (r - a)\,. \qquad (33)$$

Напряженное состояние (25) в области контакта при вдавливании конуса в упругое слоистое покрытие определяется следующей формулой:

$$\sigma_z(r,0)=\Im\left(\frac{tg(\alpha)}{h}\cdot(r-a)\right). \tag{34}$$

С учетом (34) уравнение равновесия (26) примет вид:

$$P=-2\pi\int_0^a \sigma_z{}^*(r,0)\cdot rdr=-2\pi\int_0^a \Im\left(\frac{tg(\alpha)}{h}\cdot(r-a)\right)\cdot rdr\,. \tag{35}$$

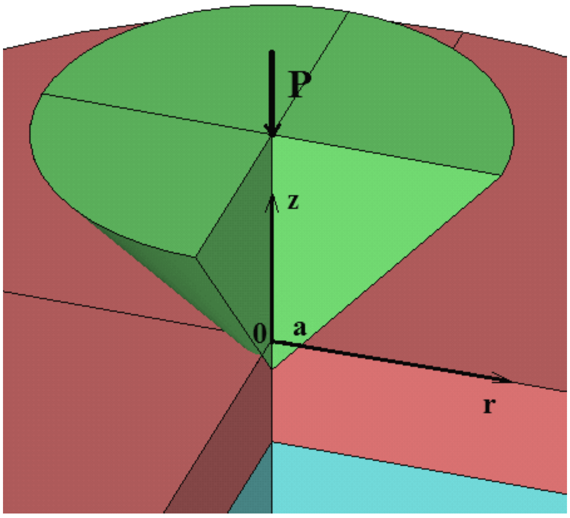

Рисунок 12. контактная задача для конуса

2.8. Многогранные инденторы

Рассмотрим случай, когда индентером является правильная пирамида с m гранями, имеющая $m-1$ равных треугольных граней, контактирующих с покрытием (Рисунок 13, Рисунок 14).

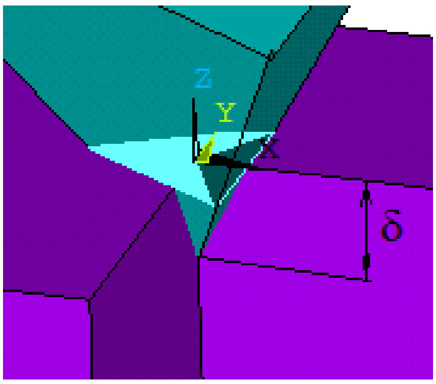

Рисунок 13. Пространственное взаимодействие пирамиды Берковича $m=4$

Следует определить размер области контакта с помощью радиуса a, вписанной в область контакта окружности (Рисунок 15), и уравнения поверхности пирамиды $f(x,y)$ в подобласти $\Omega = \left\{(x,y):\ 0 \le x \le a,\ -tg\left(\dfrac{\pi}{m-1}\right)\cdot x \le y \le tg\left(\dfrac{\pi}{m-1}\right)\cdot x\right\}$, где $\Omega \subset S$, S - правильная многоугольная область контакта (Рисунок 15).

Необходимо отметить, что поверхность $f(x,y)$ идеальной правильной пирамиды с $m-1$ треугольными гранями, касающимися поверхности покрытия, определяется в области Ω уравнением (Рисунок 13, Рисунок 14):

$$f(x,y)\big|_{\Omega} = tg(\alpha)\cdot x, \qquad (36)$$

где α - угол между треугольными гранями пирамиды и поверхностью покрытия (Рисунок 13, Рисунок 14).

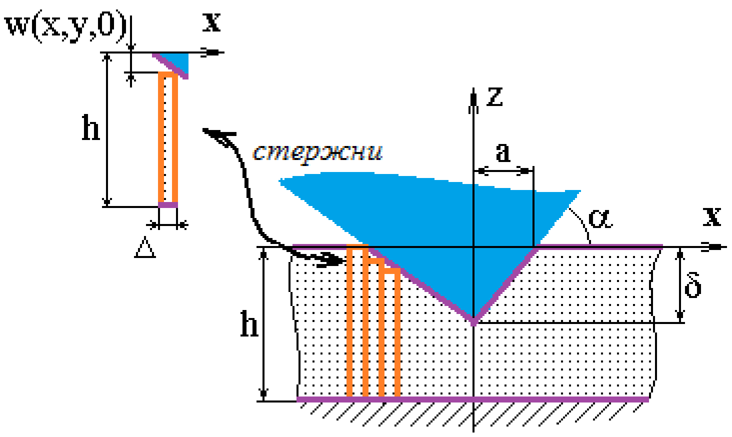

Рисунок 14. Сечение покрытия и вдавленного в него правильного пирамидального индентора Берковича плоскостью X0Z

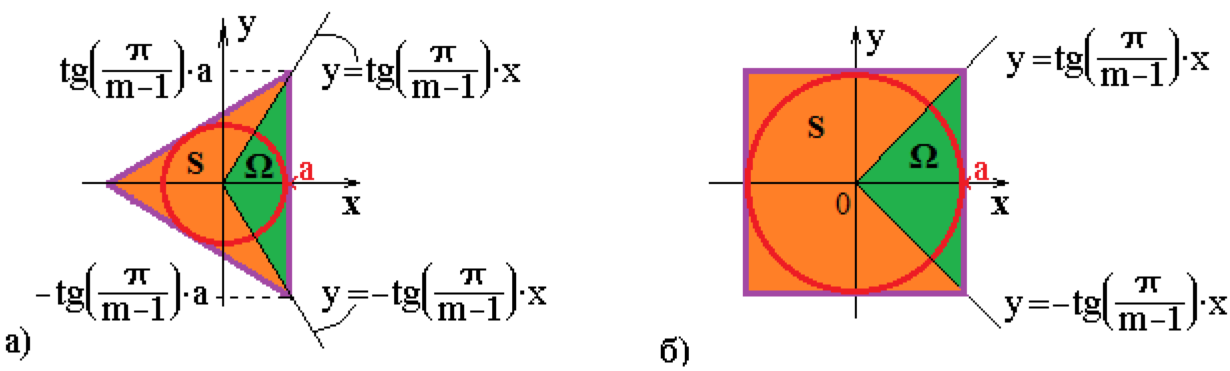

Рисунок 15. Контактная область правильной пирамиды с m гранями: а) $m=4$; б) $m=5$

Поэтому, исходя из (7) максимальная глубина вдавливания δ определяется уравнением [6]:

$$\delta = -f(a,0)\big|_{\Omega} = -tg(\alpha)\cdot a\,. \qquad (37)$$

Следовательно, исходя из (36) и (37) перемещения в подобласти Ω области контакта S задаются уравнением:

$$w(x,y,0)\big|_{\Omega} = f(x,y)\big|_{\Omega} + \delta = tg(\alpha)\cdot(x-a). \qquad (38)$$

Тогда в соответствии с (8) нормальное напряжение в подобласти Ω области контакта будет определяться выражением:

$$\sigma_z(x,y,0)\big|_{\Omega} = \Im\left(\frac{tg(\alpha)\cdot(x-a)}{h}\right). \qquad (39)$$

Уравнение равновесия (11) в силу геометрической симметрии правильной пирамиды записывается в виде:

$$\begin{aligned} P &= -\iint\limits_{S}\sigma_z(x,y,0)dxdy = -(m-1)\iint\limits_{\Omega}\sigma_z(x,y,0)dxdy = \\ &= -(m-1)\int\limits_{0}^{a}\int\limits_{-tg(\pi/(m-1))\cdot x}^{tg(\pi/(m-1))\cdot x}\Im\left(\frac{tg(\alpha)\cdot(x-a)}{h}\right)dydx = \qquad (40) \\ &= -2\cdot(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))\int\limits_{0}^{a}\Im\left(\frac{tg(\alpha)\cdot(x-a)}{h}\right)\cdot xdx. \end{aligned}$$

2.9. Результаты решения контактных задач для линейно-упругого материала стержней в модели покрытия

При решении прямых контактных задач механики твердого тела одним из результатов интересующих практику является определение размеров области контакта либо определения глубины вдавливания индентора по величине действующей нагрузки. Однако аналитический результат можно получить только в исключительных случаях.

Рассмотрим линейно упругую модель деформирования стержней покрытия $\Im(\varepsilon) = E\cdot\varepsilon$.

2.9.1. Определение размеров области контакта

Уравнения (21), (30), (35), (40) при подстановке в них уравнения состояния $\Im(\varepsilon) = E \cdot \varepsilon$ интегрируются в квадратурах и можно, обратив результат, получить следующие равенства для определения характерного размера области контакта:

- параболический цилиндр (интегрируя (21) и обращая, получаем):

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot h \cdot R}{2 \cdot E} P}, \tag{41}$$

- параболоид вращения (интегрируя (30) и обращая, получаем):

$$a = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot R \cdot h}{\pi \cdot E} P}, \tag{42}$$

- конус (интегрируя (35) и обращая, получаем):

$$a = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot h}{\pi \cdot tg(\alpha) \cdot E} P} \tag{43}$$

- правильная пирамида (интегрируя (40) и обращая, получаем):

$$a = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot h}{(m-1) \cdot tg(\pi/(m-1)) \cdot tg(\alpha) \cdot E} P}. \tag{44}$$

Полученные формулы демонстрируют, что характерный размер области контакта зависит не только от механических характеристик покрытия и его высоты, но и от формы внедряемого индентора.

2.9.2. Глубина вдавливания индентора в упругий материал

Основным уравнением для перехода от определения геометрического размера области контакта к определению глубины вдавливания является уравнение (7) (т.е. его варианты (18), (28), (32), (37)) в сочетании с полученными в предыдущем пункте уравнениями (41)-(44) можно получить:

- параболический цилиндр (из (18), подставляя (41), получаем):

$$\delta = -\frac{b^2}{2 \cdot R} = -\frac{1}{2 \cdot R}\left(\frac{3 \cdot h \cdot R}{2 \cdot E} P\right)^{\frac{2}{3}},$$

- параболоид вращения (из (28), подставляя (42), получаем):

$$\delta = -\frac{a^2}{2R} = -\sqrt{\frac{h}{\pi \cdot R \cdot E} P},$$

- конус (из (32), подставляя (42), получаем):

$$\delta = -tg(\alpha) \cdot a = -\sqrt[3]{\frac{3 \cdot h \cdot tg(\alpha)^2}{\pi \cdot E} P},$$

- правильная пирамида (из (37), подставляя (44), получаем):

$$\delta = -tg(\alpha) \cdot a = -\sqrt[3]{\frac{3 \cdot h \cdot tg(\alpha)^2}{(m-1) \cdot tg(\pi/(m-1)) \cdot E} P}.$$

2.10. Упруго-идеально-пластичный материал стержней в модели покрытия

Упруго-идеально-пластическим материалом называют материал, имеющий на диаграмме растяжения в пластической области выраженный горизонтальный участок [1]. Предполагается, что при сжатии материал ведет себя также, т.е. диаграмма сжатия имеет выраженный горизонтальный участок в области пластических деформаций

В данном случае наиболее удобным считается использование билинейной диаграммы Прандтля (9) в виде:

$$\Im(\varepsilon) = \begin{cases} E \cdot \varepsilon, & \dfrac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{E} < \varepsilon \le 0, \\ \sigma_{эт}^{сжатия}, & \varepsilon \le \dfrac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{E}, \end{cases} \qquad (45)$$

где $\sigma_{эт}^{сжатия} = \sigma_T$, σ_T - предел текучести при сжатии (т.е. $\sigma_T < 0$).

2.10.1. Для параболического цилиндра

Учитывая (19), деформации в области контакта определяются уравнением:

$$\varepsilon(x,0,0)=\frac{x^2-b^2}{2\cdot R\cdot h}. \qquad (46)$$

При этом деформации сжатия в области контакта монотонно возрастают при стремлении x к нулю симметрично для $x>0$ и $x<0$. Следовательно, учитывая (45) и (46), существует точка $b_{пласт}$ ($b_{пласт}\in[0,a)$), такая, что выполнено равенство (Рисунок 16):

$$\varepsilon(b_{пласт},0,0)=\frac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{E}=\frac{\sigma_T}{E}. \qquad (47)$$

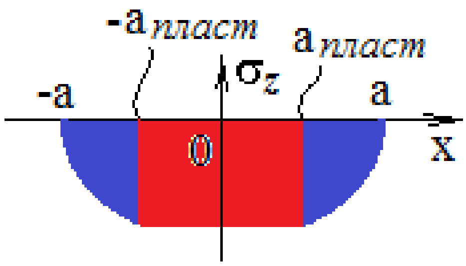

Рисунок 16. Распределение напряжений в области контакта цилиндра и покрытия (плоская задача): синий цвет – упругие напряжения, красный цвет - пластические напряжения

Если такой точки $b_{пласт}$ не существует, то деформация в области контакта является чисто упругой, а, следовательно, надо воспользоваться решениями полученными ранее.

Далее, исходя из (46) и (47), с учетом того, что $\sigma_{эт}^{сжатия}<0$, можно получить, что $b_{пласт}$ должно удовлетворять уравнению:

$$b_{пласт}=\sqrt{b^2-2\cdot R\cdot h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}}, \qquad (48)$$

т.е. $b_{пласт}$ существует, когда:

$$b\geq\sqrt{2\cdot R\cdot h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}}. \qquad (49)$$

Беря во внимание, что правая часть (49) содержит только геометрические и физические параметры данной задачи, то можно рассматривать выражение $\sqrt{2 \cdot R \cdot h \cdot \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}}$ как размерную константу, определяющую несущую способность слоя. Чем больше значение этой константы, тем выше контактная несущая способность слоя и он позже переходит к пластическим деформациям при вдавливании параболического или круглого цилиндра. С другой стороны, чем меньше указанная константа, тем меньше несущая способность поверхности слоя.

Учитывая (45) и (48) можно записать распределение напряжений в области контакта:

$$\sigma_z = \Im(\varepsilon(x,0,0)) = \begin{cases} E \cdot \dfrac{x^2 - b^2}{2 \cdot R \cdot h}, & b_{пласт} < |x| \le b, \\ \sigma_{эт}^{сжатия}, & |x| \le b_{пласт}. \end{cases} \tag{50}$$

Далее используя уравнение равновесия (16) и (50) с учетом нелинейности распределения контактных напряжений для случая (49) получаем:

$$\begin{aligned} P &= -\int_{-b}^{b} \Im(\varepsilon(x,0,0))dx = -2 \cdot \left(\int_{0}^{b_{пласт}} \Im(\varepsilon(x,0,0))dx + \int_{b_{пласт}}^{b} \Im(\varepsilon(x,0,0))dx \right) = \\ &= -\left(2 \cdot \sigma_{эт}^{сжатия} \cdot b_{пласт} + \frac{E}{R \cdot h} \cdot \int_{b_{пласт}}^{b} \left(x^2 - b^2\right)dx \right) = \\ &= 2 \cdot \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot b_{пласт} + \frac{E}{R \cdot h} \cdot \int_{b_{пласт}}^{b} \left(b^2 - x^2\right)dx = \\ &= 2 \cdot \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot b_{пласт} + \frac{E}{R \cdot h} \cdot \left(\frac{2}{3} b^3 - b^2 \cdot b_{пласт} + \frac{b_{пласт}{}^3}{3} \right). \end{aligned} \tag{51}$$

Подставляя (48) в (51) и собирая коэффициенты для случая (49) можно получить функцию $P_ц(b)$ определяющую связь силы и размеров области контакта для плоской задачи упруго-идеально-пластического вдавливания параболического цилиндра:

$$P_ц(b)=\begin{cases}\frac{2}{3}\frac{E}{R\cdot h}\cdot b^3, & 0\le b<\sqrt{2\cdot R\cdot h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}},\\ \frac{2}{3}\frac{E}{R\cdot h}\cdot\left(b^3-\left(b^2-2\cdot R\cdot h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}\right)^{\frac{3}{2}}\right), & b\ge\sqrt{2\cdot R\cdot h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}}.\end{cases} \quad (52)$$

Очевидно, что (52) непрерывная функция и прямым ее дифференцированием можно установить ее гладкость в точке $b=\sqrt{2\cdot R\cdot h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}}$. Таким образом, даже в связи с резким изменением физического процесса (перехода от чисто упругой к упругопластической с выраженным горизонтальным участком) у функции (52), несмотря на ее сложный вид, не нарушается гладкость.

Представляет интерес нахождение асимптотического поведения функции $P_ц(b)$ в случае значительной пластической области контакта, т.е. когда $b>>\sqrt{2\cdot R\cdot h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}}$. В этом случае необходимо рассматривать нижнее выражение в (52):

$$P_ц(b)=\frac{2}{3}\frac{E}{R\cdot h}\cdot\left(b^3-\left(b^2-2\cdot R\cdot h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}\right)^{\frac{3}{2}}\right)=2\cdot b\cdot\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|. \quad (53)$$

Из последнего равенства можно получить следующее уравнение, определяющие физическую пластическую константу задачи $\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|$ (в рассматриваемом контексте абсолютную величину предела текучести при сжатии $\left|\sigma_{T}^{сжатия}\right|$):

$$\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|=\frac{1}{2}\frac{dP_ц(b)}{db}. \quad (54)$$

С другой стороны слабостью (53) и (54) является, то, что на практике функцию $P_ц(b)$ записать нельзя. При проведении экспериментальных исследований используется диаграмма вдавливания в координатах сила / глубина вдавливания, т.е. $P_ц(|\delta|)$.

Обратить (52) нельзя и для получения нелинейного уравнения связывающего абсолютное значение $|\delta|$ глубины вдавливания с размером приложенной нагрузки, а необходимо воспользоваться обращенным уравнением (18) в виде $b = \sqrt{2 \cdot R \cdot |\delta|}$ и подставить его в (52):

$$P_ц(|\delta|) = \begin{cases} \frac{4}{3}\frac{E}{h} \cdot (2 \cdot R)^{\frac{1}{2}} \cdot |\delta|^{\frac{3}{2}}, & 0 \le |\delta| < h \cdot \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}, \\ \frac{4}{3}\frac{E}{h} \cdot \left((2 \cdot R)^{\frac{1}{2}} \cdot |\delta|^{\frac{3}{2}} - \left(|\delta| - h \cdot \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E} \right)^{\frac{3}{2}} \right), & |\delta| \ge h \cdot \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}, \end{cases} \quad (55)$$

Однако уравнение для $P_ц(|\delta|)$ (55) в практических целях малоинформативное. Единственное, что необходимо отметить, что в точке $|\delta| = h \cdot \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}$ происходит перегиб и из выпуклой вниз функция $P_ц(|\delta|)$ становиться слабозаметной вогнутой.

Именно поэтому слабовогнутому участку можно определить $\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|$ (что соответствует абсолютной величине предела текучести при сжатии предел текучести при сжатии).

Гораздо больший практический интерес может представлять уравнение, полученное для удаленной слабовогнутой части диаграммы вдавливания из асимптотического уравнения (53) подстановкой $b = \sqrt{2 \cdot R \cdot |\delta|}$:

$$P_ц(|\delta|) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot \sqrt{R \cdot |\delta|}. \quad (56)$$

Из (56) очевидно можно получить выражение для статистического вычисления по удаленному участку вогнутой части экспериментально записанной диаграммы $P_ц(|\delta|)$ вдавливания цилиндра значения параметра материала слоя $\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|$ (в рассматриваемом контексте абсолютная величина предела текучести при сжатии) по формуле:

$$\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| = \frac{P_{ц}(|\delta|)}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{R \cdot |\delta|}}. \qquad (57)$$

2.10.2. Вдавливание параболоида вращения

Как известно из (27) и (28), деформации в области контакта параболоида вращения в рамках стержневой модели определяются выражением:

$$\varepsilon(r,0) = \frac{w(r,0)}{h} = \frac{r^2 - a^2}{2R \cdot h}. \qquad (58)$$

Как уже отмечалось в предыдущем случае, деформации сжатия в области контакта монотонно возрастают при стремлении r к нулю, поэтому существует граница круга пластических деформаций $a_{пласт}$ ($a_{пласт} \in [0,a)$), такая, что выполнено равенство (Рисунок 17):

$$\varepsilon(a_{пласт},0) = \frac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{E}. \qquad (59)$$

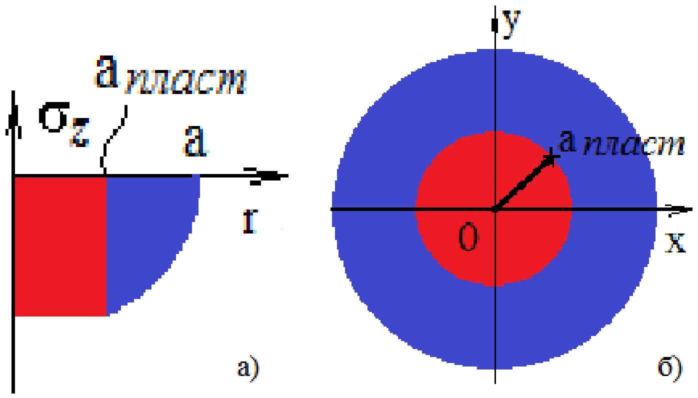

Рисунок 17. Распределение напряжений в области контакта параболоида вращения и покрытия (синий цвет – упругие, красный цвет - пластические напряжения): а) радиальное сечение распределения напряжений; б) вид сверху областей упругих и пластических напряжений

Из (58) и (59) совершенно аналогично случаю цилиндра можно получить, что граница круга пластических деформаций $a_{пласт}$ определяется с помощью аналогичного (48) уравнения:

$$a_{пласт} = \sqrt{\left(a^2 - 2R \cdot h \cdot \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}\right)}. \qquad (60)$$

Выражение (60) имеет вещественное значение только когда $a \geq \sqrt{2R \cdot h \cdot \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}}$. Также как и в случае с цилиндром выражение $\sqrt{2R \cdot h \cdot \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}}$ представляет собой размерную константу, определяющую несущую способность упругопластического слоя при вдавливании шарового индентора, чем больше константа, тем выше несущая способность и переход в пластическое состояние осуществляется при больших нагрузках.

Поскольку константа для шара $\sqrt{2R \cdot h \cdot \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}}$ полностью совпадает с константой для цилиндра, то в принципе этот параметр может быть рекомендован в технике как определяющий несущую способность для нагруженного слоя.

Таким образом, существует круг радиуса $a_{пласт}$ (60), внутри которого напряжение постоянны и равны $\sigma_{эт}^{сжатия}$, а снаружи этого круга уравнение состояния линейно упругое. Исходя из этого описания, можно получить распределение напряжений в области контакта:

$$\sigma_z = \Im(\varepsilon(x,0,0)) = \begin{cases} E \cdot \dfrac{r^2 - a^2}{2 \cdot R \cdot h}, & a_{пласт} < r \leq a, \\ \sigma_{эт}^{сжатия}, & 0 \leq r \leq a_{пласт}. \end{cases} \qquad (61)$$

Перейдем к рассмотрению уравнения равновесия для параболоида вращения. Из (30) получаем нелинейное уравнение для определения величину нагрузки P по заданному радиусу контакта a (при $a \geq \sqrt{2R \cdot h \cdot \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}}$):

$$P = -2\pi \int_0^a \sigma_z^*(r,0) \cdot rdr =$$

$$= -2\pi \left(\int_0^{a_{пласт}} \sigma_{эт}^{сжатия} \cdot rdr + \frac{E}{2R \cdot h} \cdot \int_{a_{пласт}}^{a} \left(r^2 - a^2\right) \cdot rdr \right) = \tag{62}$$

$$= \pi \left(\left| \sigma_{эт}^{сжатия} \right| \cdot a_{пласт}^2 + \frac{E}{4 \cdot R \cdot h} \cdot \left(a^4 - 2a^2 \cdot a_{пласт}^2 + a_{пласт}^4 \right) \right).$$

Подставляя (60) в (62) и собирая коэффициенты можно получить функцию $P_n(a)$ определяющую связь силы P и радиуса области контакта a упруго-идеально-пластического вдавливания параболоида вращения в ровное покрытие:

$$P_n(a) = \begin{cases} \dfrac{\pi \cdot E}{4 \cdot R \cdot h} \cdot a^4, & 0 \le a < \sqrt{2R \cdot h \cdot \dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}}, \\ \dfrac{\pi \cdot E}{4 \cdot R \cdot h} \cdot \left(a^4 - \left(a^2 - 2R \cdot h \cdot \dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E} \right)^2 \right), & a \ge \sqrt{2R \cdot h \cdot \dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}}. \end{cases} \tag{63}$$

Представляет интерес нахождение асимптотического поведения функции $P_n(a)$ в случае значительной пластической области контакта, т.е. когда $a >> \sqrt{2 \cdot R \cdot h \cdot \dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}}$. В этом случае необходимо рассматривать нижнее выражение в (63):

$$P_n(a) = \frac{\pi \cdot E}{4 \cdot R \cdot h} \cdot \left(a^4 - a^4 \cdot \left(1 - 2R \cdot h \cdot \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{a^2 \cdot E} \right)^2 \right) = \pi \cdot \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot a^2. \tag{64}$$

Слабостью (64) является, то, что при проведении экспериментальных исследований используется диаграмма вдавливания в координатах сила / глубина вдавливания, т.е. $P_n(|\delta|)$.

Обратить (63) нельзя и для получения нелинейного уравнения связывающего абсолютное значение $|\delta|$ глубины вдавливания с размером приложенной нагрузки необходимо воспользоваться уравнением (63) и обращенным уравнением (28) в виде $a = \sqrt{2 \cdot R \cdot |\delta|}$:

$$P_n(|\delta|) = \begin{cases} \dfrac{\pi \cdot E}{4 \cdot R \cdot h} \cdot \left(2 \cdot R \cdot |\delta|\right)^2, & 0 \le |\delta| < h \cdot \dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}, \\ \dfrac{\pi \cdot E \cdot R}{h} \left(|\delta|^2 - \left(|\delta| - h \cdot \dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E} \right)^2 \right), & |\delta| \ge h \cdot \dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}. \end{cases} \tag{65}$$

В отличие от вдавливания цилиндра $P_n(|\delta|)$ (65) не имеет точек перегиба. Кроме того из (64) можно получить, что асимптотически при развитой пластической деформации под параболоидом вращения (на удаленном участке диаграммы вдавливания) можно получить элементарную связь между абсолютным значением $|\delta|$ глубины вдавливания и действующей нагрузки на параболоид вращения $P_n(|\delta|)$:

$$P_n(|\delta|) = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot |\delta|.$$

Откуда с очевидностью можно получить очень простое удобное правило статистического вычисления $\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|$ по записанной экспериментальной диаграмме $P_n(|\delta|)$:

$$\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R} \frac{dP_n(|\delta|)}{d|\delta|}. \tag{66}$$

2.10.3. Решение задачи для конического индентора

В случае вдавливания конического индентора деформации в области контакта определяются выражением:

$$\varepsilon(r,0) = \frac{w(r,0)}{h} = \frac{tg(\alpha) \cdot (r - a)}{h}. \tag{67}$$

Как всегда в связи с монотонным возрастанием контактных деформаций при стремлении к центру области контакта будем предполагать, что существует радиус $a_{пласт}$ ($0 < a_{пласт} < a$) такой, что выполняется уравнение:

$$\varepsilon(a_{пласт},0) = \frac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{E}. \qquad (68)$$

Из (67) и (68) можно получить, что граница круга пластических деформаций $a_{пласт}$ определяется с помощью уравнения:

$$a_{пласт} = a - \frac{h}{tg(\alpha)} \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}. \qquad (69)$$

Очевидно, что $a_{пласт} \geq 0$ (т.е. физически оправданная величина) только когда $a \geq \frac{h}{tg(\alpha)} \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}$. В правой части последнего неравенства стоят физико-геометрические константы задачи, поэтому выражение $\frac{h}{tg(\alpha)} \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}$ можно также использовать для характеристики несущей способности слоя, но при использовании конических и пирамидальных инденторов.

Поскольку существует круг радиуса $a_{пласт}$, внутри которого напряжение постоянны и равны $\sigma_{эт}^{сжатия}$, а снаружи этого круга уравнение состояния линейно упругое, то, исходя из этого описания деформаций, можно получить распределение напряжений в области контакта:

$$\sigma_z = \Im(\varepsilon(x,0,0)) = \begin{cases} E \cdot \dfrac{tg(\alpha)\cdot(r-a)}{h}, & a_{пласт} < r \leq a, \\ \sigma_{эт}^{сжатия}, & 0 \leq r \leq a_{пласт}. \end{cases} \qquad (70)$$

Подставляя (70) в уравнение равновесия (35) получаем уравнение связывающее радиус a области контакта с действующей нагрузкой P при условии существования круга пластических деформаций с радиусом $a_{пласт} \geq 0$:

$$P = -2\pi \int_0^a \sigma_z^*(r,0) \cdot r dr =$$

$$= -\pi\left(2\int_{0}^{a_{пласт}}\sigma_{эт}^{сжатия}\cdot rdr + 2\cdot\frac{E}{h}\cdot tg(\alpha)\cdot\int_{a_{пласт}}^{a}(r-a)\cdot rdr\right) =$$

$$= \pi\left(\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\cdot a_{пласт}{}^{2} + \frac{E}{h}\cdot tg(\alpha)\cdot\left(\frac{a^{3}}{3} - a\cdot a_{пласт}{}^{2} + \frac{2\cdot a_{пласт}{}^{3}}{3}\right)\right). \qquad (71)$$

Подставляя (69) в (71) и собирая коэффициенты можно получить функцию $P_K(a)$ определяющую связь силы P и радиуса области контакта a упруго-идеально-пластического вдавливания конуса вращения в ровное покрытие:

$$P_K(a) = \begin{cases} \pi\dfrac{E}{3\cdot h}\cdot tg(\alpha)\cdot a^{3}, & 0 \le a < \dfrac{h}{tg(\alpha)}\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}, \\ \pi\dfrac{E}{3\cdot h}\cdot tg(\alpha)\left(a^{3} - \left(a - \dfrac{h}{tg(\alpha)}\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}\right)^{3}\right), & a \ge \dfrac{h}{tg(\alpha)}\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}. \end{cases} \qquad (72)$$

Также как и ранее для других типов инденторов необходимо констатировать, что функция $P_K(a)$ (72) непрерывно дифференцируема в точке $a = \dfrac{h}{tg(\alpha)}\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}$.

Найдем асимптотическое поведение функции $P_K(a)$ в случае значительной пластической области контакта, т.е. когда $a >> \dfrac{h}{tg(\alpha)}\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}$. В этом случае необходимо рассматривать нижнее выражение в (72):

$$P_K(a) = \pi\frac{E}{3\cdot h}\cdot tg(\alpha)\left(a^{3} - \left(a^{3} + 3\cdot a^{2}\frac{h}{tg(\alpha)}\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}\right)\right) =$$

$$= \pi\cdot a^{2}\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| - \pi\frac{E}{3\cdot h}\cdot tg(\alpha)\cdot a^{3}. \qquad (73)$$

Вспоминая, что $a << 1$, окончательно получаем из (73)

$$P_{\kappa}(a)\approx a^2\pi\cdot\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|. \qquad (74)$$

Из (74) следует, что, как и ранее для других инденторов, по удаленному участку диаграммы вдавливания можно судить о $\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|$, т.е. о пластических свойствах покрытия.

Подставляя в (72) уравнение обращенное уравнение (32) $a=\dfrac{|\delta|}{tg(\alpha)}$ можно получить диаграмму вдавливания $P_{\kappa}(|\delta|)$ в естественных координатах связывающее действующую силу P и абсолютную глубину вдавливания $|\delta|$:

$$P_{\kappa}(|\delta|)=\begin{cases}\pi\dfrac{E}{3\cdot h\cdot tg(\alpha)^2}|\delta|^3, & 0\le|\delta|<h\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E},\\[2ex] \pi\dfrac{E}{3\cdot h\cdot tg(\alpha)^2}\left(|\delta|^3-\left(|\delta|-h\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}\right)^3\right), & |\delta|\ge h\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}.\end{cases} \qquad (75)$$

2.10.4. Вдавливание многогранной пирамиды с равными боковыми поверхностями

В соответствии с планом решения задач для правильных (36)-(38) пирамид будем рассматривать часть Ω правильной многоугольной области контакта S (Рисунок 15). Деформация в области Ω определяется уравнением:

$$\varepsilon(x,y,0)\big|_{\Omega}=\frac{tg(\alpha)\cdot(x-a)}{h}. \qquad (76)$$

В связи с линейным возрастанием контактных деформаций при стремлении к центру области контакта будем предполагать, что существует такое расстояние $a_{пласт}$ ($0<a_{пласт}<a$), что выполнено равенство (Рисунок 18):

$$\varepsilon(a_{пласт},y,0)\big|_{\Omega}=\frac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{E}. \qquad (77)$$

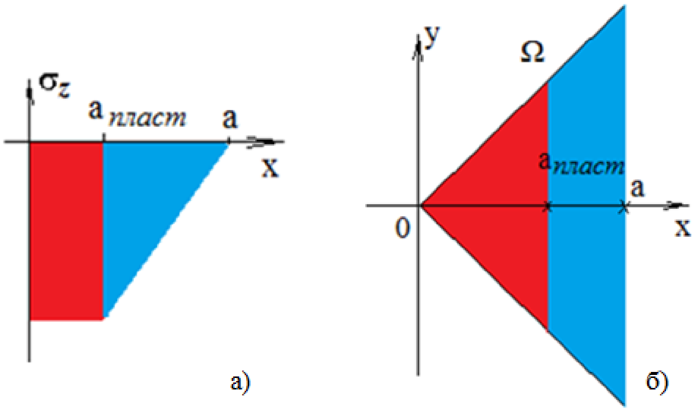

Рисунок 18. Контактное взаимодействие в подобласти Ω области контакта S : а) эпюра деформаций изменяющаяся вдоль оси $0x$; б) треугольная подобласть пластических деформаций в области Ω

Из (76) и (77) можно получить, что высота треугольника пластических деформаций $a_{пласт}$ (Рисунок 18) определяется с помощью уравнения:

$$a_{пласт} = a - \frac{h}{tg(\alpha)} \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}. \qquad (78)$$

Поскольку в треугольнике Ω существует треугольник пластических деформаций, внутри которого напряжение постоянны и равны $\sigma_{эт}^{сжатия}$, а снаружи этого треугольника уравнение состояния линейно упругое, то, исходя из этого описания, можно получить распределение напряжений в области контакта (Рисунок 18):

$$\sigma_z\big|_{\Omega} = \Im(\varepsilon(x,y,0))\big|_{\Omega} = \begin{cases} E \cdot \dfrac{tg(\alpha)\cdot(x-a)}{h}, & a_{пласт} < x \le a, \\ \sigma_{эт}^{сжатия}, & 0 \le x \le a_{пласт}. \end{cases} \qquad (79)$$

Из уравнения равновесия для многогранной пирамиды (40) с учетом условия существования пластической подобласти (78) ($a \ge \dfrac{h}{tg(\alpha)} \dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}$), распределения напряжений (79) следует, что действующая нагрузка дующим образом P определяется следующим образом:

$$P=-2\cdot(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))\int\limits_0^a \Im\left(\frac{tg(\alpha)\cdot(x-a)}{h}\right)\cdot xdx=$$

$$=-2\cdot(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))\left(\int\limits_0^{a_{пласт}}\sigma_{эт}^{сжатия}\cdot xdx+\frac{E}{h}\cdot tg(\alpha)\cdot\int\limits_{a_{пласт}}^{a}(x-a)\cdot xdx\right)=\qquad(80)$$

$$=(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))\times$$

$$\times\left(\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\cdot a_{пласт}{}^2+\frac{E}{h}\cdot tg(\alpha)\cdot\left(\frac{a^3}{3}-a\cdot a_{пласт}{}^2+\frac{2\cdot a_{пласт}{}^3}{3}\right)\right).$$

Подставляя (78) в (80) и собирая коэффициенты можно получить функцию $P_n(a)$ определяющую связь силы P и радиуса области контакта a упруго-идеально-пластического вдавливания пирамиды в ровное покрытие:

$$P_n(a)=\begin{cases}\dfrac{(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))\cdot tg(\alpha)\cdot E}{3\cdot h}\cdot a^3, & 0\le a<\dfrac{h}{tg(\alpha)}\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E},\\ \dfrac{(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))\cdot tg(\alpha)\cdot E}{3\cdot h}\times & \\ \qquad\times\left(a^3-\left(a-\dfrac{h}{tg(\alpha)}\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}\right)^3\right), & a\ge\dfrac{h}{tg(\alpha)}\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}.\end{cases}\qquad(81)$$

Также как и ранее для других типов инденторов необходимо констатировать, что функция $P_n(a)$ (81) непрерывно дифференцируема в точке $a=\dfrac{h}{tg(\alpha)}\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}$. Найдем асимптотическое поведение функции $P_n(a)$ в случае значительной пластической области контакта, т.е. когда $a>>\dfrac{h}{tg(\alpha)}\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}$. В этом случае необходимо рассматривать нижнее выражение в (81). Опуская известные преобразования (73), (74) с учѐтом малости $a<<1$:

$$P_n(a) \approx (m-1) \cdot tg(\pi/(m-1)) \cdot a^2 \cdot \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|. \qquad (82)$$

Из (82) следует, что, как и ранее для других инденторов, по удаленному участку диаграммы вдавливания можно судить о $\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|$, т.е. о пластических свойствах покрытия.

С использованием (81), а также обращенного уравнения (37) $a = \dfrac{|\delta|}{tg(\alpha)}$, не повторяя ранее выполненных вычислений, получаем диаграмму вдавливания:

$$P_n(|\delta|) = \begin{cases} \dfrac{(m-1) \cdot tg(\pi/(m-1)) \cdot tg(\alpha) \cdot E}{3 \cdot h} \cdot |\delta|^3, & 0 \le |\delta| < h \dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}, \\ \dfrac{(m-1) \cdot tg(\pi/(m-1)) \cdot tg(\alpha) \cdot E}{3 \cdot h} \times & \\ \qquad \times \left(|\delta|^3 - \left(|\delta| - h \dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E} \right)^3 \right), & |\delta| \ge h \dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}. \end{cases} \qquad (83)$$

2.10.5. Замечание о моделировании вдавливания инденторов в хрупкие, например, керамические материалы

Рассмотренный в данном разделе упруго-идеально-пластичный материал стержней при решении задачи о вдавливании индентора эквивалентен рассмотрению хрупкого упругого материала, для которого предел $\sigma_{эт}^{сжатия}$ является пределом прочности.

Это позволяет применить все полученные решения для определения предела прочности керамических, в частности, строительных материалов по результатам статического вдавливания инденторов.

2.11. Материал со степенной модифицированной аппроксимацией Бюльфингера связи напряжений и деформаций

2.11.1. Вдавливание параболического цилиндра в полосу

Учитывая, что деформации в области контакта для данной задачи определяются уравнением (46), а также (15) и (10) можно определить, что для цилиндра, внедряемого в нелинейно-деформируемую полосу, распределение напряжений в области контакта определяется уравнением:

$$\sigma_z = \Im(\varepsilon(x,0,0)) = -\frac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{\left(2 \cdot R \cdot h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\alpha^{сжания}}} \left(b^2 - x^2\right)^{\beta}. \qquad (84)$$

Далее используя уравнение равновесия (16) с учетом нелинейности распределения контактных напряжений получаем:

$$P = -2\int_0^b \Im(\varepsilon(x,0,0))dx =$$

$$= 2\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{\left(2 \cdot R \cdot h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta}} \int_0^b \left(b^2 - x^2\right)^{\beta} dx = \qquad (85)$$

$$= \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{\left(2 \cdot R \cdot h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta}} \cdot \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\beta\right)} \sqrt{\pi} \cdot b^{(2\cdot\beta+1)}.$$

Для получения нелинейного уравнения связывающего абсолютное значение $|\delta|$ глубины вдавливания с размером области контакта необходимо воспользоваться обращенным уравнением (18) $b = \sqrt{2 \cdot R \cdot |\delta|}$ и подставить его в (85):

$$P = \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{\left(h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta}} \cdot \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\beta\right)} \sqrt{2 \cdot \pi \cdot R} \cdot |\delta|^{(\beta+1/2)}, \qquad (86)$$

где $\Gamma(\ )$ - гамма-функция [23].

2.11.2. Индентор - параболоид вращения

Действуя совершенно аналогично предыдущему случаю и используя уравнения (10), (58) и (29) можно определить, что для параболоида, внедряемого в нелинейно-деформируемый слой, распределение напряжений в области контакта определяется уравнением:

$$\sigma_z = \Im(\varepsilon(r,0)) = -\frac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{\left(2 \cdot R \cdot h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta}} \cdot \left(a^2 - r^2\right)^{\beta}. \qquad (87)$$

Перейдем к рассмотрению уравнения равновесия для параболоида вращения (25) получаем нелинейное уравнение для определения нагрузки P по заданному радиусу круга контакта a:

$$\begin{aligned} P &= -2\pi \int_0^a \sigma_z^*(r,0) \cdot rdr = 2\pi \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{\left(2 \cdot R \cdot h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta}} \int_0^a \left(a^2 - r^2\right)^{\beta} \cdot rdr = \\ &= 2\pi \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{\left(2 \cdot R \cdot h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta}} \frac{a^{2+2\cdot\beta}}{1+\beta}. \end{aligned} \qquad (88)$$

Используя обратное выражение уравнению (28) $a = \sqrt{2R|\delta|}$ и подставляя его в (88) окончательно получаем выражение для определения абсолютного значения глубины вдавливания $|\delta|$ по заданной силе P:

$$P = 4 \cdot \pi \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{\left(h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta}} \frac{R}{1+\beta} |\delta|^{1+\beta}. \qquad (89)$$

2.11.3. Вдавливание конического индентора

Используя уравнения (10), (67) и (34) можно определить, что для конического индентора, внедряемого в нелинейно-деформируемый слой, распределение напряжений в области контакта определяется уравнением:

$$\sigma_z = \Im(\varepsilon(r,0)) = -\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot tg(\alpha)^{\beta}}{\left(h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta}} (a - r)^{\beta}. \qquad (90)$$

Подставляя (90) в уравнение равновесия (35) получаем уравнение связывающее радиус a области контакта с действующей нагрузкой P:

$$P = -2\pi \int_0^a \sigma_z^{\,*}(r,0) \cdot r dr =$$

$$= 2\pi \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot tg(\alpha)^{\beta}}{\left(h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta}} \int_0^a (a-r)^{\beta} \cdot r dr =$$

$$= 2\pi \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot tg(\alpha)^{\beta}}{\left(h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta}} \frac{a^{2+\beta}}{2 + 3 \cdot \beta + \beta^2}. \qquad (91)$$

Подставляя в предыдущее уравнение обращенное уравнение (32) $a = \dfrac{|\delta|}{tg(\alpha)}$ можно получить уравнение, связывающее действующую силу P и абсолютную глубину вдавливания $|\delta|$:

$$P = 2\pi \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{\left(h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta} \cdot tg(\alpha)^2} \cdot \frac{|\delta|^{2+\beta}}{2 + 3 \cdot \beta + \beta^2}. \qquad (92)$$

2.11.4. Контактная задача для правильной пирамиды

В соответствии с планом решения задач для правильных пирамид будем рассматривать часть Ω правильной многоугольной области контакта S (Рисунок 15). Учитывая (10), (67) и (39) можно записать распределение контактных напряжений в подобласти контакта Ω:

$$\sigma_z(x, y, 0) = \Im(\varepsilon(x, y, 0)) = -\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot tg(\alpha)^{\beta}}{\left(h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta}} (a - x)^{\beta}.$$

Вычисляя результирующую силу, действующую в области контакта (40), получаем:

$$P = -2 \cdot (m-1) \cdot tg(\pi/(m-1)) \int_0^a \Im\left(\frac{tg(\alpha) \cdot (x-a)}{h}\right) \cdot x dx =$$

$$= 2 \cdot (m-1) \cdot tg(\pi/(m-1)) \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot tg(\alpha)^{\beta}}{\left(h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta}} \int\limits_{0}^{a} (a-x)^{\beta} \cdot x dx =$$

$$= 2 \cdot (m-1) \cdot tg(\pi/(m-1)) \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot tg(\alpha)^{\beta}}{\left(h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta}} \frac{a^{2+\beta}}{2 + 3 \cdot \beta + \beta^2}.$$

Из предыдущего уравнения с использованием обращенного уравнения (37) $a = \frac{|\delta|}{tg(\alpha)}$, не повторяя ранее выполненных вычислений получаем:

$$\begin{aligned} P &= -2 \cdot (m-1) \cdot tg(\pi/(m-1)) \int\limits_{0}^{a} \Im\left(\frac{tg(\alpha) \cdot (x-a)}{h}\right) \cdot x dx = \\ &= 2 \cdot \frac{(m-1) \cdot tg(\pi/(m-1))}{2 + 3 \cdot \beta + \beta^2} \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{\left(h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta} \cdot tg(\alpha)^2} |\delta|^{2+\beta}. \end{aligned} \qquad (93)$$

2.11.5. Замечания по решению контактных задач для инденторов произвольного вида с использованием нелинейно деформируемого материала покрытия

В случае нелинейности материала и инденторов более сложного вида решить аналитически уравнения равновесия будет затруднительно. Отметим, что полученные аналитические решения были проведены авторами только с целью их дальнейшего использования для решения обратных задач.

Однако в общем случае геометрии индентора исследователям необходимо прибегнуть к так называемому полуобратному методу. В этом случае необходимо задаваясь характерными размерами области контакта или абсолютной глубиной вдавливания $|\delta|$, а также механическими характеристиками покрытия, численно интегрируя исходное уравнение равновесия (11), определить необходимую величину интегральной силы $P(|\delta|)$, при которой достигаются предварительно заданная величина выбранного геометрического параметра $|\delta|$.

Построив массив $|\delta_i|$ с некоторым шагом дискретизации можно получить таблицу или график соответствующих вычисленных значений $P(|\delta_i|)$.

ГЛАВА 3. РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Очень важными в механике контактного взаимодействия являются понятия о прямой и обратной задачах. Прямая задача механики сводится к расчету физического распределения напряжений в области контакта по известным параметрам внедряемого объекта и объекта, в который происходит вдавливание.

Параметрами объектов в контактном взаимодействии являются их геометрия, а также их механические характеристики. Прямую задачу механики обычно решают на стадии проектирования, т.е. прогнозирования служебных характеристик.

Получаемые результаты по распределению напряжений и перемещений в области контакта помогают итерационно подобрать соответствующие параметры взаимодействующих тел, обычно обеспечивающие реализацию заданных технических параметров эксплуатации.

Обратная же задача механики контактного взаимодействия заключается в определении геометрических и физических параметров взаимодействующих тел, а также условий их контакта по экспериментально записанным данным взаимного перемещения при известных внешних нагрузках. Ее решают на этапе интерпретации экспериментальных данных. К сожалению, нередко в связи с множественностью параметров она может иметь несколько возможных вариантов своего решения.

Отметим, что все решенные задачи второй главы являются прямыми. Таким образом, в них предполагалось, что все параметры геометрические и механические априорно заданы. Полученные во второй главе решения демонстрируют удобство и гибкость обобщенной стержневой модели покрытия при решении довольно сложных прикладных задач контактного взаимодействия.

С другой стороны, проведенные в предыдущих разделах исследования прямых контактных задач, позволяют сделать выбор моделей с наименьшим числом параметров для желательно однозначного решения обратных технологических задач.

3.1. Определение механических характеристик ровного однородного покрытия постоянной высоты по экспериментальным диаграммам вдавливания индентора

Данная задача относится к обратным задачам т.к. по известной кривой вдавливания индентора заранее измеренной формы необходимо определить механические характеристики стержней моделирующих покрытие. В целом исследователь может навязать любую гипотезу об уравнении состояния для исследуемого объекта (слоя) и, исходя из этих гипотез, установить некоторые значения механических характеристик или их сочетания.

Однако уже по результатам предварительного решения нелинейных прямых задач установлено, что использование гипотезы Бюльфингера о степенной зависимости связи напряжений и деформаций приводит к чрезвычайно сложным выражениям (84)-(93).

Фактически, чтобы приблизить с помощью выражений (84)-(93) кривую вдавливания необходимо использовать вариационные методы.

Это делает практически невозможным использование при решении обратной задачи выражения (84)-(93). Таким образом, указанные результаты пригодны исключительно при решении прямых задач со сложным, например, гиперэластичным поведение материала.

3.1.1. Статистическая обработка измерений с использованием линейного уравнения состояния стержней в модели покрытия

Отметим, что в случае чисто упругой деформации покрытия в рамках рассматриваемой модели Винклера существуют два параметра модели: единственный параметр материала (модуль упругости E) и геометрический параметр высоты покрытия h, которые необходимо определить по экспериментальным данным, т.е. по кривой вдавливания (парам измеренных точек $\left(P_i, |\delta_i|\right)_{i=1}^{n}$, где P_i сила, $|\delta_i|$ - абсолютная глубина вдавливания, n - количество пар точек в диаграмме вдавливания) при известной (измеренной заранее) геометрии индентора.

Используя формулы п. 2.9.2., и заменив $\frac{E}{h}$ на $\frac{E_i}{h_i}$, P на P_i, а $-\delta$ на $|\delta_i|$, можно получить:

- Для шарового индентора:

$$\frac{E_i}{h_i} = \frac{1}{\pi \cdot R} \frac{P_i}{|\delta_i|^2}. \tag{94}$$

- Для конического индентора:

$$\frac{E_i}{h_i} = \frac{3}{\pi} \cdot tg(\alpha)^2 \frac{P_i}{|\delta_i|^3}. \tag{95}$$

- Для многогранного индентора:

$$\frac{E_i}{h_i} = \frac{3}{(m-1)} \frac{tg(\alpha)^2}{tg(\pi/(m-1))} \cdot \frac{P_i}{|\delta_i|^3}. \qquad (96)$$

Очевидно, что определенное с помощью модели Винклера среднестатистическое отношение для покрытия $\left\langle \frac{E}{h} \right\rangle$ должно быть вычислено с помощью усреднения:

$$\left\langle \frac{E}{h} \right\rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{h_i}. \qquad (97)$$

Используя (94)-(97) можно вычислить среднеквадратичную относительную ошибку использования гипотезы о чисто линейном уравнении состояния Винклеровой модели покрытия:

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{E_i}{h_i} \left\langle \frac{h}{E} \right\rangle \right)^2}. \qquad (98)$$

Если величина (98) не превосходит 5-7 %, то можно считать примененные гипотезы Винклерова основания для моделировании покрытия обоснованными.

Следует отметить отдельно, что «конгломерат» $\left\langle \frac{E}{h} \right\rangle$ определяется только целиком и если поверхностный слой не выражен явно, то глубина $\langle h \rangle$ определяется субъективно исследователем. Именно в связи с субъективностью определения $\langle h \rangle$ связано основное препятствие применения упругой модели Винклера на практике при решении обратной задачи.

3.1.2. Статистическая обработка измерений с использованием модели упруго-идеально-пластичного материала стержней

Необходимо отметить, что поскольку все диаграммы вдавливания (65), (75) и (83) имеют два участка: начальный – упругий и конечный – с развитыми пластическими деформациями, то в этом случае формулы (94)-(98) верны для начального участка.

Однако необходимо получить формальный критерий позволяющий оценить возможность применения формул (94)-(98) в упруго-идеально-пластическом случае. Т.е. критерий, определяющий начальный упругий участок диаграммы вдавливания.

