

Н. А. Антипин

Аспекты распределений матриц из целых чисел порядка от 2 до 6 по их определителям



Н. А. Антипин

**АСПЕКТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАТРИЦ
ИЗ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПОРЯДКА ОТ 2 ДО 6
ПО ИХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯМ**

Монография

Санкт-Петербург
Наукоемкие технологии
2021

УДК 519.688
ББК 22.18
А72

Антипин Н. А.
А72 Аспекты распределений матриц из целых чисел порядка от 2 до 6 по их определителям: монография. – 2-е изд., доп. – СПб.: Научное издательство «Лань», 2021. – 217 с.

ISBN 978-5-6046047-5-5

В монографии предложен набор распределений матриц из целых чисел различных порядков, полученных с помощью ЭВМ. Данные систематизированы и визуализированы. В заключение автор отмечает предпосылки для поиска новых распределений и различные способы повышения точности вычислений.

Книга рекомендована для студентов и преподавателей, занимающихся целочисленным и вычислительным анализом.

УДК 519.688
ББК 22.18

ISBN 978-5-6046047-5-5

© Антипин Н. А., 2021
© Оформление. Издательство
«Научное издательство «Лань», 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Благодарности	4
Введение	5
1. Обобщение формул, характеризующих распределения по модулям определителей для квадратных матриц с элементами из кольца Z_m	7
2. Визуализация распределений при постоянном порядке матрицы и переменном порядке кольца	10
3. Предпосылки для поиска дальнейших распределений модулей определителей для квадратных матриц с элементами из Z_m	23
Заключение	63
Приложение 1.....	64
Приложение 2.....	76
Приложение 3.....	94
Приложение 4.....	103
Приложение 5.....	123
Приложение 6.....	127
Приложение 7.....	133
Приложение 8.....	142
Приложение 9.....	154
Приложение 10.....	170
Приложение 11.....	175
Приложение 12.....	179
Приложение 13.....	181
Приложение 14.....	185
Приложение 15.....	191
Приложение 16.....	194
Список литературы	213

Благодарности

Сердечно благодарю разработчиков международных проектов Qt, Cygwin и GNU C/C++. И всех тех, кто делает нашу жизнь лучше нам во благо.

Без таких организаций, как ЕФМЛ, МФТИ, МИРЭА данная работа никогда бы не появилась.

Автору помогали его родственники, друзья – большое им спасибо.

Коллектив издательства “Научное издание” был терпелив к автору и сделал монографию более приятной для просмотра.

Издано при поддержке ООО ГТМ (Н. В. Ушина и других неравнодушных людей, входящих в эту дружную команду, нацеленную на успех).

Введение

Математическое моделирование объектов реального мира приобретает в развитых странах все большее значение. Так, по трехмерной модели средствами стереолитографии может быть выполнен реальный прототип объекта из металла, пластика и других материалов. Причем уровень шероховатостей и прочность объекта строго контролируется и определяется лишь уровнем точности стереолитографической установки и подбором порошков или смоляных смесей, из которых будет создаваться объект.

Стереолитографическая установка может стоить крайне дорого, обычно она используется для создания объектов, имеющих сложную структуру, которые не удастся создать средствами фрезерования и литья. К таким объектам относятся изделия аэрокосмической отрасли, имплантаты, винты, турбины и т. д. Естественно, возникает вопрос о корректности технических свойств трехмерной модели еще до ее получения средствами стереолитографии. Здесь на помощь приходят обширные средства моделирования физических полей, самые известные из которых представлены пакетами ANSYS, COMSOL, SolidWorks, CATIA и т. д. Во всех этих пакетах для создания физических полей используется метод конечных элементов [28], который показывает изменения точечной модели объекта при различных воздействиях на нее путем решения системы дифференциальных уравнений. Количество уравнений в системе определяется уровнем детализации объекта и может достигать величины 1 000 000 (для трехмерной модели, ограниченной кубом, это всего лишь куб с ребром из 100 точек, для ребра из 1 000 000 точек понадобится примерно 10^{18} уравнений). От оценки обусловленности данной системы и последующего выбора схемы решения будет зависеть качество физического моделирования объекта.