Из вышеизложенного (42)-(44), (60), (69), (78) следует, что в качестве критериев, определяющих для разных инденторов упругое деформирование стержневой модели, следует выбрать неравенства:

- для параболоида вращения или шара:

$$\sqrt[4]{\frac{4\cdot R\cdot h}{\pi\cdot E}P}<\sqrt{2R\cdot h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}};\qquad(99)$$

- для конуса:

$$\sqrt[3]{\frac{3\cdot h}{\pi\cdot tg(\alpha)\cdot E}P}<\frac{h}{tg(\alpha)}\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E};\qquad(100)$$

- для правильной пирамиды:

$$\sqrt[3]{\frac{3\cdot h}{(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))\cdot tg(\alpha)\cdot E}P}<\frac{h}{tg(\alpha)}\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}.\qquad(101)$$

После несложных преобразований из (99)-(101) можно определить верхнюю оценку для значения нагрузки P_i из диаграммы вдавливания, при которой вдавливание индентора соответствующей формы является исключительно упругим:

- для параболоида вращения или шара:

$$P_i<\pi\cdot E\cdot R\cdot h\cdot\left(\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}\right)^2;\qquad(102)$$

- для конуса:

$$P_i<\frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{tg(\alpha)}\right)^2\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|^3}{E^2};\qquad(103)$$

- для правильной пирамиды:

$$P_i < \frac{(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))}{3}\cdot\left(\frac{h}{tg(\alpha)}\right)^2\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|^3}{E^2}. \qquad (104)$$

Таким образом, по начальному упругому участку диаграммы вдавливания, т.е. когда для нагрузки выполнены неравенства (102)-(104), можно определить значение составного выражения $\left\langle\frac{E}{h}\right\rangle$ по формулам (94)-(98), а по конечному можно определить $\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|$ (т.е. в применяемой интерпретации абсолютного значения предела текучести при сжатии $\left|\sigma_{T}^{сжатия}\right|$).

С другой стороны, как и в упругом случае, совершенно субъективным остается предположение о значении средней высоты покрытия $\langle h\rangle$ и соответственно определения модуля упругости материала покрытия $\langle E\rangle = \left\langle\frac{E}{h}\right\rangle\cdot\langle h\rangle$.

Из этого теоретического результата следует, что стержневую модель можно достаточно удобно применять при решении обратной задачи, только для покрытий с выраженной высотой $\langle h\rangle$, т.е. низкомодульных покрытий или индентирования тонких срезов биологических тканей.

3.1.2.1. Определение по конечному участку диаграммы вдавливания параболоида вращения или шара абсолютного значения предела текучести при сжатии материала покрытия

Для параболоида вращения из (66) по конечному участку можно определить, использовав конечно-разностную аппроксимацию производной [25]:

$$\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|_i = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot R}\frac{P_{n,i}(|\delta|) - P_{n,i-1}(|\delta|)}{|\delta|_i - |\delta|_{i-1}}. \qquad (105)$$

Соответственно среднее из (105) значение для материала покрытия $\left\langle\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\right\rangle$ определяется:

$$\left\langle \left| \sigma_{эт}^{сжатия} \right| \right\rangle = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot R}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\frac{P_{n,i}(|\delta|)-P_{n,i-1}(|\delta|)}{|\delta|_i-|\delta|_{i-1}}. \qquad (106)$$

Из (106) точность определения $\left\langle \left| \sigma_{эт}^{сжатия} \right| \right\rangle$ (дисперсию) можно определить как

$$\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{2\cdot\pi\cdot R}\left(\frac{P_i-P_{i-1}}{\delta_i-\delta_{i-1}}\right)\frac{1}{\left\langle \left| \sigma_{эт}^{сжатия} \right|_i \right\rangle}\right)^2}. \qquad (107)$$

Таким образом, с помощью сферического индентора в случае упруго-идеально-пластического поведения материала (106) можно однозначно определить только параметр $\left| \sigma_{эт}^{сжатия} \right|$ (т.е. абсолютное значение предела текучести при сжатии) по удаленному участку диаграммы вдавливания.

Удаленность участка можно определить в соответствии с очевидными неравенствами, следующими из (102)-(104):

- для параболоида вращения или шара:

$$P_i >> \pi\cdot E\cdot R\cdot h\cdot\left(\frac{\left| \sigma_{эт}^{сжатия} \right|}{E}\right)^2; \qquad (108)$$

- для конуса:

$$P_i >> \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{tg(\alpha)}\right)^2\frac{\left| \sigma_{эт}^{сжатия} \right|^3}{E^2}; \qquad (109)$$

- для правильной пирамиды:

$$P_i >> \frac{(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))}{3}\cdot\left(\frac{h}{tg(\alpha)}\right)^2\cdot\frac{\left| \sigma_{эт}^{сжатия} \right|^3}{E^2}. \qquad (110)$$

3.1.2.2. *Абсолютное значение предела текучести при сжатии для внедряемого конуса*

Исходя из уравнения (74) и обращенного уравнения (32) $a = \dfrac{|\delta|}{tg(\alpha)}$ можно получить, что для конического индентора для удаленного участка диаграммы вдавливания (108)-(110) выполнено:

$$\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| = \frac{tg(\alpha)^2}{\pi}\frac{\partial^2 P}{\partial|\delta|^2}. \qquad (111)$$

Будем предполагать, что массив абсолютных глубин вдавливания $\{|\delta_i|\}_{i=1}^n$ имеет равный шаг $\Delta_{|\delta_i|}$. Тогда из (111) для удаленных участков диаграммы вдавливания, используя конечно-разностную аппроксимацию второй производной [25], можно получить уравнение для статистического определения абсолютного значения предела текучести при сжатии $\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|_i$:

$$\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|_i = \frac{tg(\alpha)^2}{\pi}\frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{\left(\Delta_{|\delta_i|}\right)^2}. \qquad (112)$$

Соответственно из (112) средние значения для материала покрытия $\left\langle\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\right\rangle$, в случае конического индентора определяется:

$$\left\langle\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\right\rangle = \frac{tg(\alpha)^2}{\pi}\frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{\left(\Delta_{|\delta_i|}\right)^2}\right).$$

Относительная точность вычисления среднего значения $\left\langle\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\right\rangle$ как ранее должна определяться в смысле среднего квадратичного (дисперсии).

Как видно из предыдущего изложения, результаты для внедряемой правильной пирамиды отличаются от результатов для конуса только линейным множителем. Поэтому читатель легко может воспроизвести их сам.

3.2. Твердость

Прежде всего, необходимо отметить, что твердость - это ГОСТ-ированный термин в технической литературе и его не следует путать с жесткостью и ни в коем случае не использовать в просторечиях.

Твердость (поверхностная) — свойство материала оказывать сопротивление упругой и пластической деформации или разрушению при вдавливании в поверхностный слой материала другого, более твердого и не получающего остаточной деформации тела (индентора) [26, 27].

Все методы определения твердости материалов можно разделить на несколько основных групп [26, 27]:

- статические (наиболее распространенные), при которых нагрузку к индентору прикладывают плавно и постепенно, а время выдержки под нагрузкой регламентируется стандартами (отдельно на черные и цветные металлы) на соответствующие методы;
- динамические, при которых определения твердости индентор подействует на образец с определенной кинетической энергией, затрачиваемой на упругую отдачу и формирование отпечатка, динамическую твердость часто называют также твердостью материала при ударе;
- кинетические, при которых определение твердости основывается на непрерывной регистрации процесса вдавливания индентора с записью диаграммы «сила, действующая на индентор — глубина вдавливания индентора» (Рисунок 19).

Таким образом, в предыдущем п. 3.1. при статистической обработке диаграмм вдавливания «по умолчанию» рассматривались кинетические методы определения твердости поверхности, а в данном пункте - статические.

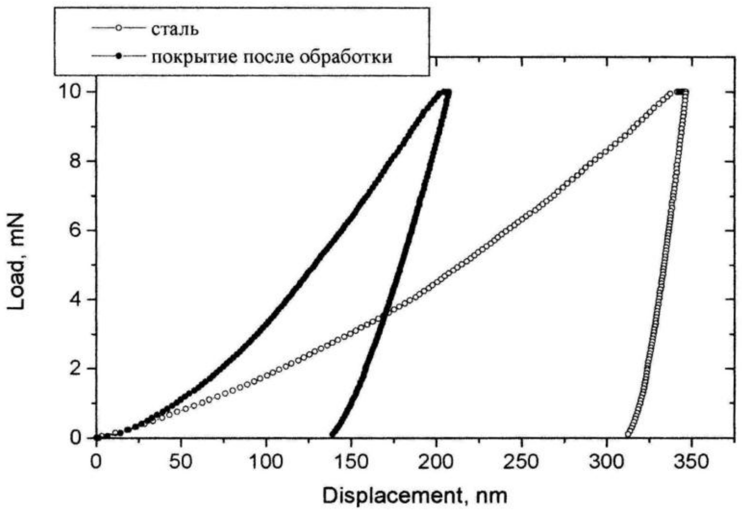

Рисунок 19. Типичная диаграмма вдавливания на нано-уровне

При определении твердости всеми методами (кроме микротвердости) измеряют интегральное значение твердости материала (усредненное для всех структурных составляющих). Поэтому получающийся после снятия нагрузки отпечаток пластических повреждений должен быть по размеру значительно больше размеров зерен и других структурных составляющих тестируемого материала.

3.2.1. Твердость по Бринеллю

При практическом определении твердости разными методами нагрузку P по настоящее время принято задавать в кгс. Метод измерения твердости по Бринеллю регламентирован ГОСТ 9012 [28-30] (Рисунок 20).

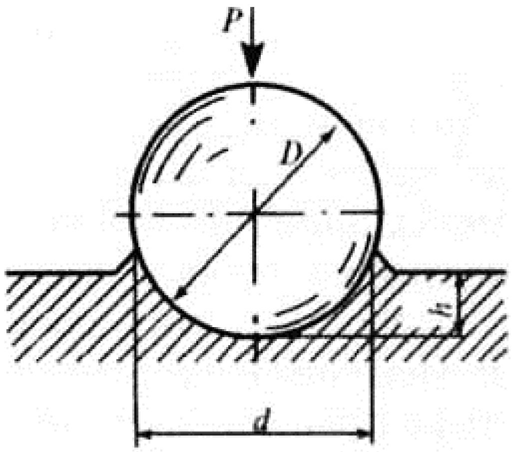

Рисунок 20. Схема измерения твердости по Бринеллю

При определении твердости этим методом стальной шарик определенного диаметра D вдавливают в тестируемый образец под действием нагрузки P, приложенной перпендикулярно к поверхности образца, в течение определенного времени (Рисунок 20). После снятия нагрузки измеряют диаметр отпечатка $d = 2 \cdot a_{пласт}$. Число твердости по Бринеллю обозначается буквами HB, и его определяют путем деления нагрузки P на площадь поверхности сферического отпечатка S [28-30]:

$$HB = \frac{2 \cdot P}{\pi \cdot D \cdot \left(D - \sqrt{D^2 - d^2} \right)},$$

где $S = \frac{\pi \cdot D}{2} \cdot \left(D - \sqrt{D^2 - d^2} \right)$. Записывают вычисленное по экспериментальным измерениям значение твердости H перед буквами HB, после этих букв иногда указываются условия проведения измерений в виде

$H\ HB\ D/P/t$, где t - время выдержки под нагрузкой. Время выдержки под нагрузкой P для черных металлов составляет 10...15 с, а для цветных металлов и сплавов от 10 до 180 с [28-30].

После простейших преобразований исходной формулы для определения твердости можно получить [28-30]:

$$HB = \frac{P}{D^2}\left(\frac{2/\pi}{1-\sqrt{1^2-(d/D)^2}}\right).$$

Из последней формулы следует, что для получения одинаковых значений HB одного и того же образца при использовании шариков разного диаметра необходимо постоянство отношений P/D^2 и d/D [28]. Поэтому для удобства определения чисел твердости по Бринеллю созданы специальные таблицы в зависимости от диаметра шарика D, диаметра отпечатка d и нагрузки P [28].

Измерение твердости по Бринеллю в силу деформируемости стального шарика рекомендуется применять относительно мягких металлов и сплавов [28].

3.2.2. Твердость по Виккерсу

Метод измерения твердости по Виккерсу регламентируется ГОСТ 2999. Метод используют для определения твердости деталей и металлопродукции малой толщины, а также тонких поверхностных слоев, имеющих высокую твердость [28, 30].

Твердость по Виккерсу измеряют путем вдавливания в образец (изделие) алмазного наконечника в форме правильной четырехгранной пирамиды под действием нагрузки P в течение времени выдержки t (Рисунок 21). После снятия нагруби измеряют диагонали оставшегося на поверхности материала отпечатка d_1 и d_2, и вычисляют их среднее арифметическое значение - d мм.

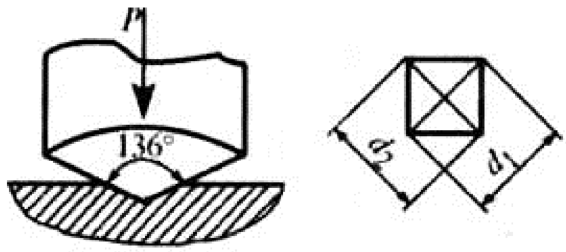

Рисунок 21. Схема измерения твердости по Виккерсу

Число твердости HV определяют отношением нагрузки (в кгс) к площади боковой поверхности полученного пирамидального отпечатка (мм^2):

$$HV = \frac{P}{S} = P \Bigg/ \left(\frac{d^2}{2 \cdot \sin(\alpha/2)} \right) = \frac{2P \sin(\alpha/2)}{d^2} = 1.854 \frac{P}{d^2} \left(кгс/мм^2 \right).$$

Значения твердости по Виккерсу при стандартных нагрузках и зависимости от длины диагонали d (мм) даны в соответствующих таблицах.

Число твердости по Виккерсу обозначают целым числом H, характеризующим величину твердости со стоящим после них символом HV (например, $200\,HV$). Иногда после символа через слеш указывают нагрузку P и время выдержки t.

Длина диагонали отпечатка обычно меньше 1 мм, т.е. размеры отпечатка при определении твердости по Виккерсу, как правило, значительно меньше, чем в методе Бринелля. При грубой структуре образца это может вызвать больший разброс значений HV в разных точках образца по сравнению с разбросом HB. Для получения достоверных средних значений приходится делать на каждом образце в разных местах не менее 5 замеров.

3.2.3. Твердость по Роквеллу

Метод измерения твердости по Роквеллу регламентирован ГОСТ 9013. При определении твердости этим методом тестируемый образец (изделие) под действием двух последовательно прилагаемых нагрузок – предварительной P_0 (обычно $P_0 = 10 кгс$) и общей P - вдавливают индентор (алмазный конус или стальной шарик, Рисунок 22). При этом общая нагрузка равна сумме предварительной P_0 и основной P_1 нагрузок [28, 30]:

$$P = P_0 + P_1.$$

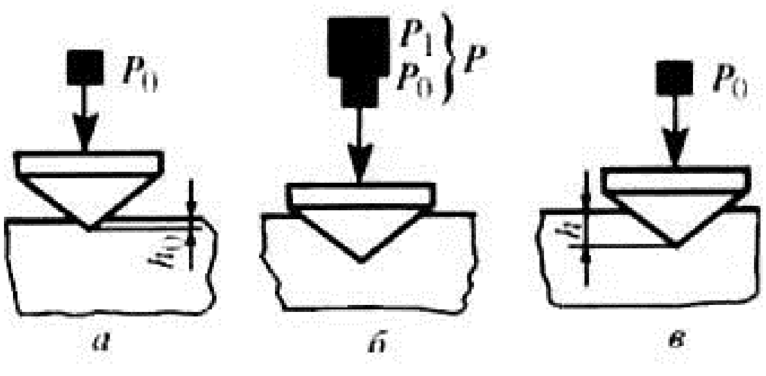

Рисунок 22. Этапы нагружения индентора при измерения твердости по Роквеллу: а) предварительное нагружения и измерение предварительной глубины; б) догрузка индентора основной нагрузкой P_1; в) измерение результирующей глубины вдавливания под действием нагрузки P_0

Твердость по Роквеллу измеряют в условных единицах. За единицу твердости принята величина, соответствующая осевому перемещению индентора на 0,002 мм.

В зависимости от формы индентора и прилагаемой нагрузки введены три измерительные шкалы: A, B, C. Наиболее часто используемыми шкалами являются A и C.

Число твердости по Роквеллу обозначается числом, характеризующими величину твердости, со стоящим после них символом HRA, HRB или HRC (в зависимости от используемой шкалы измерения), например: 25,5 HRC. Из-за относительной шкалы по глубине вдавливания очень хорошо автоматизируется и широко используется на производстве.

3.2.4. Твердость по Мейеру

Статическую твердость по Бринеллю и Виккерсу принято вычислять как отношение вертикальной нагрузки к площади поверхности отпечатка.

Другим способом, предложенным Мейером, но не получившим широкого практического распространения, является расчет твердости по площади проекции отпечатка.

В дальнейшем эту твердость будем называть твердостью по Мейеру и обозначать HM . Она используется в основном в научных целях.

Несмотря на очевидные преимущества статической твердости, вычисленной на площади проекции отпечатка HM (прежде всего простота измерений и независимость от вида индентора), большинство исследователей продолжают пользоваться статической твердостью, вычисленной по площади поверхности отпечатка (твердость по Виккерсу, Бринелю), Очевидно, это объясняется тем, что многие вопросы теоретического обоснования принятых методов измерения твердости еще не решены.

3.2.5. Сопоставление чисел твердости между собой

При сопоставлении значений твердости, полученных разными методами, между собой необходимо помнить, что приводимые в литературных источниках таблицы или зависимости для такого сопоставительного перевода являются чисто эмпирическими.

Физический смысл такой перевод может иметь только для твердостей по Бринеллю и по Виккерсу, так как там используются размерные значения твердостей. В твердости по Роквеллу числа твердости безразмерные и сопоставление с остальными числами может быть только экспериментальным.

3.2.6. Микротвердость

Метод измерения микротвердости регламентирован ГОСТ 9450. Определение микротвердости (твердости в микроскопически малых объемах) проводят при исследовании отдельных структурных составляющих сплавов, тонких покрытий, а также при измерении твердости мелких деталей, тонкой проволоки или ленты, тонких поверхностных слоев, покрытий и т.д.

Главное его назначение – оценка твердости отдельных фаз или структурных составляющих сплавов, а также разница в твердости разных участков этих составляющих.

Для изучения микротвердости выполняют либо продольный, либо поперечный шлифы детали с последующим протравливанием для выявления микроструктуры. Исследования микротвердости широко распространены в авиастроении для прогнозирования остаточного ресурса изделия.

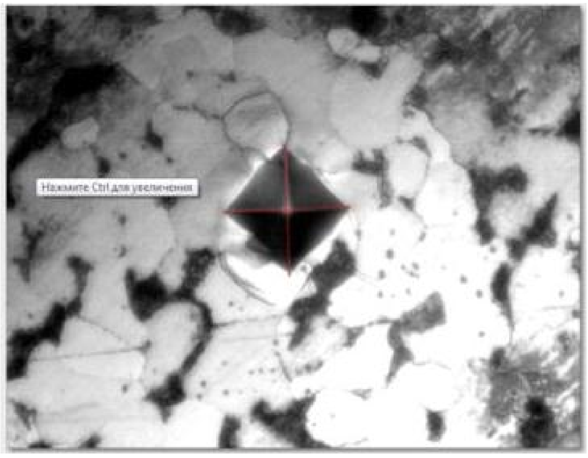

Рисунок 23. Отпечаток пирамиды при испытаниях на микротвердость

В качестве инденторов используют алмазные наконечники разных форм и размеров в зависимости от назначения испытании микротвердости. Основным и наиболее распространенным наконечником является четырехгранная алмазная пирамида с квадратным основанием (по форме подобна индентору, применяющемуся при определении твердости по Виккерсу).

В случае изучения микротвердости в испытываемую поверхность вдавливают индентор под нагрузкой 0.05..5 Н. Приборы для измерения микротвердости объединены в одном блоке с оптическим микроскопом в связи с малостью отпечатка.

Микротвердость измеряют путем вдавливания в образец (изделие) алмазного индентора под действием статической нагрузки P н течение определенного времени выдержки t. Число твердости определяют (как и по Виккерсу) делением приложенной нагрузки в *Н* или *кгс* на условную площадь боковой поверхности полученного отпечатка в *мм*^{2}. Практически микротвердость определяют по стандартным таблицам.

Число микротвердости обозначают цифрами, характеризующими величину твердости со стоящим перед ними символом Н с указанием индекса формы наконечника, например, Н□ = 3000.

Допускается указывать после индекса формы наконечника величину прилагаемой нагрузки, например: H□ 0,196 = 3000 - число микротвердости 3000 *Н/мм*^{2}, полученное при испытании с четырехгранной пирамидой при нагрузке 0,196 Н.

Размерность микротвердости (*Н/мм*^{2} или *кгс/мм*^{2}) обычно не указывают. Если микротвердость определяли по методу невосстановленного отпечатка, то к индексу формы наконечника добавляют букву h (H□h).

3.2.7. Нанотвердость

Среди наиболее часто используемых видов механических испытаний микротвердость, а в последнее время и нанотвердость остаются практически единственно возможными характеристиками оценки механических свойств материала в микро- и нанообъеме.

Метод наноиндентирования приобрел большую популярность в последние годы и, прежде всего благодаря отсутствию жестких требований к образцу и окружающей среде.

Сущность этого метода состоит в автоматическом приложении малых усилий к индентору (порядка микроньютона) и непрерывной регистрации зависимости силы сопротивления P от глубины вдавливания $|\delta|$ (измеряемой в нанометрах).

В качестве индентора может применяться трехгранная алмазная пирамида Берковича, четырехгранная пирамида Виккерса, алмазный конус, а также индентор сферической формы.

Обработка диаграмм вдавливания (Рисунок 19), полученных при наноиндентировании, дает возможность определять сопротивление упругопластическому локальному деформированию в наноконтакте. Отношение приложенной нагрузки P к площади поверхности пластического контакта S характеризует нанотвердость при упругопластическом контакте.

3.2.8. Определение абсолютного значения предела текучести материла при сжатии по результатам измерения макро-, микро-, и нанотвердости методом статического вдавливания инденторов нормально исследуемой поверхности

По широте применения испытания на твердость, особенно при комнатной температуре, успешно конкурируют с испытаниями на статическое растяжение. Это объясняется простотой, высокой производительностью, отсутствием разрушения образца, возможностью оценки свойств отдельных структурных составляющих и тонких слоев на малой площади [31].

При определении твердости всеми методами (кроме микротвердости) измеряют интегральное значение твердости материала (усредненное для всех структурных составляющих). Поэтому получающийся после снятия нагрузки отпечаток должен быть по размеру значительно больше размеров зерен и других структурных составляющих тестируемого материала [27, 31].

В связи с широчайшим распространением испытаний на твердость значительный интерес представляет установление связи между размерными числами твердости и механическими характеристиками материала, получаемых на образцах при их растяжении/сжатии.

Первой значительной теоретической работой в этом направлении было исследование Ишлинского А.Ю. [32], посвященное моделированию измерения твердости в рамках жесткого идеально-пластического тела. Полученная им константа пересчета твердости по Бринеллю в предел текучести при растяжении более чем на 50 лет определила направление исследований в этой области не только у нас, но и за рубежом. Достаточно вспомнить работу Шилда Р.Т. [33], изданную им более чем на 10 лет позже, работы Ишлинского А.Ю. и являющуюся практически ее переводом на английский язык, дополненным Шилдом Р.Т. рассмотрением распределением скоростей деформаций.

К сожалению, предложенное Ишлинским А.Ю. значение теоретической константы позже не подтвердилось, и это породило некоторую неуверенность у инженеров технологов в возможности теоретического прогнозирования пересчетов размерных чисел твердости в предел текучести. [27].

Однако на самом деле возможность теоретически обоснованного перевода значений твердости в значение предела текучести существует и этому посвящена данный раздел монографии.

В инженерии известно правило: «Чем проще система, тем надежнее ее работа». В этом смысле, очевидно, что наиболее простым подходом в определении связи твердости и предела текучести материала при сжатии может служить простейшая стержневая модель деформируемого покрытия типа основания Винклера, но учитывающая возможность пластических деформаций стержней [6, 34].

Необходимо отдельно обратить внимание на то, что в настоящее время практически для всех материалов используется гипотеза о равенстве пределов текучести при растяжении и при сжатии. Неточность этой гипотезы и будет определять возможную экспериментальную неточность связи твердости с пределом текучести при растяжении, но если отбросить гипотезу о симметрии диаграммы растяжения/сжатия, то в данном параграфе теоретически установлена и полностью обоснована только связь твердости и предела текучести при сжатии.

3.2.8.1. Твердость по Мейеру при вдавливании параболоида вращения

Принимая во внимание результаты (27), (28), (58)-(61) (Рисунок 17), можно получить, что [35]:

$$\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| = E \cdot \frac{a^2 - a_{пласт}^{\ 2}}{2 \cdot R \cdot h} \ \ (a > a_{пласт}). \qquad (113)$$

Используя (62), и (113) в качестве замены в промежуточных вычислениях, вычислим величину силы, приложенную к параболическому индентору [35]:

$$P = -2\pi \int_0^a \sigma_z^{\ *}(r,0) \cdot r dr =$$

$$= \pi\left(\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot a_{пласт}^{\ 2} + \frac{E}{4 \cdot R \cdot h} \cdot \left(a^4 - 2a^2 \cdot a_{пласт}^{\ 2} + a_{пласт}^{\ 4}\right)\right) =$$

$$= \pi \cdot \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot a_{пласт}^{\ 2} + E \frac{a^2 - a_{пласт}^{\ 2}}{2 \cdot R \cdot h} \cdot \pi \cdot \frac{\left(a^2 - a_{пласт}^{\ 2}\right)}{2} = \qquad (114)$$

$$= \pi \cdot \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot a_{пласт}^{\ 2} + \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot \pi \cdot \frac{\left(a^2 - a_{пласт}^{\ 2}\right)}{2} =$$

$$= \pi \cdot \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot a_{пласт}^{\ 2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a_{пласт}^{\ 2}} - 1\right)\right).$$

Поскольку a в (114) является радиусом контакта, с учетом упругих деформаций покрытия, а $|\delta|$ - это абсолютное значение полной глубины вдавливания индентора в покрытие, то они связанны формулой (28). Подставляя (28) в (114) получаем [35]:

$$P = \pi \cdot \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot a_{пласт}^{\ 2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2 \cdot R \cdot |\delta|}{a_{пласт}^{\ 2}} - 1\right)\right). \qquad (115)$$

Учитывая, что твердость по Мейеру HM в данном случае определяется как $HM = P / \left(\pi \cdot a_{пласт}^{\ 2}\right)$, можно установить с помощью (115), что [35]:

$$HM = \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2 \cdot R \cdot |\delta|}{a_{пласт}^{\ 2}} - 1\right)\right). \qquad (116)$$

Если предел текучести продолжает существенно возрастать при увеличении абсолютной величины глубины вдавливания $|\delta|$, то исследователь имеет дело не с упруго-идеально-пластичным материалом, а с упрочняющимся.

Очевидно, что если выполнено неравенство $a_{пласт} > 0.92 \cdot a = 0.92 \cdot \sqrt{2 \cdot R \cdot |\delta|}$, обеспечивающее близость полного радиуса области контакта a и радиуса отпечатка $a_{пласт}$, то с достаточной точностью можно считать, что твердость по Мейеру HM является абсолютным значением предела текучести при сжатии $\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|$ [35].

3.2.8.2. Вдавливание конуса

Принимая во внимание результаты (31), (32), (67)-(70), можно получить, что [35]:

$$\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| = E \cdot \frac{tg(\alpha) \cdot (a - a_{пласт})}{h} \quad (a > a_{пласт}). \tag{117}$$

Подставляя (117) в уравнение равновесия (71), получаем уравнение, связывающее радиус a области контакта с действующей нагрузкой P, при условии существования круга пластических деформаций с радиусом $a_{пласт}$ [35]:

$$\begin{gathered}
P = -2\pi \int_0^a \sigma_z^{*}(r,0) \cdot r dr = \\
= \pi \left(\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot a_{пласт}^2 + \frac{E}{h} \cdot tg(\alpha) \cdot \left(\frac{a^3}{3} - a \cdot a_{пласт}^2 + \frac{2 \cdot a_{пласт}^3}{3} \right) \right) = \\
= \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot \pi \cdot a_{пласт}^2 + \\
+ E \cdot \frac{tg(\alpha) \cdot (a - a_{пласт})}{h} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot (a - a_{пласт}) \cdot (a + 2a_{пласт}) = \\
= \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot \pi \cdot a_{пласт}^2 + \\
+ \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot \pi \cdot a_{пласт}^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{a_{пласт}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{a}{a_{пласт}} + 2 \right) = \\
= \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot \pi \cdot a_{пласт}^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{a_{пласт}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{a}{a_{пласт}} + 2 \right) \right).
\end{gathered} \tag{118}$$

Используя (32) и выполняя подстановку $a = |\delta| / tg(\alpha)$ в (118), можно получить [35]:

$$P = \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot \pi \cdot a_{пласт}{}^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{|\delta|}{tg(\alpha) \cdot a_{пласт}} - 1\right) \cdot \left(\frac{|\delta|}{tg(\alpha) \cdot a_{пласт}} + 2\right)\right).$$

Переходя к твердости по Мейеру, можно вывести, что для конического индентора [35]:

$$HM = \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{|\delta|}{tg(\alpha) \cdot a_{пласт}} - 1\right) \cdot \left(\frac{|\delta|}{tg(\alpha) \cdot a_{пласт}} + 2\right)\right). \quad (119)$$

Как и в случае с вдавливанием шара, если выполнено неравенство $a_{пласт} > 0.92 \cdot a = 0.92 \cdot |\delta| / tg(\alpha)$, то с достаточной точностью твердость по Мейеру является пределом текучести материала при сжатии и в случае конического индентора [35].

3.2.8.3. Вдавливание пирамидальных инденторов

Рассмотрим случай, когда индентером является правильная пирамида с m гранями, имеющая в качестве боковых $m-1$ равных треугольных граней (Рисунок 13-Рисунок 15) [6, 35]. Принимая во внимание результаты (36)-(38), (76)-(79), можно получить, что [35]:

$$\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| = E \cdot \frac{tg(\alpha) \cdot (a - a_{пласт})}{h} \quad (a > a_{пласт}). \qquad (120)$$

Отметим, что для пирамиды используется иное уравнение равновесия, чем для конуса. Для многогранной пирамиды это будет уравнение, которое с учетом (80) и (120) можно записать в виде [35]:

$$P = -2 \cdot (m-1) \cdot tg(\pi/(m-1)) \int_0^a \Im\left(\frac{tg(\alpha) \cdot (x-a)}{h}\right) \cdot x dx =$$
$$= (m-1) \cdot tg(\pi/(m-1)) \times$$
$$\times \left(\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right| \cdot a_{пласт}{}^2 + \frac{E}{h} \cdot tg(\alpha) \cdot \left(\frac{a^3}{3} - a \cdot a_{пласт}{}^2 + \frac{2 \cdot a_{пласт}{}^3}{3}\right)\right) =$$

$$=\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\cdot S_{пласт}+\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\cdot S_{пласт}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a}{a_{пласт}}-1\right)\cdot\left(\frac{a}{a_{пласт}}+2\right)=$$

$$=\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\cdot S_{пласт}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a}{a_{пласт}}-1\right)\cdot\left(\frac{a}{a_{пласт}}+2\right)\right). \qquad (121)$$

где площадь многогранного пластического отпечатка определяется выражением $S_{пласт}=(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))\cdot a_{пласт}{}^2$ [35].

Выполняя в (121) подстановку, вместо $a=|\delta|/tg(\alpha)$ (37) можно получить [35]:

$$P=\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\cdot S_{пласт}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{|\delta|}{tg(\alpha)\cdot a_{пласт}}-1\right)\cdot\left(\frac{|\delta|}{tg(\alpha)\cdot a_{пласт}}+2\right)\right).$$

Далее при переходе к твердости по Мейеру можно вывести, что [35]:

$$HM=\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\cdot\left(1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{|\delta|}{tg(\alpha)\cdot a_{пласт}}-1\right)\cdot\left(\frac{|\delta|}{tg(\alpha)\cdot a_{пласт}}+2\right)\right). \qquad (122)$$

Как и во всех ранее рассмотренных случаях, если выполнено неравенство для вписанных кругов в многогранные области контакта $a_{пласт}>0.92\cdot a=0.92\cdot|\delta|/tg(\alpha)$, то с достаточной точностью твердость по Мейеру является пределом текучести материала при сжатии и в случае пирамидального индентора [35].

3.2.8.4. Выводы по экспериментальному определению абсолютного значения предела текучести материла при сжатии по результатам измерения макро-, микро-, и нанотвердости методом статического вдавливания инденторов нормально исследуемой поверхности

С помощью простейшей стержневой модели деформируемого покрытия, являющейся обобщением основания Винклера на упруго-идеально-пластический случай поведения материала покрытия, установлена простейшая связь между твердостью по Мейеру и абсолютной величиной предела текучести материала при сжатии [35].

Установлено, что подобную связь можно получить для всех типов инденторов, используемых для проведения испытаний на твердость методом статического вдавливания [35].

Как показали исследования, при использовании в качестве уравнения состояния билинейной диаграммы Прандтля, соответствующей упруго-идеально-пластическому материалу, необходимость в точном определении высоты слоя модели полностью отпадает [35].

Установлено, что если линейный размер пластического отпечатка совпадает на 90 процентов с линейным размером полной области контакта с учетом упругих деформаций, то твердость по Мейеру и является абсолютным значением предела текучести при сжатии для исследуемого материала [35].

Установлено, что если отбросить гипотезу симметричности диаграмм растяжения/сжатия и, соответственно, равенства абсолютных значений обоих пределов текучести, то в данном разделе теоретически установлена и полностью обоснована, только связь твердости и предела текучести при сжатии [35].

3.2.9. Изменение твердости по глубине

Для изучения изменения структуры материала по глубине изготавливаются поперечные шлифы (Рисунок 24) либо образца, либо исследуемой детали.

Обычно шлифы выполняют для исследования микроструктуры материала под действием различных технологических и/или эксплуатационных факторов, но на шлифах также можно проводить изучение изменения твердости по глубине, попросту проводя индентирование поверхности шлифа.

Безусловно, это исследование (твердости поперечного шлифа) носит больше качественный характер, чем количественный, т.к. механообработка при выполнении шлифа оказывает сильное влияние на механические параметры его поверхности.

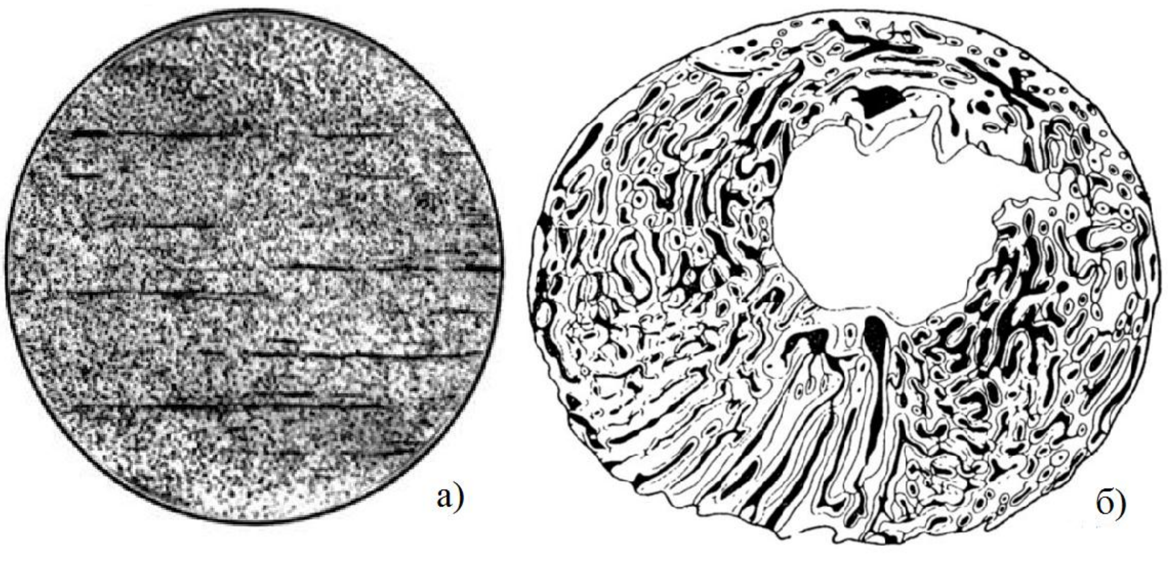

Рисунок 24. Поперечный шлиф: а) проволоки б) кости

3.3. Влияние отклонений формы индентора от идеальной на результаты экспериментальных измерений диаграмм вдавливания или твердости поверхности

Как уже отмечалось в настоящее время измерение твердости или диаграмм вдавливания на разных масштабах поверхности является одним из наиболее распространенных типов испытаний [36, 37]. Если твердость поверхности (на макроуровне) является средством контроля качества поверхности в гражданском машиностроении [38, 39], то испытания на микротвердость распространены только в авиа- и приборостроении. Однако в большинстве случаев данный вид измерений свойств поверхности, а тем более измерение нанотвердости и соответствующих диаграмм вдавливания, относятся к научным исследованиям [40].

Предыдущие результаты решения поставленных обратных задач получены на основе предположения об идеальной форме внедряемого индентора. Между тем это не так. Вопрос состоит в том, какими должны быть геометрические соотношения параметров области контакта и размеров технологических отклонений формы для того, чтобы минимизировать влияние этих отклонений на результаты измерений диаграмм вдавливания и расчетов по ним.

Таким образом, одним из основных метрологических вопросов является определение условий воспроизведения с достаточной точностью измерений твердости на разных масштабах. Для макротвердости существуют ГОСТы, регулирующие как шероховатость образца, так и допустимые отклонения геометрии индентора для обеспечения надежного определения твердости поверхности на макроуровне [29, 30].

Однако, в ГОСТ-ах для определения микротвердости точность изготовления индентора уже не обсуждается, а лишь упоминается о «стандартном инденторе», микрогеометрия которого удовлетворяет ГОСТ-ам для макротвердости.

В связи с тем, что считается, что испытания на микротвердость все же воспроизводятся с должной точностью, то, вероятно, требования по точности к инденторам, выставленным в ГОСТах для макроиспытаний, в достаточной степени гарантируют воспроизводство данного типа измерений.

Хотя систематических исследований в этом направлении никогда не проводилось, одно известно точно, что воспроизведение как микроизмерений, так и наноизмерений твердости на разном оборудовании с использованием различных инденторов одной и той же номинальной формы является весьма сложной задачей.

В научных работах, посвященных исследованию микро- и нанотвердости, обсуждается влияние на процесс испытаний практически всего (температуры окружающей среды, наличие загрязнений на поверхности и пр.) [41], но не обсуждается самый главный вопрос – каким образом исследователь может гарантировать, что микро- и нано-отклонения формы его индентора не оказали основного влияния на процесс измерений.

Всем известно, что для макроиспытаний данного вида допускаемые отклонения геометрии индентора для обеспечения необходимой точности должны быть существенно меньше, чем глубина вдавливания индентора, чтобы не оказать существенного влияния на результат. При этом возникает естественный вопрос, почему это простое геометрическое правило не применяется при измерениях на микроуровне, а тем более на наноуровне.

Для обеспечения требуемых геометрических параметров надежности измерений необходимо до вдавливания индентора провести его обмер и установить микро- и нано-геометрические отклонения его поверхности от номинальной. Тогда сразу будет понятно, что при вдавливании данного индентора на глубину меньшую, чем 10-ти кратно увеличенное микрогеометрическое отклонения формы индентора, будут получены заведомо ложные результаты.

Это, очевидно, следует, например, из сравнения объемов пластической деформации материала под идеальным и реальным индентерами, которые с заданной точностью должны совпадать.

Совершенно аналогично с нанотвердостью – микрогеомерия индентора должна быть совершенно идеальна, а максимальные наноотклонения геометрии индентора определят минимальную глубину надежных измерений нанотвердости. Соответственно, если измерения выполнялись на меньшей глубине, то они просто не могут быть признаны достоверными.

Предлагаемое правило определения достоверных и недостоверных измерений микро и нанотвердости основано на одном общеизвестном правиле технологии: для того, чтобы с необходимой точностью изготовить деталь любого размера и формы, инструмент и средства его позиционирования относительно заготовки должны быть гораздо точнее.

Таким образом, основной проблемой в верификации результатов исследований на микротвердость и нанотвердость является отсутствие на текущий момент технологии контроля микроотклонения и наноотклонения поверхности индентора от номинальной. Очевидно, что существующие инструментальные средства, такие как профилометры-профилографы непригодны для подобного рода измерений. Контроль геометрии поверхности инденторов с помощью оптических и электронных микроскопов также крайне затруднен.

Значительное число научных экспериментальных исследований микро- и нанотвердости невозможно воспринимать как достоверное отражение действительности, поскольку внутренняя погрешность измерительной системы (в частности, отклонение формы индентора от номинальной) во многих случаях больше измеряемых величин, а получаемые диаграммы вдавливания на наноуровне исследований твердости поверхности с существенными геометрическим отклонениями от «стандартной» формы проще объяснить значительными геометрическими отклонениями как индентора, так и образца, чем реальным периодическим изменением твердости по глубине [42].

В данном разделе на основе простейшей модели деформируемого покрытия (основания Винклера) демонстрируется, насколько большое влияние может оказать отклонение геометрии индентора при проведении макро- и наноизмерений твердости.

3.3.1. Основные предположения

Как и ранее все инденторы в данном исследовании являются недеформируемым. Абсолютно ровное покрытие конечной высоты располагается на недеформируемой и ровной подстилающей поверхности.

Начало координат (цилиндрической - для осесимметричных инденторов и декартовой - для многогранных инденторов) располагается в точке касания индентора с поверхностью покрытия. Все заключения в данном разделе не привязаны к конкретным физическим уравнениям состояния и основаны на геометрической интерпретации основных параметров перемещений индентора, входящих в стержневую модель покрытия.

3.3.2. Вдавливание сферических инденторов с отклонениями формы

Пусть r - радиальная координата в цилиндрической системе координат с осью $0z$, в качестве оси симметрии решаемой контактной задачи для шара и слоя. Известно [1, 34], что шар радиуса R при малых номинальных радиусах пятна контакта a $(a << R)$ заменяется с достаточной точностью параболоидом вращения с границей $z = r^2 / (2 \cdot R)$, касающимся в начале координат абсолютно ровной поверхности испытуемого слоя.

Допустим, что шар с номинальным радиусом $R_{номин}$ будет иметь простейшее геометрическое отклонение по радиусу A_0. Таким образом, реальный шар будет иметь радиус $R_{номин} \pm A_0$. В этом случае краевые условия по перемещениям $w(r,0)$ вдоль оси $0z$ в области контакта будут иметь вид (27), (28) [34]:

$$w(r,0) = \begin{cases} \dfrac{r^2}{2 \cdot (R_{номин} \pm A_0)} + \delta, r \in [0,a), \\ 0, r \notin [0,a), \end{cases}$$

где δ - реальная глубина вдавливания параболоида вращения ($\delta < 0$, т.к. вдавливание происходит в отрицательном направлении оси $0z$):

$$\delta = -\frac{a^2}{2\cdot\left(R_{номин} \pm A_0\right)} = -\frac{a^2}{2\cdot R_{номин}\cdot\left(1 \pm \frac{A_0}{R_{номин}}\right)} \approx$$

$$\approx -\frac{a^2}{2\cdot R_{номин}}\cdot\left(1 \mp \frac{A_0}{R_{номин}}\right) = \delta_{номин}\cdot\left(1 \mp \frac{A_0}{R_{номин}}\right),$$

где $\delta_{номин} = -a^2 / \left(2\cdot R_{номин}\right)$.

Таким образом, в случае простейшей погрешности калибровки по радиусу получаем неверный вывод о том, что для сферического индентора погрешность определения номинальной глубины вдавливания $\delta_{номин}$ по реальной измеренной глубине δ всегда постоянна и определяется отношением $\frac{A_0}{R_{номин}}$ и не зависит больше ни от каких геометрических факторов.

Однако известно, что погрешность микро- или наногеометрии в виде простого отклонения радиуса никогда не реализуется на практике [5, 43]. Поэтому рассмотрим другой более реалистичный случай. Пусть индентор имеет регулярное косинусоидальное отклонение номинальной геометрии вида [5, 43]:

$$A\cdot\left(1-\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot a\cos\left(r/R_{номин}\right)\right)\right), \tag{123}$$

где $0 < A << R_{номин}$ - амплитуда волнистости, k - целочисленный параметр, определяющий число полуволн микроотклонения геометрии на половине длины меридиана номинального шарового индентора или отношение длины меридиана номинального шарового индентор к шагу микронеровности.

Вспоминая о том, что $0 < r \le a << R_{номин}$, перемещения в области контакта $w(r,0)$ вдоль оси $0z$ будут определяться выражением аналогичным (27), только учитывающим (123) [44]:

$$w(r,0) = \begin{cases} \frac{r^2}{2\cdot R_{номин}} + A\cdot\left(1-\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot r/R_{номин}\right)\right) + \delta, r\in[0,a), \\ 0, r\notin[0,a). \end{cases}$$

Совершенно аналогично (28), для модели Винклера получаем [34]:

$$\delta = \delta_{номин} - A\cdot\left(1-\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot a/R_{номин}\right)\right), \tag{124}$$

Из простейшей перегруппировки из (124) для абсолютных значений номинального $|\delta_{номин}|$ и реального $|\delta|$ вдавливаний можно получить [44]:

$$\begin{aligned} |\delta_{номин}| &= |\delta| - A \cdot \left(1 - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2} \cdot a/R_{номин}\right)\right) = \\ &= |\delta| \cdot \left(1 - \frac{A}{|\delta|} \cdot \left(1 - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2} \cdot a/R_{номин}\right)\right)\right). \end{aligned} \tag{125}$$

Учитывая, что на микро- и наноуровне для реальных сферических инденторов параметр k может принимать значения до 10^3 и более (для шага шероховатости и субшероховатости), для реальных сфер получаем, что для признания измерений надежными необходимо и достаточно, чтобы $|\delta_{номин}| \approx |\delta|$, т.е. с учетом (125), очевидно, что отношение $A/|\delta|$ должно быть минимально возможным.

Таким образом, для сферических инденторов подтверждена обоснованность предлагаемого геометрического критерия надежности измерения твердости или записи диаграмм вдавливания инденторов, а именно требование того, чтобы глубины вдавливания индентора превосходили амплитуду измеренных отклонений поверхности индентора от номинальной минимум в 10 раз.

3.3.3. Конический осесимметричный индентор с отклонениями микрогеометрии поверхности

Пятно контакта в этом случае так же имеет номинальный радиус a [34]. На первом этапе предполагается, что конический индентор имеет отклонения только образующей по углу α, измеряемому от поверхности покрытия. В этом случае краевые условия по перемещениям в области контакта записываются в виде аналогичном (31) [34, 44]:

$$w(r,0) = \begin{cases} tg(\alpha \pm \chi) \cdot r + \delta, r \in [0,a), \\ 0, r \notin [0,a), \end{cases}$$

где χ - отклонения по углу ($\chi << \alpha$), причем угол χ настолько мал, что тригонометрические функции от этого угла будут с достаточной точностью линеаризуемые. Тогда, как и раньше, для величины вдавливания можно получить формулу аналогичную (32) [23]:

$$\delta = -tg(\alpha \pm \chi) \cdot a = -\frac{tg(\alpha) \pm tg(\chi)}{1 \mp tg(\alpha) \cdot tg(\chi)} \cdot a \approx -tg(\alpha) \cdot a \frac{1 \pm \dfrac{\chi}{tg(\alpha)}}{1 \mp tg(\alpha) \cdot \chi} =$$

$$= \delta_{номин} \cdot \frac{1 \pm \dfrac{\chi}{tg(\alpha)}}{1 \mp tg(\alpha) \cdot \chi}.$$

Таким образом, как и в случае с простейшей погрешностью по радиусу у шара, в случае конуса получаем, что определение номинальной глубины вдавливания $\delta_{номин}$ идеального индентора по практически полученному значению δ для всех глубин одинаково. Очевидно, это также является серьезным заблуждением, поскольку простейшее отклонение по углу при изготовлении конического индентора получить просто невозможно, т.к. на поверхности всегда будет присутствовать некоторая, хотя бы периодическая, микрогеометрия [5, 43].

Пусть длина образующей конуса равна L. Как и в предыдущем случае, будем рассматривать осесимметричный индентор с периодическими микро- и наноотклонениями образующей от номинальной прямой линии в виде [44]:

$$A \cdot \left(1 - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{L \cdot \arccos(\alpha)} \cdot r\right)\right). \tag{126}$$

В этом случае перемещения в области контакта определяются уравнением:

$$w(r,0) = \begin{cases} tg(\alpha) \cdot r + A \cdot \left(1 - \cos\left(k \cdot \dfrac{\pi}{L \cdot \arccos(\alpha)} \cdot r\right)\right) + \delta, r \in [0,a), \\ 0, r \notin [0,a). \end{cases}$$

Совершенно аналогично предыдущему случаю шара с отклонением формы в виде (124), получаем [44]:

$$\delta = \delta_{номин} - A \cdot \left(1 - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{L \cdot \arccos(\alpha)} \cdot a\right)\right), \tag{127}$$

где

$$\delta_{номин} = -tg(\alpha) \cdot a.$$

Как и ранее для шара, для абсолютных значений номинального $|\delta_{номин}|$ и реального $|\delta|$ вдавливаний конуса из (127) можно получить [44]:

$$\left|\delta_{номин}\right| = |\delta| - A \cdot \left(1 - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{L \cdot \arccos(\alpha)} \cdot a\right)\right) =$$
$$= |\delta| \cdot \left(1 - \frac{A}{|\delta|} \cdot \left(1 - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{L \cdot \arccos(\alpha)} \cdot a\right)\right)\right). \qquad (128)$$

Из (128) следует вывод о том, что при наличии периодических микроотклонений поверхности точность определения номинальной глубины вдавливания $\delta_{номин}$ (для конуса идеальной формы) по измеренной δ (для конуса с отклонениями) зависит от отношения амплитуды волнистости к глубине вдавливания.

Таким образом, учитывая возможные порядки k (вплоть до 10^3 и выше для субшероховатости [5, 43]) для конических инденторов подтверждена обоснованность предлагаемого критерия надежности измерения твердости или записи диаграмм вдавливания инденторов, т.е. все перечисленные измерения можно принять надежными только для глубин вдавливания конического индентора, превосходящих амплитуду периодического отклонения поверхности индентора минимум в 10 раз.

3.3.4. Многогранные инденторы в виде правильных пирамид, грани которых имеют одинаковую волнистость

Как известно решения контактных задач для многогранных инденторов и основания Винклера идентичны формулам, получаемым для конического индентора с точностью до замены радиальной координаты r (из цилиндрической системы координат) на координату x (в декартовой системе координат) при соответствующей ориентации правильной пирамиды (36)-(40) [6, 34, 44]. Поэтому можно, не повторяя уже приведенные формулы для конуса, утверждать, что простейшие отклонения всех граней пирамиды по углу приведут к неверному утверждению, об одинаковой ошибке измерений твердости во всем диапазоне глубин измерений твердости и записи диаграммы вдавливания инденторов.

Однако, введение простейшего периодического отклонения, соответствующего регулярному микро- и нанорельефу, аналогичному (126) на всех гранях, приведет к выводу о том, что точность определения номинального перемещения идеального индентора также будет связана с отношением амплитуды волнистости к глубине вдавливания.

3.3.5. К вопросу о надежности измерений при наноиндентировании поверхностей «тупым» индентором

Очевидно, что изготовить идеальный конический или многогранный индентор в настоящее время просто не возможно. Наибольшую технологическую сложность представляет вершина индентора, которая, очевидно, при изготовлении никогда не будет иметь одного атома. У вершины реального конического или многогранного индентора всегда будет отсутствовать группа атомов, сцепление между которыми уже достаточно велико, чтобы технологическая операция при изготовлении не отрывала бы их от поверхности индентора [44].

Поэтому в современных научных исследованиях для проведения индентирования на наноуровне используются конические или многогранные инденторы или зонды, имеющие некоторые несовершенства, как боковых поверхностей, так и в вершине [44].

Подавляющим числом исследователей предполагается, что вершина индентора имеет сферическую поверхность. Поскольку наноиндентирование проводится на глубину сопоставимую с радиусом скругления острия (вершины) индентора, для оценки достоверности измерений вполне подходит изложенная методика определения достоверности для шара, изложенная в начале данного раздела: наноизмерения твердости достоверны тогда и только тогда, когда амплитуда отклонений поверхности от номинального шара меньше на порядок чем глубина вдавливания индентора [44].

Однако основной проблемой является то, что несовершенство вершины индентора при наноизмерениях далеко не всегда даже напоминает шар. И, зачастую, просто нет возможности определить номинальную геометрию вершины, а также амплитуду от нее отклонений (координаты «затупляющей» поверхности вершины), что делает просто невозможным достоверное измерений нанотвердости [44].

3.3.6. К вопросу об участке надежности значений измеренной диаграммы вдавливания индентора в покрытие

Как уже отметалось выше, не вся записанная диаграмма вдавливания индентора является одинаково достоверной в смысле обсуждаемого критерия надежности [44].

Начальный участок диаграммы вдавливания всегда недостоверен. Достоверный участок диаграммы начинается с глубины вдавливания индентора, превосходящей на порядок микро- и наноотклонения поверхности индентора.

Если обобщить формально все примеры отклонений формы индентора от номинальной, то становиться очевидно, что при заданных характерных размерах области контакта $\bar{S}$ для перемещений в области контакта индентора неидеальной формы $w^*(x,y,0)$ (в отличие от перемещений индентора с идеальной формой $w(x,y,0)$ (6)) выполнено условие по перемещениям:

$$w^*(x,y,0)=\begin{cases} f(x,y)+\Delta f(x,y)+\delta,(x,y)\in\bar{S}, \\ 0,(x,y)\notin\bar{S}, \end{cases} \qquad (129)$$

где $\Delta f(x,y)$ - отклонение формы реального индентора от идеальной $f(x,y)$, δ - как и ранее глубина максимального вдавливания штампа.

Используя очевидную перегруппировку, краевое условие можно переписать в виде:

$$w^*(x,y,0)=\begin{cases} f(x,y)+\delta\cdot\left(1+\dfrac{\Delta f(x,y)}{\delta}\right),(x,y)\in\overline{S}, \\ 0,(x,y)\notin\overline{S}, \end{cases}$$

Рассмотрим норму отклонений формы $\|\Delta f(x,y)\|$ относительно абсолютной величины глубины вдавливания $|\delta|$ в области контакта $\overline{S}$:

$$\left.\frac{\|\Delta f(x,y)\|}{|\delta|}\right|_{\overline{S}}.$$

Исходя из решенных примеров и общей логики, становиться понятно, что если потребовать выполнения неравенства $\dfrac{\|\Delta f(x,y)\|}{|\delta|}<<1$ то, с очевидностью, из этого будет следовать, что при глубоком вдавливании (относительно нормы неровностей) реальный неровный индентор может моделироваться идеальной формой $f(x,y)$. При этом отклонения $\Delta f(x,y)$ от идеальной формы $f(x,y)$ не окажут существенного влияния на значения перемещений, т.е., учитывая (6) и (129) $w(x,y,0)\approx w^*(x,y,0)$ в области контакта. Следовательно, отклонения формы не окажут существенного влияния также на значение полученной силы $P(\delta)$ определяемой заданным вдавливанием δ.

Т.е. при известных отклонениях от идеальной формы $\Delta f(x,y)$ поверхности индентора необходимо рассматривать экспериментальные данные, полученные на глубинах δ удовлетворяющих неравенству:

$$\|\delta\|\geq\Lambda\cdot\|\Delta f(x,y)\|,$$

где $\Lambda\geq 10$ - некоторое вещественное число.

Только в этом случае результаты, полученные для идеальной формы индентора, не будут зависеть от реальных отклонений его поверхности от идеальной.

ГЛАВА 4. РЕШЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ РЕОЛОГИЧЕСКИ АКТИВНЫХ ПОКРЫТИЙ ПОСТОЯННОЙ ВЫСОТЫ

В настоящее время большое внимание уделяется деформационным свойствам полимерных и биологических материалов вследствие их широкого использования и своеобразного (реологически активного) поведения в технических изделиях или прикладных исследованиях.

Предметом реологии является описание механических свойств разнообразных материалов в различных режимах деформирования, когда одновременно может проявляться способность к течению и накоплению необратимых деформаций. Задачей реологии является разработка общих принципов и предположений, исходя из которых можно получить связь между измеряемыми величинами [45].

В отечественной научной литературе также принято использовать термин ползучесть вместо реология, а под реологией за рубежом понимается более широкое понятие, включающее в себя кроме явления ползучести под нагрузкой еще и старение, т.е. изменение свойств во времени под действием внешних условий, но без силового нагружения [46].

Ползучестью материала назван процесс изменения напряжений и деформаций, даже если нагрузки остаются постоянными. Процесс имеет две конкурирующие стороны. Одна сторона – изменение во времени деформаций – называют собственно ползучестью, а другую – изменение во времени напряжений – релаксацией [46].

Ползучесть возникает как при нагружении материалов за пределами упругости (вязкоупругопластичность), так и при нагружения в пределах упругости (вязкоупругость) [46].

Особенностью расчетов на ползучесть является учет фактора времени, которое в обычных расчетах на статическую нагрузку во внимание не принимается [46].

4.1. Строение и свойства полимеров

Одним из самых распространенных видов покрытий, которые встречаются в элементах конструкций деталей машин, являются покрытия на основе полимеров [2].

Полимеры состоят из длинных линейных разветвленных или сшитых молекул, называемых цепными макромолекулами. Макромолекулы включают большое число мономеров, многократно повторяющихся одинаковых звеньев, групп или структурных единиц (Рисунок 25). Число звеньев цепи называется степенью полимеризации, а молекулярная масса полимера определяется произведением степени полимеризации и молекулярной массой звена. Полимерная молекула может быть построена из одинаковых по химическому строению полимеров. Такие полимеры называют гомополимерами. Если макромолекулы содержат несколько типов мономерных звеньев, такие высокомолекулярные вещества называют сополимерами, или смешанными полимерами. Механические свойства полимеров определяются особенностями их строения. С ростом степени полимеризации механическая прочность и вязкость полимеров увеличивается [2].

Именно вязкость является свойством, отвечающим за ползучесть полимеров.

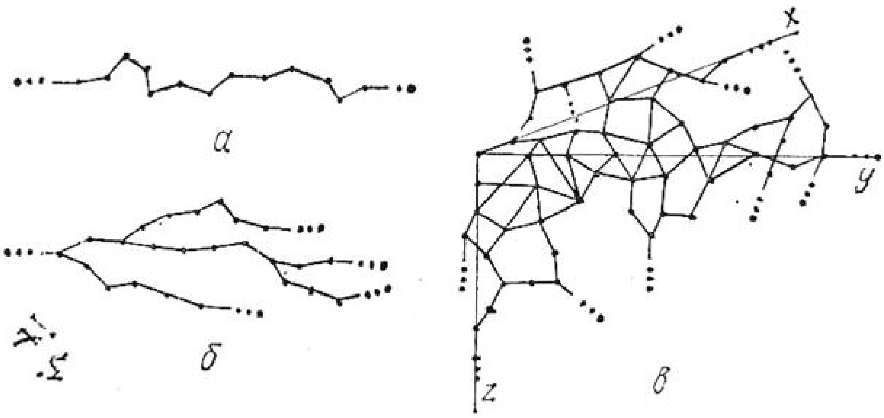

Рисунок 25. Микроструктура полимерных молекул: а) цепная; б) разветвленная; в) сетчатая (объемная)

Линейными называются полимеры, макромолекулы которых представляют длинные цепи. Разветвленный полимер представляет собой длинную цепь (называемую главной, основной цепью валентностей) с боковыми ответвлениями (боковыми цепочками), число которых и длина могут широко варьироваться. Разветвленные и линейные полимеры составляют подкласс, называемый термопластами. Термопласты способны обратимо переходить из вязкотекучего состояния в твердое и наоборот [2].

Сетчатые полимеры построены из длинных цепей, соединенных в трехмерную сетку поперечными химическими связями. К сетчатым полимерам относятся реактопласты. Реактопласты, в отличие от термопластов, при полимеризации переходят в неплавкое и нерастворимое состояние [2].

Полимерные цепи способны изменять свое пространственное распределение атомов и атомных групп в макромолекуле без химических реакций в результате внутримолекулярного теплового движения звеньев или же под влиянием внешних механических сил. Этим явлением определяются вязкоупругие свойства полимеров [2].

Реальные, выпускаемые промышленностью полимеры, полидисперсны, т.е. представляют собой смесь полимергомологов (макромолекул, составленных из полимерных веществ одного химического строения, но отличающихся молекулярной массой) с определенным молекулярно-массовым распределением. Полидисперсность полимеров приводит к тому, что в реальных материалах существует широкий спектр времен релаксации, включающий по мере перехода от низших полимергомологов к высшим, как очень быстрые неравновесные процессы, исчисляемые долями секунды, так и очень медленные [2].

Исследование структуры полимеров показало, что не только в кристаллическом, но и в аморфном состоянии почти всегда образуются отчетливо выраженные упорядоченные надмолекулярные структуры. При деформировании полимера возникают процессы, связанные с взаимным перемещением крупных структурных элементов, превращением в другие виды надмолекулярных образований и их разрушением. В одном и том же объеме полимера одновременно могут сформироваться структуры многих типов [2].

Следует иметь в виду, что относительная роль молекулярных и надмолекулярных структур в формировании определенных физико-механических свойств полимера меняется в зависимости от температурных условий окружающей среды и жесткости молекул. Понижение температуры или гибкости макромолекулы усиливает роль надмолекулярных формирований [2].

В теоретических построениях обычно абстрагируются от тех или других особенностей структуры материалов насколько это позволяют решаемые задачи. Так полимерные и биологические материалы, имеющие очень длинные молекулярные цепи (по сравнению с наименьшим характерным размером изучаемого тела) обычно рассматриваются как сплошные среды. Это позволяет при решении задач оперировать моделями материалов, которые построены в предположении, что величины, характеризующие их свойства или поведение, изменяются по относительно малому объему непрерывно [45]. Это позволяет применить понятия напряжений и деформаций (иногда скоростей деформаций) как характеристики кинематического (квазистатического) состояния материала в деформируемом стержне, как элементе простейшей стержневой модели покрытия конечной высоты на жестком основании.

4.2. Основные геометрические гипотезы простейшей модели деформируемого покрытия постоянной высоты для решения задач ползучести

Как и ранее в обобщении модели Винклера без учета реологических эффектов предполагается, что поверхность покрытия плоская. Это значит, что отклонения поверхности малы в сравнении с глубиной вдавливания индентора. Покрытие лежит на гладком недеформируемом полупространстве (Рисунок 3). Как и ранее предполагается, что покрытие может быть заменено призматическими стержнями с постоянным квадратным сечением *ΔxΔ* в плоскости *X0Y* и высотой *h*. Стержни могут перемещаться только в *Z*-направлении, при этом их напряженно-деформированное состояние является однородным (Рисунок 3) [47].

При таком совпадении начальных геометрических гипотез нет смысла перерисовывать Рисунок 3, т.к. на нем следует только заменить силу постоянной величиной P приложенной к абсолютно жесткому индентору и действующей вертикально вниз вдоль оси *0Z* на силу $P(t)$.

Поскольку индентор является не деформируемым, то уравнение его поверхности при начальном касании покрытия $f(x,y)$ не изменяется, а меняется только глубина вдавливания индентора, поэтому выражение $f(x,y)+\delta$ (Рисунок 3) должно быть заменено на $f(x,y)+\delta(t)$ [47].

Размер *Δ* деформируемых стрежней пренебрежимо мал в сравнении с наименьшим характерным размером область контакта $S(t)$ на плоскости *X0Y* (при $t \in [0,t_0]$, где t_0 - длительность испытаний на ползучесть) (Рисунок 3).

При ползучести предполагается, что деформации происходят так медленно, что задача рассматривается как квазистатическая, т.е. инерционные характеристики призматических стержней не оказывают влияния на характер его деформирования. Рассматривается установившаяся ползучесть стержня [47].

4.3. Краевое условие по перемещениям в случае реологически активного поведения покрытия

В рамках модельных задач механики контактного взаимодействия внедряемое в покрытие тело является недеформируемым, т.е. жестким штампом. Пусть открытая область $S(t) \subset X0Y$ является внутренностью области контакта, т.е. $S(t)=\{(x,y) | \sigma_z(x,y,0,t) \neq 0, t \in [0,t_0]\}$, где $\sigma_z(x,y,0,t)$ - контактные напряжения. Тогда замыкание $\overline{S(t)}$ является областью контакта. Учитывая, что в рамках простейшей модели деформируемого покрытия контактные напряжения $\sigma_z(x,y,0,t) \neq 0$ могут возникнуть только в точке, в которой перемещение в области контакта $w(x,y,0,t) \neq 0$, то внутренность области контакта гораздо проще определить как $S(t)=\{(x,y) | w(x,y,0,t) \neq 0, t \in [0,t_0]\}$ [47].

Пусть уравнение поверхности внедряемого недеформируемого штампа описывается уравнением $f(x,y)$, и точка $(0,0,0)$ является точкой первичного касания штампа и плоскости X0Y [47]. Тогда краевое условие по перемещениям определяется следующим уравнением [47]:

$$w(x, y, 0, t) = \begin{cases} f(x, y) + \delta(t), (x, y) \in \overline{S(t)}, \\ 0, (x, y) \notin \overline{S(t)}. \end{cases} \tag{130}$$

где $\delta(t)$ - глубина максимального вдавливания штампа. Она определяется из геометрических соображений, т.е. на границе области контакта $(x, y) \in \overline{S(t)} \setminus S(t)$ контактные перемещения равны нулю ($w(x, y, 0, t)|_{(x,y) \in \overline{S(t)} \setminus S(t)} = 0$). Принимая во внимание верхнее уравнение (130), окончательно получаем, что для любой достоверно определенной точки с границы области контакта $(x, y) \in \overline{S(t)} \setminus S(t)$ выполнено равенство [47]:

$$\delta(t) = -f(x, y)|_{(x,y) \in \overline{S(t)} \setminus S(t)}. \tag{131}$$

Отметим, что, как и ранее, контактные деформации определяются формулой [47]:

$$\varepsilon_z(x, y, 0, t) = \frac{w(x, y, 0, t)}{h}. \tag{132}$$

4.4. Уравнения равновесия штампа на границе покрытия с учетом временных эффектов

Не смотря на то, что в данном случае рассматривается процесс, растянутый во времени, однако в связи квазистатической формулировкой задачи уравнение равновесия имеет вид полностью аналогичный (11) [47]:

$$P(t) = -\iint\limits_{\overline{S(t)}} \sigma_z(x, y, 0, t) dxdy. \tag{133}$$

4.5. Установившаяся и неустановившаяся ползучести

Для того чтобы отделить различные стадии ползучести и соответственно различать уравнения для их описания необходимо рассмотреть кривую ползучести, построенную для одномерно растягиваемого постоянным напряжением образца [46].

Вид кривых ползучести зависит от напряжения и температуры, при которых испытывается образец. При нагружении нагретого образца деформация быстро возрастает от нуля до некоторой величины *A* (отрезок *0A*, Рисунок 26) [46].

В первой стадии (участок *AB* – неустановившаяся ползучесть, Рисунок 26) скорость деформации ползучести постепенно уменьшается, т.к. в первой стадии преобладает механическое упрочнение, связанное с ростом деформации [46].

Во второй стадии (участок *AC* – установившаяся ползучесть, Рисунок 26) процесс ползучести протекает с постоянной скоростью, которая зависит от напряжения и температуры и при постоянной температуре она будет функцией напряжений [46].

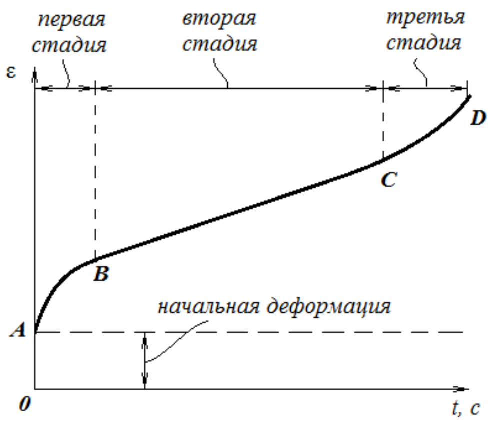

Рисунок 26. Кривая ползучести (координаты время/деформация) [48]

В третьей стадии ползучести (участок *CD*, Рисунок 26) скорость деформации непрерывно возрастает, пока не наступает разрушение. В основном ускорение ползучести связано на этой стадии с формированием шейки и фактическим увеличением действующего напряжения. Но в ряде случаев эта стадия объясняется возникновением множества внутренних трещин в образце (что эквивалентно уменьшению его поперечной площади) и увеличением из-за этого действующего напряжения [46].

С увеличением напряжения и температуры скорость деформации ползучести возрастает, а продолжительность второй стадии уменьшается [46].

Для исследования напряженного состояния и решения обратных задач механики в условиях ползучести наибольший интерес представляют первая и вторая стадии, т.е. неустановившейся и установившейся ползучести.

4.6. Уравнение состояния при неустановившейся ползучести. Контактные задачи с использованием линейно вязкоупругой модели Фойгта

В целом следует заметить, что большинство насыщенных жидкостью сред и материалов при сжатии не имеют ни второй, ни третьей стадии. При этом их поведение описывается только уравнением неустановившейся ползучести, которая нарастая до предельной величины далее не изменяется.

В качестве примера материала слоя с неустановившейся ползучестью будем использовать срез биологической ткани. Будем предполагать, что в простейшем случае биологическая ткань является однородной и представляет собой участок среза постоянной высоты h расположенного на абсолютно ровном и твердом предметном столе. Также предполагается, что верхняя граница среза покрыта тонкой недеформируемой в поперечном направлении пленкой, препятствующей вытеканию жидкости. Клеточная жидкость биологической ткани имеет в статистическом смысле среднюю вязкость η, а органеллы клеток ткани средний модуль упругости E. Очевидно также, что нижняя часть среза ткани может двигаться только горизонтально вдоль предметного стола во время вдавливания индентора.

В данном случае, как и ранее, рассмотрим слой конечной постоянной высоты h состоящий, из исключительно вертикально деформируемых стержней квадратного сечения. Предполагается, что они не взаимодействуют между собой, а уравнение состояния каждого из них определяется моделью Фойгта (Рисунок 27) [48]:

$$\sigma_z = \sigma_z^{упр} + \sigma_z^{вязк} = E \cdot \varepsilon + \eta \cdot \left(\frac{d}{dt} \varepsilon \right), \tag{134}$$

где $\sigma_z^{упр}$ - напряжение, вызванное упругой деформацией, $\sigma_z^{вязк}$ - напряжение, вызванное наличием вязкости, $\frac{d}{dt}\varepsilon$ - скорость деформаций (в рассматриваемой задаче - скорость вдавливания индентора).

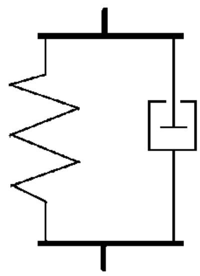

Рисунок 27. Вязкоупругая модель Фойгта [48]

Сила величиной $P(t)$ не убывает при $t \in [0, t_0]$. Она действует на абсолютно жесткий индентор вертикально вниз вдоль оси Z (Рисунок 27). Соответственно, исходя из предположений о виде контактных перемещений и деформаций (130)-(132), для скоростей деформаций можно получить уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_z(x,y,0,t)=\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial t}w(x,y,0,t)=\frac{1}{h}\frac{d}{dt}\delta(t). \qquad (135)$$

Уравнение равновесия (133) с учетом (135) можно представить как сумму уже известного уравнения (11) и слагаемого отвечающего за скорость вдавливания:

$$P(t)=-\iint\limits_{S(t)}\left(\sigma_z+\eta\cdot\left(\frac{d}{dt}\varepsilon_z\right)\right)dxdy=-\iint\limits_{S(t)}\sigma_z dxdy-\eta\cdot\iint\limits_{S(t)}\frac{d}{dt}\varepsilon_z dxdy=$$

$$=-E\cdot\iint\limits_{S(t)}\varepsilon_z dxdy-\eta\cdot\iint\limits_{S(t)}\frac{d}{dt}\varepsilon_z dxdy= \qquad (136)$$

$$=-\frac{E}{h}\cdot\iint\limits_{S(t)}(f(x,y)+\delta(t))dxdy-\frac{\eta}{h}\cdot\dot{\delta}(t)\cdot\iint\limits_{S(t)}dxdy,$$

где $\dot{\delta}(t)=\dfrac{d\delta(t)}{dt}$.

4.6.1. Вдавливание цилиндра в линейно вязкоупругий слой

Для цилиндра (17)-(21), (130)-(136) можно получить следующее уравнение связывающее глубину вдавливания, скорость вдавливания и действующей нагрузки $P(t)$:

$$P(t)=-2\cdot\int\limits_0^{b(t)}\left(\sigma_z(x,0,0)+\eta\cdot\left(\frac{d}{dt}\varepsilon_z\right)\right)dx=$$

$$=\frac{E}{h\cdot R}\cdot\int\limits_0^{b(t)}\left(b(t)^2-x^2\right)dx-2\cdot\frac{\eta}{h}\cdot\dot{\delta}(t)\cdot b(t)=\frac{2}{3}\frac{E}{R\cdot h}\cdot b(t)^3+2\cdot\frac{\eta}{h}\cdot\left|\dot{\delta}(t)\right|\cdot b(t). \qquad (137)$$

Выполнив в (137) подстановку $b(t)=\sqrt{2\cdot R\cdot|\delta(t)|}$, следующую из уравнений (18) и (131), можно получить диаграмму вдавливания относительно глубины и скорости вдавливания индентора:

$$P(t)==\frac{4}{3}\frac{E}{h}\cdot\sqrt{2\cdot R}\cdot|\delta(t)|^{3/2}+2\cdot\frac{\eta}{h}\cdot\sqrt{2\cdot R}\cdot\left|\dot{\delta}(t)\right|\cdot|\delta(t)|^{1/2}. \qquad (138)$$

4.6.2. Вязкоупругое вдавливание параболоида вращения

Для параболоида вращения (23)-(30), (130)-(136) уравнение связывающее глубину вдавливания, скорость вдавливания и действующей нагрузки $P(t)$ принимает вид:

$$P(t) = -\pi \int_0^{a(t)} \left(\sigma_z(r,0) + \eta \cdot \left(\frac{d}{dt} \varepsilon_z \right) \right) r dr =$$

$$= -\pi \frac{E}{R \cdot h} \cdot \int_0^{a(t)} \left(r^2 - a(t)^2 \right) r dr - \pi \frac{\eta}{2 \cdot h} \cdot \dot{\delta}(t) \cdot a(t)^2 = \tag{139}$$

$$= \pi \frac{E}{R \cdot h} \cdot \frac{a(t)^4}{4} + \pi \cdot \frac{\eta}{2 \cdot h} \cdot \left| \dot{\delta}(t) \right| \cdot a(t)^2.$$

Выполнив в (137) подстановку $a(t) = \sqrt{2 \cdot R \cdot |\delta(t)|}$, следующую из уравнений (28) и (131), можно получить диаграмму вдавливания относительно глубины и скорости вдавливания индентора:

$$P(t) = \pi \frac{E}{h} \cdot R \cdot |\delta(t)|^2 + \pi \cdot \frac{\eta}{h} \cdot R \cdot \left| \dot{\delta}(t) \right| \cdot |\delta(t)|. \tag{140}$$

4.6.3. Контактная задача для конуса

Для внедряемого конуса (23)-(26), (31)-(33), (130)-(136) искомое уравнение примет вид:

$$P(t) = -\pi \int_0^{a(t)} \left(\sigma_z(r,0) + \eta \cdot \left(\frac{d}{dt} \varepsilon_z \right) \right) r dr =$$

$$-2\pi \frac{E}{h} \cdot tg(\alpha) \cdot \int_0^{a(t)} (r - a(t)) r dr - \pi \frac{\eta}{2 \cdot h} \cdot \dot{\delta}(t) \cdot a(t)^2 = \tag{141}$$

$$= \frac{\pi}{3} \frac{E}{h} \cdot tg(\alpha) \cdot a(t)^3 + \pi \frac{\eta}{2 \cdot h} \cdot \left| \dot{\delta}(t) \right| \cdot a(t)^2.$$

Выполнив в (141) подстановку $a(t) = {|\delta(t)|}/{tg(\alpha)}$, следующую из уравнений (32) и (131), можно получить диаграмму вдавливания относительно глубины и скорости вдавливания индентора:

$$P(t) = \frac{\pi}{3} \frac{E}{h \cdot tg(\alpha)^2} \cdot |\delta(t)|^3 + \pi \frac{\eta}{2 \cdot h \cdot tg(\alpha)^2} \cdot \left| \dot{\delta}(t) \right| \cdot |\delta(t)|^2. \qquad (142)$$

4.6.4. Индентор - правильная пирамида

Используя (36)-(40), (130)-(136) для правильной пирамиды с $m-1$ треугольными боковыми гранями можно получить:

$$\begin{gathered} P(t) = -\iint\limits_{S(t)} \left(\sigma_z + \eta \cdot \left(\frac{d}{dt} \varepsilon_z \right) \right) dxdy = \\ = -2 \cdot (m-1) \cdot tg(\pi/(m-1)) \times \\ \times \left(\frac{E}{h} \cdot tg(\alpha) \int\limits_0^{a(t)} (x - a(t)) \cdot xdx - \frac{\eta}{h} \cdot \int\limits_0^{a(t)} \left(\frac{d}{dt} \varepsilon_z \right) \cdot xdx \right) = \\ = (m-1) \cdot tg(\pi/(m-1)) \left(\frac{E}{3 \cdot h} \cdot tg(\alpha) \cdot a(t)^3 + \frac{\eta}{2 \cdot h} \cdot \left| \dot{\delta}(t) \right| \cdot a(t)^2 \right). \end{gathered} \qquad (143)$$

Выполнив в (143) подстановку $a(t) = {|\delta(t)|}/{tg(\alpha)}$, следующую из уравнений (37) и (131), можно получить диаграмму вдавливания относительно глубины и скорости вдавливания индентора:

$$\begin{gathered} P(t) = (m-1) \cdot tg(\pi/(m-1)) \times \\ \times \left(\frac{E}{3 \cdot h \cdot tg(\alpha)^2} \cdot tg(\alpha) \cdot |\delta(t)|^3 + \frac{\eta}{2 \cdot h \cdot tg(\alpha)^2} \cdot \left| \dot{\delta}(t) \right| \cdot |\delta(t)|^2 \right). \end{gathered} \qquad (144)$$

4.7. Обобщенная (нелинейная) модель Фойгта

Для обобщенной вязко-упругой модели Фойгта $\sigma_z = \Im(\varepsilon) + \Xi(\dot{\varepsilon})$ [48] (где $\Im(\ )$ - нелинейная функция упругости, $\Xi(\ )$ - нелинейная функция вязкости, а

$\dot{\varepsilon} = \dfrac{d\varepsilon}{dt}$) можно получить, как и в линейном случае (134), уравнения аналогичные (136)-(144), связывающее упругопластические, вязкие характеристики биологической ткани, глубину $\delta(t)$ и скорость вдавливания $\dot{\delta}(t) = \dfrac{d\delta(t)}{dt}$. Очевидно, что с практической точки зрения функция вязкости должна быть упрощена до линейной $\Xi\left(\dot{\varepsilon}\right) = \eta \cdot \dot{\varepsilon}$. Т.е. уравнение для вязкоупругопластического элемента будет иметь вид:

$$\sigma_Z = \Im(\varepsilon) + \eta \cdot \dot{\varepsilon} \tag{145}$$

Таким образом, используя гипотезы стержневой модели покрытия и уравнение состояния (145) можно получить общее уравнение равновесия аналогичное (136), и связывающее действующую нагрузку нелинейные деформационные характеристики и линейную вязкость биологической ткани:

$$P(t) = -\iint\limits_{S(t)} \Im\left(\frac{f(x,y)+\delta(t)}{h}\right) dxdy - \frac{\eta}{h} \cdot \dot{\delta}(t) \iint\limits_{S(t)} dxdy. \tag{146}$$

Отметим, что если взять $\Im(\ )$ в виде простейшей билинейной диаграммы Прандтля (45), то не сложно с использованием результатов (55), (56), (65), (66), (74), (75), (82), (83) получить уравнение, связывающее абсолютное значение глубины вдавливания $|\delta(t)|$, абсолютное значение скорости вдавливания $\left|\dot{\delta}(t)\right|$, деформационные характеристики и вязкость с изменением нагрузки $P(t)$:

Приведем результаты, отличающиеся от указанных выше формул (55), (56), (65), (66), (74), (75), (82), (83) добавлением слагаемого $\dfrac{\eta}{h} \cdot \left|\dot{\delta}(t)\right| \iint\limits_{S(t)} dxdy$ в соответствии с (146) и заменой $|\delta|$ на $|\delta(t)|$ в соответствии с (130) и (131):

- для вдавливаемого цилиндра из (55), (56) и (137) получаем полную диаграмму и асимптотику для дальнего участка:

$$P_ц(t)=\begin{cases}\frac{4}{3}\frac{E}{h}\cdot(2\cdot R)^{\frac{1}{2}}\cdot|\delta(t)|^{\frac{3}{2}}+2\cdot\frac{\eta}{h}\cdot\sqrt{2\cdot R}\cdot\left|\dot{\delta}(t)\right|\cdot|\delta(t)|^{1/2},\ 0\le|\delta(t)|<h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E},\\ \frac{4}{3}\frac{E}{h}\cdot\left((2\cdot R)^{\frac{1}{2}}\cdot|\delta(t)|^{\frac{3}{2}}-\left(|\delta(t)|-h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}\right)^{\frac{3}{2}}\right)+\\ \qquad +2\cdot\frac{\eta}{h}\cdot\sqrt{2\cdot R}\cdot\left|\dot{\delta}(t)\right|\cdot|\delta(t)|^{1/2},\ |\delta(t)|\ge h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E},\end{cases}$$

$$P_ц(t)=2\cdot\sqrt{2}\cdot\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\cdot\sqrt{R\cdot|\delta(t)|}+2\cdot\frac{\eta}{h}\cdot\sqrt{2\cdot R}\cdot\left|\dot{\delta}(t)\right|\cdot|\delta(t)|^{1/2},$$

- для вдавливаемого параболоида вращения из (65), (66) и (140) получаем полную диаграмму и асимптотику для дальнего участка:

$$P_п(t)=\begin{cases}\frac{\pi\cdot E}{4\cdot R\cdot h}\cdot(2\cdot R\cdot|\delta(t)|)^2+\pi\cdot\frac{\eta}{h}\cdot R\cdot\left|\dot{\delta}(t)\right|\cdot|\delta(t)|,\quad 0\le|\delta(t)|<h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E},\\ \frac{\pi\cdot E\cdot R}{h}\left(|\delta(t)|^2-\left(|\delta(t)|-h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}\right)^2\right)+\\ \qquad +\pi\cdot\frac{\eta}{h}\cdot R\cdot\left|\dot{\delta}(t)\right|\cdot|\delta(t)|,\quad |\delta(t)|\ge h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E},\end{cases}$$

$$P_п(t)=\pi\cdot 2\cdot R\cdot\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\cdot|\delta(t)|+\pi\cdot\frac{\eta}{h}\cdot R\cdot\left|\dot{\delta}(t)\right|\cdot|\delta(t)|,$$

- для вдавливаемого конуса из (74), (75) и (142) получаем полную диаграмму и асимптотику для дальнего участка:

$$P_к(t)=\begin{cases}\pi\dfrac{E}{3\cdot h\cdot tg(\alpha)^2}|\delta(t)|^3+\pi\dfrac{\eta}{2\cdot h\cdot tg(\alpha)^2}\cdot\left|\dot{\delta}(t)\right|\cdot|\delta(t)|^2,\ 0\le|\delta(t)|<h\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E},\\ \pi\dfrac{E}{3\cdot h\cdot tg(\alpha)^2}\left(|\delta(t)|^3-\left(|\delta(t)|-h\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}\right)^3\right)+\\ \qquad+\pi\dfrac{\eta}{2\cdot h\cdot tg(\alpha)^2}\cdot\left|\dot{\delta}(t)\right|\cdot|\delta(t)|^2,\ |\delta(t)|\ge h\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E},\end{cases}$$

$$P_к(t)\approx\pi\cdot\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\dfrac{|\delta(t)|^2}{tg(\alpha)^2}+\pi\dfrac{\eta}{2\cdot h\cdot tg(\alpha)^2}\cdot\left|\dot{\delta}(t)\right|\cdot|\delta(t)|^2,$$

- для вдавливаемой правильной пирамиды из (82), (83) и (144) получаем полную диаграмму и асимптотику для дальнего участка:

$$P_к(t)=\begin{cases}\dfrac{(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))\cdot tg(\alpha)\cdot E}{3\cdot h}\times\\ \qquad\times\left(|\delta(t)|^3+\dfrac{3\cdot\eta}{2\cdot E}\cdot\left|\dot{\delta}(t)\right|\cdot|\delta(t)|^2\right),\quad 0\le|\delta(t)|<h\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E},\\ \dfrac{(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))\cdot tg(\alpha)\cdot E}{3\cdot h}\times\\ \times\left(|\delta(t)|^3-\left(|\delta(t)|-h\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}\right)^3+\dfrac{3\cdot\eta}{2\cdot E}\cdot\left|\dot{\delta}(t)\right|\cdot|\delta(t)|^2\right),\ |\delta(t)|\ge h\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E},\end{cases}$$

$$P_п(t)\approx(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))\cdot\left(\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\cdot\dfrac{|\delta(t)|^2}{tg(\alpha)^2}+\dfrac{\eta}{2\cdot h\cdot tg(\alpha)^2}\cdot\left|\dot{\delta}(t)\right|\cdot|\delta(t)|^2\right).$$

Совершенно не представляет ни каких проблем использование в качестве уравнения связывающего деформации и напряжения $\Im(\ )$ в (145) нелинейных решений со степенной аппроксимацией Бюльфингера (10). Таким образом (86), (89), (92), (93) несложно обобщить на вязко-нелинейно-упругий случай поведения покрытия:

- контактная задача для цилиндра (86), (146), по аналогии со (138):

$$P(t) = \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{\left(h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta}} \cdot \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma\left(\dfrac{3}{2}+\beta\right)} \sqrt{2 \cdot \pi \cdot R} \cdot |\delta(t)|^{(\beta+1/2)} +$$

$$+ 2 \cdot \frac{\eta}{h} \cdot \sqrt{2 \cdot R} \cdot \left|\dot{\delta}(t)\right| \cdot |\delta(t)|^{1/2},$$

- контактная задача для параболоида вращения (89), (146) по аналогии со (140):

$$P(t) = 4 \cdot \pi \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{\left(h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta}} \frac{R}{1+\beta} |\delta(t)|^{1+\beta} + \pi \cdot \frac{\eta}{h} \cdot R \cdot \left|\dot{\delta}(t)\right| \cdot |\delta(t)|,$$

- контактная задача для конуса (92), (146) по аналогии со (142):

$$P(t) = 2\pi \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{\left(h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta} \cdot tg(\alpha)^2} \cdot \frac{|\delta(t)|^{2+\beta}}{2 + 3 \cdot \beta + \beta^2} + \pi \frac{\eta}{2 \cdot h \cdot tg(\alpha)^2} \cdot \left|\dot{\delta}(t)\right| \cdot |\delta(t)|^2,$$

- контактная задача для пирамиды (93), (144):

$$P(t) = 2 \cdot \frac{(m-1) \cdot tg(\pi/(m-1))}{2 + 3 \cdot \beta + \beta^2} \frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{\left(h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta} \cdot tg(\alpha)^2} |\delta(t)|^{2+\beta} +$$

$$+ (m-1) \cdot tg(\pi/(m-1)) \frac{\eta}{2 \cdot h \cdot tg(\alpha)^2} \cdot \left|\dot{\delta}(t)\right| \cdot |\delta(t)|^2.$$

Для расчета с помощью приведенных выше формул исследователь может задать, например, постоянное абсолютное значение скорости вдавливания индентора V ($\left|\dot{\delta}(t)\right| = V$). Тогда абсолютное значение перемещения $|\delta(t)| = V \cdot t$. Подставляя эти значения в формулы можно вычислить зависящую от времени диаграмму вдавливания. Отметим, что современные нанотвердомеры позволяют программным способом устанавливать эти параметры и определять точку начального касания поверхности покрытия.

Из полученных выше формул также следует, что если внедрять очень медленно, то слагаемое, отвечающее за вязкость, станет очень малым. Таким образом, исследователь получает возможность записать диаграммы вдавливания без учета реологии.

Но существует и другой путь получения значений вдавливания без учета реологии. Это достаточно быстрое вдавливание до указанной глубины и затем выдержка индентора на этой глубине определенное время. Именно этот путь рекомендуется во всех ГОСТ-ах и исследованиях по материаловедению [28, 29, 31]. Для черных металлов рекомендуемая выдержка должна быть меньше, а для цветных больше.

Все это дает возможность сделать вывод, что для решения обратной задачи определения вязкости необходимо сначала одним из перечисленных способов исключить влияние вязкости и определиться с первым слагаемым в формуле, а далее, исходя из измерений на разных скоростях, вычислить среднестатистическое значение вязкости и дисперсию данного усреднения. Если дисперсия (в данном случае понимаемая как ошибка моделирования) превосходит допустимые значения, то из этого следует, что исследователь должен вместо (145) попытаться использовать нелинейную связь скорости деформаций и напряжений.

4.8. Наследственная теория ползучести материала покрытия. Вывод типовых уравнений решения контактных задач

Если предыдущие теории применяются для неустановившейся ползучести, то наследственная теория обычно применяется к описанию нарастания деформаций на установившемся участке.

4.8.1. Уравнения состояния стержней по наследственной теории ползучести

В литературе по наследственной теории ползучести можно найти несколько общих уравнения описывающих напряженно-деформированное состояние каждого из стержней. Два из них будут использоваться в данной монографии:

- вязкоупругий однородно стареющий материал [49] (старение моделируется за счет переменного во времени модуля упругости $E(t)$):

$$\varepsilon_z(t) = \frac{\sigma_z(t)}{E(t)} + \int_0^t \frac{\sigma_z(\tau)}{E(\tau)} \cdot \Gamma(t,\tau) d\tau, \qquad (147)$$

где $\Gamma(t,\tau)$ - ядро ползучести [46-50];

- материал, обладающий свойствами нелинейной наследственной ползучести [50]:

$$\Im(\varepsilon_Z(t)) = \sigma_Z(t) + \int_0^t \sigma_Z(\tau) \cdot \Gamma(t,\tau) d\tau . \tag{148}$$

где $\Im(\ )$ - нелинейная функция [46, 47, 50].

Переходя от одномерных уравнений (147)-(148) произвольного стержня к области контакта $\overline{S(t)}$ состоящей из набора стержней, деформации которых определяются их координатами (геометрическим местом расположения), получаем следующие уравнения $\forall(x,y) \in \overline{S(t)}$ в случае простейшей модели деформируемого покрытия:

- вязкоупругий однородно стареющий материал покрытия (набора стержней):

$$\varepsilon_Z(x,y,0,t) = \frac{\sigma_Z(x,y,0,t)}{E(t)} + \int_0^t \frac{\sigma_Z(x,y,0,\tau)}{E(\tau)} \cdot \Gamma(t,\tau) d\tau . \tag{149}$$

- материал покрытия (набора стержней), обладающий свойствами нелинейной ползучести:

$$\Im(\varepsilon_Z(x,y,0,t)) = \sigma_Z(x,y,0,t) + \int_0^t \sigma_Z(x,y,0,\tau) \cdot \Gamma(t,\tau) d\tau . \tag{150}$$

4.8.2. Дополнительные гипотезы, используемые для решения контактных задач по наследственной ползучести

Будем предполагать в отличие от моделей Фойгта, что время вдавливания пирамидального индентора на глубину $\delta(0)$ пренебрежимо мало по сравнению со временем измерений. Это позволяет предположить, что $\delta(0)$ является мгновенной величиной.

Таким образом, если в моделях Фойгта перемещение индентора начинается с нуля (с точки касания поверхности покрытия), то при наследственной модели предполагается, что индентор уже на стадии неустановившейся ползучести приобрел некоторую глубину $\delta(0)$ и далее процесс будет развиваться уже в соответствии с установившемся процессом, т.е. постоянной скоростью опускания индентора при постоянной нагрузке.

Кроме того, далее будем предполагать, что все линейные размеры области контакта $S(t)$ при действии силы $P(t)$ не уменьшаются, т.е. если выбраны два любых значения времени t_1 и t_2, такие что $t_1 < t_2$, то [47]:

$$S(t_1) \subseteq S(t_2). \tag{151}$$

Соотношение (151) является ключевой гипотезой при проведении дальнейших вычислений. Она позволяет при интегрировании выражений типа (149) и (150) по области контакта $\overline{S(t)}$ менять порядок интегрирования во втором слагаемом правой части этих уравнений с порядка «сначала по времени, потом по координатам» на порядок «сначала по координате, потом времени».

4.8.3. Вывод уравнений наследственной теории для стержневой модели покрытия и решения задач для базовых примеров геометрии инденторов

Продемонстрируем, как с помощью уравнения (151) получать уравнения для определения характерных размеров $\overline{S(t)}$. Формально проинтегрируем левые и правые части (149) и (150) по области контакта $\overline{S(t)}$.

Получаем:

- для вязкоупругого однородно стареющего материала покрытия:

$$\iint\limits_{\overline{S(t)}} \varepsilon_z(x,y,0,t)dxdy =$$

$$= \frac{1}{E(t)} \iint\limits_{\overline{S(t)}} \sigma_z(x,y,0,t)dxdy + \iint\limits_{\overline{S(t)}} \left(\int\limits_0^t \frac{\sigma_z(x,y,0,\tau)}{E(\tau)} \cdot \Gamma(t,\tau)d\tau \right) dxdy =$$

$$= -\frac{P(t)}{E(t)} + \int\limits_0^t \left(\frac{1}{E(\tau)} \iint\limits_{\overline{S(t)}} \sigma_z(x,y,0,\tau)dxdy \right) \cdot \Gamma(t,\tau)d\tau. \tag{152}$$

- для материала, обладающего свойствами нелинейной ползучести, не повторяя предыдущие преобразования, можно записать:

$$\iint\limits_{\overline{S(t)}} \Im(\varepsilon_z(x,y,0,t))dxdy = -P(t) + \int\limits_0^t \left(\iint\limits_{\overline{S(t)}} \sigma_z(x,y,0,\tau)dxdy \right) \cdot \Gamma(t,\tau)d\tau. \tag{153}$$

В случае не убывания размера области контакта (151) можно утверждать, что:

$$\sigma_Z(x,y,0,\tau)=\begin{cases}\sigma_Z(x,y,0,\tau),(x,y)\in\overline{S(\tau)},\\ 0,(x,y)\in\overline{S(t)}\setminus\overline{S(\tau)}.\end{cases} \tag{154}$$

Учитывая (154), в правой части (152) и (153) выполнено очевидное равенство:

$$\begin{gathered}\iint\limits_{\overline{S(t)}}\sigma_Z(x,y,0,\tau)dxdy=\\ =\iint\limits_{\overline{S(\tau)}}\sigma_Z(x,y,0,\tau)dxdy+\iint\limits_{\overline{S(t)}\setminus\overline{S(\tau)}}\sigma_Z(x,y,0,\tau)dxdy=\\ =\iint\limits_{\overline{S(\tau)}}\sigma_Z(x,y,0,\tau)dxdy=P(\tau).\end{gathered} \tag{155}$$

Следовательно, с учетом (151), (155) из (152) и (153) можно окончательно получить уравнения для определения характерных размеров $\overline{S(t)}$:

- вязкоупругий однородно стареющий материал:

$$E(t)\cdot\iint\limits_{\overline{S(t)}}\varepsilon_Z(x,y,0,t)dxdy=-\left(P(t)+E(t)\cdot\int_0^t\frac{P(\tau)}{E(\tau)}\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right). \tag{156}$$

- материал, обладающий свойствами нелинейной ползучести:

$$\iint\limits_{\overline{S(t)}}\Im(\varepsilon_Z(x,y,0,t))dxdy=-\left(P(t)+\int_0^t P(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right). \tag{157}$$

Напомним, что, как и ранее в (156) и (157), использовалось очевидное уравнение (132) для определения относительного укорочения $\varepsilon_Z(x,y,0,t)$ призматического стержня квадратного сечения находящегося в точке (x,y) простейшей модели деформируемого покрытия постоянной высоты.

4.8.3.1. Решение двумерной задачи о вдавливании параболического цилиндра в однослойное покрытие

В этом случае $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2R}$ и из (17)-(21), (130)-(136) следует краевое условие по перемещениям:

$$w(x,0,0,t)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2\cdot R}+\delta(t), & x\in[-b(t),b(t)],\\ 0, & x\notin[-b(t),b(t)],\end{cases} \tag{158}$$

Из (150) следует, что $\delta(t)=-\dfrac{b(t)^2}{2R}$. Соответственно из (156) и (157) следуют уравнения определяющее размеры области контакта $b(t)$:

- вязкоупругий однородно стареющий материал:

$$\frac{E(t)}{R\cdot h}\int\limits_0^{b(t)}\left(x^2-b(t)^2\right)dx=-\left(P(t)+E(t)\int\limits_0^t\frac{P(\tau)}{E(\tau)}\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right). \tag{159}$$

- материал, обладающий свойствами нелинейной ползучести:

$$2\int\limits_0^{b(t)}\Im\left(\frac{\left(x^2-b(t)^2\right)}{2\cdot R\cdot h}\right)dx=-\left(P(t)+\int\limits_0^t P(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right). \tag{160}$$

Несложно заметить, что справа (159) и (160) фактически стоит сила, фиктивно возрастающая в соответствии с реологическими параметрами покрытия, что приводит даже в случае равенства $P(t)$ константе к росту области контакта и абсолютной величины глубины $|\delta(t)|$.

Например, несложно вычислить левую часть в (159). Тогда из (159) можно получить:

$$\frac{2\cdot E(t)}{3\cdot R\cdot h}\cdot b(t)^3=P(t)+E(t)\int\limits_0^t\frac{P(\tau)}{E(\tau)}\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau,$$

или используя известную замену $b(t)=\sqrt{2\cdot R\cdot|\delta(t)|}$ можно получить график изменения абсолютной величины глубины вдавливания $|\delta(t)|$ от времени:

$$|\delta(t)|=\left(\frac{3\cdot h}{4\cdot\sqrt{2\cdot R}}\left(\frac{P(t)}{E(t)}+\int_0^t\frac{P(\tau)}{E(\tau)}\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right)\right)^{\frac{2}{3}}. \qquad (161)$$

Действуя совершенно аналогично для (160) в случае, когда нелинейная функция $\Im(\ )$ задана модифицированной степенной функцией Бюльфингера (10), из (85), (86) и (160) можно получить:

$$|\delta(t)|=\left(\frac{\left(h\cdot\left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}+\beta\right)}{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\cdot\Gamma(1+\beta)\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot R}}\cdot\left(P(t)+\int_0^t P(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right)\right)^{\frac{2}{\beta+1}}.$$

Несколько большие затруднения представляет собой использование билинейной диаграммы Прандтля в случае наследственного вязкоупруго-идеально-пластического случая (45). Поменяв правую и левую часть местами, учитывая (55), можно в результате записать:

$$P(t)+\int_0^t P(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau=$$

$$=\begin{cases}\frac{4}{3}\frac{E}{h}\cdot(2\cdot R)^{\frac{1}{2}}\cdot|\delta(t)|^{\frac{3}{2}}, & 0\le|\delta(t)|<h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E},\\ \frac{4}{3}\frac{E}{h}\cdot\left((2\cdot R)^{\frac{1}{2}}\cdot|\delta(t)|^{\frac{3}{2}}-\left(|\delta(t)|-h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}\right)^{\frac{3}{2}}\right), & |\delta(t)|\ge h\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}.\end{cases}$$

Вычислительная схема последнего в последней формуле работает также как и в предыдущем случае – вначале необходимо вычислить фиктивную силу $P(t)+\int_0^t P(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau$, стоящую в левой части последнего уравнения, а затем подобрать, исходя из размеров $|\delta(t)|$ ветвь вычислений, и уже окончательно вычислить $|\delta(t)|$.

4.8.3.2. Установившаяся ползучесть при вдавливании параболоида вращения

В этом случае из (23)-(30), (130)-(136), следует, что перемещения в цилиндрической системе координат приобретают вид:

$$w(r,0,t)=\begin{cases}\dfrac{r^2}{2R}+\delta(t), r\in[0,a(t)),\\ 0, r\notin[0,a(t)),\end{cases} \qquad (162)$$

где $a(t)$ - радиус круга контакта, $\delta(t)$ - глубина максимального вдавливания штампа. Принимая во внимание верхнее уравнение (162), получаем, что для любой достоверно определенной точки границы области контакта ($r=a(t)$) выполнено равенство:

$$\delta(t)=-\frac{a(t)^2}{2R}. \qquad (163)$$

В осесимметричном случае уравнение равновесия (26) приобретет вид:

$$P(t)=-\iint\limits_{S(t)}\sigma_z(x,y,0,t)dxdy=-2\pi\int_0^a\sigma_z{}^*(r,0,t)\cdot rdr. \qquad (164)$$

Соответственно из (156) и (157) следуют уравнения, определяющие размеры области контакта $a(t)$:

- вязкоупругий однородно стареющий материал:

$$E(t)\frac{\pi}{R\cdot h}\cdot\int_0^{a(t)}\left(r^2-a(t)^2\right)\cdot rdr=-\left(P(t)+E(t)\int_0^t\frac{P(\tau)}{E(\tau)}\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right), \qquad (165)$$

- материал, обладающий свойствами нелинейной ползучести:

$$2\pi\cdot\int_0^{a(t)}\Im\left(\frac{\left(r^2-a(t)^2\right)}{2Rh}\right)\cdot rdr=-\left(P(t)+\int_0^tP(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right). \qquad (166)$$

Вычислим левую часть в (165), тогда можно получить:

$$E(t)\frac{\pi}{4\cdot R\cdot h}\cdot a(t)^4 = P(t)+E(t)\int_0^t\frac{P(\tau)}{E(\tau)}\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\,,$$

или используя известную замену $a(t)=\sqrt{2\cdot R\cdot|\delta(t)|}$, следующую из (163), можно получить график изменения абсолютной величины глубины вдавливания $|\delta(t)|$ от времени:

$$|\delta(t)|=\sqrt{\frac{h}{\pi\cdot R}\left(\frac{P(t)}{E(t)}+\int_0^t\frac{P(\tau)}{E(\tau)}\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right)}\,. \tag{167}$$

Действуя совершенно аналогично для (166) в случае, когда нелинейная функция $\Im(\ )$ задана модифицированной степенной функцией Бюльфингера (10), из (87), (88) и (166) можно получить:

$$|\delta(t)|=\left(\frac{(1+\beta)\cdot\left(h\cdot\left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta}}{4\cdot\pi\cdot\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\cdot R}\left(P(t)+\int_0^t P(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right)\right)^{\frac{1}{1+\beta}}.$$

Несколько большие затруднения представляет собой использование билинейной диаграммы Прандтля в случае наследственного вязкоупруго-идеально-пластического случая деформирования (45). Поменяв правую и левую часть местами можно в результате записать с учетом (65):

$$P(t)+\int_0^t P(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi\cdot E}{4\cdot R\cdot h}\cdot\left(2\cdot R\cdot|\delta(t)|\right)^2, & 0\le|\delta(t)|<h\cdot\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E},\\[2ex] \dfrac{\pi\cdot E\cdot R}{h}\left(|\delta(t)|^2-\left(|\delta(t)|-h\cdot\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}\right)^2\right), & |\delta(t)|\ge h\cdot\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}.\end{cases}$$

Вычислительная схема в последней формуле работает также как и в предыдущем случае – вначале необходимо вычислить фиктивную силу $P(t)+\int\limits_0^t P(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau$, стоящую в левой части последнего уравнения, а затем подобрать, исходя из размеров $|\delta(t)|$ ветвь вычислений, и уже окончательно вычислить $|\delta(t)|$.