Математическое моделирование в настоящее время стало широко применяться при расчетах концентраций продуктов химических реакций [20], количества биологических популяций [39] и др. В случае плохо обусловленных задач использование Флопс является недопустимым и необходимо переходить на Хипс. Также при решении систем дифференциальных уравнений численными методами обязательным является поиск точек равновесия (в общем виде для этого может потребоваться символьный процессор), в соответствии с теорией, развитой А. М. Ляпуновым [37], так как в соответствии с величинами этих полюсов можно оценивать корректность выбранной схемы решения.

Вычислительной мощности даже современного компьютера для решения разреженной системы из 1000000 уравнений может не хватить (пяти и более ленточная матрица [16, 28]). Так как часто надо рассмотреть систему при изменении ряда параметров, решать

миллион уравнений может понадобиться для каждого случая. Следствием этого стало широкое применение параллельных вычислений и создание огромных вычислительных комплексов (URL: <https://en.m.wikipedia.org/wiki/Cray>). Другими сферами использования такого комплекса можно назвать глобальную энергетику [23–25] (проблемы ядерной и термоядерной промышленности), авиастроение [2, 17, 26] (проблемы скрытности для военных или, наоборот, лучшего распознавания для гражданских воздушных судов средствами наземных или космических РЛС, экономия топлива, маневрирование в турбулентных средах), генную инженерию [12, 14] (проблемы долголетия, борьбы с раком, выведения форм растений или животных, устойчивых к климатическим или биологическим угрозам), процессорную технику [22, 28] (повышение процента выхода годных центральных процессоров), улучшение их быстродействия и объемов хранимой информации за счет внедрения новых архитектур, полученных в результате моделирования данным комплексом или внедрения принципиально новых технологий, открытых после более широкого внедрения вычислений с расширенной архитектурой) и мн. др.

Ценность полученной информации о распределениях в различных кольцах целых чисел заключается в том, что данные оценки для определителей можно применять не только к матрицам с элементами из данного кольца, но и к любым другим матрицам с элементами, которые содержатся в интервале значений найденного распределения кольца целых чисел. Так, если мы будем знать оценки значений определителя для матриц с элементами из Z_{1000} , то мы сможем дать оценки определителей и для матриц с элементами из интервала $[0; 99,9]$ с числом десятичных знаков, не превышающим 1. Или, наоборот, при тех же начальных условиях сможем дать оценки определителей для матриц с элементами из целых чисел из интервала $[0; 9990]$ такими, чтобы они были кратны 10.

Данные оценки принесут несомненную пользу при анализе числа обусловленности систем уравнений и стабильности разностных схем для решения систем дифференциальных уравнений.

Специфика используемых математических определений представлена в работах [10, 11, 36].

1. Обобщение формул, характеризующих распределения по модулям определителей для квадратных матриц с элементами из кольца Z_m

Данная глава является логическим продолжением работы [3]. Здесь более детально приводится обобщение распределений квадратных матриц размером $n \times n$ по модулю определителя на случай матриц различного порядка с элементами из кольца вычетов Z_m .

Для квадратной матрицы порядка $n > 2$ с элементами из кольца вычетов Z_m [6, 7, 9] ($k_1, k_2, \dots, k(m-1)$ — соответственно количество элементов $1, 2, \dots, (m-1)$ в данной матрице, $N = n^2$) определим функцию $\text{Factor}(C^{k_1}_N * C^{k_2}_N * \dots * C^{k(m-1)}_N)$, равную произведению отношения общего числа элементов в матрице к количеству различных сочетаний каждого из набора элементов кольца вычетов Z_m по общему количеству элементов в матрице на весовой коэффициент (рисунок 1.1), характеризующий распределение определителей для данного набора $k_1, k_2, \dots, k(m-1)$ (предполагается, что каждый элемент может находиться в любом месте матрицы).