4.8.3.3. Вдавливание конуса

Пусть $f(r)=tg(\alpha)\cdot r$, где $tg(\alpha)$ - тангенс угла наклона образующей конуса к плоской поверхности покрытия. В этом случае из (49) и (50) следует, что перемещения в цилиндрической системе координат $w(r,z,t)\big|_{z=0}$ приобретают вид:

$$w(r,0,t)=\begin{cases} tg(\alpha)\cdot r+\delta(t), r\in[0,a(t)), \\ 0, r\notin[0,a(t)), \end{cases} \tag{168}$$

где $a(t)$ - радиус круга контакта, $\delta(t)$ - глубина максимального вдавливания штампа. Принимая во внимание верхнее уравнение (168), получаем, что для любой достоверно определенной точки границы области контакта ($r=a(t)$) выполнено равенство:

$$\delta(t)=-tg(\alpha)\cdot a(t). \tag{169}$$

В осесимметричном случае уравнение равновесия (26) приобретет вид (164). Соответственно из (156) и (157) следуют уравнения, определяющие размеры области контакта $a(t)$:

- вязкоупругий однородно стареющий материал:

$$2\pi\cdot E(t)\cdot\frac{tg(\alpha)}{h}\int\limits_0^{a(t)}(r-a(t))\cdot rdr=-\left(P(t)+E(t)\int\limits_0^t\frac{P(\tau)}{E(\tau)}\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right), \tag{170}$$

- материал, обладающий свойствами нелинейной ползучести:

$$2\pi\cdot\int\limits_0^{a(t)}\Im\left(\frac{tg(\alpha)\cdot(r-a(t))}{h}\right)\cdot rdr=-\left(P(t)+\int\limits_0^t P(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right). \tag{171}$$

Вычисляя в (170) левую часть получаем:

$$\pi \cdot E(t) \cdot \frac{tg(\alpha)}{3 \cdot h} a(t)^3 = P(t) + E(t) \int_0^t \frac{P(\tau)}{E(\tau)} \cdot \Gamma(t,\tau) d\tau .$$

Используя обратное к (169) уравнение $a(t) = |\delta(t)| / tg(\alpha)$ из предыдущего можно получить уравнение для определения глубины вдавливания от времени:

$$|\delta(t)| = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot h \cdot tg(\alpha)^2}{\pi} \left(\frac{P(t)}{E(t)} + \int_0^t \frac{P(\tau)}{E(\tau)} \cdot \Gamma(t,\tau) d\tau \right)}. \qquad (172)$$

Используя в (171) в качестве нелинейной функции $\Im(\ )$ модифицированную степенную функцию Бюльфингера (10), из (90)-(92) и (171) можно получить:

$$|\delta| = \left(\left(2 + 3 \cdot \beta + \beta^2\right) \frac{\left(h \cdot \left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\beta} \cdot tg(\alpha)^2}{2 \cdot \pi \cdot \left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|} \left(P(t) + \int_0^t P(\tau) \cdot \Gamma(t,\tau) d\tau \right) \right)^{\frac{1}{2+\alpha^{сжатия}}} .$$

В случае вязкоупругого-идеально-пластичного поведения покрытия, переставив левую и правую части в (171) и формально повторяя все действия (67)-(75) с заменой a на $a(t)$, δ на $\delta(t)$ и P на $P(t) + \int_0^t P(\tau) \cdot \Gamma(t,\tau) d\tau$ можно получить из (75):

$$P(t) + \int_0^t P(\tau) \cdot \Gamma(t,\tau) d\tau =$$

$$= \begin{cases} \pi \dfrac{E}{3 \cdot h \cdot tg(\alpha)^2} |\delta(t)|^3, & 0 \le |\delta(t)| < h \dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}, \\ \pi \dfrac{E}{3 \cdot h \cdot tg(\alpha)^2} \left(|\delta(t)|^3 - \left(|\delta(t)| - h \dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E} \right)^3 \right), & |\delta(t)| \ge h \dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}. \end{cases}$$

В данном случае точно также как и ранее определение $|\delta(t)|$ осуществляется подбором ветви вычислений по предварительно рассчитанной фиктивной нагрузке $P(t)+\int\limits_0^t P(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau$.

4.8.3.4. Наследственная модель вдавливания правильной пирамиды

Форма поверхности пирамиды $f(x,y)$ в области $\Omega(t)=\left\{(x,y):\ 0\le x\le a(t),\ -tg\left(\frac{\pi}{m-1}\right)\cdot x\le y\le tg\left(\frac{\pi}{m-1}\right)\cdot x\right\}$, где $\Omega(t)\subset S(t)$, $S(t)$ - правильная многоугольная область контакта (Рисунок 15) с учетом замены основных параметров на функции, зависящие от времени. Необходимо отметить, что поверхность $f(x,y)$ идеальной правильной пирамиды с $m-1$ треугольными гранями, касающимися поверхности покрытия, определяется в области $\Omega(t)$ уравнением независящим от времени:

$$f(x,y)\big|_{\Omega(t)}=tg(\alpha)\cdot x, \qquad (173)$$

где α - угол между треугольными гранями пирамиды и поверхностью покрытия (Рисунок 14).

Поэтому максимальная глубина вдавливания $\delta(t)$, аналогично (37) и в соответствии с (132), определяется уравнением:

$$\delta(t)=-f(a(t),0)\big|_{\Omega(t)}=-tg(\alpha)\cdot a(t). \qquad (174)$$

Следовательно, перемещения в подобласти $\Omega(t)$ области контакта $S(t)$ задаются уравнением аналогичным (130) с учетом (173), (174):

$$w(x,y,0,t)\big|_{\Omega(t)}=f(x,y)\big|_{\Omega(t)}+\delta(t)=tg(\alpha)\cdot(x-a(t)). \qquad (175)$$

Нормальные деформации в подобласти Ω области контакта в соответствии с (132) и (175) определяется выражением:

$$\varepsilon_z(x,y,0,t)\big|_{\Omega(t)}=\frac{tg(\alpha)\cdot(x-a(t))}{h}. \qquad (176)$$

Используя (176) и уравнения (156) и (157) в силу геометрической симметрии правильной пирамиды записывается в виде:

- для вязкоупругого однородно стареющего материала:

$$2\cdot(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))\cdot E(t)\cdot\frac{tg(\alpha)}{h}\int_0^{a(t)}(x-a(t))\cdot xdx = \\ = -\left(P(t)+E(t)\int_0^t\frac{P(\tau)}{E(\tau)}\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right), \quad (177)$$

- для материала, обладающего свойствами нелинейной ползучести:

$$2\cdot(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))\int_0^{a(t)}\Im\left(\frac{tg(\alpha)\cdot(x-a(t))}{h}\right)\cdot xdx = \\ = -\left(P(t)+\int_0^t P(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right). \quad (178)$$

Интегрируя (177) получаем:

$$(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))\cdot E(t)\cdot\frac{tg(\alpha)}{3\cdot h}a(t)^3 = P(t)+E(t)\int_0^t\frac{P(\tau)}{E(\tau)}\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau.$$

Выполнив замену $a(t)=|\delta(t)|/tg(\alpha)$, следующую из уравнения (174), окончательно получаем зависимость глубины вдавливания от времени:

$$|\delta(t)| = \left(\frac{3\cdot h\cdot tg(\alpha)^2}{(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))}\left(\frac{P(t)}{E(t)}+\int_0^t\frac{P(\tau)}{E(\tau)}\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right)\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (179)$$

Совершенно аналогично (179) из (178) для случая нелинейной ползучести с использованием модифицированного степенного закона Бюльфингера (10) из (93) можно получить:

$$
|\delta(t)| = \left(\frac{2+3\cdot\alpha^{сжания} + \left(\alpha^{сжания}\right)^2}{2\cdot(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))} \frac{\left(h\cdot\left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|\right)^{\alpha^{сжания}} tg(\alpha)^2}{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|} \times \right.
$$

$$
\left. \times \left(P(t) + \int_0^t P(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau \right) \right)^{\frac{1}{2+\alpha^{сжания}}}.
$$

Для случая вязкоупруго-идеально-пластического покрытия и пирамиды из (83) получаем:

$$
P(t) + \int_0^t P(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau =
$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))\cdot tg(\alpha)\cdot E}{3\cdot h}\cdot|\delta(t)|^3, & 0 \le |\delta(t)| < h\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}, \\ \dfrac{(m-1)\cdot tg(\pi/(m-1))\cdot tg(\alpha)\cdot E}{3\cdot h} \times & \\ \qquad \times \left(|\delta(t)|^3 - \left(|\delta(t)| - h\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E} \right)^3 \right), & |\delta(t)| \ge h\dfrac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{E}. \end{cases}
$$

Замечания по построению $|\delta(t)|$, исходя из последнего уравнения, остаются такими же, как и в предыдущих случаях инденторов.

4.8.4. Замечания по решению задач установившейся ползучести с помощью наследственной теории

В отличие от моделей Фойгта в наследственной теории ползучести применяется собственная система понятий. Все параметры кривых деформирования (9), (10) $E(t)$, $E_{эт}^{сжатия}$, $\sigma_{эт}^{сжатия}$, $\varepsilon_{эт}^{сжатия}$, β называются мгновенными характеристиками, т.к. время их измерения несопоставимо мало со временем проведения эксперимента на установившуюся ползучесть. Совершенно аналогично диаграммы растяжения/сжатия образцов материалов и соответственно, полученные на их основе уравнения состояния также называются мгновенными.

В рамках концепции наследственной теории «не мгновенным» является, только то, что вычисляется с помощью ядра ползучести (или релаксации).

Одним из первых методических вопросов, которые надо решить – это определить стандартное время измерений мгновенных значений механических параметров и в частности мгновенного модуля упругости стареющего материала $E(t)$. Подчеркнем, что определение $E(t)$ – это данные измерений мгновенных значений. Очевидно также, что необходимо одновременно проводить испытания 2-х аналогичных объектов. На одном необходимо проводить измерения мгновенных характеристик с некоторой регулярностью (условно, через каждые 60 с.), а второй такой же объект должен постоянно находиться под нагрузкой для определения ядра ползучести уже с учетом поправки на старение.

Фактически, из-за наличия неустановившейся ползучести у любого материала, измерение мгновенных характеристик должны быть дольше, чем время проявления нестационарного процесса, но с другой стороны это время измерения должно быть несравненно меньше шага по времени измерения стационарного процесса – установившейся ползучести.

Одним из наиболее подходящих материалов для подобных измерений является бетон – стационарные процессы в нем могут растягиваться на месяцы. Кроме того для применения наследственной теории походят стали, находящиеся под воздействием высоких температур.

Целесообразность применения наследственной теории при исследовании биологических материалов и срезов тканей до настоящего времени экспериментально не изучалась, что вероятно связано с относительной сложностью математического аппарата по сравнению с обеими моделями Фойгта.

4.8.5. К вопросу о надежности измерений био- и других реологически активных материалов

Микро- и наноиндентирование биоматериалов отличается существенной зависимостью глубины вдавливания от времени, даже при постоянной приложенной силе.

В рамках модели Винклера можно установить, что для постоянной нагрузки, приложенной к сферическому абсолютно твердому индентору с периодическими отклонениями (123), контактные перемещения $w(r,0,t)$ при вдавливании в абсолютно ровную поверхность покрытия будут иметь вид (при $0 < r \le a(t) << R_n$, где $a(t)$ - зависящий от времени номинальный радиус области контакта) [44]:

$$w(r,0,t)=\begin{cases}\dfrac{r^2}{2\cdot R_n}+A\cdot\left(1-\cos\left(k\cdot\dfrac{\pi}{2}\cdot r/R_n\right)\right)+\delta(t), r\in[0,a(t)),\\ 0, r\notin[0,a(t)),\end{cases}$$

где $\delta(t)$ - измеренное вдавливание, зависящее от времени.

Как и всегда (131) для модели Винклера получаем [44]:

$$\delta(t)=\delta_n(t)-A\cdot\left(1-\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot a(t)/R_n\right)\right), \tag{180}$$

где $\delta_n(t)=-\dfrac{a(t)^2}{2\cdot R_n}$ - номинальное вдавливание идеального индентора.

Далее из (180), можно получить уравнение:

$$|\delta_n(t)|=|\delta(t)|\cdot\left(1-\frac{A}{|\delta(t)|}\cdot\left(1-\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\cdot a(t)/R_n\right)\right)\right).$$

Из последнего равенства следует, что кривая ползучести при постоянной нагрузке надежна только на участке, когда измеренная глубина вдавливания индентора $|\delta(t)|$ на порядок превосходит амплитуду A отклонения поверхности индентора.

Не сложно заметить из предыдущего изложения, что данный результат можно получить для всех типов инденторов.

Таким образом, начальный участок кривой ползучести, записанный при постоянной приложенной к индентору силе всегда недостоверен. Достоверный участок кривой ползучести начинается с глубины вдавливания индентора, превосходящей на порядок сумму микро- и/или наноотклонений реальной поверхности индентора.

ГЛАВА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ В РАМКАХ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СТЕРЖНЕВОЙ МОДЕЛИ ПОКРЫТИЯ

Композитный материал, композит – многокомпонентный материал, состоящий, как правило, из пластичной основы (матрицы) с добавленными наполнителями [51].

В случае волокнистых наполнителей или тканей высокой прочности говорят, что композиционный материал армирован волокном или тканью.

Сочетание разнородных компонент приводит к созданию нового материала, свойства которого количественно и качественно отличаются от свойств каждого из его составляющих.

Варьируя составы матрицы и наполнителя, их соотношение, ориентацию наполнителя (если он тканый), получают широкий спектр материалов с требуемым набором свойств.

Многие композиты превосходят традиционные материалы и сплавы по своим механическим свойствам и в то же время являются более легкими. Использование композитов обычно позволяет уменьшить массу конструкции при сохранении или улучшении ее физико-механических характеристик.

5.1. Структура композитных материалов

По структуре композиты делятся на несколько основных классов [51, 52]:

- волокнистые,
- слоистые,
- дисперсно-упрочненные,
- упрочненные частицами,
- нанокомпозиты.

Волокнистые композиты армированы волокнами или нитевидными кристаллами. Кирпичи с соломой и папье-маше (волокна целлюлозы в клее ПВА) можно отнести как раз к этому классу композитов. Уже небольшое содержание наполнителя в композитах такого типа приводит к появлению качественно новых механических свойств материала. Широко варьировать свойства материала позволяет также изменение ориентации, размера и концентрации волокон. Кроме того, армирование волокнами придает материалу различные свойства в разных направлениях, а за счет добавки волокон проводников материалу можно придать электропроводность вдоль заданной оси [51, 52].

В слоистых композиционных материалах матрица и наполнитель расположены слоями, как, например, в особо прочном стекле, армированном несколькими слоями полимерных пленок. К слоистым композитам относится также фанера [51, 52].

Микроструктура остальных классов композиционных материалов характеризуется тем, что матрицу наполняют частицами армирующего вещества, а различаются они размерами частиц [51, 52]:

- в композитах, упрочненных частицами, их размер больше 1 мкм, а содержание составляет 20–25% (по объему);
- дисперсно-упрочненные композиты включают в себя от 1% до 15% (по объему) частиц размером от 0,01 до 0,1 мкм;
- размеры частиц, входящих в состав нанокомпозитов, еще меньше и составляют 10–100 нм.

Существуют также гибридные материалы, они отличаются от нанокомпозитов тем, что компоненты таких материалов химически взаимодействуют друг с другом, образуя соединения, а в нанокомпозите, кроме сил адгезии между компонентами, никаких других взаимодействий не предусмотрено [51, 52].

5.2. Общие представления о полимерных композиционных материалах

История создания полимерных композиционных материалов восходит к началу развития цивилизации. Первые армированные материалы использовались уже древними вавилонянами. Это были строительные материалы, армированные различными волокнами: глина с соломой, гипс с нитями бумажной массы, битум с тростником и т.д. [2, 52].

Среди современных конструкционных материалов одно из первых мест занимают композиции на основе полимеров. К ним относят материалы, предназначенные для изготовления деталей и конструкций, непременным компонентом которых является какой-либо полимер, в период формирования изделий, находящихся в пластичном или вязкотекучем состоянии, а при эксплуатации – в стеклообразном или кристаллическом [2, 52].

Обычно полимерные тела являются выраженными гетерогенными (неоднородными или композиционными) системами. В чистом виде полимеры не используются. Для придания им определенного комплекса физико-механических свойств и устойчивости к внешним воздействиям вводят стабилизирующие вещества (антиоксиданты, антистарители и т.п.), различные легирующие добавки, наполнители. Наполнители имеют различную форму: мелкодисперсных порошков, зерен, полых стеклянных шариков, иголок, обрезков волокон, ориентированных длинных волокон, нитей и т.д. Сочетание полимерного материала с наполнителем образует материал, свойства которого можно регулировать в широких пределах за счет надлежащего выбора свойств компонентов, их объемного содержания и комбинирования структуры композита [2, 52].

Компоненты, растворенные в полимере, предназначены для модификации его свойств. В композиционных материалах полимер и модифицирующие его компоненты составляют непрерывную фазу и играют роль связующего (матрицы) по отношению к распределенному в ней и не совмещающемуся с ним компоненту – наполнителю, составляющему самостоятельную фазу. Для равномерной передачи любого внешнего воздействия через матрицу и распределения его на все частицы наполнителя необходимо обеспечить прочное сцепление на границе раздела связующее-наполнитель, достигаемое за счет адсорбции или химического взаимодействия. Существование такого сцепления между несовмещающимися компонентами в гетерогенных полимерных материалах отличает их от механических смесей и подчеркивается названием «композиционные материалы». С расширением применения пластических масс как конструкционных материалов к ним предъявляются все более высокие технические требования [2, 52].

Таким образом, композиты, в которых матрицей служит полимерный материал, являются одним из самых многочисленных и разнообразных видов материалов. Их применение в различных областях дает значительный экономический эффект. В качестве наполнителей используется множество различных веществ.

5.2.1. Свойства композиций и влияние армирования

Изменение комплекса свойств с помощью комбинации материалов, особенно армирование полимеров волокном, существенно расширило эксплуатационные возможности этих материалов. Толчком к применению волокна был вывод о том, что дальнейшее существенное увеличение прочности пластических масс за счет их молекулярного строения невозможно, а также тем, что ползучесть полимеров проявляется уже при комнатных температурах [2, 52].

В настоящее время почти все усиленные волокном материалы могут удовлетворять прочностным требованиям в широком диапазоне нагрузок. Эти материалы эффективно используются в современной технике – в авиации, судостроении, космической и ракетной технике, и представляют собой кусочно-однородные среды. Однако усиливающее действие достигается только тогда, когда относительное удлинение волокнистого наполнителя не превосходит удлинения полимерного материала, а прочность существенно выше. В противоположном случае могут образовываться трещины, которые создают благоприятные условия в связи с проникновением влаги или газов в глубинные слои материала. Следует отметить, что при ориентированном армировании композиционному материалу придаются ортотропные свойства и удается довести механические свойства пластмасс до уровня свойств сплавов легких металлов. Вместе с тем они обладают рядом преимуществ: низкая плотность и легкость обработки позволяет создавать облегченные конструкции [2, 52].

Наиболее часто в качестве усиливающего материала используется стекловолокно. При этом кратковременная прочность усиленных полимерных материалов достигает уровня некоторых видов стали. Использование стекловолокна в качестве усиливающего материала позволяет избежать существенного снижения прочности при температурах до 523 °K. В ряде работ отмечена эффективность использования армированных сред при создании антифрикционных покрытий, а также связь направления армирования и интенсивности изнашивания композиционного покрытия [2, 52].

Ткани, применяемые для армирования, разделяют на две основные группы: плоские и объемные. В плоских тканях волокна или нити основы и утка переплетаются в пределах одного слоя. В объемных тканях нити основы переплетаются с нитями утка в пределах нескольких слоев [2, 52].

Таким образом, армирование полимеров является одним из эффективных способов улучшения их механических характеристик [2, 52].

5.2.2. Влияние мелкодисперсных наполнителей

Наполнителями называют твердые нелетучие нерастворимые в основном материале вещества, которые имеют задачу улучшить эксплуатационные свойства полимеров и каучуков и снизить расход основного вещества. Как правило, этой цели удовлетворяют дешевые мелкодисперсные вещества, которые не обладают, подобно волокну, усиливающим действием. Наполнители используются в композициях для покрытий, в связующих для слоистых пластиков, в литьевых смолах и конструкционных материалах. Например, графит и дисульфид молибдена придают полиамиду улучшенные антифрикционные свойства и, как следствие, высокую износостойкость. Добавка металлических порошков на основе бронзы, меди, нержавеющей стали повышает теплопроводность полимерных материалов. При добавлении наполнителей существенно снижается коэффициент термического расширения, который у полимеров значительно выше, чем у металлических конструкций. С другой стороны, при добавке наполнителя можно уменьшить усадку полимерных материалов, возникающую при переработке их в изделия [2, 52].

Введение кварцевой пыли и карбида кремния в литьевые смолы, из которых изготавливают детали насосов, делает возможным перекачивание сред, содержащих твердые вещества, так как при этом увеличивается жесткость, износостойкость и коррозионная стойкость материала [2, 52].

Необходимо прежде всего отметить, что износостойкие материалы должны обладать незначительной склонностью к образованию трещин в поверхностных слоях, непосредственно участвующих в передаче усилий между телами. Таким требованиям удовлетворяют, например, композиции металлов с неорганическими материалами, а также пластмассы или композиции пластмасс с металлами. Так, спрелафлон представляет собой комбинированный материал, в котором частички свинца тонко расположены в матрице из политетрафторэтилена. Подобные композиции особенно сильно снижают сопротивление трению и без образования микротрещин воспринимают касательные напряжения [2, 52].

Аналогичное действие оказывает маслянит, который приближается к металлу по своим механическим свойствам. Это комбинация металлов с полимерами, являющаяся самосмазывающимся материалом, чье сопротивление изнашиванию значительно выше, чем у бронзы или баббитов.

В то же время следует учитывать, что при использовании наполнителей можно улучшить одни характеристики, но и ухудшить другие. Например, с возрастанием доли наполнителя уменьшается пластичность и механическая прочность материала [2, 52].

Необходимо отметить, что композит можно считать квазиизотропным (изотропным в смысле среднего значения или в среднем изотропным) при армировании дискретными частицами, если характерный размер этих частиц намного меньше размеров исследуемого образца [2, 52].

5.2.3. Примеры полимерных композиционных материалов

Стеклопластики [51, 52] – полимерные композиционные материалы, армированные стеклянными волокнами, которые формуют из расплавленного неорганического стекла. В качестве матрицы чаще всего применяют как термореактивные синтетические смолы (фенольные, эпоксидные, полиэфирные и т.д.), так и термопластичные полимеры (полиамиды, полиэтилен, полистирол и т.д.). Эти материалы обладают достаточно высокой прочностью, низкой теплопроводностью, высокими электроизоляционными свойствами, кроме того, они прозрачны для радиоволн. Использование стеклопластиков началось в конце Второй мировой войны для изготовления антенных обтекателей – куполообразных конструкций, в которых размещается антенна локатора. В первых армированных стеклопластиках количество волокон было небольшим, волокно вводилось, главным образом, чтобы нейтрализовать грубые дефекты хрупкой матрицы [51, 52]. Однако со временем назначение матрицы изменилось – она стала служить только для склеивания прочных волокон между собой, содержание волокон во многих стеклопластиках достигает 80% по массе. Слоистый материал, в котором в качестве наполнителя применяется ткань, плетенная из стеклянных волокон, называется стеклотекстолитом. Стеклопластики – достаточно дешевые материалы, их широко используют в строительстве, судостроении, радиоэлектронике, производстве бытовых предметов, спортивного инвентаря, оконных рам для современных стеклопакетов и т.п.

Углепластики [51, 52] – наполнителем в этих полимерных композитах служат углеродные волокна. Углеродные волокна получают из синтетических и природных волокон на основе целлюлозы, сополимеров акрилонитрила, нефтяных и каменноугольных пеков и т.д. Термическая обработка волокна проводится, как правило, в несколько этапов и приводит к образованию волокон, характеризующихся высоким содержанием (до 99,5% по массе) углерода [51, 52]. В зависимости от режима обработки и исходного сырья полученное углеволокно имеет различную структуру. Для изготовления углепластиков используются те же матрицы, что и для стеклопластиков – чаще всего – термореактивные и термопластичные полимеры. Основными преимуществами углепластиков по сравнению со стеклопластиками является их низкая плотность и более высокий модуль упругости, углепластики – очень легкие и в то же время прочные материалы [51, 52]. Углеродные волокна и углепластики имеют практически нулевой коэффициент линейного расширения. Все углепластики черного цвета и хорошо проводят электричество, что несколько ограничивает области их применения. Углепластики используются в авиации, ракетостроении, машиностроении, производстве космической техники, медтехники, протезов, при изготовлении легких велосипедов и другого спортивного инвентаря. На основе углеродных волокон и углеродной матрицы создают композитные углеграфитовые материалы – наиболее термостойкие композитные материалы, способные долго выдерживать в инертных или восстановительных средах температуры до 3000°C. Из них делают высокотемпературные узлы ракетной техники и скоростных самолетов, тормозные колодки и диски для скоростных самолетов и многоразовых космических кораблей, электротермическое оборудование [51, 52].

Боропластики [51, 52] – композитные материалы, содержащие в качестве наполнителя борные волокна, внедренные в термореактивную полимерную матрицу, при этом волокна могут быть как в виде мононитей, так и в виде жгутов, оплетенных вспомогательной стеклянной нитью или лент, в которых борные нити переплетены с другими нитями. Благодаря большой твердости нитей, получающийся материал обладает высокими механическими свойствами (борные волокна имеют наибольшую прочность по сравнению с волокнами из других материалов) и большой стойкостью к агрессивным условиям, но высокая хрупкость материала затрудняет их обработку и накладывает ограничения на форму изделий из боропластиков. Термические свойства последних определяются термостойкостью матрицы, поэтому рабочие температуры, как правило, невелики. Применение боропластиков ограничивается высокой стоимостью производства борных волокон, поэтому они используются главным образом в авиационной и космической технике в деталях, подвергающихся длительным нагрузкам в условиях агрессивной среды [51, 52].

Органопластики [51, 52] – композиты, в которых наполнителями служат органические синтетические, реже - природные и искусственные волокна в виде жгутов, нитей, тканей, бумаги и т.д. В термореактивных органопластиках матрицей служат, как правило, эпоксидные, полиэфирные и фенольные смолы, а также полиимиды. Материал содержит 40–70% наполнителя. Содержание наполнителя в органопластиках на основе термопластичных полимеров – полиэтилена, ПВХ, полиуретана и т.п. – варьируется в значительно больших пределах - от 2% до 70% [51, 52]. Органопластики обладают низкой плотностью, относительно высокой прочностью при растяжении; высоким сопротивлением удару и динамическим нагрузкам, но, в то же время, низкой прочностью при сжатии и изгибе. Кроме того, они легче стекло- и углепластиков. Важную роль в улучшении механических характеристик органопластика играет степень ориентация макромолекул наполнителя. Макромолекулы жесткоцепных полимеров, таких, как кевлар, в основном ориентированы в направлении оси полотна и поэтому обладают высокой прочностью при растяжении вдоль волокон. Из материалов, армированных кевларом, изготавливают пулезащитные бронежилеты. Органопластики находят широкое применение в авто-, судо- и машиностроении, авиа- и космической технике, радиоэлектронике, химическом машиностроении, производстве спортивного инвентаря и т.д. [51, 52].

Известно более 10 000 марок наполненных полимеров (полимеров, наполненных порошками) [51, 52]. Наполнители используются как для снижения стоимости материала, так и для придания ему специальных свойств. Впервые наполненный полимер начал производить доктор Бейкеленд (Leo H.Baekeland, США), открывший в начале XX в. способ синтеза фенолформальдегидной (бакелитовой) смолы (не путайте с эпоксидной смолой) [51, 52]. Он обнаружил, что добавка волокон и даже древесной муки к смоле до ее затвердевания, увеличивает ее прочность. После этого наполненные термореактивные полимеры стали широко использоваться. Сейчас применяются разнообразные наполнители как термореактивных, так и термопластичных полимеров [51, 52]. Карбонат кальция и каолин (белая глина) дешевы, запасы их практически не ограничены, белый цвет дает возможность окрашивать материал. Применяют для изготовления жестких и эластичных поливинилхлоридных материалов для производства труб, электроизоляции, облицовочных плиток и т.д., полиэфирных стеклопластиков, наполнения полиэтилена и полипропилена. Добавление талька в полипропилен существенно увеличивает модуль упругости и теплостойкость данного полимера. Сажа больше всего используется в качестве наполнителя для резин, но вводится и в полиэтилен, полипропилен, полистирол и т.п. По-прежнему широко применяют органические наполнители – древесную муку, молотую скорлупу орехов, растительные и синтетические волокна. Для создания биоразлагающихся композитов в качество наполнителя используют крахмал.

Текстолиты [51, 52] – слоистые пластики, армированные тканями из различных волокон. Технология получения текстолитов была разработана в 1920-х на основе фенолформальдегидной смолы. Полотна ткани пропитывали смолой, затем прессовали при повышенной температуре, получая текстолитовые пластины [51, 52]. Роль одного из первых применений текстолитов - покрытия для кухонных столов - трудно переоценить. Основные принципы получения текстолитов сохранились, но сейчас из них формуют не только пластины, но и фигурные изделия. И, конечно, расширился круг исходных материалов. Связующими в текстолитах является всевозможные термореактивные и термопластичные полимеры, иногда даже применяются и неорганические связующие – на основе силикатов и фосфатов. В качестве наполнителя используются ткани из самых разнообразных волокон – хлопковых, синтетических, стеклянных, углеродных, асбестовых, базальтовых и т.д. Соответственно, разнообразны свойства и применение текстолитов [51, 52].

5.3. Композитные материалы с металлической матрицей

При создании композитов на основе металлов в качестве матрицы применяют алюминий, магний, никель, медь и т.д. Наполнителем служат или высокопрочные волокна, или тугоплавкие, не растворяющиеся в основном металле частицы различной дисперсности [51, 52].

Свойства дисперсно-упрочненных металлических композитов изотропны – одинаковы во всех направлениях. Добавление 5-10% армирующих наполнителей (тугоплавких оксидов, нитридов, боридов, карбидов) приводит к повышению сопротивляемости матрицы нагрузкам. Эффект увеличения прочности сравнительно невелик, однако ценно увеличение жаропрочности композита по сравнению с исходной матрицей. Так, введение в жаропрочный хромоникелевый сплав тонкодисперсных порошков оксида тория или оксида циркония позволяет увеличить температуру, при которой изделия из этого сплава способны к длительной работе, с 1000°С до 1200°С. Дисперсно-упрочненные металлические композиты получают, вводя порошок наполнителя в расплавленный металл, или методами порошковой металлургии [51, 52].

Армирование металлов волокнами, нитевидными кристаллами, проволокой значительно повышает как прочность, так и жаростойкость металла [51, 52]. Например, сплавы алюминия, армированные волокнами бора, можно эксплуатировать при температурах до 450–500°С, вместо 250–300°С. Применяют оксидные, боридные, карбидные, нитридные металлические наполнители, углеродные волокна. Керамические и оксидные волокна из-за своей хрупкости не допускают пластическую деформацию материала, что создает значительные технологические трудности при изготовлении изделий, тогда как использование более пластичных металлических наполнителей позволяет переформование. Получают такие композиты пропитыванием пучков волокон расплавами металлов, электроосаждением, смешением с порошком металла и последующим спеканием и т.д. [51, 52].

В 1970-х появились первые материалы, армированные нитевидными монокристаллами («усами») [51, 52]. Нитевидные кристаллы получают, протягивая расплав через фильеры. Используются «усы» оксида алюминия, оксида бериллия, карбидов бора и кремния, нитридов алюминия и кремния и т.д. длиной 0,3-15 мм и диаметром 1-30 мкм [51, 52]. Армирование «усами» позволяет значительно увеличить прочность материала и повысить его жаростойкость. Например, предел текучести композита из серебра, содержащего 24% «усов» оксида алюминия, в 30 раз превышает предел текучести серебра и в 2 раза – других композиционных материалов на основе серебра. Армирование «усами» оксида алюминия материалов на основе вольфрама и молибдена вдвое увеличило их прочность при температуре 1650°С, что позволяет использовать эти материалы для изготовления сопел ракет [51, 52].

5.4. Композитные материалы на основе керамики

Армирование керамических материалов волокнами, а также металлическими и керамическими дисперсными частицами позволяет получать высокопрочные композиты, однако, ассортимент волокон, пригодных для армирования керамики, ограничен свойствами исходного материала [51, 52]. Часто используют металлические волокна. При этом сопротивление растяжению растет незначительно, но зато повышается сопротивление тепловым ударам – материал меньше растрескивается при нагревании, но возможны случаи, когда прочность материала падает [51, 52]. Это зависит от соотношения коэффициентов термического расширения матрицы и наполнителя.

Армирование керамики дисперсными металлическими частицами приводит к новым материалам (керметам) с повышенной стойкостью, устойчивостью относительно тепловых ударов, с повышенной теплопроводностью. Из высокотемпературных керметов делают детали для газовых турбин, арматуру электропечей, детали для ракетной и реактивной техники. Твердые износостойкие керметы используют для изготовления режущих инструментов и деталей. Кроме того, керметы применяют в специальных областях техники – это тепловыделяющие элементы атомных реакторов на основе оксида урана, фрикционные материалы для тормозных устройств и т.д. [51, 52].

5.5. Твердые биоматериалы

Костная ткань - это уникальный по составу и свойствам биологический композиционный материал со сложной многоуровневой структурной организацией компонентов. Костная структура и состав определяют ее механические свойства, отличающиеся для разных индивидуумов, а механические нагрузки, в свою очередь, влияют на структуру и состав кости.

Следует отметить, что одной из важнейших задач в настоящее время является разработка технологии получения биокомпозитов, которые имеют высокое сродство к организму и низкий риск отторжения, а также полностью растворяются в организме. По сравнению с другими материалами по замене костной ткани, такие материалы лишены недостатков и не требуют замены.

5.6. Строительные материалы

Отметим, что основная масса строительных керамических материалов обладает значительной пористостью, что является следствием технологии изготовления, а с другой стороны прямым технологическим требованием к изделию, предъявляемым к нему в связи с областью его применения. Пористость обеспечивает легкость и малую теплопроводность изделия (кирпичи). Именно значительная пористость, даже без добавок каких-либо армирующих волокон дает возможность отнести данный вид строительной керамики к композиционным материалам [52].

Множество применяемых природных строительных материалов, также можно отнеси к композиционным, например, туфовые блоки, смесь глины и соломы и пр.

К композиционным материалам относятся все виды бетонов (из-за использования наполнителя: щебеня, песка, гравия, пемзы) и, тем более, армированные стальными прутками железобетоны [52].

5.7. Геологические породы и почвы как композиционные материалы

Методика определения механических свойств пород и грунтов должна в определенном виде учитывать геологический состав горной породы, т.к. состав породы обычно обладает большим разнообразием и разбросом свойств компонент породы по механическим характеристикам. Поэтому в настоящее время общепринятым является описание механических свойств пород и грунтов как квазиизотропных, т.е. сред изотропных в среднем. Обоснованием этого заключения является прямая аналогия между структурой горной породы или почвы и структурой композиционных материалов [52].

5.8. Методы усреднения свойств композитов

5.8.1. Усреднение слоистых структур

Основные подходы к построению теории механики многослойных структур делятся на несколько направлений. В первую очередь это работы, основанные на кинематических гипотезах, принятых для всего пакета в целом. При таком подходе пластинка или оболочка заменяется некоторой эффективной однородной, с соответствующими характеристиками [2, 52].

Главным достоинством пакетного метода является то, что основные уравнения для многослойной структуры эквивалентны аналогичным однослойным уравнениям, методы решения, которых хорошо разработаны.

Характерной особенностью композитов слоистой структуры является то, что в отличие от зернистых и волокнистых материалов их упругие постоянные могут быть рассчитаны без каких либо упрощающих предположений относительно полей напряжений и деформаций. В материалах, составленных из чередующихся плоских слоев, коэффициенты упругости будут обладать неоднородностью лишь в направлении, перпендикулярном слоям. Поэтому вычисление эффективных коэффициентов упругости сводится к одномерной задаче, которую удается решить точно для произвольного распределения высот слоев [2, 52].

Именно этот подход будет использоваться в данной монографии при рассмотрении слоистых покрытий.

5.8.2. Усреднение регулярных структур в механике композитов

В связи с развитием современного энергетического и химико-технологического оборудования, созданием новых материалов, различного рода моделей сред с микроструктурой возник интерес к теории упругих кусочно-однородных периодических структур [2, 52].

Типичными представителями подобных структур являются линейно-армированные композиционные материалы. С другой стороны, если концентрация включений не слишком мала то, в их расположении всегда имеется ближний порядок, и, если ближний порядок охватывает сравнительно большое количество зерен неоднородности, такую структуру приближенно можно заменить регулярной со строго периодическим распределением включений и с последующим решением периодической задачи теории упругости [2, 52].

В математическом отношении определение физико-механических полей в кусочно-однородных периодических структурах сводится к решению краевых задач теории упругости или теории потенциала для бесконечносвязаных областей, обладающих соответствующей симметрией. Поэтому естественно в определенном смысле усреднить структуру, отождествить ее на макроуровне с некоторой однородной средой [2, 52].

Предполагается, что существует ячейка периодичности структуры (прямоугольный параллелепипед, который для слоистой структуры превращается в бесконечный слой, для волокнистой структуры с прямыми волокнами – в цилиндр с поперечным сечением в виде прямоугольника), причем эта ячейка мала по сравнению с характерными размерами исследуемой области. Тогда решение задачи теории упругости для данной неоднородной среды является периодической функцией с периодом равным величине ячейки [2, 52].

Для решения поставленной задачи применяются как численные методы, так и метод аналитических функций [2, 52].

Отметим, что задача о прогнозировании свойств волокнистого материала регулярной структуры с произвольным числом круговых волокон в элементарной ячейке, равно как и соответствующая ей двояко периодическая задача теории упругости, были решены в ряде работ по усреднению свойств регулярных структур [2, 52].

5.8.3. Особенности усреднения стохастической структуры

Следует отметить, что реальные композиционные материалы в основном имеют случайную структуру, обусловленную как неправильной формой армирующих элементов, так и их случайным расположением. Поэтому применение методов теории случайных функций позволяет охватить практически все структуры, присущие реальным композиционным материалам. В этом случае материал можно представить как среду, физико-механические характеристики которой являются случайными функциями координат. Если на стохастически неоднородное тело действуют внешние силы, то возникающие напряжения и деформации также образуют случайные тензорные поля [2, 52].

Усреднение физических величин можно проводить двумя способами. Первый способ усреднения состоит в интегрировании по объему, а второй в усреднении по совокупности однотипных ситуаций (по ансамблю). В тех случаях, когда эти средние совпадают, имеет место условие эргодичности [2, 52].

В качестве элемента объема следует брать область достаточно большую по сравнению с характерными размерами элемента неоднородности (например, средним диаметром зерна). В тоже время размер области интегрирования должен быть малым по сравнению с расстоянием, на котором существенно изменяется усредняемая величина. Отсюда ясно, что среднее (или макроскопическое) значение напряжения может быть функцией координат.

Очевидно, что усреднение по объему допустимо не всегда. Так, при распространении волн в неограниченном поликристалле усреднение напряжений по объему допустимо лишь в случае длинных волн, когда длина волны существенно больше размеров зерен. В противном случае следует проводить усреднение по ансамблю. Такой же подход используется и в случае ограниченной среды, для которой характерный размер материала сравним с характерным размером элемента неоднородности. В этом случае модно ожидать проявления масштабного эффекта [2, 52].

5.8.4. Вычисление эффективных модулей для стохастической структуры

В последние годы существенное развитие получили исследования физико-механических свойств материалов, температурных полей и напряженно-деформированного состояния в элементах конструкций с учетом их структуры. Результаты этих исследований находят практическое применение при расчете на прочность элементов конструкций из неоднородных материалов, разработке технологических режимов их изготовления, а также при выборе оптимальных структур новых композиционных материалов. Вопросы рационального проектирования конструкций из композиционных материалов требуют для своего решения рассмотрения многопараметрических структур с большим количеством варьируемых параметров [2, 52].

Одной из основных задач механики композитов является задача проектирования материалов с заранее заданными жесткостными и прочностными характеристиками. Если армированный (композиционный) материал моделируется однородной линейно упругой средой, то задача проектирования материала с заранее заданными свойствами приводится к задаче теоретического определения модулей упругости композиционного материала (так называемых эффективных модулей) по известным модулям упругости компонентов [2, 52].

Для решения задачи определения эффективных модулей рассматривается элемент композиционного материала, на границе которого задаются воздействия, имитирующие возникающие в испытательных машинах при проведении серии опытов (чистое растяжение, кручение, всестороннее сжатие), для определения полного набора модулей упругости однородного материала [2, 52].

При этом макроточкой называется элементарный макрообъем, размеры которого значительно превосходят характерные размеры неоднородностей, однако существенно меньше размеров тела [2, 52].

Более конкретное определение макроточки, т.е. условно говоря, минимального макрообъема, для которого эффективные модули имеют постоянное значение, можно дать на основе теории упругости неоднородных тел [2, 52].

Таким образом, теоретическое определение эффективных модулей приводится к серии краевых задач для представительного объема композиционного материала – ячейки неоднородности или области в форме стандартного образца с таким количеством ячеек, для которых, во-первых, можно решить краевую задачу, и, во-вторых, образец должен достаточно точно имитировать композиционный материал как однородный [2, 52].

Для решения указанных задач применяются как аналитические, так и численные методы. Численные методы строятся на базе известных методов (разложения в ряд по малому параметру, конечно-разностных, конечно-элементных и др.). Аналитические методы могут базироваться на точных решениях известных частных задач линейной теории упругости для материалов с включениями, на приближенных аналитических решениях, построенных на базе тех или иных упрощающих предположений, а также на теории случайных функций. Следует отметить, что аналитические методы, использующие точные решения, как правило, приводят к громоздким результатам [2, 52].

В данной монографии используется подход, основанный на использовании дискретных случайных величин, называемых объемными долями или концентрациями. Далее проводится усреднение напряженно-деформируемого состояния по элементарным макрообъемам, значительно превосходящим размеры неоднородностей, но достаточно малым по сравнению с размерами тела. При таком методе основные уравнения механики сплошной среды формулируются в пространстве, точками которого являются элементарные макрообъемы, и результаты усреднений в уравнении состояния самым непосредственным способом переносятся на общие уравнения механики твердого тела и будут пригодны к решению краевых задач [2, 52].

Недостатком данного подхода является полное отсутствие информации о протекании явления внутри структуры элементарного объема, т.е. на уровне включений [2, 52].

В качестве примера третьего подхода рассмотрим армированный материал, состоящий из двух фаз. Будем предполагать, что материал в среднем изотропен (имеет место хаотическое армирование рублеными волокнами, сферолитами и т.п.). Можно использовать гипотезу Фойгта, которая заключается в том, что в простейших опытах на чистое растяжение и всестороннее сжатие деформации по всему объему композиционного материала постоянны. В этом случае для модуля сдвига и модуля всестороннего растяжения-сжатия получаются известные формулы, составленные по правилу «смеси», т.е. концентрации материала в объеме. Второй предельный случай (гипотеза Рейса) заключается в том, что в тех же простейших экспериментах предполагаются постоянные по объему напряжения [2, 52].

Сформулированные гипотезы внутри композиционного тела никогда не выполняются, так как получаемые из соотношений Фойгта напряжения таковы, что на поверхности контакта арматуры и связующего они не уравновешиваются, а получаемые из соотношения Рейсса деформации имеют значения, при которых между связующим и арматурой не может быть сцепления [2, 52].

Тем не менее, формулы, полученные на основании этих гипотез, имеют определенную практическую ценность, так как из энергетических соображений являются соответственно верхней и нижней оценкой истинных модулей композиционного материала [2, 52].

Арифметическое среднее между приближениями Рейсса и Фойгта называется приближением Хилла. Разность значений эффективных модулей Рейсса и Фойгта называется вилкой Хилла. Уменьшение вилки Хилла является одной из основных задач теории композиционных материалов [2, 52].

Оказалось, что приближение Хилла является одной из границ вилки Кравчука-Тарасюка, существенно сужающей вилку Хилла. Таким образом, предельная теоретическая точность вычисления эффективных свойств композита достигается вычислением среднего арифметического значений вилки Кравчука-Тарасюка (приближение Кравчука-Тарасюка) [2, 52].

Необходимо отметить, что несовершенства структуры, явление отсутствия адгезии между компонентами, отклонение компонент от правильной геометрической формы и другие неучтенные моменты могут свести на нет результаты строго теоретических исследований [2, 52].

5.8.5. Учет разрушений на межфазной границе в рамках теории композиционных тел

Дефекты на межфазной границе могут быть различными: клеевое соединение не по всей поверхности, а по некоторым подобластям и т.п. Кроме того, в композиционных, в том числе армированных слоистых материалах, из-за особенностей технологического характера, происходящие интенсивные физико-механические процессы на границах раздела фаз приводят к формированию тонких неоднородных межфазных слоев, различного рода несовершенств межфазной структуры. В этом случае обычное представление о непрерывности перемещений при переходе через межфазную границу может оказаться далеким от реальной ситуации. Наличие таких факторов можно трактовать как ослабленность адгезии между компонентами [2, 52].

Следует отметить также постановку задач о взаимодействии твердых тел с покрытиями с единичным дефектом, их системой на межфазной границе или неполным сцеплением слоев. Однако наличие зон с ослабленным межфазным контактом на поверхностях раздела смежных слоев приводит к существенному усложнению математической формулировки граничной задачи [2, 52].

С другой стороны, при создании новых конструкций на этапе технологического поиска оказываются полезными даже данные прогнозирования ее поведения без учета несовершенств, в частности, в предположении идеальной технологии [2, 52].

5.9. Усреднение свойств одномерного, в среднем изотропного композиционного стержня при однородном напряжено-деформированном состоянии

Методическую возможность общения стержневой модели покрытия на композиционный случай представляет гипотеза об однородном напряженно-деформированном состоянии каждого из стержней по всему объему и независимость этого напряженного состояния от соседних стержней [34].

Именно эта базовое свойство как исходной модели Винклера так и предложенной авторами обобщенной стержневой модели позволяет создать методически целостную и непротиворечивую модель деформирования композиционного покрытия [34].

Фактически в рамках теории в среднем изотропных композитов для стержневой модели необходимо вычислить эффективную диаграмму сжатия единичного стержня, который, как предполагается, имеет объем не меньший чем представительный объем композиционного материала, т.е. является макроточкой. После этого параметры в решениях контактных задач для однородного покрытия необходимо просто заменить на одноименные эффективные параметры усредненной композиционной среды [34].

Таким образом, для решения задачи определения эффективных модулей необходимо рассмотреть элемент композиционного материала покрытия (макроточку), на границе которого задаются воздействия, имитирующие возникающие в твердом теле, т.е. в данном случае рассматривается одноосное сжатие призматического стержня, являющегося представителем стержней, находящихся в модели покрытия [34].

Исходные данные для получения усредненных характеристик композиционных призматических стержней, моделирующих деформацию покрытия. Предполагается, что значения объемных долей γ_k $(k=\overline{1,N})$ (концентраций) компонент композиционного покрытия известны для покрытия в целом, и они же являются объемными долями компонент для каждого из стержней. При усреднении упругих характеристик композиционного материала стержня предполагается, что механические свойства E_k (модуль упругости) известны для каждой компоненты k $(k=\overline{1,N})$ [34, 52].

Обозначим через $\sigma_{z,k}$ и $\varepsilon_{z,k}$ дискретные значения напряжений и деформаций на k-ой компоненте среды в представительном объеме. Таким образом, используется предположение, что вне зависимости от формы включения, напряжения и деформации для включений из одного материала одинаковы [34, 52].

Домножая дискретные значения напряжений и деформаций на γ_k и суммируя по k, получаем средние по реализации композиции напряжения $\langle\sigma_z\rangle$

и деформации $\langle \varepsilon_z \rangle$ (по Фойгту или Рейссу), действующие в композиционном стержне [34, 52]:

$$\langle \sigma_z \rangle = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \, \sigma_{z,k} \, , \qquad\qquad \langle \varepsilon_z \rangle = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \, \varepsilon_{z,k} \, . \qquad (181)$$

5.9.1. Усреднение упругих свойств композиционного материала

5.9.1.1. Применение гипотезы Фойгта

Будем полагать, что все компоненты стержня испытывают одинаковые деформации. Предполагается, что в силу гипотезы эргодичности, при любом распределении материала результат усреднения по Фойгту будет одинаков [34, 52].

Однако задача будет иметь точное решенные в случае простого сжатия вертикально слоистого призматического стержня (Рисунок 28), т.к. при таком нагружении гипотеза об однородной деформации всех компонент многокомпонентного покрытия удовлетворяется по определению. Следовательно, приближение Фойгта эффективных свойств материала стержня проще всего определить, исходя из указанной задачи [34, 52].

Более того, данная расчетная схема, очевидно, позволяет рассмотреть вертикально слоистый стержень не более чем из N слоев. При этом k-ый вертикальный слой ($k = \overline{1, N}$) имеет ширину, например, вдоль X- направления $\Delta_k = \gamma_k \cdot \Delta$, а вдоль Y-направления Δ (Рисунок 28). Очевидно, что направления X и Y равнозначны, поэтому полученные далее результаты не зависят от их перестановки [34, 52].

Деформации ε_z всего стержня равна соответствующим деформациям всех его вертикальных слоев, т.е. выполнено равенство $\varepsilon_z = \varepsilon_{z,k} = w/h$ $\forall k = \overline{1, N}$ (где w – одинаковые перемещения пакета вертикальных слоев). Исходя из гипотезы Фойгта, отметим выполнение следующего равенства [34, 52]:

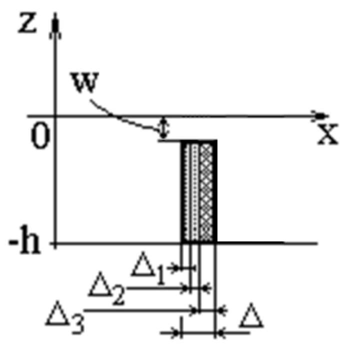

Рисунок 28. Схема сжатия вертикально слоистого стержня

$$\langle \varepsilon_z \rangle_\Phi = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \varepsilon_{z,k} = \varepsilon_z = \frac{w}{h}. \qquad (182)$$

В этом случае напряжения $\sigma_{z,k}$, действующие на k-ый вертикальный слой, определяются очевидным равенством [34, 52]:

$$\sigma_{z,k} = E_k \cdot \varepsilon_{z,k} = E_k \cdot \varepsilon_z. \qquad (183)$$

Домножая (183) на γ_k и суммируя по k, получаем с учетом (182):

$$\langle \sigma \rangle_\Phi = \langle E \rangle_\Phi \cdot \varepsilon_z, \qquad (184)$$

где

$$\langle E \rangle_\Phi = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot E_k.$$

С учетом (182) уравнение (184) можно переписать в смысле эффективных значений [34, 52]:

$$\langle \sigma_z \rangle_\Phi = \langle E \rangle_\Phi \cdot \langle \varepsilon_z \rangle_\Phi. \qquad (185)$$

5.9.1.2. Приближение Рейсса

Будем предполагать, что у всех компонент композиционного стержня одинаковое напряженное состояние при сжатии. Исходя из гипотезы эргодичности, напряженно-деформированное состояние компонент стержня не зависит от размеров и распределения компонент в стержне [34, 52].

Поскольку гипотеза об однородном напряженном состоянии для композиционного стержня автоматически удовлетворяется при горизонтально слоистой структуре стержня, эту структуру и будем рассматривать для решения задачи в приближении Рейсса [34, 52] (Рисунок 29).

Рассмотрим деформацию многослойного призматического стержня размером $\Delta \times \Delta \times h$. Рассмотрим горизонтально слоистый стержень из N слоев. При этом k-ый слой ($k = \overline{1, N}$) имеет высоту $h_k = \gamma_k \cdot h$ и модуль упругости E_k материала слоя (Рисунок 29).

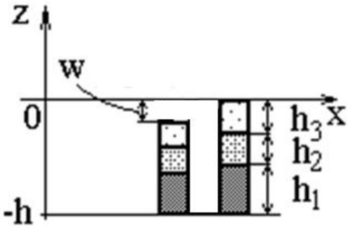

Рисунок 29. Схема нагружения горизонтально слоистого стержня

Напряжения σ_z, действующие на весь стержень (Рисунок 29), равны соответствующим напряжениям, действующим на все его горизонтальные слои, т.е. выполнено равенство $\sigma_z = \sigma_{z,k} \ \ \forall k = \overline{1, N}$. Тогда [34, 52]:

$$\langle \sigma_z \rangle_P = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \sigma_{z,k} = \sigma_z . \tag{186}$$

Получаем следующие уравнения для деформации $\varepsilon_{z,k}$ отдельного слоя с номером ($k = \overline{1, n}$) (Рисунок 29):

$$\varepsilon_{z,k} = \frac{\sigma_z}{E_k} . \tag{187}$$

Следуя общей методике – домножая на концентрации на γ_k и суммируя по k, определим эффективные деформации многослойного стержня [34, 52]:

$$\langle \varepsilon_z \rangle_P = \frac{\sigma_z}{\langle E \rangle_P} , \tag{188}$$

где усредненные коэффициенты $\langle E \rangle_P$ определяются уравнениями:

$$\langle E \rangle_P = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k}{E_k} \right)^{-1} .$$

Учитывая (186), уравнение (188) можно переписать в виде [34, 52]:

$$\langle \sigma_z \rangle_P = \langle E \rangle_P \cdot \langle \varepsilon_z \rangle_P . \tag{189}$$

Поскольку существует только два оценочных решения (по гипотезам Фойгта и Рейсса) для эффективных свойств композиционного стержня, и одно эффективное значение всегда больше второго, то уместно полагать, что реальное значения эффективности композиционного стержня расположены на отрезке $\left[\langle E\rangle_{\Phi},\langle E\rangle_{P}\right]$. Пара значений $\langle E\rangle_{\Phi}$ и $\langle E\rangle_{P}$ называется вилкой Фойгта-Рейсса [34, 52].

5.9.1.3. Уменьшение вилки Фойгта-Рейсса. Приближение Кравчука-Тарасюка

Будем предполагать, что реальные эффективные деформации, вычисленные по Фойгту $\langle \varepsilon_z\rangle_{\Phi}$ и Рейссу $\langle \varepsilon_z\rangle_{P}$, совпадают ($\langle \varepsilon_z\rangle=\langle \varepsilon_z\rangle_{\Phi}=\langle \varepsilon_z\rangle_{P}$), а реальное среднее напряжение $\langle \sigma_z\rangle$ определяется по правилу смеси $\langle \sigma_z\rangle=\alpha\cdot\langle \sigma_z\rangle_{\Phi}+(1-\alpha)\cdot\langle \sigma_z\rangle_{P}$, где $\alpha\in[0,1]$ – некоторый вещественный коэффициент. Тогда с учетом (185) и (189) можно записать:

$$\langle \sigma_z\rangle=\alpha\cdot\langle \sigma_z\rangle_{\Phi}+(1-\alpha)\cdot\langle \sigma_z\rangle_{P}=\left(\alpha\langle E\rangle_{\Phi}+(1-\alpha)\langle E\rangle_{P}\right)\langle \varepsilon_z\rangle. \qquad (190)$$

Интегрируя (190) по α, получаем наиболее вероятное при данных гипотезах выражение для эффективного модуля Юнга (приближение Хилла) [34, 52]:

$$\langle \sigma_z\rangle=\langle E\rangle_{X}\langle \varepsilon_z\rangle,$$

где

$$\langle E\rangle_{X}=\int_0^1\left(\alpha\langle E\rangle_{\Phi}+(1-\alpha)\langle E\rangle_{P}\right)d\alpha=\frac{1}{2}\left(\langle E\rangle_{\Phi}+\langle E\rangle_{P}\right). \qquad (191)$$

Далее будем использовать обратный набор гипотез. Будем предполагать, что реальные эффективные напряжения, вычисленные по Фойгту $\langle \sigma_z\rangle_{\Phi}$ и Рейссу $\langle \sigma_z\rangle_{P}$, совпадают ($\langle \sigma_z\rangle=\langle \sigma_z\rangle_{\Phi}=\langle \sigma_z\rangle_{P}$), а реальная средняя деформация $\langle \varepsilon_z\rangle$ определяется по правилу смеси $\langle \varepsilon_z\rangle=\alpha\cdot\langle \varepsilon_z\rangle_{\Phi}+(1-\alpha)\cdot\langle \varepsilon_z\rangle_{P}$, где $\alpha\in[0,1]$ - некоторый вещественный коэффициент. Тогда с учетом (185) и (189) можно записать [34, 52]:

$$\left(\frac{\alpha}{\langle E\rangle_{\Phi}}+\frac{(1-\alpha)}{\langle E\rangle_{P}}\right)\langle \sigma_z\rangle=\alpha\cdot\langle \varepsilon_z\rangle_{\Phi}+(1-\alpha)\cdot\langle \varepsilon_z\rangle_{P}=\langle \varepsilon_z\rangle. \qquad (192)$$

Интегрируя (192) по α, получаем наиболее вероятное при обратных гипотезах выражение для эффективного модуля Юнга [34, 52]:

$$\int_0^1 \left(\frac{\alpha}{\langle E \rangle_\Phi} + \frac{(1-\alpha)}{\langle E \rangle_P} \right) d\alpha = \frac{\langle E \rangle_\Phi + \langle E \rangle_P}{2\langle E \rangle_\Phi \langle E \rangle_P}. \qquad (193)$$

Выражения (191) и обратное к (193) составляют вилку Кравчука-Тарасюка. Эффективное значение по Кравчуку-Тарасюку $\langle E \rangle_{K-T}$ можно определить как среднее арифметическое значений (191) и обратного к (193) [34, 52]:

$$\langle E \rangle_{K-T} = \frac{1}{4}\left(\langle E \rangle_\Phi + \langle E \rangle_P\right) + \frac{\langle E \rangle_\Phi \langle E \rangle_P}{\langle E \rangle_\Phi + \langle E \rangle_P}. \qquad (194)$$

5.9.1.4. Применение, полученных приближений при моделировании композиционных материалов слоя различной структуры

Непосредственное применение полученных приближений обеспечивается гипотезой о малости размера Δ поперечного квадратного сечения сжимаемого стержня. Это позволяет, например результаты п. 2.9.2. «Глубина вдавливания в упругий материал» этой книги переписать для композиционного в среднем изотропного материала покрытия с использованием (194):

- параболический цилиндр (из (18), подставляя (41) и (194), получаем):

$$\delta = -\frac{1}{2 \cdot R}\left(\frac{3 \cdot h \cdot R}{2 \cdot \langle E \rangle_{K-T}} P \right)^{\frac{2}{3}},$$

- параболоид вращения (из (28), подставляя (42) и (194), получаем):

$$\delta = -\sqrt{\frac{h}{\pi \cdot R \cdot \langle E \rangle_{K-T}} P},$$

- конус (из (32), подставляя (42) и (194), получаем):

$$\delta = -\sqrt[3]{\frac{3 \cdot h \cdot tg(\alpha)^2}{\pi \cdot \langle E \rangle_{K-T}} P},$$

- правильная пирамида (из (37), подставляя (44) и (194), получаем):

$$\delta = -\sqrt[3]{\frac{3 \cdot h \cdot tg(\alpha)^2}{(m-1) \cdot tg(\pi/(m-1)) \cdot \langle E \rangle_{K-T}} P}.$$

Абсолютно аналогично можно получить глубины вдавливания для горизонтально слоистых материалов покрытия используя среднее значение модуля упругости по Рейссу (189) $\langle E \rangle_P = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k}{E_k} \right)^{-1}$ (Рисунок 29).

- параболический цилиндр (из (18), подставляя (41) и (189), получаем):

$$\delta = -\frac{1}{2 \cdot R} \left(\frac{3 \cdot h \cdot R}{2 \cdot \langle E \rangle_P} P \right)^{\frac{2}{3}},$$

- параболоид вращения (из (28), подставляя (42) и (189), получаем):

$$\delta = -\sqrt{\frac{h}{\pi \cdot R \cdot \langle E \rangle_P} P},$$

- конус (из (32), подставляя (42) и (189), получаем):

$$\delta = -\sqrt[3]{\frac{3 \cdot h \cdot tg(\alpha)^2}{\pi \cdot \langle E \rangle_P} P},$$

- правильная пирамида (из (37), подставляя (44) и (189), получаем):

$$\delta = -\sqrt[3]{\frac{3 \cdot h \cdot tg(\alpha)^2}{(m-1) \cdot tg(\pi/(m-1)) \cdot \langle E \rangle_P} P}.$$

Также можно с помощью приближения Фойгта (185) (Рисунок 28) учесть вертикально волокнистую структуру покрытия на микро или наноуровне.

5.9.2. Усреднение упругопластических свойств композиционных покрытий, деформация компонент которых задана билинейными диаграммами Прандтля

В данном случае для призматических стержней, моделирующих деформацию покрытия конечной высоты, необходимо рассмотреть следующее уравнение состояния (9) (Рисунок 6, а) [34]. Предполагается (9), что механические свойства E_k (модуль упругости), $E_{эт,k}^{сжатия}$ (касательный модуль пластичности при сжатии), $\sigma_{эт,k}^{сжатия}$ (предел текучести при сжатии) известны для каждой компоненты с номером k ($k = \overline{1,N}$) [34].

Принцип реализации метода гомогенизации для призматического стержня квадратного сечения из простейшей модели деформируемого покрытия заключается в применении гипотезы Фойгта для призматического стержня и гипотезы Рейсса, описанных выше. Предполагается, что решения, полученные и для билинейной диаграммы Прандтля (как и для упругого случая), являются верхней и нижней оценкой эффективных коэффициентов композиционного материала [34].

5.9.2.1. Гипотеза Фойгта для стержня (макроточки) композиционного материала покрытия из N компонент, деформируемых в соответствии с билинейной диаграммой Прандтля

В данном случае следует решить задачу усреднения параметров материалов, исходя из простого сжатия вертикально слоистого призматического стержня (Рисунок 28), т.к. при таком нагружении гипотеза об однородной деформации всех компонент многокомпонентного покрытия удовлетворяется по определению. При этом k-ый вертикальный слой ($k = \overline{1,N}$) имеет ширину, например, вдоль $0X$-направления $\Delta_k = \gamma_k \cdot \Delta$, а вдоль $0Y$-направления Δ (Рисунок 28). Очевидно, что в данном случае, как и ранее, направления $0X$ и $0Y$ совершенно равнозначны, поэтому полученные далее результаты не зависят от их перестановки [34].

Деформация ε_z всего стержня (Рисунок 28) равна соответствующим деформациям всех его вертикальных слоев, т.е. выполнено равенство $\varepsilon_z = \varepsilon_{z,k}$ $\forall k = \overline{1,N}$, где $\varepsilon_z = w/h$. Следовательно, из (9), можно несколько переписав, получить следующие уравнения для напряжения $\sigma_{z,k}$ отдельного вертикального слоя с номером ($k = \overline{1,N}$) при сжатии (Рисунок 28) [34]:

$$
\sigma_{z,k} = \begin{cases} E_k \cdot \varepsilon, & \dfrac{\sigma_{эт,k}^{сжатия}}{E_k} < \varepsilon \le 0, \\ E_{эт,k}^{сжатия} \cdot \varepsilon + \sigma_{эт,k}^{сжатия} \cdot \left(1 - \dfrac{E_{эт,k}^{сжатия}}{E_k} \right), & \varepsilon \le \dfrac{\sigma_{эт,k}^{сжатия}}{E_k}. \end{cases} \tag{195}
$$

Тогда среднее напряжение $\langle \sigma_z \rangle = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \sigma_{z,k}$, действующее на все вертикальные слои одного призматического стержня, можно определить аналогично (184) суммированием уравнения(195), домноженного на γ_k [34]:

$$
\langle \sigma_z \rangle = \begin{cases} \langle E \rangle_{Ф} \cdot \varepsilon_z, & \dfrac{\left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{Ф}}{\langle E \rangle_{Ф}} < \varepsilon_z \le 0, \\ \left\langle E_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{Ф} \cdot \varepsilon_z + \left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{Ф} \cdot \left(1 - \dfrac{\left\langle E_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{Ф}}{\langle E \rangle_{Ф}} \right), & \varepsilon_z \le \dfrac{\left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{Ф}}{\langle E \rangle_{Ф}}. \end{cases}
$$

где усредненные по Фойгту коэффициенты $\langle E \rangle_{Ф}$, $\left\langle E_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{Ф}$, $\left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{Ф}$, вертикально слоистого призматического стержня определяются уравнениями [34]:

$$
\langle E \rangle_{Ф} = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot E_k, \qquad \left\langle E_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{Ф} = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot E_{эт,k}^{сжатия},
$$

$$
\left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{Ф} = \left(\frac{\langle E \rangle_{Ф}}{\langle E \rangle_{Ф} - \left\langle E_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{Ф}} \right) \sum_{k=1}^{N} \left(\gamma_k \cdot \sigma_{эт,k}^{сжатия} \cdot \left(1 - \frac{E_{эт,k}^{сжатия}}{E_k} \right) \right). \tag{196}
$$

5.9.2.2. Гипотеза Рейсса. Нелинейно деформируемое многослойное покрытие, деформация слоев которого описывается билинейной диаграммой Прандтля

Как и ранее в рамках гипотезы Рейсса в силу эргодичности распределения компонент композиционного материала стержень рассматривается в виде простейшей многослойной модели из N слоев с высотами h_k ($k=\overline{1,N}$) (Рисунок 29) [34].

Напряжения σ_z, действующие на верхней границе стержня (Рисунок 29), равны соответствующим напряжениям, действующим на все его горизонтальные слои, т.е. выполнено равенство $\sigma_z = \sigma_{z,k}$ ($k=\overline{1,N}$). Обращая (195) можно получить следующие уравнения для деформации $\varepsilon_{z,k}$ отдельного слоя с номером k ($k=\overline{1,N}$) при сжатии (Рисунок 29) [34]:

$$\varepsilon_{z,k} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_z}{E_k}, & \sigma^{сжатия}_{эт,k} < \sigma_z \le 0, \\[2ex] \dfrac{\sigma_z}{E^{сжатия}_{эт,k}} + \sigma^{сжатия}_{эт,k} \cdot \dfrac{E^{сжатия}_{эт,k} - E_k}{E^{сжатия}_{эт,k} \cdot E_k}, & \sigma_z \le \sigma^{сжатия}_{эт,k}. \end{cases} \tag{197}$$

Определим средние (по слоям) деформации стержня в Z-направлении суммированием уравнения (197), умноженного на γ_k для $k=\overline{1,N}$ [34]:

$$\left\langle \varepsilon_z \right\rangle = \begin{cases} \dfrac{\sigma_z}{\left\langle E \right\rangle_P}, & \left\langle \sigma^{сжатия}_{эт} \right\rangle_P < \sigma_z \le 0, \\[2ex] \dfrac{\sigma_z}{\left\langle E^{сжатия}_{эт} \right\rangle_P} + \left\langle \sigma^{сжатия}_{эт} \right\rangle_P \cdot \dfrac{\left\langle E^{сжатия}_{эт} \right\rangle_P - \left\langle E \right\rangle_P}{\left\langle E^{сжатия}_{эт} \right\rangle_P \cdot \left\langle E \right\rangle_P}, & \sigma_z \le \left\langle \sigma^{сжатия}_{эт} \right\rangle_P. \end{cases}$$

где усредненные коэффициенты $\left\langle E \right\rangle_P$, $\left\langle E^{сжатия}_{эт} \right\rangle_P$, $\left\langle \sigma^{сжатия}_{эт} \right\rangle_P$ горизонтально слоистого призматического стержня определяются уравнениями [34]:

$$\left\langle E \right\rangle_P = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k}{E_k} \right)^{-1}, \qquad \left\langle E^{сжатия}_{эт} \right\rangle_P = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k}{E^{сжатия}_{эт,k}} \right)^{-1},$$

$$\left\langle \sigma^{сжатия}_{эт} \right\rangle_P = \frac{\left\langle E^{сжатия}_{эт} \right\rangle_P \cdot \left\langle E \right\rangle_P}{\left\langle E^{сжатия}_{эт} \right\rangle_P - \left\langle E \right\rangle_P} \sum_{k=1}^{N} \left(\gamma_k \cdot \sigma^{сжатия}_{эт,k} \cdot \frac{E^{сжатия}_{эт,k} - E_k}{E^{сжатия}_{эт,k} \cdot E_k} \right). \tag{198}$$

5.9.2.3. Вычисление эффективной диаграммы Хилла деформирования структурно неоднородного упругопластического композиционного материала покрытия, описываемого билинейной диаграммой Прандтля

Следуя Хиллу, можно записать эффективную диаграмму деформирования материала композиционного покрытия, моделируемого призматическими стержнями как среднее арифметическое двух построенных эффективных диаграмм (по Фойгту и по Рейссу) [34].

Остановиться на этом варианте приближения для эффективной билинейной диаграммы Прандтля вынуждает сложность вычислений приближения Кравчука-Тарасюка [34].

Исходя из (196), (198), для рассматриваемой модели структурно неоднородного покрытия постоянной высоты получаем [34]:

$$\left\langle \sigma_z \right\rangle = \begin{cases} \left\langle E \right\rangle_X \cdot \left\langle \varepsilon_z \right\rangle, & \dfrac{\left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_X}{\left\langle E \right\rangle_X} < \left\langle \varepsilon_z \right\rangle \le 0, \\ \left\langle E_{эт}^{сжатия} \right\rangle_X \cdot \left\langle \varepsilon_z \right\rangle + & \\ \quad + \left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_X \cdot \left(1 - \dfrac{\left\langle E_{эт}^{сжатия} \right\rangle_X}{\left\langle E \right\rangle_X} \right), & \left\langle \varepsilon_z \right\rangle \le \dfrac{\left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_X}{\left\langle E \right\rangle_X}, \end{cases} \tag{199}$$

где эффективные упругопластические характеристики композиционного материала [34]:

$$\left\langle E \right\rangle_X = \frac{\left\langle E \right\rangle_Ф + \left\langle E \right\rangle_P}{2}, \quad \left\langle E_{эт}^{сжатия} \right\rangle_X = \frac{\left\langle E_{эт}^{сжатия} \right\rangle_Ф + \left\langle E_{эт}^{сжатия} \right\rangle_P}{2},$$

$$\left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_X = \frac{1}{2 \cdot \left(1 - \dfrac{\left\langle E_{эт}^{сжатия} \right\rangle_X}{\left\langle E \right\rangle_X} \right)} \times \left(\left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_Ф \cdot \left(1 - \dfrac{\left\langle E_{эт}^{сжатия} \right\rangle_Ф}{\left\langle E \right\rangle_Ф} \right) + \right. \tag{200}$$

$$+\left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{\Phi} \cdot \left(1 - \frac{\left\langle E_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{\Phi}}{\langle E \rangle_{\Phi}} \right) \Bigg).$$

5.9.2.4. Определение твердости в случае упруго-идеально-пластичных компонент композиционного покрытия

Для демонстрации применения полученных соотношений на практике используем полученные зависимости для твердости по Мейеру с абсолютным значением предела текучести при сжатии.

Фактически, как и в упругом случае, необходимо просто заменить упругопластические характеристики однородного тела на их эффективные аналоги (200) для эффективной диаграммы по Хиллу (199).

Отметим, что в случае упруго-идеально-пластических компонент покрытия (или как вариант хрупких компонент) в диаграммах Фойгта, Рейсса и Хилла с коэффициентами (196), (198), (200) можно получить, что:

$$\left\langle E_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{\Phi} = \left\langle E_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{P} = \left\langle E_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{X} = 0 .$$

Следовательно,

$$\left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{X} = \frac{\left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{\Phi} + \left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{P}}{2} . \qquad (201)$$

Из уравнений связывающих твердость по Мейеру с абсолютным значением, эффективного предела текучести при сжатии получаем с учетом эффективного размера области контакта $\langle a_{пласт} \rangle$:

- для вдавливания параболоида вращения (116):

$$HM = \left| \left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{X} \right| \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot R \cdot |\delta|}{\langle a_{пласт} \rangle^{2}} - 1 \right) \right);$$

- для вдавливания конуса (119):

$$HM = \left| \left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_{X} \right| \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{|\delta|}{tg(\alpha) \cdot \langle a_{пласт} \rangle} - 1 \right) \cdot \left(\frac{|\delta|}{tg(\alpha) \cdot \langle a_{пласт} \rangle} + 2 \right) \right);$$

- для вдавливания пирамиды (122):

$$HM = \left|\left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_X\right| \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{|\delta|}{tg(\alpha) \cdot \langle a_{пласт} \rangle} - 1\right) \cdot \left(\frac{|\delta|}{tg(\alpha) \cdot \langle a_{пласт} \rangle} + 2\right)\right).$$

Таким образом, при испытаниях на твердость определятся абсолютное значение эффективного предела текучести при сжатии для всех компонент $\left|\left\langle \sigma_{эт}^{сжатия} \right\rangle_X\right|$.

5.9.3. Применение модифицированного степенного закона Бюльфингера для описания деформационных свойств компонент композиционного покрытия и вычисление на их основе эффективных диаграмм сжатия

В данном случае для призматических стержней, моделирующих деформацию покрытия конечной высоты необходимо рассмотреть уравнение состояния (10) (Рисунок 6, б) [34]. Прологарифмировав обе части уравнения (10) можно получить:

$$\ln(\sigma_z) = \ln\left(\sigma_{эт}^{сжатия}\right) - \beta \cdot \ln\left(\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right) + \beta \cdot \ln(\varepsilon_z). \qquad (202)$$

При решении поставленной задачи предполагается, что для любой k-ой компоненты ($k = \overline{1, N}$, где N - общее количество компонент) имеет заданную объемную долю γ_k и экспериментально определенные значения характерного напряжения $\sigma_{эт,k}^{сжатия}$, деформации $\varepsilon_{эт,k}^{сжатия}$ и показателя степени β.

5.9.3.1. Применение гипотезы Фойгта для вычисления эффективных коэффициентов степенной функции, определяющей деформирование композиционного стержня

В данном случае следует решить задачу усреднения параметров материалов исходя из простого сжатия вертикально слоистого призматического стержня (Рисунок 28), т.к. при таком нагружении гипотеза об однородной деформации всех компонент многокомпонентного покрытия удовлетворяется по определению. При этом k-ый вертикальный слой ($k = \overline{1, N}$) имеет ширину, например, вдоль $0X$-направления $\Delta_k = \gamma_k \cdot \Delta$, а вдоль $0Y$- направления Δ (Рисунок 28). Очевидно, что в данном случае, как и ранее направления $0X$ и

$0Y$ совершенно равнозначны, поэтому полученные далее результаты не зависят от их перестановки.

Деформация ε_z, всего стержня целиком (Рисунок 28), равна соответствующим деформациям всех его вертикальных слоев, т.е. выполнено равенство $\varepsilon_z = \varepsilon_{z,k}$ $(k = \overline{1,N})$, где $\varepsilon_z = w/h$.

Из (202) для логарифма напряжения $\ln(\sigma_k)$ отдельного вертикального слоя с номером k $(k = \overline{1,N})$ при сжатии получаем:

$$\ln(\sigma_{z,k}) = \ln\left(\sigma_{эт,k}^{сжатия}\right) - \beta_k \cdot \ln\left(\varepsilon_{эт,k}^{сжатия}\right) + \beta_k \cdot \ln(\varepsilon_z).$$

Тогда среднее значение логарифма напряжения $\langle \ln(\sigma) \rangle$, действующее на все вертикальные слои одного призматического стержня можно определить как

$$\langle \ln(\sigma_z) \rangle_Ф = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \ln\left(\sigma_{эт,k}^{сжатия}\right) - \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \beta_k \cdot \ln\left(\varepsilon_{эт,k}^{сжатия}\right) + \\ + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \beta_k \cdot \ln(\varepsilon_z). \tag{203}$$

Полагая в последнем равенстве, что $\langle \ln(\sigma) \rangle_Ф = \ln\left(\langle \sigma \rangle_Ф\right)$ можно получить приближение эффективных свойств по Фойгту:

$$\langle \sigma_z \rangle_Ф = \left\langle \frac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{\left(\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right)^{\beta}} \right\rangle_Ф \cdot \varepsilon_z^{\langle \beta \rangle_Ф},$$

где

$$\langle \beta \rangle_Ф = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \beta_k, \\ \left\langle \frac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{\left(\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right)^{\beta}} \right\rangle_Ф = \frac{e^{\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \ln\left(\sigma_{эт,k}^{сжатия}\right)}}{e^{\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \beta_k \cdot \ln\left(\varepsilon_{эт,k}^{сжатия}\right)}}. \tag{204}$$

5.9.3.2. Гипотеза Рейсса. Эффективная степенная функция в уравнении состояния многослойного покрытия

Рассмотрим гипотезу Рейсса, т.е. гипотезу о постоянстве действующих на стержень напряжений. В силу эргодичности распределения включений из разных материалов достаточно перейти к рассмотрению горизонтально слоистого стержня из N слоев размером $\Delta X \Delta X h$, имитирующего деформацию стержневой модели покрытия в некоторой точке поверхности. При этом k-ый слой ($k=\overline{1,N}$) имеет высоту $\gamma_k \cdot h$ и экспериментально определенные значения $\sigma_{эт,k}^{сжатия}$, $\varepsilon_{эт,k}^{сжатия}$ и β_k.

Напряжения σ_z, действующие на верхнюю границу стержня (Рисунок 29), равны соответствующим напряжениям, действующим на все его горизонтальные слои, т.е. выполнено равенство $\sigma_z = \sigma_{z,k}\ \ \forall k=\overline{1,N}$.

Из (202) можно получить для принятой системы обозначений и координат:

$$\ln(\sigma_z) = \ln\left(\sigma_{эт,k}^{сжатия}\right) - \beta_k \cdot \ln\left(\varepsilon_{эт,k}^{сжатия}\right) + \beta_k \cdot \ln\left(\varepsilon_{z,k}\right).$$

Разделим предыдущее равенство на β_k, домножим на γ_k и выполним суммирование. Получаем:

$$\left\langle \ln(\sigma_z) \right\rangle_P = \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \frac{\ln\left(\sigma_{эт,k}^{сжатия}\right)}{\beta_k}\right)}{\left(\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \frac{\gamma_k}{\beta_k}\right)} - \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \ln\left(\varepsilon_{эт,k}^{сжатия}\right)\right)}{\left(\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \frac{\gamma_k}{\beta_k}\right)} + \tag{205}$$
$$+ \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \frac{\gamma_k}{\beta_k}\right)} \left\langle \ln(\varepsilon_z) \right\rangle_P.$$

Помня, что $\left\langle \ln(\sigma_z) \right\rangle_P = \ln\left(\left\langle \sigma_z \right\rangle_P\right)$ и предполагая, что $\left\langle \ln(\varepsilon_z) \right\rangle_P = \ln\left(\left\langle \varepsilon_z \right\rangle_P\right)$. Из последнего уравнения можно получить:

$$\langle \sigma_z \rangle_P = \left(\frac{e^{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \gamma_k \frac{\ln\left(\sigma_{эт,k}^{сжатия}\right)}{\beta_k} \right)}}{e^{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \ln\left(\varepsilon_{эт,k}^{сжатия}\right) \right)}} \cdot \langle \varepsilon_z \rangle_P \right)^{\langle \beta \rangle_P}, \qquad (206)$$

где

$$\langle \beta \rangle_P = \left(\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \frac{\gamma_k}{\beta_k} \right)^{-1}.$$

5.9.3.3. Эффективная диаграмма Хилла деформирования нелинейно деформируемого в соответствии с модифицированной степенной функцией Бюльфингера структурно неоднородного композиционного материала покрытия

Используя (203) и (205) и предположения, что $\langle \ln(\varepsilon_z) \rangle_Ф = \langle \ln(\varepsilon_z) \rangle_P = \langle \ln(\varepsilon_z) \rangle_X = \ln\left(\langle \varepsilon_z \rangle_X\right)$, а также, что $\left(\langle \ln(\sigma_z) \rangle_Ф + \langle \ln(\sigma_z) \rangle_P\right)/2 = \langle \ln(\sigma_z) \rangle_X = \ln\left(\langle \sigma_z \rangle_X\right)$ можно получить приближение Хилла для логарифмов напряжений и деформаций:

$$\ln\left(\langle \sigma_z \rangle_X\right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \ln\left(\sigma_{эт,k}^{сжатия}\right) + \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \gamma_k \frac{\ln\left(\sigma_{эт,k}^{сжатия}\right)}{\beta_k} \right)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \gamma_k \frac{\gamma_k}{\beta_k} \right)} \right) -$$

$$-\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \beta_k \cdot \ln\left(\varepsilon_{эт,k}^{сжатия}\right) + \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \ln\left(\varepsilon_{эт,k}^{сжатия}\right) \right)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \gamma_k \frac{\gamma_k}{\beta_k} \right)} \right) + \qquad (207)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\cdot\beta_k+\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\frac{\gamma_k}{\beta_k}\right)}\right)\cdot\ln\left(\langle\varepsilon_z\rangle_X\right).$$

Переходя от (207) к степенной записи эффективной диаграммы Хилла получаем:

$$\langle\sigma_z\rangle_X=\left\langle\frac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{\left(\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right)^{\beta}}\right\rangle_X\cdot\varepsilon_z^{\langle\beta\rangle_X},$$

где

$$\langle\beta\rangle_X=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\cdot\beta_k+\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\frac{\gamma_k}{\beta_k}\right)}\right),$$

(204)

$$\left\langle\frac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{\left(\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right)^{\beta}}\right\rangle_X=$$

$$=\frac{\sqrt{Exp\left(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\cdot\ln\left(\sigma_{эт,k}^{сжатия}\right)+\frac{\left(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\frac{\ln\left(\sigma_{эт,k}^{сжатия}\right)}{\beta_k}\right)}{\left(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\frac{\gamma_k}{\beta_k}\right)}\right)}}{\sqrt{Exp\left(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\cdot\beta_k\cdot\ln\left(\varepsilon_{эт,k}^{сжатия}\right)+\frac{\left(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\cdot\ln\left(\varepsilon_{эт,k}^{сжатия}\right)\right)}{\left(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\frac{\gamma_k}{\beta_k}\right)}\right)}}.$$

5.9.3.4. Примеры решения контактных задач

Изложенная выше теория позволяет решить все известные и важные с практической точки зрения задачи, которые можно поставить для слоя постоянной высоты из нелинейно деформируемого по модифицированному закону Бюльфингера (10) в приближении Хилла (204) композиционного материала и не учитывающие временные эффекты

- вдавливание параболического цилиндра (86):

$$P = \left\langle \frac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{\left(\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right)^{\beta}} \right\rangle_X \cdot \frac{\Gamma\left(1 + \langle\beta\rangle_X\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \langle\beta\rangle_X\right)} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot R}}{h^{\langle\beta\rangle_X}} \cdot |\delta|^{\left(\langle\beta\rangle_X + 1/2\right)};$$

- вдавливание параболоида вращения (89):

$$P = 4 \cdot \pi \left\langle \frac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{\left(\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right)^{\beta}} \right\rangle_X \cdot \frac{R}{\left(1 + \langle\beta\rangle_X\right) \cdot h^{\langle\beta\rangle_X}} \cdot |\delta|^{1+\langle\beta\rangle_X};$$

- вдавливание конуса (92):

$$P = 2\pi \cdot \left\langle \frac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{\left(\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right)^{\beta}} \right\rangle_X \frac{|\delta|^{2+\langle\beta\rangle_X}}{h^{\langle\beta\rangle_X} \cdot tg(\alpha)^2 \left(2 + 3 \cdot \langle\beta\rangle_X + \left(\langle\beta\rangle_X\right)^2\right)};$$

- вдавливание правильной пирамиды (93):

$$P = 2 \cdot \frac{(m-1) \cdot tg\left(\pi/(m-1)\right)}{\left(2 + 3 \cdot \langle\beta\rangle_X + \left(\langle\beta\rangle_X\right)^2\right) \cdot h^{\langle\beta\rangle_X} \cdot tg(\alpha)^2} \left\langle \frac{\sigma_{эт}^{сжатия}}{\left(\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right)^{\beta}} \right\rangle_X \cdot |\delta|^{2+\langle\beta\rangle_X}.$$

5.9.4. Усреднение реологических свойств стержня с однородным напряженно-деформированным состоянием

5.9.4.1. Усреднение вязких свойств стержня

Представим уравнение для однородного стержня (145) в виде суперпозиции:

$$\sigma_z = \sigma_z^{нелин} + \sigma_z^{вязк}, \qquad (205)$$

где $\sigma_z^{нелин} = \Im(\varepsilon_z)$, $\sigma_z^{вязк} = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_z$.

Поскольку и деформирование и вязкое поведение определяются независимыми параметрами, то и усреднять эти параметры необходимо раздельно. Т.е. в рамках прикладных исследований необходимо построить отдельно эффективную диаграмму деформирования $\langle\Im\rangle(\langle\varepsilon_z\rangle)$ и эффективную вязкость $\langle\eta\rangle$ многокомпонентного стержня.

Построению разнообразных приближений $\langle\Im\rangle(\langle\varepsilon_z\rangle)$ посвящены изложенные выше исследования. Таким образом, для построения вязкоупругопластического или вязкоупругого эффективного уравнения состояния остается только вычислить эффективную вязкость $\langle\eta\rangle$.

Предполагается, что вязкости η_k известны для k-го материала в отдельности (т.е. $\forall k = \overline{1, N}$).

Рассмотрим гипотезу Фойгта для части уравнения (205): $\sigma_z^{вязк} = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_z$. В соответствии с ней скорость деформации $\dot{\varepsilon}_z$ всего стержня равна соответствующим скоростям деформации всех его вертикальных слоев, т.е. выполнено равенство $\dot{\varepsilon}_z = \dot{\varepsilon}_{z,k}$ $\forall k = \overline{1, N}$. Соответственно для скоростей деформаций выполняется следующее равенство:

$$\langle\dot{\varepsilon}_z\rangle_\Phi = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \dot{\varepsilon}_{z,k} = \dot{\varepsilon}_z. \qquad (206)$$

В этом случае напряжения $\sigma_{z,k}$, действующие на k-ый вертикальный слой, определяются очевидным равенством:

$$\sigma_{z,k}^{вязк} = \eta_k \cdot \dot{\varepsilon}_{z,k} = \eta_k \cdot \dot{\varepsilon}_z. \qquad (207)$$

Домножая (207) на γ_k и суммируя по k, получаем с учетом (205):

$$\left\langle \sigma_z^{вязк} \right\rangle_\Phi = \langle\eta\rangle_\Phi \cdot \dot{\varepsilon}_z, \qquad (208)$$

где

$$\langle\eta\rangle_\Phi = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \eta_k.$$

С учетом (206) уравнение (208) можно переписать в смысле эффективных значений:

$$\left\langle \sigma_z^{вязк} \right\rangle_{\Phi} = \langle \eta \rangle_{\Phi} \cdot \langle \dot{\varepsilon}_z \rangle_{\Phi} . \qquad (209)$$

Далее построим приближение Рейсса для части урванения (205): $\sigma_z^{вязк} = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_z$. Будем предполагать, что у всех компонент композиционного стержня одинаковое напряженное состояние при их сжатии с определенной скоростью. Исходя из гипотезы эргодичности, напряженно-деформированное состояние компонент стержня не зависит от размеров и распределения компонент в стержне. Поскольку гипотеза об однородном напряженном состоянии для композиционного стержня автоматически удовлетворяется при горизонтально слоистой структуре стержня, эту структуру и будем рассматривать для решения задачи в приближении Рейсса.

Рассмотрим деформацию многослойного призматического стержня размерами $\Delta \times \Delta \times h$. Рассмотрим горизонтально слоистый стержень из N слоев. При этом k-ый слой ($k = \overline{1, N}$) имеет высоту $h_k = \gamma_k h$ и вязкость η_k материала слоя.

Напряжения σ_z, действующие на весь стержень, равны соответствующим напряжениям, действующим на все его горизонтальные слои, т.е. выполнено равенство $\sigma_z = \sigma_{z,k}$ $\forall k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\langle \sigma_z \rangle_P = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \sigma_{z,k} = \sigma_z . \qquad (210)$$

Получаем следующие уравнения для скорости деформации $\dot{\varepsilon}_{z,k}$, которая вызывает одинаковое напряженное состояние всех слоев ($k = \overline{1, n}$):

$$\dot{\varepsilon}_{z,k} = \frac{\sigma_z}{\eta_k} . \qquad (211)$$

Следуя общей методике – домножая (211) на концентрации на γ_k и суммируя по k, определим эффективные скорости деформации многослойного стержня:

$$\langle \dot{\varepsilon}_z \rangle_P = \frac{\sigma_z}{\langle \eta \rangle_P} , \qquad (212)$$

где усредненные коэффициенты $\langle\eta\rangle_P$ определяются уравнениями:

$$\langle\eta\rangle_P = \left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_k}{\eta_k}\right)^{-1}.$$

Учитывая (210), уравнение (212) можно переписать в виде:

$$\langle\sigma_z\rangle_P = \langle\eta\rangle_P \cdot \langle\dot{\varepsilon}_z\rangle_P. \tag{213}$$

Пара значений $\langle\eta\rangle_Ф$ и $\langle\eta\rangle_P$ называется вилкой Фойгта-Рейсса при оценке вязких свойств композита. Основной целью механики композиционных материалов является уменьшение этой вилки и получение эффективных значений параметров композита.

Из предыдущего изложения видно, что для получения эффективного значения вязкости необходимо дословно повторить п. 5.9.1. Поэтому на этом этапе ограничимся просто перечислением результатов, которые должны быть достигнуты. Таким образом, должны быть получены:

- эффективное значение вязкости по Хиллу (полностью аналогично (191)):

$$\langle\eta\rangle_X = \frac{1}{2}\left(\langle\eta\rangle_Ф + \langle\eta\rangle_P\right). \tag{214}$$

- эффективные значения по Кравчуку-Тарасюку (полностью аналогично (194)):

$$\langle\eta\rangle_{К-Т} = \frac{1}{4}\left(\langle\eta\rangle_Ф + \langle\eta\rangle_P\right) + \frac{\langle\eta\rangle_Ф\langle\eta\rangle_P}{\langle\eta\rangle_Ф + \langle\eta\rangle_P}. \tag{215}$$

Как и ранее эффективное значение вязкости по Фойгту (208) применяется для вертикально волокнистых структур покрытия, эффективное значение вязкости по Рейссу (212) применяется для горизонтально слоистых покрытий, эффективные значения по Хиллу (214) и Кравчуку-Тарасюку (215) – для структурно неоднородных в среднем изотропных покрытий.

Так для вдавливания по линейной модели Фойгта параболоида вращения (или в принятых допущениях шара) в композиционный в среднем изотропный вязкоупругий слой можно из (140) сразу получить результат для необходимой нагрузки $P(t)$ с учетом результатов (194) и (215):

$$P(t)=\pi\frac{\langle E\rangle_{K-T}}{h}\cdot R\cdot|\delta(t)|^2+\pi\cdot\frac{\langle\eta\rangle_{K-T}}{h}\cdot R\cdot\left|\dot{\delta}(t)\right|\cdot|\delta(t)|.$$

5.9.4.2. Усреднение ядер ползучести в линейной наследственной теории ползучести без учета однородного старения материала покрытия

Уравнение состояния однородного стержня в этом случае можно получить из (147) в предположении, что $E(t)=E$ - константа [47]:

$$\varepsilon_z(t)=\frac{1}{E}\left(\sigma_z(t)+\int_0^t\sigma_z(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right). \tag{216}$$

Кроме того будем использовать и обратное уравнение релаксации:

$$\sigma_z(t)=E\cdot\left(\varepsilon_z(t)-\int_0^t\varepsilon_z(\tau)\cdot R(t,\tau)d\tau\right), \tag{217}$$

где $R(t,\tau)$ - ядро релаксации (вычисляемое по известному ядру ползучести $\Gamma(t,\tau)$) [53].

При этом предполагается, что материал как всегда состоит N компонент и для каждой k-ой компоненты ($k=\overline{1,N}$) известны модуль упругости E_k и ядра ползучести $\Gamma_k(t,\tau)$, соответственно с помощью пересчета [53] известны все ядра релаксации $R_k(t,\tau)$ ($k=\overline{1,N}$).

Не останавливаясь на известных рассуждениях, пройдемся кратко по плану получения оценки Хилла для наследственно линейно вязкоупругой стержневой модели слоя без старения.

Рассмотрим гипотезу Фойгта для уравнения (217). В соответствии с ней деформация ползучести $\varepsilon_z(t)$ всего композиционного стержня равна соответствующим деформациям всех его компонент, т.е. выполнено равенство $\varepsilon_z(t)=\varepsilon_{z,k}(t)\quad\forall k=\overline{1,N}$, т.е. $\langle\varepsilon_z(t)\rangle_\Phi=\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\cdot\varepsilon_{z,k}(t)=\varepsilon_z(t)$. Переходя к уравнению (217) можно получить для k-ой компоненты ($k=\overline{1,N}$):

$$\sigma_{z,k}(t)=E_k\cdot\left(\varepsilon_z(t)-\int_0^t\varepsilon_z(\tau)\cdot R_k(t,\tau)d\tau\right).$$

Домножая последнее уравнение на γ_k и суммируя по k с учетом того, что $\varepsilon_z(t) = \langle \varepsilon_z(t) \rangle_\Phi$, можно получить:

$$\langle \sigma_z(t) \rangle_\Phi = \langle E \rangle_\Phi \cdot \left(\langle \varepsilon_z(t) \rangle_\Phi - \int_0^t \langle \varepsilon_z(\tau) \rangle_\Phi \cdot \langle R(t,\tau) \rangle_\Phi \right) d\tau, \qquad (218)$$

где

$$\langle E \rangle_\Phi = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot E_k, \qquad \langle R(t,\tau) \rangle_\Phi = \frac{\langle E \cdot R(t,\tau) \rangle_\Phi}{\langle E \rangle_\Phi} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot E \cdot R(t,\tau)}{\langle E \rangle_\Phi}.$$

Перейдем к построению приближения Рейсса для уравнения (216). Будем предполагать, что у всех компонент композиционного стержня одинаковое напряженное состояние при их сжатии.

Таким образом, напряжения $\sigma_z(t)$, действующие на весь стержень, равны соответствующим напряжениям, действующим на все его горизонтальные слои, т.е. выполнено равенство $\sigma_z(t) = \sigma_{z,k}(t) \quad \forall k = \overline{1,N}$, т.е. $\langle \sigma_z \rangle_P = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \cdot \sigma_{z,k} = \sigma_z$.

Переходя к уравнению (216) можно получить для k-ой компоненты ($k = \overline{1,N}$):

$$\varepsilon_{z,k}(t) = \frac{1}{E_k} \left(\sigma_z(t) + \int_0^t \sigma_z(\tau) \cdot \Gamma_k(t,\tau) d\tau \right).$$

Домножая последнее уравнение на γ_k и суммируя по k с учетом того, что $\sigma_z(t) = \langle \sigma_z(t) \rangle_\Phi$, можно получить:

$$\langle \varepsilon_z(t) \rangle_P = \frac{1}{\langle E \rangle_P} \left(\langle \sigma_z(t) \rangle_P + \int_0^t \langle \sigma_z(\tau) \rangle_P \cdot \langle \Gamma(t,\tau) \rangle_P d\tau \right), \qquad (219)$$

где

$$\langle E \rangle_P = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\gamma_k}{E_k} \right)^{-1}, \qquad \langle \Gamma(t,\tau) \rangle_P = \langle E \rangle_P \left\langle \frac{\Gamma(t,\tau)}{E} \right\rangle = \langle E \rangle_P \cdot \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \frac{\Gamma_k(t,\tau)}{E_k}.$$

Обращая (219) по правилу (217):

$$\langle\sigma_Z(t)\rangle_P = \langle E\rangle_P \cdot \left(\langle\varepsilon_Z(t)\rangle_P - \int_0^t \langle\varepsilon_Z(\tau)\rangle_P \cdot \langle R_{\Sigma\Gamma}(t,\tau)\rangle_P \right) d\tau , \qquad (220)$$

где $\langle R_{\Sigma\Gamma}(t,\tau)\rangle_P$ - ядро релаксации, соответствующее эффективному ядру ползучести $\langle R(t,\tau)\rangle_{\Phi}$ (219).

Как упоминалось ранее, для построения приближения Хилла необходимо найти среднее арифметическое уравнений (218) и (220) с использованием гипотез, что $\langle\varepsilon_Z(t)\rangle = \langle\varepsilon_Z(t)\rangle_{\Phi} = \langle\varepsilon_Z(t)\rangle_P$, $\langle\sigma_Z(t)\rangle = \left(\langle\sigma_Z(t)\rangle_{\Phi} + \langle\sigma_Z(t)\rangle_P\right)/2$:

$$\langle\sigma_Z(t)\rangle_X = \langle E\rangle_X \cdot \langle\varepsilon_Z(t)\rangle_X - \int_0^t \langle\varepsilon_Z(\tau)\rangle_X \cdot \langle R(t,\tau)\rangle_X d\tau , \qquad (221)$$

где

$$\langle E\rangle_X = \frac{\langle E\rangle_{\Phi} + \langle E\rangle_P}{2}, \quad \langle R(t,\tau)\rangle_X = \frac{\langle E\rangle_{\Phi} \cdot \langle R(t,\tau)\rangle_{\Phi} + \langle E\rangle_P \cdot \langle R_{\Sigma\Gamma}(t,\tau)\rangle_P}{\langle E\rangle_{\Phi} + \langle E\rangle_P}.$$

Обращая (221) по правилу (216) окончательно получаем уравнение для решения прикладных контактных задач:

$$\langle\varepsilon_Z(t)\rangle_X = \frac{1}{\langle E\rangle_X} \left(\langle\sigma_Z(t)\rangle_X + \int_0^t \langle\sigma_Z(\tau)\rangle_X \cdot \langle\Gamma(t,\tau)\rangle_X d\tau \right),$$

где $\langle\Gamma(t,\tau)\rangle_X$ ядро ползучести, построенное по известному резольвентному ядру $\langle R(t,\tau)\rangle_X$ [53].

Так, например, при решении задачи вдавливания конуса в композиционное покрытие по наследственной теории линейной вязкоупругости без учета старения можно из (172) сразу получить ответ для абсолютной величины глубина вдавливания $|\delta(t)|$:

$$|\delta(t)| = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot h \cdot tg(\alpha)^2}{\pi \cdot \langle E\rangle_X} \left(P(t) + \int_0^t P(\tau) \cdot \langle\Gamma(t,\tau)\rangle_X d\tau \right)}.$$

ГЛАВА 6. ПЕРЕМЕННАЯ ВЫСОТА СТЕРЖНЕВОЙ МОДЕЛИ ПОКРЫТИЯ

Узким местом рассмотренного выше обобщений модели Винклера является использование гипотезы о постоянной высоте покрытия. В настоящем разделе обсуждаются методы геометрического обобщения решаемых с помощью простейшей модели деформируемого покрытия задач на случай как неровной поверхности вдавливания, так и неровной подстилающей жесткой поверхности под покрытием. Предложенная методика позволила, в частности, решить в качестве примеров ранее не доступные для аналитического решения задачи об обжатии жесткими недеформируемыми полупространствами однородного гиперэластичного шара [54].

6.1. Гипотезы, используемые в стержневой модели покрытия переменной высоты

Предполагается, что поверхность вдавливания (верхняя поверхность покрытия) определяется функцией $f_{внедр}(x, y)$, где $f_{внедр}(0,0) = 0$. Покрытие покрывает жесткое недеформируемое полупространство с уравнением поверхности $f_{подст}(x, y)$ (Рисунок 30).

Внедряемое в покрытие тело является недеформируемым, т.е. жестким штампом с уравнением поверхности $f(x, y)$, где $f(0,0) = 0$ (Рисунок 30). Очевидно, что до нагружения штампа предполагается, что он касается покрытия в точке с координатами $(0,0,0)$. Пусть открытое множество $S \subset X0Y$ является внутренностью области контакта, т.е. $S = \{(x, y) | \sigma_z(x, y, 0) \neq 0\}$, где $\sigma_z(x, y, 0)$ - контактные напряжения. Тогда замыкание $\overline{S}$ является областью контакта [54].

Очевидно, необходимо выполнено $f_{внедр}(x, y) > f_{подст}(x, y)$, где $(x, y) \in \overline{S}$ (Рисунок 30).

Как и ранее предполагается, что покрытие может быть заменено призматическими стержнями с постоянным квадратным сечением ΔxΔ в плоскости X0Y и высотой $f_{внедр}(x, y) - f_{подст}(x, y) > 0$ (Рисунок 30). Стержни могут перемещаться только в Z-направлении, при этом их напряженно-деформированное состояние призматического элемента является однородным [54]. Размер Δ пренебрежимо мал в сравнении с наименьшим характерным размером область контакта $\overline{S}$ в плоскости *X0Y*.

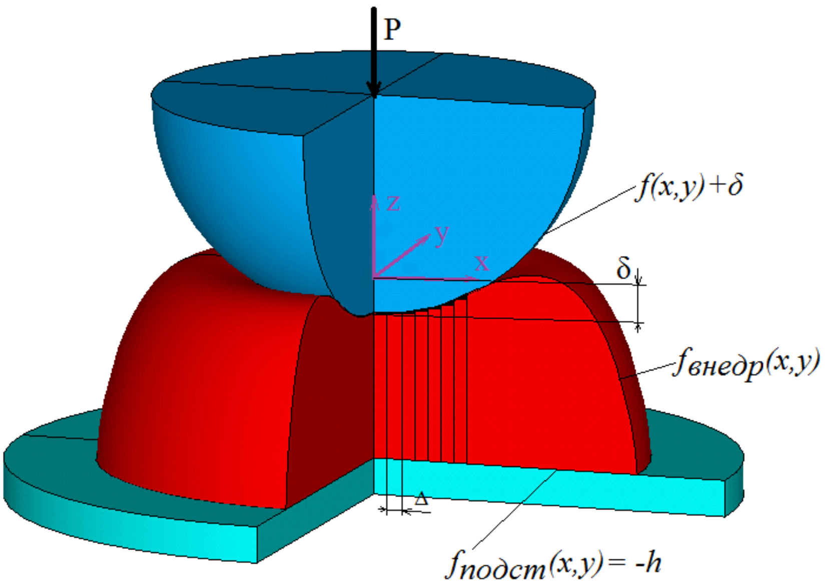

Рисунок 30. Вдавливание криволинейного индентора в стержневую модель покрытия переменной высоты

6.2. Краевое условие по перемещениям

Учитывая, что в рамках стержневой модели деформируемого покрытия контактные напряжения $\sigma_z(x,y,0)\neq 0$ могут возникнуть только в точке, в которой перемещение в области контакта $w(x,y,0)\neq 0$, то внутренность области контакта гораздо проще определить как $S=\{(x,y)|w(x,y,0)\neq 0\}$. При принятых предположениях краевое условие по перемещениям определяется следующим уравнением [54]:

$$w(x,y,0)=\begin{cases} f(x,y)-f_{внедр}(x,y)+\delta,(x,y)\in\overline{S}, \\ 0,(x,y)\notin\overline{S}, \end{cases} \tag{222}$$

где δ - глубина вдавливания штампа относительно точки $(0,0,0)$. Она определяется из геометрических соображений, т.е. на границе области контакта $(x,y)\in\overline{S}\setminus S$ контактные перемещения равны нулю ($w(x,y,0)|_{(x,y)\in\overline{S}\setminus S}=0$). Принимая во внимание верхнее уравнение (222), получаем, что для любой достоверно определенной точки на границе области контакта $(x,y)\in\overline{S}\setminus S$ выполнено равенство [54]:

$$\delta=-\left(f(x,y)-f_{внедр}(x,y)\right)\Big|_{\forall(x,y)\in\overline{S}\setminus S}. \tag{223}$$

Используя предположение о деформируемости призматических стержней только в Z-направлении, определим деформации стержня высотой $f_{внедр}(x,y) - f_{подст}(x,y)$ геометрическим уравнением [54]:

$$\varepsilon(x,y,0) = \frac{w(x,y,0)}{f_{внедр}(x,y) - f_{подст}(x,y)}. \qquad (224)$$

6.3. Формальное определение напряжений в области контакта без учета временных эффектов

Для определения напряжений, действующих в области контакта, достаточно использовать для вычисленной деформации в области контакта (224) соответствующее поставленной задаче уравнение состояния $\sigma = \Im(\varepsilon)$ [54]:

$$\begin{aligned}\sigma_z(x,y,0) &= \Im(\varepsilon(x,y,0)) = \Im\left(\frac{w(x,y,0)}{f_{внедр}(x,y) - f_{подст}(x,y)}\right) = \\ &= \Im\left(\frac{f(x,y) - f_{внедр}(x,y) + \delta}{f_{внедр}(x,y) - f_{подст}(x,y)}\right), (x,y) \in \overline{S}.\end{aligned} \qquad (225)$$

Уравнения равновесия штампа на границе без учета временных эффектов будет как всегда определяться уравнениями (11)-(12) [54].

6.4. Примеры решения контактных задач

6.4.1. Обжатие гиперэластичного шара двумя ровными и жесткими полупространствами

Пусть дан деформируемый шар радиуса R с центром в точке $z = -R$ [54]:

$$x^2 + y^2 + (z+R)^2 \le R^2, \qquad (226)$$

Очевидно, что при решении симметричной относительно плоскости X0Y задачи (обжимающие плоскости одинаковы) достаточно решить контактную задачу для полушара (Рисунок 31), т.к. контактные напряжения останутся теми же, а сближение двух полупространств при обжатии шара будет равно удвоенному сближению, найденному при решении задачи для полушара.

Таким образом, поставленная задача сводится к задаче, поставленной для деформируемого тела, определяемого системой неравенств (Рисунок 31) [54]:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z+R)^2 \le R^2, \\ z \ge -R. \end{cases} \tag{227}$$

Данная область может рассматриваться как покрытие с переменной высотой. Т.е. в связи с принятыми выше обозначениями уравнение поверхности индентора $f(x,y)=0$ (т.е. ровная плоскость, проходящая через $z=0$), уравнение поверхности вдавливания $f_{внедр}(x,y)=\sqrt{R^2-\left(x^2+y^2\right)}-R$ (уравнение полушара), уравнение подстилающей поверхности $f_{подст}(x,y)=-R$ (т.е. ровная плоскость, проходящая через $z=-R$) (Рисунок 31). Подставляя указанные уравнения поверхностей в (222) и (223), получаем, что в области контакта выполнено условие [54]:

$$w(x,y,0)=\begin{cases} -\sqrt{R^2-\left(x^2+y^2\right)}+\sqrt{R^2-a^2}, (x,y)\in \overline{S}, \\ 0, (x,y)\notin \overline{S}, \end{cases} \tag{228}$$

где a - радиус области контакта. Из построения области, занятой твердым телом, видно, что она осесимметричная. Из краевого условия по перемещениям видно, что краевое условие также осесимметрично.

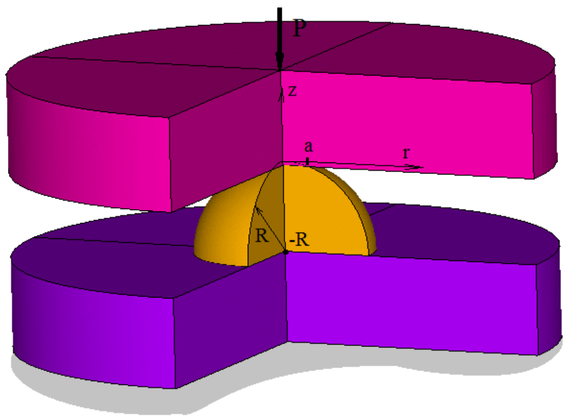

Рисунок 31. Сжатие двумя плоскими поверхностями гиперэластичного полу шара

Таким образом, решаемая краевая задача с условием (228) является осесимметричной и можно выполнить замену $r^2=x^2+y^2$ и перейти к цилиндрическим координатам (z,r) [54]:

$$w(r,0)=\begin{cases}-\sqrt{R^2-r^2}+\sqrt{R^2-a^2}, r\in[0,a],\\ 0, r\notin[0,a],\end{cases} \qquad (229)$$

Заменяя деформируемый полу шар гиперэластичными стержнями с квадратным сечением в соответствии с (10), (224), (225) и (229) получаем [54]:

$$\sigma_z(r,0)=\sigma_{эт}^{сжатия}\cdot\left(\frac{-\sqrt{R^2-r^2}+\sqrt{R^2-a^2}}{\varepsilon_{эт}^{сжатия}\cdot\sqrt{R^2-r^2}}\right)^{\beta}. \qquad (230)$$

где $\sigma_{эт}^{сжатия}$ ($\sigma_{эт}^{сжатия}<0$), $\varepsilon_{эт}^{сжатия}$ ($\varepsilon_{эт}^{сжатия}<0$), β - характерные для материала константы.

Неизвестную константу a из (230) необходимо определить исходя из уравнения равновесия, которое в осесимметричном случае имеет вид (26) (Рисунок 10).

К сожалению, в общем виде интеграл от функции (230) умноженной на r не вычисляется в квадратурах. Однако, подставив конкретные значения констант материала $\sigma_{эт}^{сжатия}$, $\varepsilon_{эт}^{сжатия}$, β и значение радиуса области контакта a, можно вычислить конкретное значение нагрузки P.

Таким образом, для произвольной нелинейности вида (10) задача решается полуобратным методом: протабулировав значения a_i по ним можно вычислить $P(a_i)$. В качестве решения для заданного P необходимо выбрать ближайшую пару $(a_i, P(a_i))$ [54].

Сближение двух жестких ровных полупространств при обжатии половины шара при заданном радиусе области контакта a определяется выражением (2) [54]:

$$\delta=\sqrt{R^2-a^2}-R. \qquad (231)$$

Соответственно для целого шара значение (231) удваивается.

6.4.2. Индентирование вершины линейно-упругого шарового сегмента параболоидом вращения

В отличие от предыдущего примера заменим внедряемый шаровой индентор параболоидом вращения с радиусом кривизны в вершине R_1 (в цилиндрических координатах $f(x,y)=f(r)=\dfrac{r^2}{2\cdot R_1}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$), шаровой сегмент - сегментом параболоида вращения с радиусом кривизны в вершине R_2 (в цилиндрических координатах $f_{внедр}(x,y)=f(r)=-\frac{r^2}{2\cdot R_2}$). Очевидно, что $f_{подст}(x,y)=-h$ (Рисунок 32).

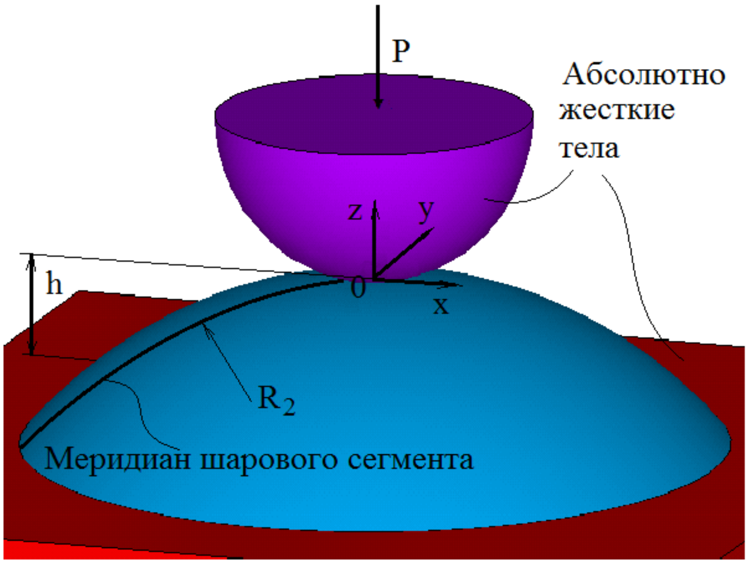

Рисунок 32. Вдавливание жесткого шара в шаровой сегмент ($h < R_2$)

Тогда для перемещений в области контакта получаем из (222):

$$w(r,0)=\begin{cases} f(r)-f_{внедр}(r)+\delta, r\in[0,a], \\ 0, r\notin[0,a], \end{cases} = \begin{cases} \frac{R_2+R_1}{2\cdot R_1\cdot R_2}\cdot r^2+\delta, r\in[0,a], \\ 0, r\notin[0,a], \end{cases} \quad (232)$$

где a - радиус круга контакта, глубина вдавливания δ определяется уравнением $\delta=-\frac{R_2+R_1}{2\cdot R_1\cdot R_2}\cdot a^2$ (223).

Деформации в области контакта можно записать аналогично (224):

$$\varepsilon(r,0)=\frac{\frac{R_2+R_1}{2\cdot R_1\cdot R_2}\cdot\left(r^2-a^2\right)}{h-\frac{r^2}{2\cdot R_2}}=\frac{R_2+R_1}{R_1}\cdot\frac{r^2-a^2}{2\cdot R_2\cdot h-r^2}. \quad (233)$$

В случае линейной связи напряжений и деформаций $\Im(\varepsilon)=E\cdot\varepsilon$. Тогда контактные напряжения определяются в соответствии с (225), (233):

$$\sigma_z(r,0) = E \cdot \varepsilon(r,0) = E \cdot \frac{R_2 + R_1}{R_1} \cdot \frac{r^2 - a^2}{2 \cdot R_2 \cdot h - r^2}. \qquad (234)$$

Используя уравнение равновесия (26) (Рисунок 10) получаем решение задачи:

$$P = -2\pi \cdot E \cdot \frac{R_2 + R_1}{R_1} \cdot \int_0^a \frac{r^2 - a^2}{2 \cdot R_2 \cdot h - r^2} \cdot r dr .$$

6.4.3. Вдавливание конуса в вершину линейно-упругого шарового сегмента

В цилиндрических координатах поверхность конуса, как и ранее, определяется уравнением $f(x,y) = f(r) = tg(\alpha) \cdot r$ (где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$). Шаровой сегмент - сегментом параболоида вращения с радиусом кривизны в вершине R_2 (в цилиндрических координатах $f_{внедр}(x,y) = f(r) = -\frac{r^2}{2 \cdot R_2}$). Кроме того как и в предыдущем примере $f_{подст}(x,y) = -h$.

Тогда для перемещений в области контакта получаем из (232):

$$w(r,0) = \begin{cases} tg(\alpha) \cdot r + \frac{r^2}{2 \cdot R_2} + \delta, r \in [0,a], \\ 0, r \notin [0,a], \end{cases} \qquad (235)$$

где a - радиус круга контакта, глубина вдавливания δ определяется уравнением $\delta = -\left(tg(\alpha) \cdot r + \frac{a^2}{2 \cdot R_2} \right)$.

Используя (235), деформации в области контакта можно записать аналогично (224):

$$\varepsilon(r,0) = \frac{tg(\alpha) \cdot (r - a) + \frac{r^2 - a^2}{2 \cdot R_2}}{h - \frac{r^2}{2 \cdot R_2}} = \frac{2 \cdot R_2 \cdot tg(\alpha) \cdot (r - a) + \left(r^2 - a^2\right)}{2 \cdot R_2 \cdot h - r^2}. \qquad (236)$$

В случае линейной связи напряжений и деформаций $\Im(\varepsilon)=E\cdot\varepsilon$ контактные напряжения определяются в соответствии с (225), (236):

$$\sigma_z(r,0)=E\cdot\varepsilon(r,0)=E\cdot\frac{2\cdot R_2\cdot tg(\alpha)\cdot(r-a)+\left(r^2-a^2\right)}{2\cdot R_2\cdot h-r^2}. \qquad (237)$$

Используя уравнение равновесия (26) (Рисунок 10) получаем решение задачи:

$$P=-2\pi\cdot E\cdot\int_0^a\frac{2\cdot R_2\cdot tg(\alpha)\cdot(r-a)+\left(r^2-a^2\right)}{2\cdot R_2\cdot h-r^2}\cdot rdr\ .$$

6.4.4. Вдавливание правильной пирамиды в вершину линейно-упругого шарового сегмента

Сегмент параболоида вращения с радиусом кривизны в вершине R_2 в декартовых координатах определяется выражением $f_{внедр}(x,y)=-\dfrac{x^2+y^2}{2\cdot R_2}$. Кроме того $f_{подст}(x,y)=-h$.

В силу осевой симметрии уравнения сегмента шара, как и в случае с плоской границей определим размер области контакта с помощью радиуса a (проекции на горизонтальную плоскость, перпендикулярную направлению вдавливания, вписанной в область контакта окружности) и формы поверхности пирамиды $f(x,y)$ в области Ω, где $\Omega\subset S$, S - правильная многоугольная область контакта. Необходимо отметить, что поверхность $f(x,y)$ идеальной правильной пирамиды с $m-1$ треугольными гранями, касающимися поверхности криволинейного покрытия в виде сегмента шара, определяется в области Ω уравнением:

$$f(x,y)\big|_\Omega=tg(\alpha)\cdot x,$$

где α - угол между треугольными гранями пирамиды и касательной плоскостью к точке касания пирамиды и криволинейного покрытия. Следовательно, перемещения в подобласти Ω области контакта S задаются уравнением:

$$w(x,y,0)\big|_\Omega=f(x,y)\big|_\Omega-f_{внедр}(x,y)\big|_\Omega+\delta=$$

$$= tg(\alpha)\cdot(x-a) + \left(\frac{x^2+y^2}{2\cdot R_2} - \frac{a^2 + \left(tg\left(\frac{\pi}{m-1}\right)\cdot a\right)^2}{2\cdot R_2} \right),$$

где вдавливание δ определяется уравнением (223):

$$\delta = -\left(f(x,y) - f_{внедр}(x,y)\right)\Big|_{\Omega} = -\left(tg(\alpha)\cdot a + \frac{a^2 + \left(tg\left(\frac{\pi}{m-1}\right)\cdot a\right)^2}{2\cdot R_2} \right).$$

Деформации в области контакта можно записать аналогично (224):

$$\varepsilon_z(x,y,0)\Big|_{\Omega} = \frac{1}{h - \frac{x^2+y^2}{2\cdot R_2}} \left(tg(\alpha)\cdot(x-a) + \frac{x^2+y^2}{2\cdot R_2} - \frac{a^2 + \left(tg\left(\frac{\pi}{m-1}\right)\cdot a\right)^2}{2\cdot R_2} \right).$$

Нормальное напряжение в случае линейно уравнения состояния с молулем упругости E в подобласти Ω области контакта определяется выражением (225):

$$\sigma_z(x,y,0)\Big|_{\Omega} = E\cdot\frac{2\cdot R_2\cdot tg(\alpha)\cdot(x-a) + x^2 + y^2 - a^2 - \left(tg\left(\frac{\pi}{m-1}\right)\cdot a\right)^2}{2\cdot R_2\cdot h - \left(x^2+y^2\right)}.$$

Уравнение равновесия в силу геометрической симметрии правильной пирамиды и сегмента параболоида вращения записывается в виде:

$$P = -\iint\limits_{S} \sigma_z(x,y)dxdy = -(m-1)\cdot\frac{E}{2\cdot R_2\cdot h}\times$$

$$\times\int_{0}^{a}\int_{-tg\left(\frac{\pi}{m-1}\right)\cdot x}^{tg\left(\frac{\pi}{m-1}\right)\cdot x}\left(\frac{2\cdot R_2\cdot tg(\alpha)\cdot(x-a)+x^2+y^2-a^2-\left(tg\left(\frac{\pi}{m-1}\right)\cdot a\right)^2}{2\cdot R_2\cdot h-\left(x^2+y^2\right)}\right)\cdot dydx.$$

6.4.5. К вопросу о влиянии микро- и наногеометрии поверхности покрытия на вдавливание индентора

В работе авторов [44] описано, как методически получить решение для неровной поверхности упругопластического или нелинейно-упругого покрытия с использованием гипотезы Винклера. С помощью указанного подхода можно определить влияние неровностей не только поверхности покрытия на результаты вдавливания, но и влияние неровностей подстилающей абсолютно твердой поверхности под покрытием на вдавливание индентора.

Очевидные выводы, которые можно сделать, не проводя вычислений:

1. неровности на поверхности покрытия и поверхности индентора суммируются, и в рамках модели Винклера задача для двух неровных поверхностей и покрытия, и индентора математически сводится к задаче об одной абсолютно ровной поверхности покрытия и неровному индентору с отклонениями в каждой точке области контакта равными сумме реальных отклонений как поверхности индентора, так и покрытия [44];

2. неровности подстилающей абсолютно жесткой поверхности должны быть значительно меньше остаточной высоты покрытия $h-\delta_{\max}$, где $\delta_{\max}$ - максимальная глубина упругопластического вдавливания индентора [44].

6.5. Простейшая модель индентирования криволинейных биологических или полимерных объектов конечных размеров

Такой раздел биомеханики как биомеханика клетки изучает механические свойства клеток и их возможные изменения. Экспериментально установлено, что протекание некоторых заболеваний даже на ранней стадии ведет к существенному изменению механических свойств, например, жесткости опухолевых клеток [55, 56]. Под механическими свойствами клетки, подлежащими измерению, понимаются модуль Юнга, вязкость, время релаксации и др. [55].

Трудности определения указанных биомеханических параметров объясняются как сложностью проведения самого эксперимента, а именно тем, что все живые клетки являются очень мягкими объектами, в миллиарды раз мягче стали и имеют очень малые размеры (сотни микрометров) [55, 56], так и теоретическими затруднениями, связанными с необходимостью решения обратной задачи. При этом под прямой задачей в данном случае следует понимать – моделирование процесса нагружения клетки с предварительно заданными механическими свойствами составляющих ее компонент.

Для экспериментального определения механических свойств клеток хорошо зарекомендовал себя метод атомно-силовой микроскопии [56, 57]. Принцип действия атомно-силового микроскопа заключается во взаимодействии наноразмерной иглы (кантилевера) с образцом. Для измерения механических свойств объекта проводят его индентирование зондом. При работе с клетками острую иглу, обычно, заменяют сферой микрометровых размеров для обеспечения более мягкого воздействия на поверхность [56, 57].

Однако ряд методических вопросов теоретического решения остался без должного внимания. Так, очевидно, что клетка, как при решении прямой, так и обратной задачи должна моделироваться как композиционное тело. Это означает, что все ее механические характеристики, используемые при решении любых задач, имеют физический смысл эффективных (усредненных по объему клетки) параметров.

Актуальность данного исследования заключается в том, что на базе построенного аналитического решения поставленной прямой задачи (определения глубины вдавливания индентора произвольной формы в клетку по заданным ее механическим и реологическим характеристикам) можно строить, в перспективе, решение обратной задачи, т.е. определять механические и реологические характеристики по результатам тестов [58].

Значимость данного исследования состоит в том, что применяемые в настоящее время теоретические модели полностью не состоятельны, т.к. в той или иной мере опираются на гипотезу малости перемещений (и, соответственно, деформаций) при вдавливании по сравнению с геометрическими размерами биологических тел. Данное предположение на самом деле не имеет под собой никакого физического обоснования, т.к. всегда при индентировании мягкого биологического объекта деформации конечны (т.е. перемещения в области контакта, безусловно, значительно меньше, но сопоставимы с размерами клеток), а не бесконечно малы.

6.5.1. Методика теоретического решения прямой задачи определения глубины вдавливания индентора в биологический или полимерный криволинейный объект конечных размеров

Будем следовать предложенному в предыдущей части плану, а именно, разделим объект конечных размеров горизонтальной плоскостью на два объекта. Это дает возможность рассмотреть решение поставленной задачи о вдавливании в биологический или полимерный объект произвольной формы в виде суммы решений двух отдельных задач (Рисунок 33):

- контактной задачи для вдавливания криволинейного индентора в криволинейный выступ, определяемый геометрической формой половины клетки, лежащей на жестком ровном полупространстве;
- контактной задачи обжатия выступа в виде половины клетки двумя жесткими полупространствами.

Сумма перемещений после решения первой и второй задачи и будет определять собственно глубину вдавливания.

Непосредственно из схемы построения решения основной задачи (Рисунок 33) и примера, приведенного в статье [58], следует, что при решении обеих вспомогательных задач, можно использовать геометрические гипотезы построения соответствующих решений покрытия переменной высоты при вдавливании инденторов произвольной формы [58], т.е. материал предыдущего параграфа.

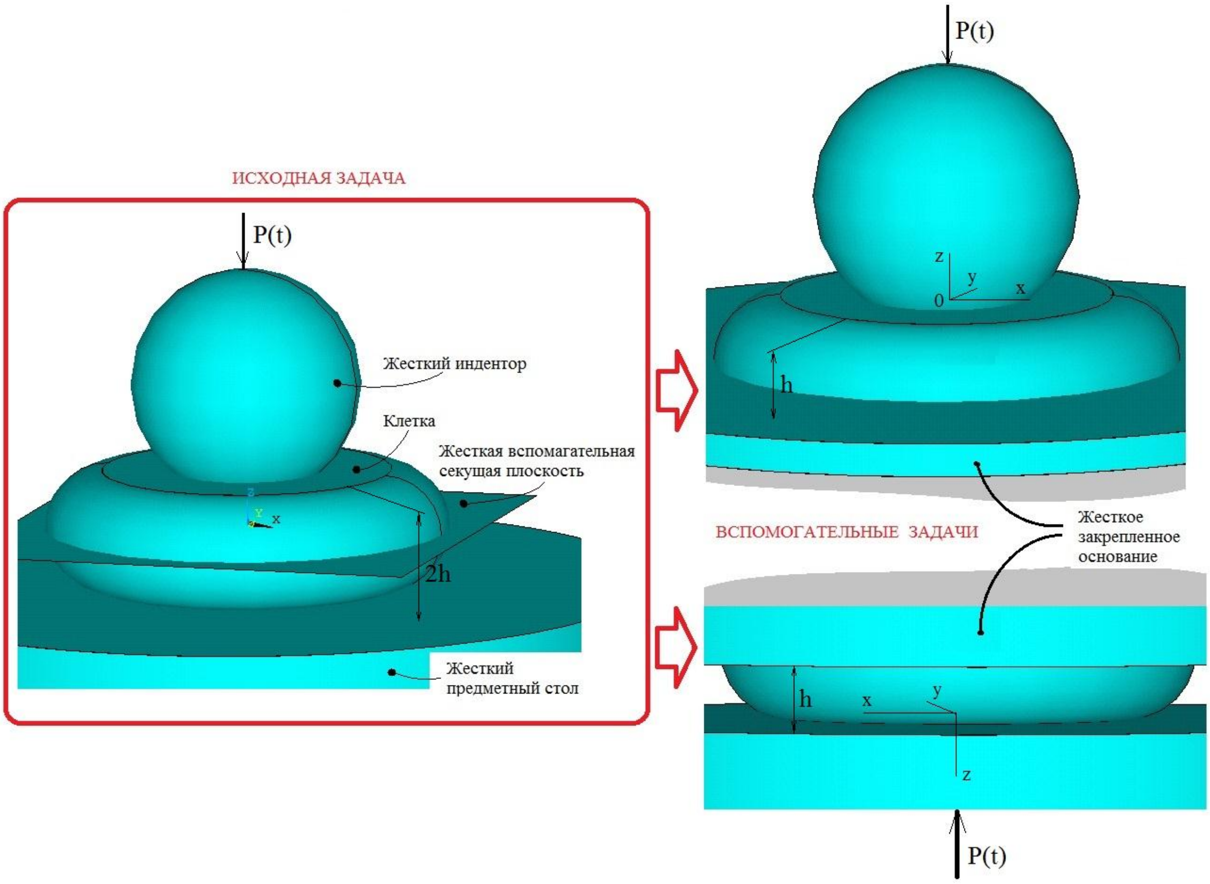

Рисунок 33. Схема редукции основной задачи индентирования биологического или полимерного криволинейного объекта к решению двух других контактных задач

Следует особо подчеркнуть, что в биологических материалах, в частности в клетках, нет направленного потока жидкости, а, следовательно, и внутреннее давление скомпенсировано растяжением оболочки [58]. Более того, внутренне статическое давление жидкости может увеличиться в биологическом объекте в связи с уменьшением его объема из-за вдавливания индентора. Будем предполагать, что оболочка клетки имеет несопоставимо малый модуль упругости на растяжение по сравнению с другими органеллами клетки и является не сжимаемой в поперечном направлении. В этом случае модулем упругости оболочки и величиной внутреннего давления в клетке можно пренебречь.

Перераспределение жидкости внутри биологического объекта игнорируется в смысле решения квазистатической задачи (т.е. большой длительности времени измерений).

6.5.2. Гипотезы, используемые в модели деформируемого криволинейного покрытия переменной высоты с учетом реологических характеристик биологических объектов

Предполагается, что поверхность клетки для вдавливания индентора определяется функцией $f_{внедр}(x, y)$, где $f_{внедр}(0{,}0) = 0$. Покрытие покрывает жесткое недеформируемое полупространство с уравнением поверхности $f_{подст}(x, y) = -h$, где h - половина высоты клетки [58].

В рамках задач биомеханики внедряемое в покрытие тело является недеформируемым, т.е. жестким штампом с уравнением поверхности $f(x, y)$, где $f(0{,}0) = 0$. Очевидно, что до нагружения штампа предполагается, что он касается оболочки клетки в точке с координатами $(0{,}0{,}0)$. Как указывалось в работе [58], в случае обжатия нижней половины клетки двумя жесткими полупространствами необходимо положить $f(x, y) \equiv 0$.

Предполагается, что клетка обладает симметрией относительно плоскости $X0Y$, т.е. в локальных системах координат, связанных с верхней и нижней поверхностью клетки $f_{внедр}(x, y)$ имеет один и тот же вид [58].

Отметим, что рисунок для постановки данной задачи полностью совпадает с уже известным рисунком (Рисунок 30) с точностью замены некоторых констант (действующей нагрузки и глубины вдавливания) на функции, меняющиеся во времени [58].

Пусть открытое множество $S(t) \subset X0Y$ является внутренностью области контакта, т.е. $S(t) = \{(x, y) | \sigma_z(x, y, 0, t) \neq 0\}$, где $\sigma_z(x, y, 0, t)$ - контактные напряжения. Тогда замыкание $\overline{S(t)}$ является областью контакта. Очевидно, что выполнено неравенство $f_{внедр}(x, y) > f_{подст}(x, y) = -h$, где $(x, y) \in \overline{S}(t)$ [58].

Предполагается, что верхняя (или нижняя) половина клетки (Рисунок 33) может быть заменена призматическими стержнями с постоянным квадратным сечением ΔxΔ в плоскости X0Y и высотой $f_{внедр}(x, y) + h > 0$ (Рисунок 30).

Стержни могут перемещаться только в Z-направлении, при этом их напряженно-деформированное состояние призматического элемента является однородным [58]. Размер Δ пренебрежимо мал в сравнении с наименьшим характерным размером проекции области контакта $\overline{S(t)}$ на плоскость $X0Y$.

При ползучести предполагается, что деформации происходят так медленно, что задача рассматривается как квазистатическая [58], т.е. инерционные характеристики призматических стержней не оказывают влияния на характер деформирования клетки.

Простейшая модель, которая может быть связана с клеткой - это однородный изотропный объект (например, полимерный), имеющий геометрические границы исходной клетки, с механическими характеристиками равными ее эффективным механическим характеристикам. При этом эффективные характеристики понимаются нами в смысле приближения Хилла или Кравчука-Тарасюка, продемонстрированных выше.

6.5.3. Краевое условие по перемещениям

Учитывая, что в рамках простейшей модели деформируемого покрытия контактные напряжения $\sigma_Z(x,y,0,t) \neq 0$ могут возникнуть только в точке, в которой перемещение в области контакта $w(x,y,0,t) \neq 0$, то внутренность области контакта гораздо проще определить как $S(t) = \{(x,y) | w(x,y,0,t) \neq 0\}$. При принятых предположениях краевое условие по перемещениям определяется уравнением, аналогичным (222), только с заменой константы δ на функцию $\delta(t)$ [58]:

$$w(x,y,0,t) = \begin{cases} f(x,y) - f_{внедр}(x,y) + \delta(t), (x,y) \in \overline{S}, \\ 0, (x,y) \notin \overline{S}, \end{cases} \qquad (238)$$

где $\delta(t)$ - глубина вдавливания штампа относительно точки начального касания поверхности клетки $(0,0,0)$. Она определяется из геометрических соображений, т.е. на границе области контакта $(x,y) \in \overline{S(t)} \setminus S(t)$ контактные перемещения равны нулю ($w(x,y,0,t)\big|_{(x,y)\in\overline{S(t)}\setminus S(t)} = 0$). Принимая во внимание верхнее уравнение (1), получаем, что для любой определенной точки на границе области контакта $(x,y) \in \overline{S(t)} \setminus S(t)$ выполнено равенство, аналогичное (223):

$$\delta(t) = -\left(f(x,y) - f_{внедр}(x,y)\right)\Big|_{\forall (x,y)\in\overline{S(t)}\setminus S(t)}. \qquad (239)$$

Тогда, исходя из расчетной схемы деления клетки на нижнюю и верхнюю части, для описания перемещений верхней и нижней границ клетки в области контакта при вдавливании индентора можно использовать следующие уравнения (Рисунок 33) [58]:

$$w_{инд}(x,y,0,t)=f_{инд}(x,y)-f_{внедр}(x,y)+\delta_{верх}(t),(x,y)\in\overline{S},$$

где $\delta_{верх}(t)=-(f_{индентора}(x,y)-f_{внедр}(x,y))$ и

$$w_{стол}(x,y,0,t)=f_{стол}(x,y)-f_{внедр}(x,y)+\delta_{низ}(t),(x,y)\in\overline{S},$$

где $\delta_{низ}(t)=-(f_{стол}(x,y)-f_{внедр}(x,y))$.

Таким образом, величину сближения индентора и предметного стола можно записать [58]:

$$\delta(t)=\delta_{верх}(t)+\delta_{низ}(t).$$

Поскольку предполагается, что клетка симметрична относительно секущей плоскости, то деформации в области контакта индентора и предметного стола будут определяться уравнениями [58]:

$$\varepsilon_{z,инд}(x,y,0,t)\frac{w_{инд}(x,y,0,t)}{f_{внедр}(x,y)+h},\qquad \varepsilon_{z,стол}=\frac{w_{стол}(x,y,0,t)}{f_{внедр}(x,y)+h}. \qquad (240)$$

6.5.4. Неустановившаяся ползучесть клетки. Композиционная линейная модель Фойгта

В соответствии с расчетной схемой рассматриваются два криволинейных композиционных слоя состоящих (Рисунок 33), как и в классической модели Винклера, из исключительно вертикально деформируемых и не взаимодействующих между собой элементов, уравнение состояния которых определяется одной и той же эффективной линейной моделью Фойгта (Рисунок 27):

$$\langle\sigma_z\rangle=\langle E\rangle_{K-T}\cdot\langle\varepsilon_z\rangle+\langle\eta\rangle_{K-T}\cdot\left(\frac{d}{dt}\langle\varepsilon_z\rangle\right), \qquad (241)$$

где $\langle E\rangle_{K-T}$, $\langle\eta\rangle_{K-T}$ - эффективные по Кравчуку-Тарасюку модуль упругости и вязкость, определенные соотношениями (194) и (215), $\langle\sigma_z\rangle$, $\langle\varepsilon_z\rangle$ - эффективные напряжения и деформации стержней в стержневой модели.

Исходя из (240), получаем, что:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_{z,инд}(x,y,0,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{w_{инд}(x,y,0,t)}{f_{внедр}(x,y)+h}\right)=\frac{1}{f_{внедр}(x,y)+h}\frac{\partial}{\partial t}\delta_{верх}(t)=$$
$$=\frac{\dot{\delta}_{верх}(t)}{f_{внедр}(x,y)+h},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_{z,стол}(x,y,0,t)=\frac{\dot{\delta}_{низ}(t)}{f_{внедр}(x,y)+h}. \qquad (242)$$

где $\dot{\delta}(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}$.

Очевидно из (242), поскольку индентор и стол сближаются с одинаковыми относительными скоростями предположить, что $\dot{\delta}_{верх}(t)=\dot{\delta}_{низ}(t)=-V$, где V - абсолютная скорость вдавливания индентора.

В рассматриваемом общем случае геометрии биологической клетки с использованием уравнений равновесия (133) и эффективного уравнения состояния (241) можно получить:

$$P(t)=-\iint\limits_{S(t)}\left(\langle E\rangle_{K-T}\cdot\langle\varepsilon\rangle+\langle\eta\rangle_{K-T}\cdot\left(\frac{d}{dt}\langle\varepsilon\rangle\right)\right)dxdy.$$

Используя (240) и (242) получаем:

- для индентора

$$P(t)=-\langle E\rangle_{K-T}\cdot\iint\limits_{S(t)}\frac{w_{инд}(x,y,0,t)}{f_{внедр}(x,y)+h}dxdy-$$
$$-\langle\eta\rangle_{K-T}\cdot\dot{\delta}_{верх}(t)\cdot\iint\limits_{S(t)}\frac{1}{f_{внедр}(x,y)+h}dxdy, \qquad (243)$$

- для предметного стола:

$$P(t)=-\langle E\rangle_{K-T}\cdot\iint\limits_{S(t)}\frac{w_{стол}(x,y,0,t)}{f_{внедр}(x,y)+h}dxdy-$$
$$-\langle\eta\rangle_{K-T}\cdot\dot{\delta}_{низ}(t)\cdot\iint\limits_{S(t)}\frac{1}{f_{внедр}(x,y)+h}dxdy. \qquad (244)$$

При решении задачи по (243) определяется сила $P(t)$ по заданной глубине вдавливания $\delta_{верх}(t)$ и заданному абсолютному значению скорости вдавливания $V = -\dot{\delta}_{верх}(t) = -\dot{\delta}_{низ}(t)$, далее с помощью (244) определится $\delta_{низ}(t)$ и только после этого определяется суммарное сближение индентора и предметного стола при определенной силе $P(t)$.

6.5.5. Установившаяся ползучесть клетки

Сила величиной $P(t)$ не убывает при $t \in [0, t_0]$, где t_0 - длительность испытаний на ползучесть. Она действует на абсолютно жесткий индентор вертикально вниз вдоль оси Z. Все линейные размеры области контакта $S(t)$ при действии силы $P(t)$ не уменьшаются, т.е. если выбраны два любых значения времени t_1 и t_2, такие что $t_1 < t_2$, то выполнено условие (151) [58].

Время вдавливания индентора на глубину $\delta(0)$ пренебрежимо мало по сравнению со временем измерений. Это позволяет предположить, что $\delta(0)$ является мгновенной величиной [58].

Если индентор, используемый для давления на клетку сверху отличен от плоского, то $\overline{S_{верх}(t)} \neq \overline{S_{низ}(t)}$ и для определения областей контакта сверху и снизу клетки необходимо воспользоваться одной из систем уравнений [58]:

- вязкоупругий однородно стареющий материал клетки (149) [58]:

$$\begin{cases} \iint\limits_{S_{верх}(t)} \dfrac{w_{инд}(x,y,0,t)}{f_{внедр}(x,y)+h} dxdy = -\dfrac{1}{\langle E(t) \rangle} \left(P(t) + \displaystyle\int_0^t \dfrac{P(\tau)}{\langle E(\tau) \rangle} \cdot \langle \Gamma(t,\tau) \rangle d\tau \right), \\ \iint\limits_{S_{низ}(t)} \dfrac{w_{стол}(x,y,0,t)}{f_{внедр}(x,y)+h} dxdy = -\dfrac{1}{\langle E(t) \rangle} \left(P(t) + \displaystyle\int_0^t \dfrac{P(\tau)}{\langle E(\tau) \rangle} \cdot \langle \Gamma(t,\tau) \rangle d\tau \right), \end{cases} \qquad (245)$$

  где $\langle E(t) \rangle$, $\langle \Gamma(t,\tau) \rangle$ - эффективный модуль упругости и эффективное ядро ползучести;
- материал клетки, обладающий свойствами нелинейной ползучести в форме (150) [58]:

$$\begin{cases} \iint\limits_{S_{верх}(t)} \langle\mathfrak{I}\rangle\left(\dfrac{w_{инд}(x,y,0,t)}{f_{внедр}(x,y)+h}\right)dxdy = -\left(P(t)+\int\limits_0^t P(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right), \\ \iint\limits_{S_{низ}(t)} \langle\mathfrak{I}\rangle\left(\dfrac{w_{стол}(x,y,0,t)}{f_{внедр}(x,y)+h}\right)dxdy = -\left(P(t)+\int\limits_0^t P(\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right), \end{cases} \tag{246}$$

где $\langle\mathfrak{I}\rangle(\ )$ - эффективная нелинейная функция, определяющая свойства клетки.

Выбор модели (245) или (246) для моделирования реологии клетки осуществляется в соответствии с требованием наилучшего приближения экспериментальных данных. С примером решения задачи для конкретной формы индентора и клетки можно ознакомиться в [58].

6.6. Основы теории Демкина сближения шероховатых поверхностей

6.6.1. Микроотклонения формы деталей машин

Как в вычислительной математике вычислитель всегда оперирует рациональными приближениями вещественных чисел, так и в технике не бывает абсолютно гладких и ровных номинальных поверхностей (не только криволинейных, но даже и плоских) [39], а есть лишь неровное на микроуровне приближение к ним.

В процессе формообразования деталей (механообработки) на их поверхности появляется микроотклонения формы деталей — ряд чередующихся выступов и впадин сравнительно малых размеров (Рисунок 34).

Профилограмма шероховатой поверхности – записанный специальными приборами в выбранном или предустановленном масштабе график изменения высот поверхности на непрерывном линейном участке поверхности, называемой трассой измерения шероховатости (Рисунок 34).

Микроотклонения могут быть следом от резца или другого режущего инструмента, копией неровностей форм или штампов, может появляться вследствие вибраций, возникающих при резании, а также в результате действия других факторов [39].

Таким образом, шероховатость поверхности – совокупность неровностей с относительно малыми шагами на базовой длине (Рисунок 35). Волнистость поверхности – совокупность периодически чередующихся неровностей, у которых расстояние между смежными возвышенностями или впадинами превышает базовую длину (Рисунок 35).

Рисунок 34. Пример профилограммы шероховатой поверхности

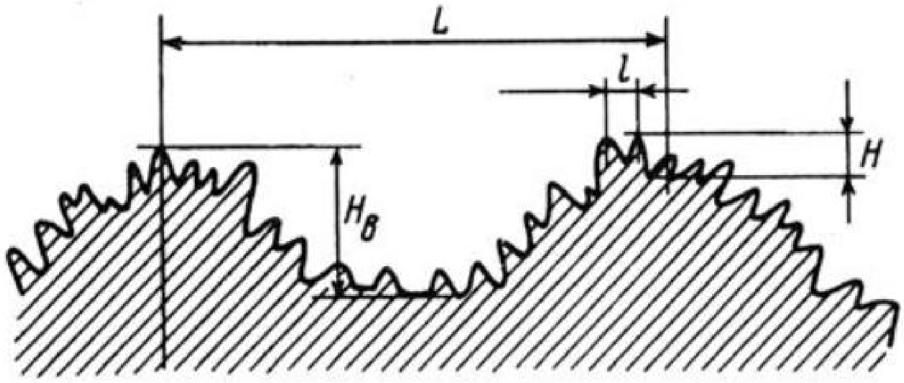

Рисунок 35. Схема, иллюстрирующая шероховатость и волнистость поверхности детали

Шероховатость и волнистость взаимосвязаны с точностью размеров детали. Разграничением понятий шероховатости и волнистости является отношение шага *L* к высоте неровностей *H* [5, 39]:

- для шероховатости $L/H < 50$;
- для волнистости $L/H = 50…1000$.

В качестве ненормированного технического термина определяющего отклонения цилиндрических поверхностей также следует упомянуть огранку. Огранка - волнистость в плоскости поперечной оси цилиндрической детали с количеством выступов менее 5. Задача с данным видом отклонения решается в конце монографии.

Различают продольную шероховатость (волнистость) поверхности, измеряемую в направлении вектора скорости резания, и поперечную, измеряемую в направлении подачи.

Также различают изотропную шероховатость (статистические параметры, которой одинаковы на любых двух пересекающихся трассах измерений длиной равной базовой) и анизотропную – когда статистические параметры на пересекающихся трассах измерений различаются. Для волнистости подобной классификации нет [5, 39].

Влияние микрогеометрии на работу деталей машин многообразно. Микрогеометрия поверхности:

- непосредственно определяет износостойкость рабочих поверхностей;
- снижает жесткость стыков;
- разрушает контактирующие с ними различного рода уплотнения;
- снижают усталостную прочность деталей;
- определяет герметичность соединений;
- влияет на точность измерения деталей;
- провоцирует и стимулирует коррозию металла и т. п.

6.6.2. Параметры микрогеометрии

Волнистость не имеет стандартизированных параметров для своего описания. Основная трудность состоит в том, что до недавнего времени статистические параметры волнистости не воспроизводились на однотипном оборудовании при однотипных технологических операциях.

Поэтому фактически ранее считалось, что волнистость – является индивидуальным следом какого-либо станка. Однако за последние 20 лет произошел настолько мощный скачек в точности обработки и жесткости исполнительных механизмов, что в настоящее время либо можно уже вообще отказаться от понятия волнистость, либо ее параметры можно уже стандартизировать по технологическим операциям [5, 39, 59].

6.6.2.1. Параметры шероховатости

Для широкого класса поверхностей горизонтальный шаг неровностей находится в пределах от 1 до 1000 мкм, а высота — от 0,01 до 10 мкм. В результате трения и изнашивания параметры исходной шероховатости, как правило, меняются, и постепенно приходят к равновесной шероховатости (она называется еще эксплуатационной шероховатостью).

Параметры шероховатости (Рисунок 36): l - базовая длина; m - средняя линия профиля; S_{mi} - средний шаг неровностей профиля; S_i - средний шаг местных выступов профиля; $H_{i\max}$ - отклонение пяти наибольших максимумов профиля; $H_{i\min}$ - отклонение пяти наибольших минимумов профиля; $R_{\max}$ - наибольшая высота профиля; y_i - отклонения профиля от линии m; p - уровень сечения профиля; b_n - длина отрезков, отсекаемых на уровне p [5, 39].

6.6.2.2. Используемые в науке и инженерии высотные параметры

Среднее арифметическое из абсолютных значений отклонений профиля в пределах базовой длины R_a вычисляется по одной из формул [5, 39]:

$$R_a = \frac{1}{l}\int_0^l |y_i| dx, \qquad R_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |y_i|.$$

Сумма средних абсолютных значений высот пяти наибольших выступов профиля и глубин пяти наибольших впадин профиля в пределах базовой длины R_z вычисляется по формуле [5, 39]:

$$R_z = \left(\sum_{i=1}^{5} |H_{i\max}| + \sum_{i=1}^{5} H_{i\min}\right) \Big/ 5.$$

Также в расчетах используется наибольшая высота профиля *Rmax*. Параметры R_a, R_z и $R_{\max}$ определяются на базовой длине l, которая может принимать значения из ряда 0,01; 0,03; 0,08; 0,25; 0,80; 2,5; 8; 25 мм. В инженерии параметр *Ra* является предпочтительным.

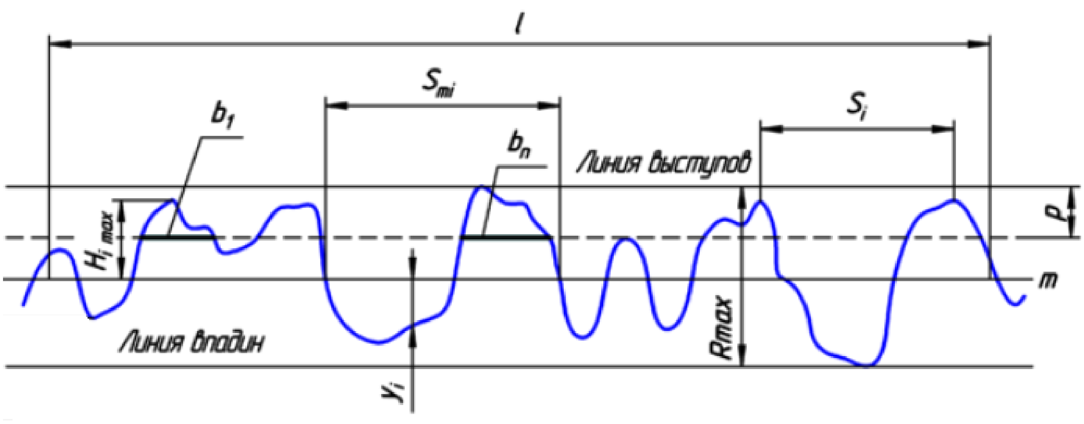

Рисунок 36. Параметры шероховатости

6.6.2.3. Шаговые параметры шероховатости

В качестве шаговых параметров используются (Рисунок 36) [5, 39]:

- S_{mi} — средний шаг неровностей;
- S_i — средний шаг местных выступов профиля;

- tp — относительная опорная длина профиля, где p — значения уровня сечений профиля из ряда 10; 15; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90%:

$$tp = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n} b_i \,. \qquad (247)$$

6.6.2.4. Опорная кривая шероховатости

Одной из важнейших характеристик топографии поверхности является опорная кривая, показывающая характер распределения материала в поверхностном слое. Опорная кривая строиться на основании профилограмм, снятых с исследуемой шероховатой поверхности [5, 39, 59] (Рисунок 37).

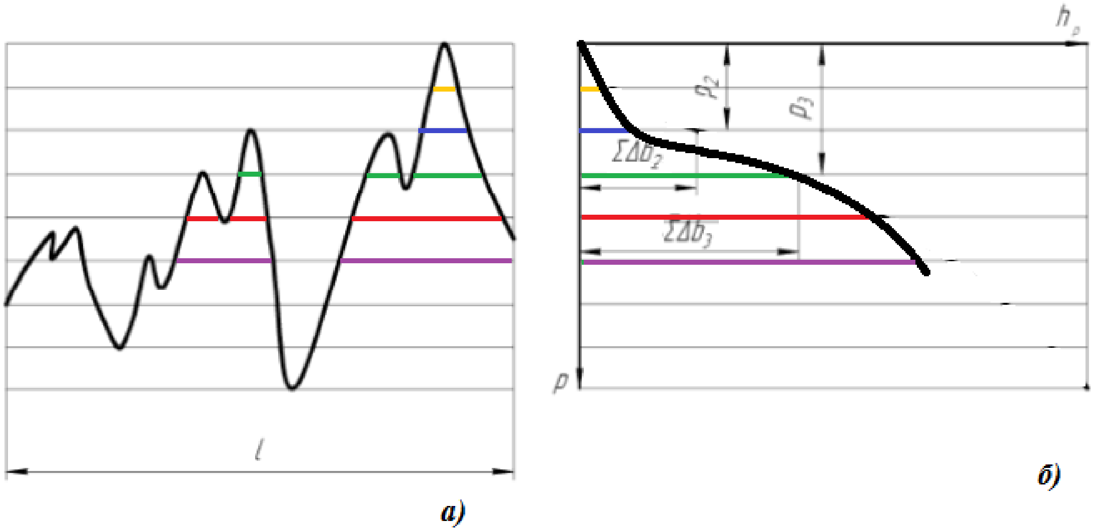

Рисунок 37. Схема построения опорной кривой: а) профилограмма; б) график опорной кривой

Из графического метода построения опорной кривой (Рисунок 37) следует, что tp (247) (относительная опорная длина профиля) может быть также определена через отношение длин сечений (условно площадей) контакта реальной A_p (при сжатии шероховатости до уровня p) к номинальной A_c (для гладкой плоской поверхности – длине трассы измерений):

$$tp = \frac{A_p}{A_c}.$$

Из этого следует, что относительная опорная длина профиля tp (247) равна относительной площади сечения материала шероховатого слоя на некотором уровне. Кривая, выражающая зависимость A_p от p, называется кривой опорной поверхности (Рисунок 37), которая наглядно показывает, какую долю занимает материал в шероховатом слое на каждом уровне. Построение таких кривых было предложено американцем Абботом в 1934 г. [5, 39, 59].

6.6.2.5. Построение кривой опорной поверхности

В начале обработки строят медиану (среднюю линию профиля), далее имеющуюся профилограмму ограничивают двумя параллельными медиане линиями. Одна из них проходит через вершину наибольшего выступа, а вторая через крайнюю точку наиболее глубокой впадины. Расстояние по вертикали между указанными линиями разбивается на несколько равных частей рядом горизонтальных линий (уровней) в соответствии со стандартизированными значениями процентов от $R_{\max}$ [5, 39, 59].

Каждому уровню соответствует некоторое сближение, равное расстоянию от вершины наибольшего выступа до данного уровня. Откладывая в горизонтальном направлении суммированные участки, ограничивающие ширину выступов, а по оси ординат сближение, получают, кривую опорной поверхности, которая является графическим выражением зависимости суммарной площади сечений выступов на некотором уровне от величины сближения.

Очевидно, что вторую координату p (Рисунок 37) можно также выразить в относительных величинах в долях от $R_{\max}$, т.е. $p=\varepsilon\cdot R_{\max}$, где ε – относительный уровень сечения на профилограмме (или относительный уровень сближения ровной и шероховатой поверхности). В относительных координатах в соответствии с ГОСТ для обозначения относительной площади сечения материала на некотором уровне ε вместо tp используется обозначение η_s (в математическом смысле это функция, т.е. $\eta_s(\varepsilon)$) [5, 39, 59].

6.6.3. Теория Демкина деформируемости шероховатости

6.6.3.1. Номинальная контурная и фактическая области контакта

Условно в технических расчетах различаются номинальная, контурная и реальная площади контакта [5, 39] (Рисунок 38). При расчетах в подавляющем большинстве случаев волнистостью пренебрегают и поэтому контурная и номинальная площади контакта совпадают [5, 39].

В теории деформирования шероховатых поверхностей предполагается, что номинальная поверхность шероховатых образцов является плоской.

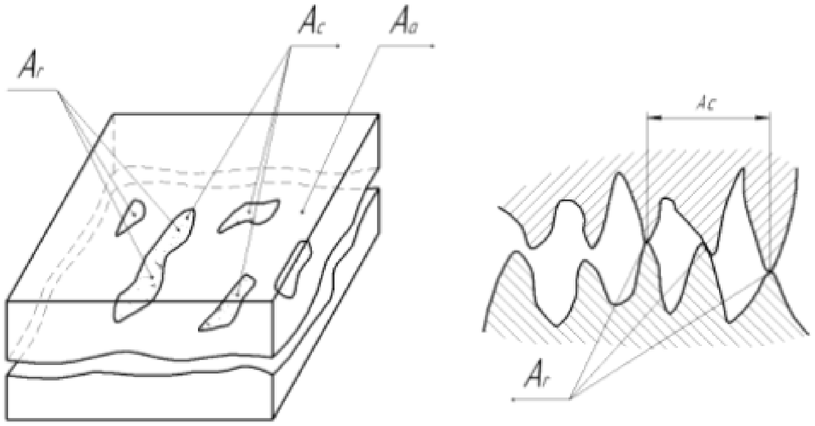

Рисунок 38. Номинальная A_a, контурная A_c и фактическая A_r области контакта

6.6.3.2. Изотропная шероховатость

Изотропия микрогеометрии в частности шероховатости предполагает в общепринятой трактовке, что не только распределение материала в шероховатом слое в относительных координатах, но и в абсолютных совпадают [5, 39].

Это предположение соответствует тому, что на практике не только выступы шероховатости, но выступы волнистости имеют форму очень близкую к параболоиду вращения, что сильно упрощает построение общепринятых в трибологии моделей деформирования шероховатости [5, 39].

На практике изотропную шероховатость можно сформировать только при чистовой обработке высокого класса чистоты (отделочные операции близкие к полированию) [5, 39].

С другой стороны, очевидно, что при подавляющем большинстве операций выполняемых на металлорежущих станках ожидать формирование одинакового распределения материала в шероховатом слое в абсолютных координатах невозможно. При всех операциях с низким классом чистоты поверхности инструмент оставляет микро борозды и формирует выступы шероховатости в виде сильно вытянутых фрагментов эллипсоидов [5, 39].

Считается, что для того чтобы профилограмма отражала изменение шероховатости как в продольном так и в поперечном направлении и далее использовать модель изотропной шероховатости, ее запись производится на трассе расположенной под углом 45 градусов к направлению обработки. Это экспериментально-инструментальный способ получения эффективного распределения материала в шероховатом слое, косвенно учитывающий разное распределение материала в двух взаимно перпендикулярных направлениях [5, 39].

Очевидна также методическая ошибка к жесткому требованию по наклону трассы к направлению обработки. Этот угол может быть 45 градусов только если базовые длины для записи профилограммы одинаковы для продольного и поперечного направлений, т.е. когда на практике сформирована изотропная шероховатость. В других случаях угол наклона трассы измерений должен определяться отношением базовых длин для измерения продольной шероховатости и поперечной. На самом деле это связано не столько с базовой длиной, сколько со средним шагом неровности в продольном и поперечном направлениях. Этот параметр должен косвенно определять и базовые длины для трасс измерения [5, 39].

Таким образом, *arctg* от отношения среднего шага неровности в продольном направлении (направлении обработки) к среднему шагу неровности в поперечном направлении и определяет угол наклона трассы к поперечному направлению при измерении эффективных свойств шероховатости и сведение моделирования ее деформирования к изотропной модели [5, 39].

6.6.3.3. Степенная аппроксимация Демкина начального участка опорной поверхности

Кроме понятия изотропной шероховатости теория Демкина основана на том, что координаты опорной кривой на постсоветском пространстве связаны с наивысшим выступом поверхности [5, 39].

Это позволяет естественно описать деформацию шероховатости параметром относительного сечения опорной поверхности ε, который в свою очередь в смысле одномерной модели выступа будет трактоваться как деформация шероховатого выступа некоторой высоты до данного выбранного уровня [5, 39].

Для облегчения вычислительных процедур (поскольку взаимодействие шероховатости в подвижных соединениях деталей происходит по вершинам), Демкин предложил использовать специфическое выражение для аппроксимации опорной кривой в относительных координатах [5, 39] (Рисунок 37):

$$\eta_s = b \cdot \varepsilon^{\nu}, \tag{248}$$

где b, ν – безразмерные параметры, устанавливаемые исходя из профилограммы, кроме того они стандартизированы как по типам механической обработки, так и требованиям чистоты поверхности [5, 39].

Предполагается, что аппроксимация Демкина верна в широком диапазоне, т.е. $0 \le \varepsilon < 0.5$, что является достаточным для расчета подвижных соединений [5, 39].

6.6.3.4. *Вычисление относительного числа пиков в контакте*

Пусть n_ε - количество пиков, чья высота больше относительного уровня ε, а n_l - является общим количеством пиков на базовой длине l.

Следовательно, относительное число пиков находящихся в контакте с жесткой плоской гладкой поверхностью определяется функцией $\xi(\varepsilon) = \frac{n_\varepsilon}{n_l}$. Для модели стержневых выступов получаем, что [5, 39]:

$$\xi(\varepsilon) = \eta_s(\varepsilon). \tag{249}$$

6.6.3.5. *Определение среднего давления, действующего на номинально плоскую ровную поверхность и необходимого для заданного относительного уровня сближения ровной поверхности и основания выступов*

Пусть ε является заданным относительным сближением гладкой жесткой поверхности и плоской поверхности основания выступов. Приращение среднего давления $d\langle p \rangle$ для относительного уровня y ($0 \le y \le \varepsilon$) определяется средним давлением, приложенным к основанию пика относительной высотой y умноженным на приращение относительного числа пиков $d\xi(\varepsilon)$, которые имеют большую относительную высоту больше или равную y [5, 39]. Таким образом:

$$d\langle p \rangle = p(\varepsilon - y) \cdot d\xi(y) \tag{250}$$

где $\varepsilon - y$ – величина относительной деформации пика высотой y до заданного относительного уровня ε, $p(\ )$ – функция зависимости давления на вершине стержня от его относительной деформации $\varepsilon - y$.

Общее давление определяется интегрированием приращения (250) на отрезке $[0, \varepsilon]$ [5, 39] с учетом (248) и (249):

$$\langle p \rangle = \int_0^\varepsilon p(\varepsilon - y) \cdot d\xi(y) = \int_0^\varepsilon p(\varepsilon - y) \cdot \frac{d\eta_s(y)}{dy} dy = b \cdot \nu \cdot \int_0^\varepsilon p(\varepsilon - y) \cdot y^{\nu - 1} dy. \tag{251}$$

6.6.3.6. *Линейно упругая шероховатость для модели стержневых выступов*

В случае стержневых выступов с учетом того, что модуль Юнга материала выступов E равен модулю Юнга материала детали, можно с очевидностью записать $p(\varepsilon - y) = E \cdot (\varepsilon - y)$. В этом случае для всех типов обработки в рамках изотропного приближения распределения материала в шероховатом слое можно вычислить среднее давление $\langle p \rangle$ необходимое для относительного сближения идеально ровной поверхности, действующей на шероховатость и поверхности основания пиков шероховатости [5, 39] (251):

$$\langle p \rangle = b \cdot \nu \cdot \int_0^{\varepsilon} p(\varepsilon - y) \cdot y^{\nu - 1} dy = E \cdot b \cdot \nu \cdot \int_0^{\varepsilon} (\varepsilon - y) \cdot y^{\nu - 1} dy = E \cdot b \cdot \frac{\varepsilon^{1+\nu}}{1+\nu}. \quad (252)$$

Обращая полученное в (252) выражение можно найти уравнение, определяющее деформацию шероховатости ε в зависимости от действующего среднего давления $\langle p \rangle$, приложенного к элементу шероховатой поверхности [5, 39]:

$$\varepsilon = \left((1+\nu) \frac{\langle p \rangle}{E \cdot b} \right)^{\frac{1}{1+\nu}}.$$

6.6.3.7. *Нелинейное деформирование шероховатости*

Очень удобно воспользоваться нелинейным модифицированным законом Бюльфингера (10) для вычисления влияния нелинейности связи деформаций и напряжений. Однако надо помнить, что в (252) этот закон приобретает вид:

$$p(\varepsilon - y) = \left| \sigma_{эт}^{сжатия} \right| \cdot \left(\frac{\varepsilon - y}{\left| \varepsilon_{эт}^{сжатия} \right|} \right)^{\beta}.$$

Т.е. из (251) можно получить:

$$\langle p \rangle = b \cdot \nu \cdot \int_0^{\varepsilon} p(\varepsilon - y) \cdot y^{\nu - 1} dy = \frac{\left| \sigma_{эт}^{сжатия} \right|}{\left| \varepsilon_{эт}^{сжатия} \right|^{\beta}} \cdot b \cdot \nu \cdot \int_0^{\varepsilon} (\varepsilon - y)^{\beta} \cdot y^{\nu - 1} dy = \quad (253)$$

$$=b\cdot\nu\cdot\frac{\Gamma(1+\beta)\cdot\Gamma(\nu)}{\Gamma(1+\beta+\nu)}\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{\left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|^{\beta}}\cdot\varepsilon^{\beta+\nu}.$$

6.6.3.8. Неустоявшаяся ползучесть шероховатости. Линейно вязкоупругая модель Фойгта

Если материал твердого тела проявляет вязкоупругие свойства, то этого же следует ожидать и от его шероховатости. С учетом того, что на текущий момент считается, и что вязкость как свойство присуща и металлам, то использование модели Фойгта (145), описывающей начальную стадию ползучести вполне уместно и для шероховатости (предполагая деформирования выступа с любого уровня y до желаемого ε постоянной и равной V):

$$p(\varepsilon-y)=\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\cdot\left(\frac{\varepsilon-y}{\left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|}\right)^{\beta}+\eta\cdot V.$$

Из (251) можно получить:

$$\langle p\rangle=b\cdot\nu\cdot\int_{0}^{\varepsilon}\left(\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|\cdot\left(\frac{\varepsilon-y}{\left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|}\right)^{\beta}+\eta\cdot V\right)\cdot y^{\nu-1}dy=$$

$$=b\cdot\left(\nu\cdot\frac{\Gamma(1+\beta)\cdot\Gamma(\nu)}{\Gamma(1+\beta+\nu)}\cdot\frac{\left|\sigma_{эт}^{сжатия}\right|}{\left|\varepsilon_{эт}^{сжатия}\right|^{\beta}}\cdot\varepsilon^{\beta+\nu}+\eta\cdot V\cdot\varepsilon^{\nu}\right).$$

Таким образом, видно, что чем выше вязкость η или скорость V нагружения элемента поверхности, тем больше необходимое среднее давление, чтобы достичь сближения ε. Соответственно скорость нагружения образца давлением должны выбираться из того условия, чтобы второе слагаемое $\eta\cdot V\cdot\varepsilon^{\nu}$ в последней формуле должно быть значительно меньше первого.

6.6.3.9. Релаксация необходимого давления при установившейся ползучести по наследственной линейно вязкоупругой теории

Если же исследователя интересует установившаяся ползучесть шероховатости по наследственной теории, при которой уже считается, что шероховатость уже деформирована до уровня ε, то следует воспользоваться уравнением релаксации, например, линейно вязкоупругого материала без учета старения (217). С его использованием можно записать:

$$p(\varepsilon - y, t) = E \cdot (\varepsilon - y) \cdot \left(1 - \int_0^t R(t,\tau) d\tau \right),$$

Тогда из (251) можно получить:

$$\langle p(t) \rangle = b \cdot \nu \cdot E \cdot \int_0^\varepsilon (\varepsilon - y) \cdot y^{\nu - 1} dy \cdot \left(1 - \int_0^t R(t,\tau) d\tau \right) = E \cdot b \cdot \frac{\varepsilon^{1+\nu}}{1+\nu} \cdot \left(1 - \int_0^t R(t,\tau) d\tau \right).$$

Последнее уравнение определит уменьшение давлений во времени при уже достигнутом мгновенном сближении ε.

Т.е. после первичного нагружения шероховатости можно постепенно уменьшать нагрузку необходимую для поддержания минимального требуемого зазора между номинально плоскими поверхностями.

6.6.3.10. Заключительные замечания

Из предыдущего изложения из предыдущего изложения понятно, что идет речь о двух плоских пространственных поверхностях (одной гладкой, а второй с выступами). При этом обе поверхности являются границами недеформируемых полупространств.

Поскольку теория Демкина разработана для изотропной шероховатости, деформируемыми телами в которой являются сферические сегменты, то в связи с требованием, чтобы на любых пересекающихся двух трассах с базовой длиной l опорная кривая совпадала, все полученные уравнения сближения для шероховатой поверхностей верны для плоских кругов радиусом, равным половине базовой длины $l/2$.

Как уже ранее отмечалось в данном случае замена реальной шероховатости на изотропную модель возможна, при определении базовой длины измерений l через известное геометрическое соотношение

$l=\sqrt{l_{попер}{}^2+l_{род}{}^2}$, где $l_{попер}$ - базовая длина в поперечном к следам обработки направлении, $l_{род}$ - базовая длина в продольном к направлению обработки направлении.

Таким образом, на круге с радиусом $l/2$ (назовем его базовым кругом), действующие на пиках давления усредняются в пределах этого круга, более того, предполагается, что выполняется свойство эргодичности в распределении шероховатости. Это отражается в том, что оба круга плоских круга (на одном из которых размещены выступы) остаются параллельными вне зависимости от реализации шероховатости, в том числе даже при использовании в качестве реализации распределения шероховатости кривой опорной поверхности.

Таким образом, фактической область контакта A_c должна определяться для изотропной шероховатости при заданном сближении ε как $A_c=2\cdot\pi\cdot(\eta_c(\varepsilon))^2$, но не как ошибочно полагал Демкин $A_c=\eta_c(\varepsilon)\cdot l^2$ [5, 39]. Последняя формула полностью не учитывает ни характер моделирования, ни фактического использования цилиндрической системы координат для определения плотности вероятности.

Фактически во всех полученных зависимостях не только давление является средней величиной, но и относительное сближение ε фактически является эффективной величиной, т.е. следует использовать запись $\langle\varepsilon\rangle$. Это позволяет поставить и решать контактные задачи с нелокальным распределением шероховатости [60, 61], т.е. когда половина базовой длины $l/2$ (радиус базового круга) сопоставим с размерами области контакта, что в технических приложениях является нормой.

ГЛАВА 7. КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ, А ТАКЖЕ ШАРОВЫХ ОПОР И ШАРОВЫХ НАКОНЕЧНИКОВ С ЗАЩИТНЫМ СЛОЕМ

На примере решения контактных задач для цилиндрических подшипников скольжения, а также шаровых опор и наконечников с покрытием постоянной высоты предлагается естественное обобщение стержневой модели Винклера на наиболее распространенные в механике, биомеханике и инженерии случаи криволинейных подстилающих поверхностей, на которые наносится деформируемое защитное покрытие.

Наиболее интересным с точки зрения приложений является случай взаимодействия жесткого цилиндра или шара с покрытием постоянной высоты на цилиндрической или соответственно сферической полости в недеформируемом пространстве. Эти задачи являются моделями подшипников скольжения или шаровых опор и шаровых наконечников, имеющих защитные (в частности антифрикционные) покрытия.

Кроме того, эти задачи, могут стать основой расчета жесткости сочленений (искусственных суставов) в ортопедии. В данном разделе также рассмотрены особенности решения контактных задач с учетом реологических свойств покрытий.

Отметим, что полученные ранее результаты изложены таким образом, что исследователь может использовать практически любые уравнения состояния материала покрытия, в том числе учитывающих его неоднородный состав.

7.1. Расчет в случае малого по сравнению с радиусом зазора

7.1.1. Основные гипотезы, используемые для стержневой модели цилиндрических подшипников скольжения с низкомодульным антифрикционным слоем

Предполагается, что радиус цилиндрической полости в жестком пространстве равен $R+h$, где R - радиус поверхности деформируемого покрытия постоянной высоты h. Начало цилиндрической системы координат полости совпадает с началом декартовой системы. Ось цилиндрической системы координат совпадает с осью $0z$ декартовой системы координат. В цилиндрическую полость радиуса R вставлен абсолютно жесткий цилиндр радиуса r (Рисунок 39). Введем дополнительное обозначение $e=R-r$ ($e\geq 0$, e/R - пренебрежимо малая величина).

Отклонения поверхности деформируемого слоя от правильного цилиндра радиуса R малы в сравнении с глубиной вдавливания δ жесткого цилиндрического индентора радиуса r. Будем предполагать, что глубина рассматриваемой модели вдоль направления *0z* равна *1* [1, 2, 34].

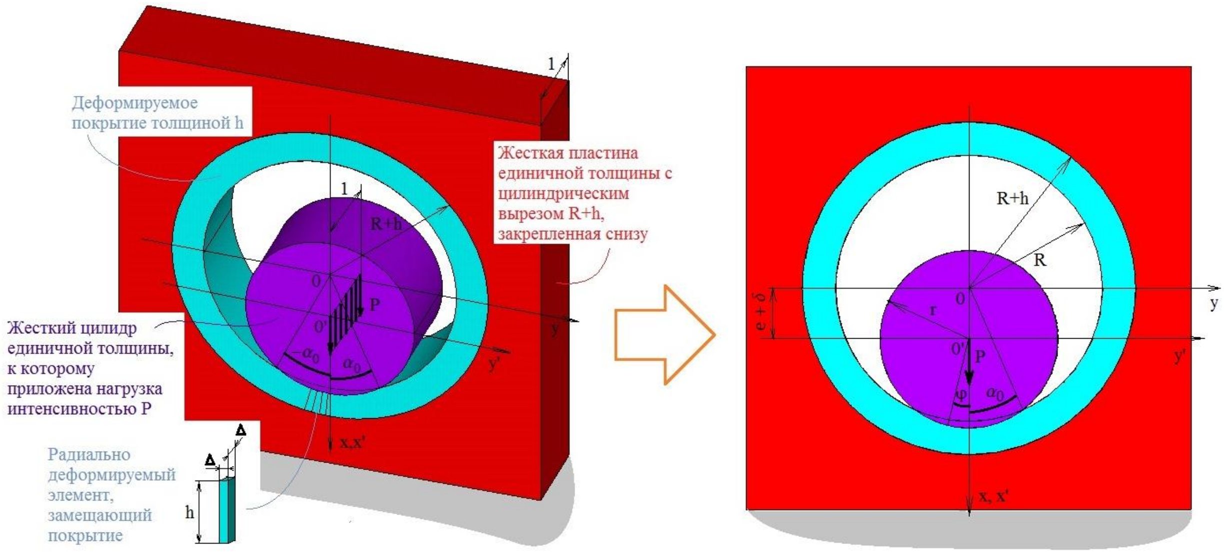

Рисунок 39. Редукция пространственной задачи о контакте цилиндра и покрытия на цилиндрической поверхности к плоской краевой задаче для сечения перпендикулярного оси цилиндрического отверстия

Предполагается, что покрытие может быть заменено призматическими стержнями высотой h с постоянным квадратным сечением вершины $\Delta \times \Delta$, находящейся на цилиндрической поверхности покрытия (Рисунок 39). Стержни могут деформироваться только в радиальном направлении $\rho(\varphi)$, связанном с центром цилиндрического выреза и фиксированным направлением φ, откладываемым от вертикальной оси $0x$. При этом, напряженно-деформированное состояние стержней является однородным в направлении 0ρ (поперечном сечении покрытия). Размер Δ пренебрежимо мал в сравнении с размером $2 \cdot \alpha_0 \cdot r$ области контакта, где α_0 - раствор угла области контакта (Рисунок 39).

При сделанных предположениях задача сводится к решению плоской геометрической задачи вдавливания круга в полосу постоянной высоты на круглом вырезе в плоскости $x0y$ (Рисунок 39). Учитывая симметрию задачи относительно оси $0x$ (трение не рассматривается), достаточно сформулировать краевое условие по перемещениям в области контакта для правой полуплоскости плоской модели рисунка (т.е. когда $y \geq 0$ и $\varphi \in [0, \alpha_0]$).

7.1.2. Гипотезы стержневой модели для шаровых опор

Гипотезы для шаровых опор полностью соответствуют гипотезам для цилиндрических опор скольжения. Однако опустить этот пункт нельзя в связи с необходимостью связности изложения. Основные отличия от предыдущего пункта связаны с заменой цилиндрической системы координат на сферическую.

Предполагается, что радиус сферической полости в жестком пространстве равен $R+h$, где R - радиус сферической поверхности деформируемого покрытия постоянной высоты h. Начало сферической системы координат полости совпадает с началом вспомогательной глобальной декартовой системы координат. Ось симметрии задачи совпадает с осью $0x$ декартовой системы координат. В сферическую полость радиуса R вставлен абсолютно жесткий шар радиуса r (Рисунок 40). Введем дополнительное обозначение $e = R - r$ ($e \geq 0$, e/R - пренебрежимо малая величина) [2].

Отклонения поверхности деформируемого слоя от правильной сферы радиуса R малы в сравнении с глубиной вдавливания δ жесткого шаровидного индентора радиуса r.

Предполагается, что покрытие может быть заменено призматическими стержнями высотой h с постоянным квадратным сечением вершины $\Delta \times \Delta$, находящейся на сферической поверхности покрытия радиуса R (Рисунок 40). Стержни могут деформироваться только в радиальном направлении $\rho(\varphi)$, связанном с центром сферического выреза и фиксированным углом φ, откладываемым от вертикальной оси $0x$. При этом, напряженно-деформированное состояние стержней является однородным в направлении 0ρ (поперечное к покрытию направление). Размер Δ пренебрежимо мал в сравнении с размером $2\alpha_0 \cdot r$ области контакта, где α_0 - раствор угла области контакта (Рисунок 40).

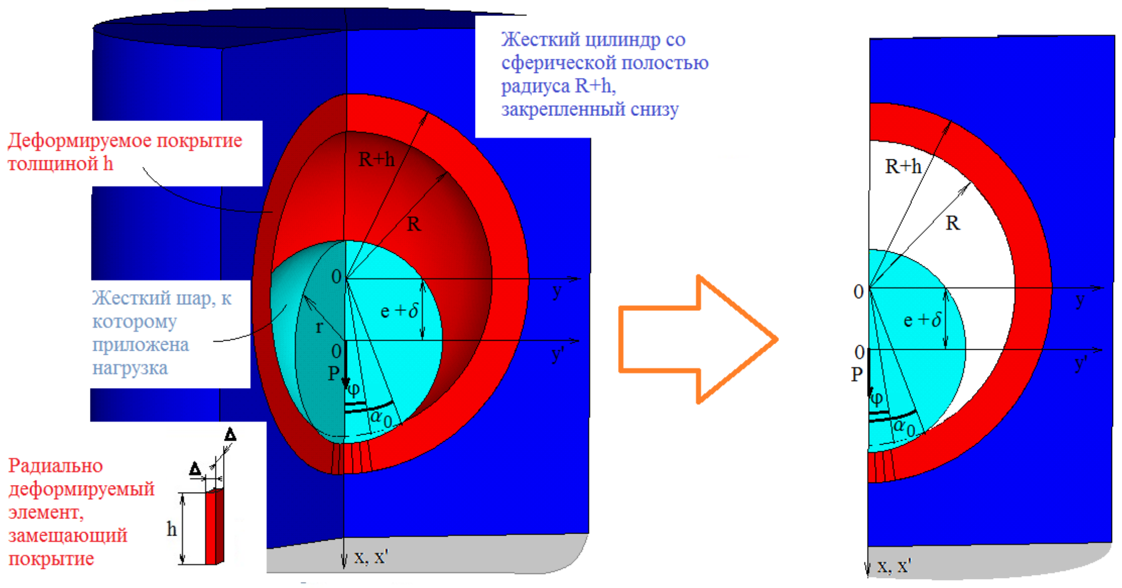

Рисунок 40. Редукция пространственной задачи о контактном взаимодействии жесткого шара и деформируемого покрытия на шаровой полости к решению двумерной задачи для радиального сечения тел в плоскости меридиана

Учитывая особенности постановки задач в осесимметричном случае, достаточно сформулировать краевое условие по перемещениям в области контакта для радиального сечения в плоскости меридиана (т.е. когда $y \geq 0$ и $\varphi \in [0, \alpha_0]$).

7.1.3. Краевое условие по перемещениям для обеих рассматриваемых контактных задач

Геометрическое краевое условие для нормальных радиальных перемещений для обеих плоских контактных задач (Рисунок 39, Рисунок 40) при сделанных предположениях имеет вид [2, 62]:

$$v_\rho(\varphi) = \begin{cases} \delta \cdot \cos(\varphi) - e \cdot (1 - \cos(\varphi)), \varphi \in [0, \alpha_0), \\ 0, \varphi \notin [0, \alpha_0). \end{cases} \tag{254}$$

Очевидно, из геометрических соображений и допущений, используемых при построении обобщений стержневой модели Винклера, что из (254) следует, что глубина вдавливания определяется выражением:

$$\delta = e \frac{(1 - \cos(\alpha_0))}{\cos(\alpha_0)}. \tag{255}$$

7.1.4. Формальное определение напряжений в области контакта без учета временных эффектов

Используя (254) и (255), можно определить относительное укорочение длины $\varepsilon_\rho(\varphi)$ каждого деформируемого в радиальном направлении элемента, замещающего покрытие:

$$\varepsilon_\rho(\varphi) = \frac{-v_n(\varphi)}{h} = -e \frac{\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0)}{h \cdot \cos(\alpha_0)}. \tag{256}$$

Тогда, контактные напряжения $\sigma_\rho(\varphi)$ связаны с деформациями $\varepsilon_\rho(\varphi)$ (256) соотношением:

$$\sigma_\rho(\varphi) = \Im(\varepsilon_\rho(\varphi)) = \Im\left(-e \frac{\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0)}{h \cdot \cos(\alpha_0)}\right), \ \varphi \in (0, \alpha_0), \tag{257}$$

где $\Im(\ )$ - произвольная функция, определяющая уравнение состояния, в том числе для композиционных покрытий [34].

7.1.5. Уравнения равновесия диска и шара на границе деформируемого слоя без учета временных эффектов

Интегральная нагрузка, вызывающая вдавливание цилиндра в деформируемое покрытие на цилиндрической полости на глубину δ, определяется соотношением:

$$P = -2R\int_{0}^{\alpha_0}\sigma_\rho(\varphi)\cdot\cos(\varphi)d\varphi. \qquad (258)$$

Уравнение равновесия шара на границе деформируемого слоя имеет вид:

$$P = -2\pi\cdot R^2\int_{0}^{\alpha_0}\sigma_\rho(\varphi)\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi)d\varphi. \qquad (259)$$

7.1.6. Пример расчета нормального контактного напряжения и контактной жесткости упругого композиционного цилиндрического подшипника скольжения

В работе [34] для линейно деформируемого покрытия, моделируемого призматическими стержнями, было установлено, что нормальные перемещения и нормальные контактные напряжения связаны соотношением:

$$\sigma_\rho(\varphi) = -E\cdot\frac{v_n(\varphi)}{h}, \qquad (260)$$

где E - модуль упругости покрытия.

Подставляя (260) в (258) и интегрируя, получаем уравнение:

$$P = R\cdot E\frac{R-r}{h\cdot\cos(\alpha_0)}\left(\alpha_0 - \cos(\alpha_0)\sin(\alpha_0)\right). \qquad (261)$$

Таким образом, при решении прямой задачи необходимо предварительно задать величину действующей нагрузки P, модуль упругости E материала, высоту покрытия h, радиус вала r и радиус отверстия R, и, решив нелинейное уравнение (261), определить раствор области контакта α_0.

Тогда, исходя из (257), контактное напряжение для данного цилиндрического подшипника $\forall\varphi\in[0,\alpha_0)$ определяется по формуле:

$$\sigma_\rho(\varphi) = -E \cdot \frac{R-r}{h \cdot \cos(\alpha_0)}\left(\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0)\right). \qquad (262)$$

Очевидно, наибольшим контактным напряжением будет являться значение $\sigma_\rho(0)$. В завершении решения задачи по формуле (2) определяется контактная жесткость δ соединения.

7.1.7. Пример расчета контактных напряжений в шаровой опоре со структурно неоднородным композиционным упругим слоем

Как и в предыдущем случае, формальное распределение нормальных контактных напряжений $\sigma_\rho(\varphi)$ определяется формулой (260). Однако в данном случае нам необходимо подставить (260) в (259), т.к. мы решаем задачу для шаровой опоры:

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \cdot R^2 E \frac{e}{h \cdot \cos(\alpha_0)} \int_0^{\alpha_0} \left(\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0)\right) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot R^2 E \frac{R-r}{h \cdot \cos(\alpha_0)} \left(2 + \cos(\alpha_0)\right) \cdot \sin^4\left(\frac{\alpha_0}{2}\right). \end{aligned} \qquad (263)$$

Как и в предыдущем примере, при решении прямой задачи необходимо предварительно задать величину действующей нагрузки P, модуль упругости E, высоту покрытия h, радиус вала r и радиус отверстия R, и, решив нелинейное уравнение (263), определить раствор угла области контакта α_0. Контактное напряжение для данной сферической опоры $\forall \varphi \in [0, \alpha_0)$, как и в предыдущем случае, определяется по формуле (262), контактная жесткость – по формуле (255). Основным отличием от предыдущего примера является уравнение (263). Его решение дает другой, чем в предыдущем примере раствор угла области контакта α_0, что приводит к иным значениям максимального нормального контактного напряжения $\sigma_\rho(0)$ и иному значению контактной жесткости δ.

7.2. Малая разность радиусов. Учет временных эффектов в напряженно-деформированном состоянии слоя

Краевое условие по перемещениям для обеих контактных задач. Перейдем к рассмотрению ползучести покрытия. Сила величиной $P(t)$ постоянна или изменяется таким образом, что $\alpha_0(t)$ является не убывающей функцией при $t \in [0, t_0]$, где t_0 - длительность испытаний на ползучесть. Она действует на абсолютно жесткий индентор (цилиндр или шар) вертикально вниз вдоль оси 0x. Таким образом, графическая постановка задачи (Рисунок 39, Рисунок 40) остается справедливой и для случая ползучести деформируемого слоя с точностью до замены на них P, α_0 и δ на $P(t)$, $\alpha_0(t)$ и $\delta(t)$.

В данном разделе рассматривается установившаяся ползучесть стержней, моделирующих покрытие. При ползучести предполагается, что деформации покрытия происходят так медленно, что задача рассматривается как квазистатическая [2, 62], т.е. инерционные характеристики призматических стержней (Рисунок 39, Рисунок 40) не оказывают влияния на характер его деформирования. Время вдавливания пирамидального индентора на глубину $\delta(0)$ пренебрежимо мало по сравнению со временем измерений, это позволяет предположить, что $\delta(0)$ является мгновенной величиной.

Перейдем непосредственно к рассмотрению геометрического краевого условия по перемещениям $v_\rho(\varphi, t)$, зависящим от времени в случае ползучести (Рисунок 39, Рисунок 40) [2, 47]:

$$v_\rho(\varphi, t) = \begin{cases} \delta(t) \cdot \cos(\varphi) - e \cdot (1 - \cos(\varphi)), \varphi \in [0, \alpha_0(t)), \\ 0, \varphi \notin [0, \alpha_0(t)), \end{cases} \qquad (264)$$

где $\alpha_0(t)$ - зависимость раствора угла области контакта от времени, $\delta(t)$ - зависимость глубины вдавливания индентора от времени.

Глубина вдавливания $\delta(t)$ определяется из (264) уравнением:

$$\delta(t) = e \frac{1 - \cos(\alpha_0(t))}{\cos(\alpha_0(t))}. \qquad (265)$$

7.2.1. Уравнения состояния при ползучести.

Учитывая (264) и (265) относительное укорочение длины $\varepsilon_\rho(\varphi, t)$ каждого деформируемого в радиальном направлении элемента, замещающего покрытие, определяется соотношением:

$$\varepsilon_\rho(\varphi, t) = \frac{-v_\rho(\varphi, t)}{h} = -e \frac{\cos(\varphi) - \cos(\alpha_0(t))}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))}. \qquad (266)$$

В случае использования наследственной теории ползучести нормальная деформация $\varepsilon_\rho(\varphi, t)$ (266) связана с нормальным напряжением $\sigma_\rho(\varphi, t)$ интегральными соотношениями с использованием ядра ползучести $\Gamma(t, \tau)$ [47]:

- вязкоупругий однородно стареющий материал слоя с мгновенным модулем упругости $E(t)$:

$$-e\frac{\cos(\varphi)-\cos(\alpha_0(t))}{h\cdot\cos(\alpha_0(t))}=\frac{1}{E(t)}\left[\sigma_\rho(\varphi,t)+\int\limits_0^t\frac{E(t)}{E(\tau)}\sigma_\rho(\varphi,\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\right], \quad (267)$$

- материал слоя, обладающий свойствами нелинейной ползучести:

$$\Im\left(-e\frac{\cos(\varphi)-\cos(\alpha_0(t))}{h\cdot\cos(\alpha_0(t))}\right)=\sigma_\rho(\varphi,t)+\int\limits_0^t\sigma_\rho(\varphi,\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau. \quad (268)$$

Отметим, что уравнения равновесия при ползучести покрытия полностью совпадают с уравнениями равновесия (258) и (259) с точностью до замены в уравнениях (258) и (259) $\sigma_\rho(\varphi)$ на $\sigma_\rho(\varphi,t)$ и α_0 на $\alpha_0(t)$.

7.2.2. Уравнения расчета области контакта по наследственной ползучести при взаимодействии цилиндра и покрытия на цилиндрической полости

В случае исследования ползучести по заданной силе $P(t)$, мгновенному модулю упругости $E(t)$ или функции $\Im(\ )$, а также ядру ползучести $\Gamma(t,\tau)$ можно определить зависимость раствора угла области контакта от времени $\alpha_0(t)$ по следующей вычислительной схеме:

Домножим левую и правую части уравнений (267) на $-2R\cos(\varphi)$ и проинтегрируем на отрезке $[0,\alpha_0(t)]$. Тогда для вязкоупругого однородно стареющего материала слоя с мгновенным модулем упругости $E(t)$:

$$\frac{2R\cdot e}{h\cdot\cos(\alpha_0(t))}\int\limits_0^{\alpha_0(t)}(\cos(\varphi)-\cos(\alpha_0(t)))\cdot\cos(\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{E(t)}\left[(-2\cdot R)\int\limits_0^{\alpha_0(t)}\sigma_\rho(\varphi,t)\cdot\cos(\varphi)d\varphi+\right. \quad (269)$$

$$\left.+(-2\cdot R)\int\limits_0^{\alpha_0(t)}\int\limits_0^t\sigma_\rho(\varphi,\tau)\cdot\frac{E(t)}{E(\tau)}\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\cdot\cos(\varphi)d\varphi\right],$$

Для материала слоя, обладающего свойствами нелинейной ползучести из (268) можно аналогично получить:

$$
\begin{gathered}
-2R\int\limits_0^{\alpha_0(t)}\Im\left(-e\frac{\cos(\varphi)-\cos(\alpha_0(t))}{h\cdot\cos(\alpha_0(t))}\right)\cos(\varphi)d\varphi= \\
=\left[(-2\cdot R)\int\limits_0^{\alpha_0(t)}\sigma_\rho(\varphi,t)\cos(\varphi)d\varphi+\right. \\
\left.+\int\limits_0^{\alpha_0(t)}\int\limits_0^{t}\sigma_\rho(\varphi,\tau)\cdot\Gamma(t,\tau)d\tau\cdot\cos(\varphi)d\varphi\right].
\end{gathered}
\tag{270}
$$

Изменим последовательность интегрирования в правой части в соответствии с гипотезой о неубывании $\alpha_0(t)$. Используем уравнение равновесия (258) для замены выражений в правой части (269) и (270).

В итоге получаем уравнения для определения $\alpha_0(t)$ по заданной правой части. Эти уравнения подобны уравнениям в общем виде, приведенным ранее в данной работе:

- вязкоупругий однородно стареющий материал слоя с мгновенным модулем упругости $E(t)$:

$$
\frac{R\cdot(R-r)}{h\cdot\cos(\alpha_0(t))}(\alpha_0(t)-\cos(\alpha_0(t))\sin(\alpha_0(t)))=\frac{P(t)}{E(t)}\left[1+\int\limits_0^t\frac{E(t)}{E(\tau)}\Gamma(t,\tau)d\tau\right],
\tag{271}
$$

- материал слоя, обладающий свойствами нелинейной ползучести:

$$
-2R\int\limits_0^{\alpha_0(t)}\Im\left(-e\frac{\cos(\varphi)-\cos(\alpha_0(t))}{h\cdot\cos(\alpha_0(t))}\right)\cos(\varphi)d\varphi=P(t)\cdot\left[1+\int\limits_0^t\Gamma(t,\tau)d\tau\right].
\tag{272}
$$

С помощью полученной функции $\alpha_0(t)$ и уравнения (265) можно получить функцию изменения глубины вдавливания $\delta(t)$. В принципе, после определения $\alpha_0(t)$ можно, обратив, например, оператор (267), определить, хотя бы численно, изменение контактных напряжений во времени с помощью выражения [50]:

$$\sigma_\rho(\varphi,t) = -\frac{(R-r)}{h}E(t)\left(\frac{\cos(\varphi)-\cos(\alpha_0(t))}{\cos(\alpha_0(t))} - \int\limits_0^t \frac{\cos(\varphi)-\cos(\alpha_0(\tau))}{\cos(\alpha_0(\tau))}\cdot R(t,\tau)d\tau\right),$$

где $R(t,\tau)$ - ядро релаксации. Однако вычисление $R(t,\tau)$ по заданному ядру $\Gamma(t,\tau)$ представляет собой трудоемкую задачу [53].

7.2.3. Ползучесть защитного слоя в задачах для шаровых опор и наконечников

Следует отметить, что процесс получения нелинейных уравнений для определения функции $\alpha_0(t)$ полностью совпадает с предыдущим случаем. Изменяется лишь множитель, на который домножаются уравнения (267) и (268). В случае шаровых опор множителем является выражение $-2\pi\cdot R^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)$, а также на третьем шаге преобразований для замены используется уравнение равновесия (259). В итоге получаем следующие два уравнения для определения $\alpha_0(t)$ по заданной правой части:

- вязкоупругий однородно стареющий материал слоя с мгновенным модулем упругости $E(t)$:

$$\frac{4}{3}\frac{\pi\cdot R^2\cdot(R-e)}{h\cdot\cos(\alpha_0(t))}(2+\cos(\alpha_0(t)))\sin^4\left(\frac{\alpha_0(t)}{2}\right) = \frac{P(t)}{E(t)}\left[1+\int\limits_0^t \frac{E(t)}{E(\tau)}\Gamma(t,\tau)d\tau\right],$$

- материал слоя, обладающий свойствами нелинейной ползучести:

$$-2\pi\cdot R^2\int\limits_0^{\alpha_0(t)}\Im\left(-e\frac{\cos(\varphi)-\cos(\alpha_0(t))}{h\cdot\cos(\alpha_0(t))}\right)\cos(\varphi)\sin(\varphi)d\varphi = P(t)\cdot\left[1+\int\limits_0^t\Gamma(t,\tau)d\tau\right].$$

7.3. Моделирование износа в задаче о внутреннем контакте тел с круговыми границами с учетом большой разности радиусов

Контактные напряжения являются одним из основных факторов, определяющих долговечность машиностроительных конструкций. Анализ и классификация отказов изделий машиностроения показали, что основной причиной выхода из строя в условиях эксплуатации является не поломка деталей, а износ и нестабильность триботехнических характеристик сопряжений [1, 4].

Не смотря на большой интерес инженеров к решению контактных задач, являющихся моделями различных конструкций подшипников и опор скольжения, до настоящего времени эти задачи решались только при использовании очень «жестких» геометрических предположений о малости зазора между индентором и поверхностью покрытия по сравнению с радиусом индентора [2, 62]. Данная гипотеза обеспечивает простоту получаемых разрешающих уравнений, однако существенно сужает область практического применения получаемых решений.

Дело в том, что разность радиусов, используемых в гражданском машиностроении для конструирования, в частности, ходовых посадок значительно превосходят указанную выше гипотезу из-за относительно больших допусков на отклонение от идеальной геометрической формы взаимодействующих деталей. Соответственно, решения, полученные с использованием гипотезы о малости зазора по отношению к радиусу поверхности вдавливания [2, 62], могут быть применены только в очень узком сегменте конструирования точных или сверхточных механизмов.

В данном разделе впервые поставлена и решена задача о внутреннем контакте тел с круговыми границами с учетом большой разности радиусов инденторов и радиусов поверхностей покрытий, а также произвольной глубины вдавливания в покрытие.

Предложен метод теоретического предсказания величины износа сопряжений твердых тел с круговыми границами, а также в качестве примера решены контактные задачи с учетом абразивного износа композиционного покрытия. В конце раздела без вывода приведены заключительные формулы, определяющие абразивный износ вязкоупругого однородного покрытия цилиндрического подшипника скольжения и шаровой опоры в случае малого зазора.

7.3.1. Основные гипотезы

Используя обозначения и основные гипотезы п. 7.1.1. можно перейти к плоской геометрической задаче вдавливания круга в полосу постоянной высоты, состоящую из радиально расположенных стержней на круглом вырезе в плоскости $x0y$ (Рисунок 41). Учитывая симметрию задачи относительно оси $0x$ (трение не рассматривается), достаточно сформулировать краевое условие по перемещениям в области контакта для правой полуплоскости плоской модели рисунка (т.е. когда $y \geq 0$ и $\varphi \in [0, \alpha_0]$) [62].

В отличие от предыдущих разделов [62], в которой для углов выполняется приближенное равенство $\varphi \approx \psi$ в силу малости e/R, в данном исследовании необходимо найти функциональную связь между этими двумя углами (Рисунок 41).

Следуя монографии [63], запишем, но в более обобщенном виде, чем в первоисточнике, уравнение для проекций координат точек из области контакта на ось $0x$:

$$R \cdot \cos(\varphi) = e + \delta + r \cdot \cos(\psi). \tag{273}$$

Очевидно, если предположить в (273), что $(e+\delta)/r$ - пренебрежимо мало, то получаем случай $\varphi \approx \psi$ [2, 62, 63]. Далее не будем делать никаких дополнительных предположений, т.е. будем использовать следующее уравнение для определения угла ψ через угол φ:

$$\psi(\varphi) = \arccos\left(\frac{R \cdot \cos(\varphi) - (e+\delta)}{r}\right). \tag{274}$$

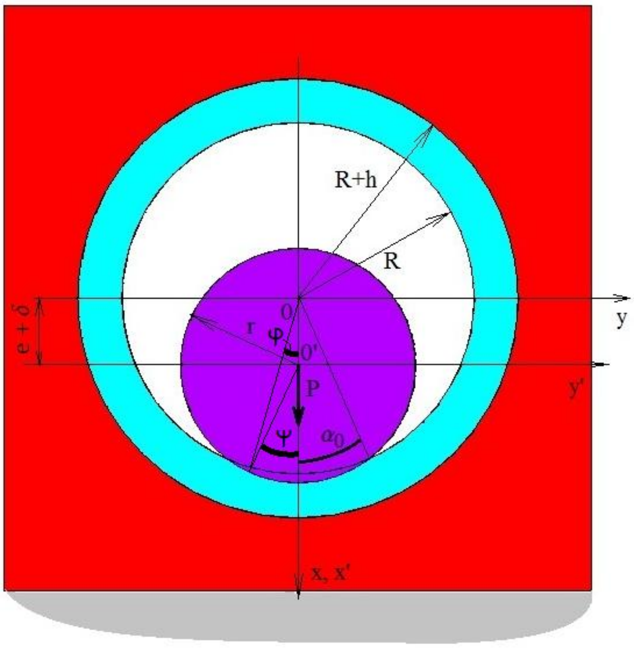

Рисунок 41. Разность углов φ и ψ на плоской задаче для внутреннего контакта цилиндров

Рассмотрим шар радиуса r, внедряемый в покрытие высотой h на шаровидной полости радиуса $R+h$ в недеформируемом пространстве. Будем использовать сферическую систему координат. Используя гипотезы п. 7.1.1., очевидно, можно также прийти к решению плоской задачи для сечения в плоскости меридиана системы шаровидных тел с использованием стержневой модели (Рисунок 40).

7.3.2. Краевое условие по перемещениям для обеих рассматриваемых контактных задач

Вывод краевого условия по перемещениям начнем с параметрического уравнения правой границы вдавливания покрытия в системе координат $x0y$:

$$\begin{cases} x_0(\varphi) = R\cos(\varphi), \\ y_0(\varphi) = R\sin(\varphi), \end{cases} \tag{275}$$

где $\varphi \in [0, \pi/2]$.

Уравнение правой границы внедряемого полукруга имеет совершенно аналогичный вид в системе координат $x0y$:

$$\begin{cases} x_1(\psi) = r\cos(\psi) + (e+\delta), \\ y_1(\psi) = r\sin(\psi), \end{cases} \tag{276}$$

где $\psi \in [0, \pi/2]$.

Геометрическое краевое условие для нормальных радиальных перемещений для обеих плоских контактных задач (Рисунок 39 -Рисунок 41) при сделанных предположениях имеет вид [64]:

$$v_\rho(\varphi) = \begin{cases} (x_1(\psi(\varphi)) - x_0(\varphi))\cos(\varphi) + (y_1(\psi(\varphi)) - y_0(\varphi))\sin(\varphi), \varphi \in [0, \alpha_0), \\ 0, \varphi \notin [0, \alpha_0). \end{cases} \tag{277}$$

Подставляя (274)-(276) в (277), окончательно получаем:

$$v_\rho(\varphi) = \begin{cases} r\left(\cos\left(\arccos\left(\dfrac{R\cos(\varphi) - (e+\delta)}{r}\right)\right)\cos(\varphi) + \right. \\ \left. \quad + \sin\left(\arccos\left(\dfrac{R\cos(\varphi) - (e+\delta)}{r}\right)\right)\sin(\varphi)\right) - R + (e+\delta)\cos(\varphi), \\ \qquad \varphi \in [0, \alpha_0), \\ 0, \varphi \notin [0, \alpha_0). \end{cases}$$

Используя гипотезу о малости $(e+\delta)/r$, можно получить известное краевое условие по перемещениям [2, 62].

Очевидно, из геометрических соображений и допущений, используемых при построении обобщений модели Винклера, что глубина вдавливания δ определяется исходя из нелинейного уравнения $v_\rho(\alpha_0) = 0$ по заданному углу α_0 и радиусам R, r:

$$r\left(\cos\left(\arccos\left(\frac{R\cos(\alpha_0)-(e+\delta)}{r}\right)\right)\cos(\alpha_0)+\right.$$
$$\left.+\sin\left(\arccos\left(\frac{R\cos(\alpha_0)-(e+\delta)}{r}\right)\right)\sin(\alpha_0)\right)+\delta\cos(\alpha_0)= \tag{278}$$
$$=R-e\cdot\cos(\alpha_0).$$

Подчеркнем, что уравнение (278) позволяет решить контактную задачу как для любых сочетаний геометрических характеристик взаимодействующих тел (радиусы R, r), так и больших глубин вдавливания δ, характерных для биологических объектов.

7.3.3. Формальное определение напряжений в области контакта без учета износа и реологии

Относительное укорочение длины $\varepsilon_\rho(\varphi)$ каждого деформируемого в радиальном направлении элемента, замещающего покрытие, определяется соотношением:

$$\varepsilon_\rho(\varphi)=\frac{-v_\rho(\varphi)}{h},\ \varphi\in[0,\alpha_0). \tag{279}$$

Тогда, соответственно, контактные напряжения $\sigma_\rho(\varphi)$ связаны с деформациями $\varepsilon_\rho(\varphi)$ соотношением:

$$\sigma_\rho(\varphi)=\Im(\varepsilon_\rho(\varphi))=\Im\left(\frac{-v_\rho(\varphi)}{h}\right),\ \varphi\in[0,\alpha_0), \tag{280}$$

где $\Im(\ )$ - произвольная функция, определяющая уравнение состояния, в том числе для композиционных покрытий [34].

Уравнения равновесия диска и шара на границе деформируемого слоя из стержней без учета временных эффектов задаются формулами (258) и (259).

7.3.4. Постановка и решение задач с износом в механике твердого тела. Краевые условия по перемещениям

Известно, что интенсивность изнашивания поверхностей твердых тел связана с коэффициентом трения [65]. Тогда, для решения задачи с учетом изнашивания сначала необходимо решить краевую задачу с заданным трением в области контакта и только после этого переходить к решению интересующей нас краевой задачи с учетом изнашивания. Однако в подавляющем большинстве практически важных случаев такого усложнения краевых условий не требуется.

Дело в том, что при значениях коэффициента трения скольжения меньше 0,3, оно не вносит существенного изменения в распределение нормальных контактных напряжений [66, 67]. Поэтому, используя найденные контактные напряжения из обычной задачи без учета трения на границе и коэффициент трения скольжения для выбранной пары материалов, можно перейти непосредственно к решению задачи изнашивания, предполагая, что касательные контактные напряжения по закону Амонтона пропорциональны нормальным контактным напряжениям [2, 11].

Перейдем к рассмотрению изнашивания покрытия. Сила величиной P приложена к индентору. Она действует на абсолютно жесткий индентор (цилиндр или шар) вертикально вниз вдоль оси $0x$. Раствор угла контакта $\alpha_0(t)$ является не убывающей функцией при $t \in [0, t_0]$, где t_0 - длительность испытаний на износостойкость. Таким образом (Рисунок 39 - Рисунок 41), остаются справедливыми и для случая изнашиваемости деформируемого слоя с точностью до замены на них α_0 и δ на $\alpha_0(t)$ и $\delta(t)$.

В данном разделе рассматривается установившийся износ стержней, моделирующих покрытие. При износе предполагается, что изменение длины стержней, моделирующих покрытие, происходит так медленно, что задача рассматривается как квазистатическая [2], т.е. инерционные характеристики призматических стержней (Рисунок 39 - Рисунок 41) не оказывают влияния на характер их деформирования и изнашивания. Время вдавливания индентора на глубину $\delta(0)$ пренебрежимо мало по сравнению со временем измерений, это позволяет предположить, что $\delta(0)$ является мгновенной величиной.

Будем предполагать, что изнашивание покрытия для цилиндрического подшипника скольжения обусловлено равномерным вращением вокруг собственной оси $0z'$ вставленного в полость цилиндра (Рисунок 41). Изнашивание же покрытия шаровой опоры происходит благодаря вращению шарового индентора вокруг оси $0x$ (линии действия силы).

Будем предполагать, что скорость изнашивания в каждой точке контакта $\partial\dfrac{v_\rho(\varphi,t)}{\partial t}$ пропорциональна контактному давлению $p(\varphi,t) = \left|\sigma_\rho(\varphi,t)\right|$ в некоторой степени ζ [2]:

$$\partial\frac{v_{\rho,изн}(\varphi,t)}{\partial t} = B \cdot \left(\frac{\left|\sigma_\rho(\varphi,t)\right|}{p_{\rho,эт}}\right)^{\zeta}, \qquad (281)$$

где B, ζ ($B>0$, $\zeta>0$), $p_{\rho,эт}$ – константы, устанавливаемые экспериментально, в которых, в частности, учитывается и коэффициент трения, чистота поверхности, режим смазки, параметр $\left|\sigma_\rho(\varphi,t)\right|$, определяющий контактные давления задается в ходе испытаний на образцах. Отметим, что при $\zeta=1$ с помощью (281) описывается абразивный и в некоторых случаях усталостный износ [12].

Перейдем непосредственно к рассмотрению геометрического краевого условия по перемещениям $v_\rho(\varphi,t)$, зависящим от времени в случае изнашивания (Рисунок 39 - Рисунок 41) [1, 2]:

$$v_\rho(\varphi,t)=\begin{cases} r\left(\cos\left(\arccos\left(\dfrac{R\cos(\varphi)-(e+\delta(t))}{r}\right)\right)\cos(\varphi)+\right.\\ \qquad\left.+\sin\left(\arccos\left(\dfrac{R\cos(\varphi)-(e+\delta(t))}{r}\right)\right)\sin(\varphi)\right)-R+\\ \qquad+(e+\delta(t))\cos(\varphi)-v_{\rho,изн}(\varphi,t),\ \varphi\in[0,\alpha_0(t)),\\ 0,\varphi\notin[0,\alpha_0(t)). \end{cases} \quad (282)$$

где $\alpha_0(t)$ - зависимость раствора угла области контакта от времени, $\delta(t)$ - зависимость глубины вдавливания индентора от времени. В (282) отрицательный знак перед $v_{\rho,изн}(\varphi,t)$ свидетельствует о том, что данное перемещение рассматривается как геометрическая корректировка кругового профиля покрытия в плоском сечении, при фиксированной величине $\delta(t)$ общего смещения центра. Эта корректировка приводит к уменьшению деформации и соответственно напряжений в области контакта при одном и том же значении смещения центра с учетом изнашивания покрытия.

Исходя из естественных физических соображений на границе области контакта, изнашивание отсутствует (т.е. $v_{\rho,изн}(\alpha_0(t),t)=0$) из-за равенства нулю нормальных напряжений, то уравнение, определяющее связь глубины вдавливания $\delta(t)$, раствора угла области контакта $\alpha_0(t)$ совпадает до переобозначений с (278):

$$\begin{aligned} &r\left(\cos\left(\arccos\left(\frac{R\cos(\alpha_0(t))-(e+\delta(t))}{r}\right)\right)\cos(\alpha_0(t))+\right.\\ &\left.+\sin\left(\arccos\left(\frac{R\cos(\alpha_0(t))-(e+\delta(t))}{r}\right)\right)\sin(\alpha_0(t))\right)+\\ &+\delta(t)\cos(\alpha_0(t))=R-e\cos(\alpha_0(t)). \end{aligned} \quad (283)$$

Относительное укорочение длины $\varepsilon_\rho(\varphi,t)$ каждого деформируемого в радиальном направлении элемента, замещающего покрытие, определяется соотношением (279) [68]:

$$\varepsilon_\rho(\varphi,t)=\frac{-v_\rho(\varphi,t)}{h},\ \varphi\in[0,\alpha_0(t)). \qquad (284)$$

Тогда, соответственно, контактные напряжения $\sigma_\rho(\varphi,t)$ связаны с деформациями $\varepsilon_\rho(\varphi,t)$ соотношением (280) [64]:

$$\sigma_\rho(\varphi,t)=\Im(\varepsilon_\rho(\varphi,t))=\Im\left(\frac{-v_\rho(\varphi,t)}{h}\right),\ \varphi\in[0,\alpha_0(t)). \qquad (285)$$

Сравнивая (284), (285) с (279) и (280) можно отметить, что относительное укорочение каждого элемента, а, следовательно, и напряжение на нем в области контакта будет уменьшаться из-за износа. Кроме того, область контакта будет увеличиваться при постоянно действующей нагрузке.

Уравнения равновесия для цилиндрического подшипника скольжения и шаровой опоры с учетом износа совпадают с уравнениями (258) и (259) с точностью до замены α_0 и $\sigma_\rho(\varphi)$ на $\alpha_0(t)$ и $\sigma_\rho(\varphi,t)$.

7.3.4.1. Пример решения задачи для общего вида изнашивания упругого композиционного защитного покрытия, как цилиндрического подшипника скольжения, так и шаровой опоры с малым зазором

При действующей гипотезе о том, что $(e+\delta(t))/r$ мало, из (282) получаем краевое условие по перемещениям для сечения перпендикулярно оси цилиндрического подшипника скольжения:

$$v_\rho(\varphi,t)=\begin{cases}\delta(t)\cos(\varphi)-e\cdot(1-\cos(\varphi))-v_{\rho,изн}(\varphi,t),\ \varphi\in[0,\alpha_0(t)),\\ 0,\varphi\notin[0,\alpha_0(t)).\end{cases} \qquad (286)$$

Из (283), учитывая, что $v_{\rho,изн}(\alpha_0(t),t)=0$, получаем:

$$\delta(t)=e\frac{(1-\cos(\alpha_0(t)))}{\cos(\alpha_0(t))}. \qquad (287)$$

Из (284), (286) и (287) следует

$$\varepsilon_\rho(\varphi,t) = -\frac{e(1-\cos(\alpha_0(t)))\cos(\varphi)}{h\cdot\cos(\alpha_0(t))} + \frac{e}{h}(1-\cos(\varphi)) + \frac{v_{\rho,изн}(\varphi,t)}{h}. \qquad (288)$$

Из (194), (285) и (288) для упругого композиционного покрытия [52, 64] следует:

$$\langle\sigma_\rho(\varphi,t)\rangle = -\langle E\rangle_{K-T}\cdot\left[\frac{e(1-\cos(\alpha_0(t)))\cos(\varphi)}{h\cdot\cos(\alpha_0(t))} - \frac{e}{h}\cdot(1-\cos(\varphi)) - \frac{v_{\rho,изн}(\varphi,t)}{h}\right]. \quad (289)$$

Учитывая (281), из (289) получаем:

$$\begin{gathered}\langle\sigma_\rho(\varphi,\tau)\rangle - \langle E\rangle_{K-T}\frac{B}{h}\int_0^t\left(\frac{|\langle\sigma_\rho(\varphi,\tau)\rangle|}{p_{\rho,эт}}\right)^\zeta d\tau = \\ = -\langle E\rangle_{K-T}\cdot\left[\frac{e(1-\cos(\alpha_0(t)))\cos(\varphi)}{h\cdot\cos(\alpha_0(t))} - \frac{e}{h}\cdot(1-\cos(\varphi))\right].\end{gathered} \qquad (290)$$

Учитывая значения параметров B, ζ в общем случае для решения (290) можно воспользоваться методом простой итерации, который состоит в том, что в качестве нулевого приближения $\langle\sigma_\rho(\varphi,\tau)\rangle_0$ решения (290) выбирается упругое решение, т.е.:

$$\langle\sigma_\rho(\varphi,\tau)\rangle_0 = -\langle E\rangle_{K-T}\cdot\left[\frac{e(1-\cos(\alpha_0(t)))\cos(\varphi)}{h\cdot\cos(\alpha_0(t))} - \frac{e}{h}\cdot(1-\cos(\varphi))\right].$$

Далее в качестве первого приближения $\langle\sigma_\rho(\varphi,\tau)\rangle_1$ решения (290) выбирается выражение:

$$\begin{gathered}\langle\sigma_\rho(\varphi,\tau)\rangle_1 = \\ = -\langle E\rangle_{K-T}\cdot\left[\frac{e(1-\cos(\alpha_0(t)))\cos(\varphi)}{h\cdot\cos(\alpha_0(t))} - \frac{e}{h}\cdot(1-\cos(\varphi)) - \frac{B}{h}\int_0^t\left(\frac{|\langle\sigma_\rho(\varphi,\tau)\rangle_0|}{p_{n,эт}}\right)^\zeta d\tau\right].\end{gathered}$$

Продолжая далее можно получить для n-го приближения рекуррентную формулу:

$$\left\langle \sigma_\rho(\varphi,\tau)\right\rangle_n =$$

$$= -\left\langle E\right\rangle_{K-T} \cdot \left[\frac{e\left(1-\cos\left(\alpha_0(t)\right)\right)\cos(\varphi)}{h\cdot\cos\left(\alpha_0(t)\right)} - \frac{e}{h}\cdot\left(1-\cos(\varphi)\right) - \frac{B}{h}\int\limits_0^t \left(\frac{\left|\left\langle \sigma_\rho(\varphi,\tau)\right\rangle_{n-1}\right|}{p_{n,эт}} \right)^{\zeta} d\tau \right].$$

Итерации продолжаются пока $\dfrac{\left\|\left\langle \sigma_\rho(\varphi,\tau)\right\rangle_n - \left\langle \sigma_\rho(\varphi,\tau)\right\rangle_{n-1}\right\|}{\left\|\left\langle \sigma_\rho(\varphi,\tau)\right\rangle_n\right\|} < \lambda$, где λ - заданная относительная точность приближенного решения (290). Используя уравнения равновесия (258) или (259) для вычисленного с достаточной точностью радиального напряжения $\left\langle \sigma_\rho(\varphi,\tau)\right\rangle_n$, можно окончательно определить размеры области контакта по заданной силе P, как для цилиндрической, так и для шаровой опоры.

7.3.4.2. Аналитическое решение задачи для абразивного изнашивания упругого композиционного защитного покрытия цилиндрического подшипника скольжения с малым зазором

Учитывая, что при абразивном износе $\zeta = 1$ в (281) [66, 67], и кроме того $\left|\left\langle \sigma_\rho(\varphi,t)\right\rangle\right| = -\left\langle \sigma_\rho(\varphi,t)\right\rangle$, умножая левую и правую части (290) на $2\cdot R\cdot\cos(\varphi)$, и интегрируя по φ на отрезке $\left[0,\alpha_0(t)\right]$ из (258) получаем:

$$-P - \left\langle E\right\rangle_X \frac{B}{h\cdot p_{\rho,эт}}\cdot 2\cdot R \int\limits_0^{\alpha_0(t)} \left[\int\limits_0^t \left\langle \sigma_\rho(\varphi,\tau)\right\rangle \cdot\cos(\varphi) d\tau \right] d\varphi =$$
$$= -\left\langle E\right\rangle_X 2\cdot R\cdot \int\limits_0^{\alpha_0(t)} \left[\frac{e\left(1-\cos\left(\alpha_0(t)\right)\right)\cos(\varphi)}{h\cdot\cos\left(\alpha_0(t)\right)} - \frac{e}{h}\left(1-\cos(\varphi)\right) \right] \cos(\varphi) d\varphi. \qquad (291)$$

Меняя порядок интегрирования в левой части (291) и вычисляя интеграл в правой части (291) по тем же соображениям постоянного роста при износе области контакта (как и при ползучести), окончательно получаем нелинейное уравнение для определения $\alpha_0(t)$ с учетом процесса износа:

$$P\cdot\left(1 + \left\langle E\right\rangle_X \frac{B}{h\cdot p_{\rho,эт}} t \right) =$$

$$=\langle E\rangle_X\cdot R\cdot\frac{R-r}{h\cdot\cos(\alpha_0(t))}\left(\alpha_0(t)-\cos(\alpha_0(t))\cdot\sin(\alpha_0(t))\right). \tag{292}$$

7.3.4.3. *Абразивное изнашивание упругого композиционного защитного покрытия шаровой опоры с малыми зазорами.*

Как и в предыдущем случае, формальное распределение нормальных контактных напряжений $\langle\sigma_\rho(\varphi)\rangle$ определяется формулой (290). Однако в данном случае нам необходимо умножить (290) на $2\pi\cdot R^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)$ и использовать (259), т.к. решается задача для шаровой опоры. В итоге получаем:

$$P\cdot\left(1+\langle E\rangle_X\frac{B}{h\cdot p_{\rho,эт}}t\right)=$$
$$=\frac{4}{3}\pi\cdot R^2\langle E\rangle_X\frac{R-r}{h\cdot\cos(\alpha_0(t))}\left(2+\cos(\alpha_0(t))\right)\cdot\sin^4\left(\frac{\alpha_0(t)}{2}\right). \tag{293}$$

Как и в предыдущем примере, при решении задачи необходимо предварительно задать величину действующей нагрузки P, модули упругости E_k и относительные объемные доли γ_k всех компонент композиционного материала, высоту покрытия h, радиус вала r и радиус отверстия R, и, решив нелинейное уравнение (293), определить раствор области контакта $\alpha_0(t)$ для заданного времени t. Контактное напряжение для данной шаровой опоры $\forall\varphi\in[0,\alpha_0(t))$, как и в предыдущем случае, определяется по формуле (290). Основным отличием от уравнения (292) предыдущего примера является структура уравнения (293), решение которого дает иной раствор угла области контакта $\alpha_0(t)$ для одного и того же заданного времени t. Это приводит к иным значениям максимального нормального контактного напряжения $\langle\sigma_n(0,t)\rangle$.

7.3.4.4. *Замечания к решениям задач наследственной ползучести покрытия с учетом износа*

Очевидно, что совместное решение задачи ползучести и абразивного износа однородного вязкоупругого покрытия (без старения) цилиндрического подшипника скольжения при действии постоянной силы P и предположении о малости отношения $(e+\delta(t))/R$ приведет к уравнению для определения угла раствора области контакта $\alpha_0(t)$ [64]:

$$P \cdot \left(1 + E\frac{A}{h \cdot p_{\rho,эт}} t\right) + P\left(1 + \int_0^t \Gamma(t,\tau) d\tau\right) = E \cdot R \cdot \frac{R - r}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))} \times$$
$$\times (\alpha_0(t) - \cos(\alpha_0(t))\sin(\alpha_0(t))),$$

где E - модуль упругости вязкоупругого покрытия; $\Gamma(t,\tau)$ - ядро ползучести покрытия.

Для абразивного износа однородного вязкоупругого покрытия без старения шаром в шаровой опоре при тех же геометрических гипотезах уравнение примет несколько более сложный вид [64]:

$$P \cdot \left(1 + E\frac{A}{h \cdot p_{\rho,эт}} t\right) + P\left(1 + \int_0^t \Gamma(t,\tau) d\tau\right) =$$
$$= \frac{4}{3}\pi \cdot R^2 \cdot E \cdot \frac{R - r}{h \cdot \cos(\alpha_0(t))}(2 + \cos(\alpha_0(t))) \cdot \sin^4\left(\frac{\alpha_0(t)}{2}\right).$$

7.4. Метод определения влияния технологических отклонений от круговой формы цилиндрических подшипников скольжения с низкомодульным антифрикционным слоем переменной высоты на напряженное состояние в области контакта

Наиболее общим случаем моделирования макрогеометрических радиальных отклонений от круговой формы [69, 70] является случай взаимодействия жесткого прямого некругового цилиндра с покрытием переменой высоты на некруговой цилиндрической полости в недеформируемом пространстве. Эта задача является теоретической основой моделирования влияния технологических погрешностей изготовления (например, огранки) элементов подшипников скольжения на напряженное состояние и жесткость сопряжений в области контакта вала с деформируемым защитным слоем [2, 69, 70].

В данной работе впервые поставлена и аналитически решена задача (получена замкнутая система уравнений) для произвольных линейных размеров огранки цилиндров за счет учета специфической структуры уравнений равновесия на границе криволинейного отверстия. Результаты, полученные ранее [69, 70], верны только для случая, когда для длины радиус-вектора огранки внутренней поверхности покрытия верно неравенство $\max\limits_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|\frac{d}{d\varphi}R(\varphi)\right| << \max\limits_{\varphi\in[0,2\pi]}|R(\varphi)|$, т.е. в случае малой огранки по сравнению с величиной радиус вектора отверстия $R(\varphi)$ (Рисунок 42).

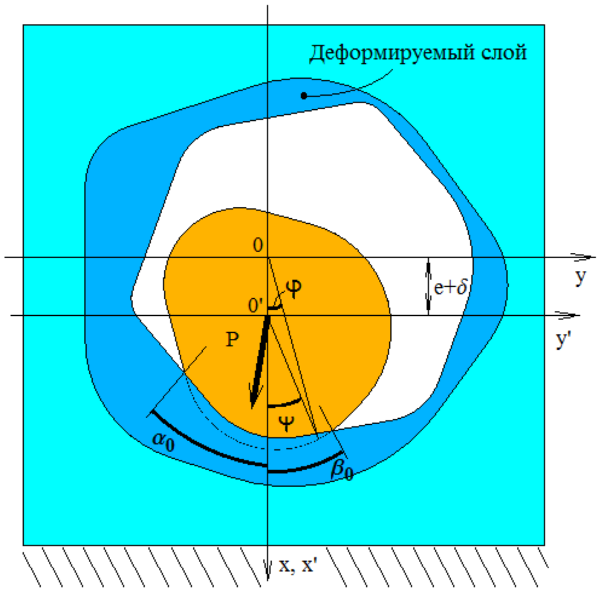

Рисунок 42. Геометрическая постановка двумерной задачи о контакте некругового жесткого цилиндра и деформируемого покрытия переменной высоты на некруговой цилиндрической поверхности в жестком пространстве

В данной работе в качестве примеров приведены упрощенные системы уравнений для определения контактных напряжений для малой огранки внутренней поверхности композиционного, однородно стареющего покрытия и покрытия с нелинейной ползучестью и произвольного уравнения подстилающей жесткой поверхности.

7.4.1. Геометрическая постановка задачи

Рассмотрим цилиндрическую систему координат. Будем предполагать, что нулевое направление по угловой координате в цилиндрической системе координат проходит через область контакта (Рисунок 42). Кроме того, геометрические отклонения вдоль оси цилиндра, цилиндрической полости и покрытия малы по сравнению с радиальными отклонениями. Таким образом, будем рассматривать двумерную контактную задачу [2, 69, 70].

Предполагается, что радиус не круговой цилиндрической полости в жестком пространстве равен $R(\varphi)+h(\varphi)$, где $R(\varphi)$ - расстояние от оси, проходящей через начало цилиндрической системы координат, до не круговой поверхности цилиндрического деформируемого покрытия переменной высоты $h(\varphi)$. Начало цилиндрической системы координат полости совпадает с началом декартовой системы. Ось цилиндрической системы координат совпадает с осью $0z$ декартовой системы координат.

В цилиндрическую полость радиуса $R(\varphi)$ вставлен абсолютно жесткий цилиндр радиуса $r(\varphi)$ (Рисунок 42). К нему приложена сила величиной P. Введем дополнительное обозначение $e = R(0) - r(0)$ ($e \geq 0$). Будем предполагать, что глубина рассматриваемой модели вдоль направления $0z$ равна 1 [2, 69, 70]. Предполагается, что трение в области контакта отсутствует.

Предполагается, что покрытие может быть заменено призматическими стержнями высотой $h(\varphi)$ с постоянным квадратным сечением вершины $\Delta \times \Delta$, находящейся на цилиндрической поверхности покрытия (Рисунок 42). Стержни могут деформироваться только в нормальном к поверхности направлении. При этом напряженно-деформированное состояние стержней является однородным в сечении поперечном нормальному направлению. Размер Δ пренебрежимо мал в сравнении с размером $\alpha_0 \cdot r + \beta_0 \cdot r$ области контакта, где α_0 - раствор угла точки начала области контакта, β_0 - раствор угла точки конца области контакта (Рисунок 42). Будем предполагать, что область контакта представляет собой один отрезок.

Будем использовать следующее общее уравнение для определения угла ψ через угол φ:

$$R(\varphi)\cos(\varphi) = e + \delta + r(\psi)\cos(\psi).$$

Будем предполагать, что функцию $r(\psi)\cos(\psi)$ можно обратить, и обозначим обратную функции к ней через $F^{-1}(\ )$:

$$\psi(\varphi) = F^{-1}\left(R(\varphi)\cos(\varphi) - (e + \delta)\right). \qquad (294)$$

7.4.2. Краевое условие по перемещениям

Вывод краевого условия по перемещениям начнем с параметрического уравнения внутренней границы (границы вдавливания) покрытия в системе координат $x0y$:

$$\begin{cases} x_0(\varphi) = R(\varphi) \cdot \cos(\varphi), \\ y_0(\varphi) = R(\varphi) \cdot \sin(\varphi), \end{cases} \qquad (295)$$

где $R(\varphi)$ - некоторая вещественная функция, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Уравнение границы внедряемого некруглого диска имеет совершенно аналогичный вид в системе координат $x0y$:

$$\begin{cases} x_1(\psi) = r(\psi) \cdot \cos(\psi) + (e + \delta), \\ y_1(\psi) = r(\psi) \cdot \sin(\psi), \end{cases} \qquad (296)$$

где $r(\psi)$ - некоторая вещественная функция, $\psi \in [0,2\pi]$. Очевидно, что для вращения некруглого индентора в отверстии необходимо, чтобы было выполнено геометрическое неравенство $\max\limits_{\psi \in [0,2\pi]} \{r(\psi)\} \le \min\limits_{\varphi \in [0,2\pi]} \{R(\varphi)\}$.

Геометрическое краевое условие для нормальных радиальных перемещений для рассматриваемой плоской контактной задачи (Рисунок 42) при сделанных предположениях (294)-(296) основано на простом вычитании геометрического контура некруглого диска из геометрического контура поверхности вдавливания покрытия и имеет вид:

$$v_\rho(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{x_1(\psi(\varphi))^2 + y_1(\psi(\varphi))^2} - R(\varphi), \varphi \in (\alpha_0, \beta_0), \\ 0, \varphi \notin (\alpha_0, \beta_0). \end{cases} \qquad (297)$$

Из геометрических соображений и допущений, очевидно, что углы контакта α_0 и β_0 определяются по заданному относительному положению деформируемого слоя и внутреннего некруглого диска из решений нелинейного уравнения $v_\rho(\varphi) = 0$. Направление координатной оси $0x$, проходящей через область контакта, всегда можно выбрать так, что относительное положение диска будет определяться глубиной его вдавливания δ вдоль оси $0x$ в деформируемый слой.

Подчеркнем, что уравнение $v_\rho(\varphi) = 0$ позволяет решить контактную задачу как для любых сочетаний геометрических характеристик взаимодействующих тел (уравнений, определяющих $R(\varphi), r(\psi)$), так и больших глубин вдавливания δ, характерных для биологических объектов.

В частности, уравнение $v_\rho(\varphi) = 0$ при заданном δ может дать любое четное число решений, максимальное число которых определяется количеством выступов в огранке диска, количеством выступов в огранке внутренней поверхности покрытия, а также направлением вектора силы, приложенной к диску (Рисунок 42).

Таким образом, специфика решения контактных задач для цилиндрических тел с огранкой заключается в том, что вначале задается относительное положение тел. После этого решается нелинейное уравнение $v_\rho(\varphi) = 0$, определяющее количество отрезков контакта и их границы. На заключительном этапе по уравнениям равновесия определяются величина и направление силы, которую необходимо приложить к некруглому диску, чтобы достичь ранее заданной с помощью δ области контакта.

Очевидно, в подавляющем числе реальных случаев огранки, увеличивая δ, можно довести область контакта до одного отрезка, но величина требуемой нагрузки в этом случае могут достичь физически необоснованных величин.

Формальное определение радиальных деформаций и напряжений выполняется, как и ранее, по формулам (279) и (280).

7.4.3. Уравнения равновесия диска и шара на границе деформируемого слоя без учета временных эффектов

Проекции $\left(P_x, P_y\right)$ интегральной нагрузки, вызывающей вдавливание некруглого диска в деформируемое покрытие на некруглой полости на глубину δ, для произвольного $R(\varphi)$ и произвольного отрезка контакта $\left[\alpha_0, \beta_0\right]$, определяются более общим соотношением [22], чем приведено в [69, 70]:

$$P_{\mathrm{x}} = -\int\limits_L \sigma_\rho(x, y)dy = -\int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} \sigma_\rho\left(x_0(\varphi), y_0(\varphi)\right)\cdot\left(\frac{d}{d\varphi}R(\varphi)\cdot\sin(\varphi) + R(\varphi)\cdot\cos(\varphi)\right)d\varphi,$$

$$P_y = \int\limits_L \sigma_\rho(x, y)dx = \int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} \sigma_n\left(x_0(\varphi), y_0(\varphi)\right)\cdot\left(\frac{d}{d\varphi}R(\varphi)\cdot\cos(\varphi) - R(\varphi)\cdot\sin(\varphi)\right)d\varphi, \tag{298}$$

где L - дуга контакта на границе деформируемого покрытия $\left(x_0(\varphi), y_0(\varphi)\right)$ (295), определяемая углами $\left[\alpha_0, \beta_0\right]$.

7.4.4. Пример расчета нормального контактного напряжения и контактной жесткости упругого композиционного слоя переменной высоты

При аналитическом решении задачи для поверхности вдавливания покрытия с уравнением $R(\varphi)$, таким что $\max\limits_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|\frac{d}{d\phi}R(\varphi)\right| << \max\limits_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|R(\varphi)\right|$, и произвольной подстилающей поверхности с уравнением $R(\varphi)+h(\varphi)$, будем предполагать, что в отверстие вставлен идеальный диск постоянного радиуса r. Обозначим раствор области контакта углами α_0, β_0. Используя гипотезу о малости $(e+\delta)/r$, можно получить из (297) краевое условие по перемещениям в виде:

$$\begin{aligned} v_\rho(\varphi) &= \sqrt{\left(r\cdot\cos(\psi(\varphi)) + (e+\delta)\right)^2 + \left(r\cdot\sin(\psi(\varphi))\right)^2} - R(\varphi) = \\ &= \sqrt{2\cdot R(\phi)\cdot\cos(\varphi)\cdot(e+\delta) + (e+\delta)^2 + r^2} - R(\varphi), \varphi\in\left(\alpha_0, \beta_0\right). \end{aligned} \tag{299}$$

Далее необходимо предварительно задать глубину вдавливания δ, форму отклонений от круговой поверхности вдавливания покрытия $R(\varphi)$, а также радиус диска r и найти все корни нелинейного уравнения, определяющие размер области контакта (по предположению это углы α_0 и β_0) (Рисунок 43):

$$\sqrt{2\cdot R(\varphi)\cdot\cos(\varphi)\cdot(e+\delta)+(e+\delta)^2+r^2}-R(\varphi)=0.$$

Тогда из (280) , при предварительно заданных модулях упругости E_k и относительных объемных долях γ_k всех компонент композиционного материала (194) и высоты покрытия $h(\varphi)$, следует, что контактное напряжение для данного цилиндрического подшипника $\forall\varphi\in[\alpha_0,\beta_0]$ определяется по формуле (Рисунок 44):

$$\langle\sigma_\rho(\varphi)\rangle=-\frac{\langle E\rangle_{K-T}}{h(\varphi)}\cdot\left(\sqrt{2\cdot R(\varphi)\cdot\cos(\varphi)\cdot(e+\delta)+(e+\delta)^2+r^2}-R(\varphi)\right), \qquad (300)$$

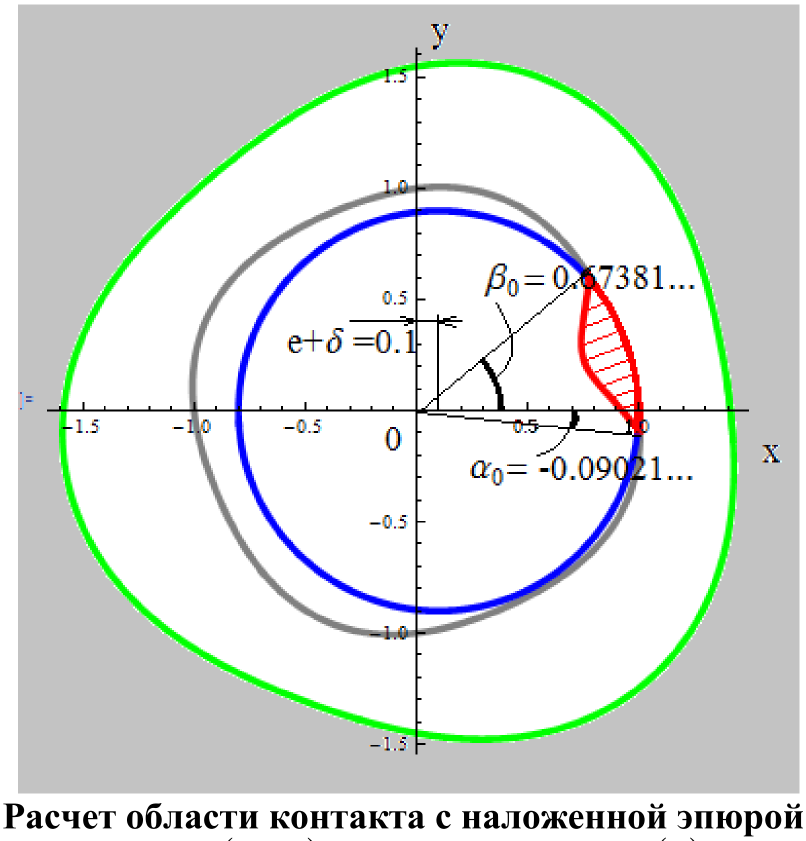

Рисунок 43. Расчет области контакта с наложенной эпюрой контактных напряжений по заданным $(e+\delta)=0.1$ м, $r=0.9$ м, $R(\varphi)=1-0.03\cdot\sin(4\cdot\varphi)$ м,

$$h(\varphi)=1.5-0.1\cdot\sin\left(3\cdot\varphi+\frac{\pi}{3}\right)-R(\varphi)\ \text{м}$$

Подставляя (299) в (300) и интегрируя, получаем из (298) упрощенные уравнения (с учетом гипотезы $\max\limits_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|\frac{d}{d\varphi}R(\varphi)\right| << \max\limits_{\varphi\in[0,2\pi]}|R(\varphi)|$) для определения величин проекции $\left(P_x, P_y\right)$ действующей нагрузки P, необходимой для достижения области контакта $[\alpha_0, \beta_0]$:

$$P_x \approx \langle E\rangle_{K-T} \int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} \frac{R(\varphi)}{h(\varphi)}\left(\sqrt{2\cdot R(\varphi)\cdot\cos(\varphi)(e+\delta)+(e+\delta)^2+r^2}-R(\varphi)\right)\cos(\varphi)d\varphi,$$

(301)

$$P_y \approx \langle E\rangle_{K-T} \int\limits_{\alpha_0}^{\beta_0} \frac{R(\varphi)}{h(\varphi)}\left(\sqrt{2\cdot R(\varphi)\cdot\cos(\varphi)(e+\delta)+(e+\delta)^2+r^2}-R(\varphi)\right)\sin(\varphi)d\varphi.$$

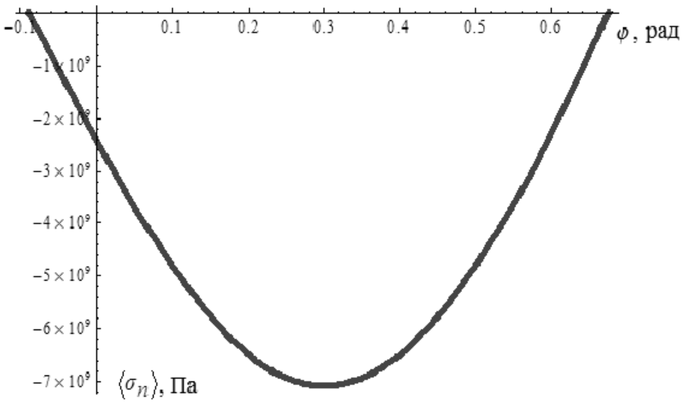

Рисунок 44. Расчет контактных напряжений $\left\langle\sigma_\rho\right\rangle$, действующих нормально дуге контакта L границы композиционного покрытия
($\alpha_0 = -0.09021...$рад**,** $\beta_0 = -0.67381...$рад**,** $(e+\delta) = 0.1$м**,** $r = 0.9$ м**,**

$R(\varphi) = 1 - 0.03\cdot\sin(4\cdot\varphi)$м**,** $h(\varphi) = 1.5 - 0.1\cdot\sin\left(3\cdot\varphi + \frac{\pi}{3}\right) - R(\varphi)$м**,**

$\langle E\rangle_{K-T} = 1\cdot 10^{11}$ Па **)**

7.4.5. Учет реологии слоя

Перейдем к рассмотрению ползучести покрытия. Сила величиной P постоянна, при этом, $\alpha_0(t)$ и $\beta_0(t)$ являются неубывающими функциями при $t\in[0, t_0]$, где t_0 - длительность испытаний на ползучесть. Сила действует на абсолютно жесткий индентор вертикально вниз вдоль оси $0x$. Таким образом, Рисунок 42 остается справедливым и для случая ползучести деформируемого слоя с точностью до замены α_0, β_0 и δ на $\alpha_0(t)$, $\beta_0(t)$ и $\delta(t)$.

В данном разделе рассматривается установившаяся ползучесть стержней, моделирующих покрытие. При решении задач ползучести будет применяться стандартный набор предположений [47, 64].

Перейдем непосредственно к рассмотрению геометрического краевого условия по перемещениям $v_\rho(\varphi,t)$, зависящим от времени в случае ползучести (Рисунок 42):

$$v_\rho(\varphi,t)=\begin{cases}\sqrt{\left(r(\psi(\varphi))\cdot\cos(\psi(\varphi))+(e+\delta(t))\right)^2+\left(r(\psi(\varphi))\cdot\sin(\psi(\varphi))\right)^2}-R(\varphi), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varphi\in(\alpha_0(t),\beta_0(t)), \\ 0,\varphi\notin(\alpha_0(t),\beta_0(t)).\end{cases} \quad (302)$$

где $\alpha_0(t)$, $\beta_0(t)$ - зависимости раствора углов области контакта от времени, $\delta(t)$ - зависимость глубины вдавливания индентора от времени. Фактически, как и в [47, 64], формула (302) следует из (297) заменой δ, α_0, β_0 на $\delta(t)$, $\alpha_0(t)$, $\beta_0(t)$.

Глубина вдавливания $\delta(t)$ связана с $\alpha_0(t)$, $\beta_0(t)$ нелинейным уравнением:

$$v_\rho(\varphi,t)\Big|_{\varphi=\alpha_0(t),\beta_0(t)}=0\,.$$

7.4.5.1. Уравнения состояния при ползучести

Относительное укорочение длины $\varepsilon_\rho(\varphi,t)$ каждого деформируемого в радиальном направлении элемента, замещающего покрытие, определяется соотношением (279).

В случае использования наследственной теории ползучести нормальная деформация $\varepsilon_\rho(\varphi,t)$ связана с нормальным напряжением $\sigma_\rho(\varphi,t)$ интегральным соотношением с использованием ядра ползучести $\Gamma(t,\tau)$ [47]:

- уравнением (267) если рассматривается вязкоупругий однородно стареющий материал слоя с мгновенным модулем упругости $E(t)$;
- уравнением (268) если рассматривается материал слоя, обладающий свойствами нелинейной ползучести.

Отметим, что уравнения равновесия при ползучести покрытия полностью совпадают с уравнениями равновесия (298) с точностью до замены $\sigma_\rho(\varphi)$ на $\sigma_\rho(\varphi,t)$, α_0 на $\alpha_0(t)$ и β_0 на $\beta_0(t)$.

7.4.5.2. Общий случай геометрии взаимодействующих тел

В случае исследования ползучести по заданным растворам углов контакта $\alpha_0(t)$ и $\beta_0(t)$, мгновенному модулю упругости $E(t)$ или функции $\Im(\ )$, а также ядру ползучести $\Gamma(t,\tau)$ и конкретного значения времени t, можно определить величину проекций $\left(P_x, P_y\right)$ необходимой силы P для достижения в указанный момент времени t области контакта, определяемой отрезком $[\alpha_0(t), \beta_0(t)]$, по вычислительной схеме, изложенной в [47, 71]:

- последовательно домножим левую и правую части уравнений (267) и (268) на $-\left(\frac{d}{d\varphi}R(\varphi)\cdot\sin(\varphi)+R(\varphi)\cdot\cos(\varphi)\right)$ и $\left(\frac{d}{d\varphi}R(\varphi)\cdot\cos(\varphi)-R(\varphi)\cdot\sin(\varphi)\right)$. Далее полученные уравнения проинтегрируем на отрезке $[\alpha_0(t), \beta_0(t)]$ для вязкоупругого материала и материала, обладающего нелинейной ползучестью;
- изменим последовательность интегрирования в правой части в соответствии с гипотезой о неубывании $\alpha_0(t)$ и $\beta_0(t)$;
- используем уравнения равновесия (298) для замены выражений в правой части полученных ранее равенств.

В итоге получаем нелинейные уравнения для определения проекций необходимой силы P, действующих на диск с огранкой. Эти уравнения подобны уравнениям, приведенным в работе [47, 71]:

- вязкоупругий однородно стареющий материал слоя с мгновенным модулем упругости $E(t)$:

$$\int\limits_{\alpha_0(t)}^{\beta_0(t)} \frac{v_\rho(\varphi,t)}{h(\varphi)}\left(\frac{d}{d\varphi}R(\varphi)\cdot\sin(\varphi)+R(\varphi)\cdot\cos(\varphi)\right)d\varphi=\frac{P_x}{E(t)}\left[1+\int\limits_0^t\frac{E(t)}{E(\tau)}\Gamma(t,\tau)d\tau\right],$$

$$-\int\limits_{\alpha_0(t)}^{\beta_0(t)} \frac{v_\rho(\varphi,t)}{h(\varphi)}\left(\frac{d}{d\varphi}R(\varphi)\cdot\cos(\varphi)-R(\varphi)\cdot\sin(\varphi)\right)d\varphi=\frac{P_y}{E(t)}\left[1+\int\limits_0^t\frac{E(t)}{E(\tau)}\Gamma(t,\tau)d\tau\right], \tag{303}$$

- материал слоя, обладающий свойствами нелинейной ползучести:

$$-\int\limits_{\alpha_0(t)}^{\beta_0(t)} \Im\left(-\frac{v_\rho(\varphi,t)}{h(\varphi)}\right)\left(\frac{d}{d\varphi}R(\varphi)\cdot\sin(\varphi)+R(\varphi)\cdot\cos(\varphi)\right)d\varphi=P_x\cdot\left[1+\int\limits_0^t\Gamma(t,\tau)d\tau\right],$$

$$\int\limits_{\alpha_0(t)}^{\beta_0(t)} \Im\left(-\frac{v_\rho(\varphi,t)}{h(\varphi)}\right)\left(\frac{d}{d\varphi}R(\varphi)\cdot\cos(\varphi)-R(\varphi)\cdot\sin(\varphi)\right)d\varphi=P_y\cdot\left[1+\int\limits_0^t\Gamma(t,\tau)d\tau\right]. \tag{304}$$

7.4.5.3. Пример уравнений для расчета ползучести контакта идеально круглого диска, вставленного в отверстие произвольной формы с покрытием переменной высоты

По аналогии с (299), при тех же геометрических предположениях для вязкоупругого однородно стареющего материала слоя с мгновенным модулем упругости $E(t)$, из (303) получаем:

$$\int_{\alpha_0(t)}^{\beta_0(t)} \frac{R(\varphi)}{h(\varphi)}\left(\sqrt{2\cdot R(\varphi)\cdot\cos(\varphi)(e+\delta(t))+(e+\delta(t))^2+r^2}-R(\varphi)\right)\cos(\varphi)d\varphi \approx$$

$$\approx \frac{P_x}{E(t)}\left[1+\int_0^t \frac{E(t)}{E(\tau)}\Gamma(t,\tau)d\tau\right],$$

$$\int_{\alpha_0(t)}^{\beta_0(t)} \frac{R(\varphi)}{h(\varphi)}\left(\sqrt{2\cdot R(\varphi)\cdot\cos(\varphi)(e+\delta(t))+(e+\delta(t))^2+r^2}-R(\varphi)\right)\sin(\varphi)d\varphi \approx$$

$$\approx \frac{P_y}{E(t)}\left[1+\int_0^t \frac{E(t)}{E(\tau)}\Gamma(t,\tau)d\tau\right].$$

Для однородного материала слоя, обладающего свойствами нелинейной ползучести, из (304) получим:

$$-\int_{\alpha_0(t)}^{\beta_0(t)} R(\varphi)\cdot\Im\left(-\frac{\sqrt{2\cdot R(\varphi)\cdot\cos(\varphi)(e+\delta(t))+(e+\delta(t))^2+r^2}-R(\varphi)}{h(\varphi)}\right)\cos(\varphi)d\varphi \approx$$

$$\approx P_x\cdot\left[1+\int_0^t \Gamma(t,\tau)d\tau\right],$$

$$-\int_{\alpha_0(t)}^{\beta_0(t)} R(\varphi)\cdot\Im\left(-\frac{\sqrt{2\cdot R(\varphi)\cdot\cos(\varphi)(e+\delta(t))+(e+\delta(t))^2+r^2}-R(\varphi)}{h(\varphi)}\right)\sin(\varphi)d\varphi \approx$$

$$\approx P_y\cdot\left[1+\int_0^t \Gamma(t,\tau)d\tau\right].$$

Порядок решения квазистатической задачи ползучести состоит в том, что в данном случае задается ряд возрастающих глубин $\{\delta_i\}_{i=1}^m$ вдоль одной оси $0x$, которые, как предполагается, индентор со временем достигнет. По решенным m статическим задачам определяются фиктивные силы $\left\{F_i = \sqrt{(F_{x,i})^2 + (F_{y,i})^2}\right\}_{i=1}^m$, которые необходимы, чтобы индентор достиг соответствующих глубин $\{\delta_i\}_{i=1}^m$. После этого осуществляется вычисление необходимого времени $\{t_i\}_{i=1}^m$. Отметим, что как для вязкоупругого случая величина действующей силы P, $E(t)$ и $\Gamma(t,\tau)$, так и для нелинейной ползучести покрытия величина действующей P, $\Im(\ )$ и $\Gamma(t,\tau)$ всегда априорно заданы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон - М: Мир, 1989. – 510 с.
2. Кравчук, А.С. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами / А.С. Кравчук, А.В. Чигарев - Минск: Технопринт, 2000. – 196 с.
3. Золоторевский, В.С. Механические свойства металлов / В.С. Золоторевский - М.: Металлургия, 1983. - 352 с.
4. Динник, А.Н. Избранные труды. Том 1. Удар и сжатие твердых тел / А.Н. Динник – Киев: АН СССР, 1952. – С. 13–144.
5. Демкин, Н.Б. Качество поверхности и контакт деталей машин / Н.Б. Демкин, Э.В. Рыжов - М., 1981. - 244 с.
6. Kravchuk A. Penetration of a pyramid indenter into a multilayer coating / A. Kravchuk, Z. Rymuza, D. Jarzabek // Int. J. Mat. Res. (formerly Z. Metallkd.) V. 100, 2009, N 7. - P. 933-935.
7. Тариков, Г.П. К решению пространственной контактной задачи с учетом износа и тепловыделения с помощью электрического моделирования / Г.П. Тариков // Трение и износ, 1992, Т. 13, № 3. - С. 438-442.
8. Щерек М. Методические основы систематизации экспериментальных трибологических исследований: диссерт. в виде научн. докл. ... докт. тех. наук: 05.02.04/ Ин-т технологии эксплуатации. - Москва, 1996. - 64 с.
9. Щерек, М. Методологические основы экспериментальных трибологических исследований / М. Щерек, В. Потеха // О природе трения твердых тел: Тез. докл. Международного симпозиума, Гомель 8-10 июня, 1999 г. / ИММС НАНБ. - Гомель, 1999. - С. 56-57.
10. Чернец, М.В. К вопросу об оценке долговечности цилиндрических трибосистем скольжения с границами близкими к круговым / М.В. Чернец // Трение и износ, 1996, т. 17, № 3. - С. 340-344.
11. Чернець, М.В. Про один метод розрахунку ресурсу циліндричних систем ковзання / М.В. Чернець // Доповіді Національної академії наук Україны, 1996, № 1. - С. 47-49.
12. Горячева, И.Г. Контактные задачи в трибологии / И.Г. Горячева, Н.М. Добычин - М.: Машиностроение, 1988. - 256 с.
13. Гриб, В.В. Решение триботехнических задач численными методами. / В.В. Гриб - М.: Наука, 1982. - 112 с.
14. Цеснек, Л.С. Механика и микрофизика истирания поверхностей / Л.С. Цеснек - М.: Машиностроение, 1979. - 264 с.
15. Кузьменко, А.Г. Контактные задачи с учетом износа для цилиндрических опор скольжения / А.Г. Кузьменко // Трение и износ, 1981, Т. 2, № 3. - С. 502-511.

16. Пелех, Б.Л. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций / Б.Л. Пелех, А.В. Максимук, И.М. Коровайчук - Киев: Наук. Дум., 1988. - 280 с.
17. Шпеньков, Г.П. Физико-химия трения / Г.П. Шпеньков - Мн.: Университетское, 1991. - 397 с.
18. Безухов, Н.И. Теория упругости и пластичности / Н.И. Безухов - М.: Гос.изд. технико-теоретической литературы, 1953. - 420 с.
19. Власов, В.З. Избранные труды. Том 3. Тонкостенные пространственные системы / В.З. Власов - М: Изд-во Академии наук СССР, 1964. - 472 с.
20. Попов, Г.Я. Контактные задачи для линейнодеформируемого основания / Г.Я. Попов. - Одесса : Вища шк., 1982. - 167 с.
21. Основы нового метода расвета фундаментов на упругом основании при помощт двух коэффициентов постели / П.Л. Пастернак. - М.: Госуд. изд. по строительству и архитектуре, 1954. - 56 с.
22. Лукаш, П.А. Основы нелинейной строительной механики / П.А. Лукаш – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.
23. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев - М.: Наука, 1981. - 718 с.
24. Босаков, С.В. Балочная плита на нелинейно-неоднородном основании с местным ослаблением / С.В. Босаков, О.В. Козунова // Строительная механика и расчет сооружений, № 5, 2016. – С.15-19.
25. Студми. Учебные материалы для студентов [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://studme.org/231863/matematika_himiya_fizik/ponyatie_poryadka_approksimatsii (дата доступа 31.03.2019 г.)
26. Твѐрдость – статья из Википедии [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Твѐрдость (Дата доступа 02.04.2019 г.)
27. Справочник по цветным металлам [Электронный ресурс] Режим доступа: http://libmetal.ru/prop/tverd.htm (Дата доступа: 02.04.2019 г.)
28. Механические свойства металлов: статические испытания / В.С. Золоторевский и др. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2013. – 116 с.
29. ГОСТ 9012-59 Металлы. Метод измерения твердости по Бринелю. - М: Издательство Стандартов 1993. - 42 с.
30. ГОСТ 9377-81 Наконечники и бойки алмазные к приборам для измерения твердости металлов и сплавов. - М: Издательство Стандартов 1987. - 9 с.
31. Золоторевский, В.С. Механические свойства металлов/ В.С. Золоторевский - М.: МИСИС, 1998. - 400 с.
32. Ишлинский, А.Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля / А.Ю. Ишлинский // ПММ, 1944, т.8, вып. 3. - С. 201-224.

33. Shield, R.T. On Plastic flow of metals under conditions of axial symmetry / R.T. Shield // Proc. Roy. Soc., 1955, A223. - P. 267-287.
34. Кравчук, А.С. Применение простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины в механике твердого тела / А.С. Кравчук, А.И. Кравчук // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. 2014. № 1 [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://apriori-journal.ru/seria2/1-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf (Дата доступа 02.04.2019 г.)
35. Кравчук, А.С. Определение предела текучести материла по результатам статического вдавливания инденторов / А.С. Кравчук, А.И. Кравчук // Инженерный вестник Дона, 2018, № 3. Режим доступа: http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5173 (Дата доступа 02.04.2019 г.)
36. Горицкий, В.М. Диагностика металлов / В.М. Горицкий – М.: Металлургиздат, 2004. - 408 с.
37. Марковец, М.П. Определение механических свойств металлов по твердости / М.П. Марковец - М.: Машиностроение, 1979. - 191 с.
38. Матюнин, В.М. Автоматизированный экспресс-анализ механических свойств поверхностных слоев обработанного металла методом непрерывного вдавливания индентора / В.М. Матюнин, П.В. Волков, А.Н. Демидов // Технология металлов, 2013, № 2. – С. 49-51.
39. Демкин, Н.Б. Контактирование шероховатых поверхностей / Н.Б. Демкин – М.: Наука, 1970. – 227 с.
40. Кормышев, В.Е. Нанотвердость поверхности износостойкой наплавки, облученной электронным пучком / В.Е. Кормышев и др. // Известия ВУЗ-ов. Черная металлургия, 2017, Т.60, № 4. - С.304-309.
41. Марченков, А.Ю. Исследование микро- и макротвердости материалов и влияния на них скорости индентирования / А.Ю. Марченков и др. // Технология металлов, 2013, № 2. – С. 54-56.
42. Быков Ю.А. Нанотвердость поверхностного слоя твердых тел / Ю.А. Быков, С.Д. Карпухин // Заготовительные производства в машиностроении, № 6, 2015. – С. 40-43.
43. Дунин-Барковский, И.В. Основные направления исследования качества поверхности в машиностроении и приборостроении / И.В. Дунин-Барковский // Вестник машиностроения, 1971, № 4. – С. 49-50.
44. Кравчук, А.С. Геометрический критерий надежности измерений микро- и нанотвердости, участков диаграмм вдавливания инденторов, а также кривой ползучести при вдавливании / А.С. Кравчук, А.И. Кравчук // Перспективы науки, № 9 (108), 2018. - С. 12-22.
45. Виноградов, Г.В. Реология полимеров / Г.В. Виноградов, А.Я. Малкин – Москва: Химия, 1977. - 440 с.
46. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин - М.: Машиностроение, 1975. - 400 с.

47. Кравчук, А.С. Моделирование ползучести по наследственной теории в простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины / А.С. Кравчук, А.И. Кравчук // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки, 2014, № 2 [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://apriori-journal.ru/seria2/2-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf (Дата доступа 02.04.2019 г.)
48. Ржаницын, А.Р. Теория ползучести / А.Р. Ржаницын - М.: Стройиздат, 1968. - 419 с.
49. Арутюнян, Н.Х. Контактные задачи теории ползучести / Н.Х. Арутюнян, А.В. Манжиров - Ереван: Изд-во АН Армянской ССР, 1990. - 318 с.
50. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005 - 576 с.
51. Композиционный материал – статья из Википедии [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Композиционный_материал (Дата доступа 02.04.2019 г.)
52. Кравчук, А.С. Введение в уравнения математической физики и механики микроструктурированных тел / А.С. Кравчук, И.А. Тарасюк, С.Н. Лопатин // Евразийский Союз Ученых (ЕСУ), № 9 (54), 2018. – С. 48-61.
53. Кравчук А.С. Общие уравнения пространственной и плоской задач механики твердого тела в случае использования модели квазиупругого поведения изотропного вязкоупругого материала / А.С. Кравчук, А.И. Кравчук // Машиностроение: сетевой электронный научный журнал. 2017. Том 5, №1. - С. 3-10 [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.indust-engineering.ru/issues/2017/2017-1.pdf
54. Кравчук А.С. Методика учета переменной толщины деформируемого покрытия в его простейшей модели / А.С. Кравчук, А.И. Кравчук // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. 2014. № 2. Режим доступа: http://apriori-journal.ru/seria2/2-2014/Kravchuk-Kravchuk1.pdf
55. Биомеханика живой клетки / Ефремов Ю. // научный сайт Биомолекула [Электронный ресурс] Режим доступа: https://biomolecula.ru/articles/biomekhanika-zhivoi-kletki
56. Диагностика раковых клеток с помощью атомно-силовой микроскопии / О.С. Соколова // Наука 21 век [Электронный ресурс] Режим доступа: http://nauka21vek.ru/archives/44513
57. Efremov J.M. Atomic-force microscopy study of the arrangement and mechanical properties of astrocytic cytoskeleton in growth medium / J.M. Efremov and et. // Acta Naturae, V 3, N 3 (2011) – p. 93-99.
58. Кравчук А.С. Модель определения реологических параметров клетки / А.С. Кравчук, А.И. Кравчук, И.А. Тарасюк // Международный

конгресс по информатике: информационные системы и технологии = International Congress on Computer Science: Information Systems and Technologies [Электронный ресурс] : материалы междунар. науч. конгресса, Республика Беларусь, Минск, 24–27 окт. 2016 г. / редкол.: С. В. Абламейко (гл. ред.), В. В. Казаченок (зам. гл. ред.) [и др.]. – Минск : БГУ, 2016. - С. 204-209.

59. Терехин, Н.А. Сравнительные характеристики поверхностной жесткости деталей / Н.А. Терехин, А.С. Ямников, В.М. Грязев // Изв. Тул. ГУ. Технические науки. 2011, вып. 6. Ч. 2. – С. 168-174.
60. Kravchuk, A.S. Contact Displacements of Spatial Contact of a Rough Body and a Body with Coating / A.S. Kravchuk, A.I. Kravchuk, Z. Rymuza // Tenische Mechanik, 2004, Band 24, Heft 2. – p. 116-124.
61. Кравчук, А.С. Нелокальный контакт шероховатых тел по эллиптической области / А.С. Кравчук // Известия РАН. МТТ, № 3, 2005. – с. 42-52.
62. Левина, З.М. Контактная жесткость машин / З.М. Левина, Д.Н. Решетов – М.: Машиностроение, 1971. – 264 с.
63. Гафнер, С.Л. К расчету угла контакта при внутреннем соприкосновении цилиндрических тел, радиусы которых почти равны / С.Л. Гафнер, М.Н. Добычин // Машиностроение. 1973. № 2. - С. 69-73.
64. Панасюк, В.В. Деякі контактні задачі теорії пружності / В.В. Панасюк, М.Й. Теплий - Киев: Наук. думка, 1975. - 193 с.
65. Кравчук, А.С. Метод определения нормального перемещения в области контакта цилиндрических подшипников скольжения, а также шаровых опор и наконечников с защитным слоем с учетом механических и реологических характеристик его материала / А.С. Кравчук, С.А. Чижик, А. Мищак // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. 2014. № 4. Режим доступа: http://apriori-journal.ru/seria2/4-2014/Kravchuk-Chizhik-Mischak.pdf
66. Крагельский, И.В. Основы расчета на трение износ / И.В. Крагельский, М.Н. Добычин, В.С. Комбалов - М.: Машиностроение, 1977. - 526 с.
67. Добычин, М.Н. Влияние трения на контактные параметры вал-втулка / М.Н. Добычин, С.Л. Гафнер // Сб. «Проблемы трения и изнашивания». Киев: Техника, 1976. № 3. - С. 30-36.
68. Теплый, М.И. Определение износа в паре трения вал-втулка / М.И. Теплый // Трение и износ. 1983. Т. 4. № 2. С. 249-257.
69. Андрейкив, А.Е. Оценка контактного взаимодействия трущихся деталей машин / А.Е. Андрейкив, М.В. Чернец – Киев: Наукова думка, 1991. – 160 с.

70. Чернець, М.В. Контактна задача для циліндричного з’єднання з технологічним огранениям контурів деталей / М.В. Чернець // Физико-химическая механика материалов. 2009. № 6. С. 93-99.
71. Кравчук, А.С. Моделирование износа защитных покрытий цилиндрических подшипников скольжения, а также шаровых опор и наконечников / А.С. Кравчук, С.А. Чижик, А. Мищак // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. 2014. № 5. Режим доступа: http://apriori-journal.ru/seria2/5-2014/Kravchuk-Chizhik-Mischak.pdf

Научное издание

Кравчук Александр Степанович
Кравчук Анжелика Ивановна

Прикладные контактные задачи для обобщенной стержневой модели покрытия

Монография
Электронное текстовое издание

Монография разработана с помощью программного обеспечения
Microsoft Office Word, Adobe Acrobat Pro
Гарнитура PT Astra Serif

Подписано к использованию 17.05.2019.
Объем издания – 4,5 МБ

Издательство «Наукоемкие технологии»
ООО «Корпорация «Интел Групп»
http://publishing.intelgr.com
E.mail: publishing@ intelgr.com
Тел.: (812)945-50-63