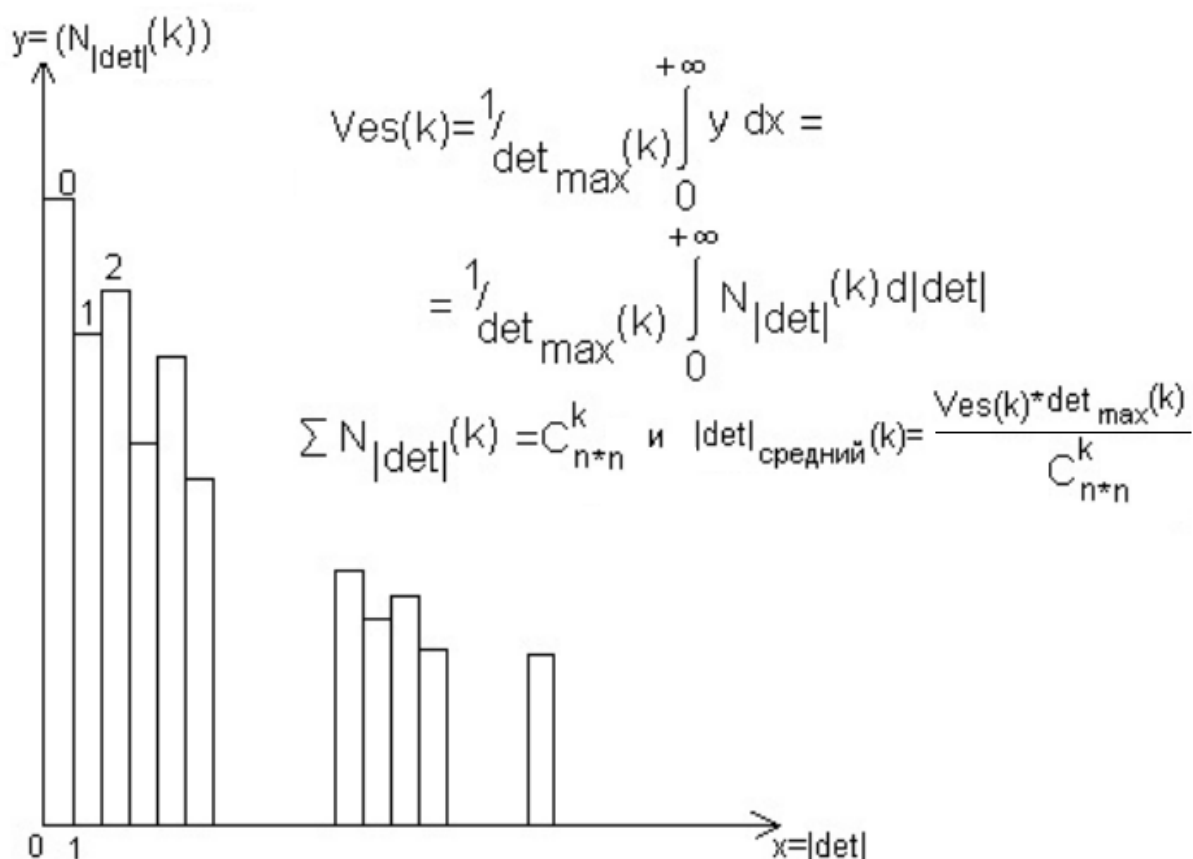


Рисунок 1.1. Зависимость количества модулей определителя от их значения, а также основные функции, характеризующие эту зависимость

В случае $m = 2$: k — количество единиц в матрице, и $\text{Factor}(C_N^k)$ есть $(m^N/C_N^k) \cdot \text{Ves}(k) = (2^N/C_N^k) \cdot \text{Ves}(k)$. В данном случае $\text{Factor}(C_N^k)$, умноженный на отношение общего количества элементов к максимальному детерминанту для данного набора элементов, есть модуль среднего детерминанта этих элементов. А логарифм $\text{Ves}(k)$ есть их средняя энтропия ($S(k) = \ln(\text{Ves}(k))$).

Представим зависимости по данным формулам ($N = n^2$):

$$\begin{aligned} \text{Factor}(C_N^{k_1} \times C_N^{k_2} \times \dots \times C_N^{k(m-2)} \times C_N^{k(m-1)}) &= \\ &= \frac{\text{Ves}(k_1, k_2, \dots, k(m-1)) \times m^N}{C_N^{k_1} \times C_{(N-k_1)}^{k_2} \times \dots \times C_{(N-k_1-k_2-\dots-k(m-3))}^{k(m-2)}} = \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{m^N \left[\int_0^{+\infty} N_{|\det|}(k_1, k_2, \dots, k(m-1)) d|\det| \right]}{\det_{\max}(k_1, k_2, \dots, k(m-1)) \times (C_N^{k_1} \times C_{(N-k_1)}^{k_2} \times \dots \times C_{(N-k_1-k_2-\dots-k(m-3))}^{k(m-2)})}; \\ \text{Ves}(k_1, k_2, \dots, k(m-1)) &= \frac{\left[\int_0^{+\infty} N_{|\det|}(k_1, k_2, \dots, k(m-1)) d|\det| \right]}{\det_{\max}(k_1, k_2, \dots, k(m-1))}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} |\det|_{\text{средний}}(k_1, k_2, \dots, k(m-1)) &= \frac{\left[\int_0^{+\infty} N_{|\det|}(k_1, k_2, \dots, k(m-1)) d|\det| \right]}{C_N^{k_1} \times C_{(N-k_1)}^{k_2} \times \dots \times C_{(N-k_1-k_2-\dots-k(m-3))}^{k(m-2)}} = \\ &= \frac{\left[\int_0^{+\infty} N_{|\det|}(k_1, k_2, \dots, k(m-1)) d|\det| \right]}{N_{\text{общ}}(k_1, k_2, \dots, k(m-1))}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В настоящей работе отдельные соотношения элементов из кольца вычетов Z_m для данного порядка матриц не рассматриваются. Приводятся распределения для всех элементов из данного кольца вычетов для данного порядка матрицы, причем рассмотрение ведется как для положительных, так и для отрицательных элементов кольца и формулы (1.1) – (1.3) можно записать в виде:

$$\text{Factor}(Z_m) = \left[\int_0^{+\infty} N_{|\det|}(Z_m) d|\det| \right]; \quad (1.4)$$

$$Ves(Z_m) = Factor(Z_m) / det_{max}(Z_m); \quad (1.5)$$

$$|det|_{\text{средний}} = Factor(Z_m) / m^N. \quad (1.6)$$

Количество матриц для каждого кольца вычетов ее элементов сильно разнится. Так, для кольца вычетов от 0 до 2 предлагаются распределения для порядков матриц от 2 до 6, в дальнейшем количество вычисленных порядков для каждого распределения уменьшается, и после кольца вычетов от 0 до 5 их порядок не превышает 4. Для каждого кольца приводится его визуализация для всех вычисленных порядков. В главе 2 будет показана визуализация для каждого порядка всех рассмотренных колец. Ознакомиться с распределениями матриц из 0 и 1 можно в работах [3–5].

Учитывая сказанное выше, для практических расчетов более удобно воспользоваться формулами (1.1) – (1.3) и их упрощениями, чем записью, которая представлена в виде сумм, пригодных при теоретическом анализе [3, 7]:

$$\begin{aligned} Factor(Z_m) &= Factor \{A_{n \times n} \{b, \dots, b+m-1\}; m, n \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \sum_{i=1}^{m^{(n \times n)}} \left[\sum_{l=1}^{n!} [(-1)^{t(j)} * \prod_{k=1}^n a_{k j_k}] \right]_i, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $j=(j_1, \dots, j_n)$, $t(j)$ – число транспозиций $(1, 2, \dots, n)$.

Так как значение среднего детерминанта для всех матриц $n \times n$ с элементами из кольца вычетов Z_m равно 0, получим выражение:

$$\sum_{i=1}^{m^{(n \times n)}} \left[\sum_{l=1}^{n!} [(-1)^{t(j)} * \prod_{k=1}^n a_{k j_k}] \right]_i = 0, m, n \in \mathbb{N}. \quad (1.8)$$

Вычисление детерминантов осуществляется по алгоритму, близкому к методу исключения Гаусса [10] (увеличена скорость вычисления на несколько процентов для небольших m и на несколько десятков процентов для $m=2$ и небольших n).

Усовершенствованный алгоритм Гаусса для кольца Z_m приведен в приложении 15.

Распределения детерминантов матриц для множеств $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 2, 3\}$, $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $\{-1, 0, 1\}$, $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ представлены в приложениях 1–14.

2. Визуализация распределений при постоянном порядке матрицы и переменном порядке кольца

Визуализация полученных в книге распределений при постоянном порядке матрицы и переменном порядке кольца для положительных и отдельно для смешанных элементов будет представлена на рисунках 2.1–2.10. Картина, объединяющая эти зависимости в одну (в качестве третьей оси необходимо взять порядок матрицы), могла бы быть использована для интерполяции зависимостей на кольца и матрицы высших порядков (но она трехмерна и не представима на двумерной странице). Для лучшего понимания, каково распределение модулей определителей в высших порядках матриц, можно разбивать кольцо элементов матриц на части и искать распределения типа (1.1) – (1.3).

Данные, приведенные в таблицах 2.1–2.3, показывают, что в случае нецикличности элементов кольца матрицы средний детерминант будет расти при повышении порядка как матрицы, так и кольца. В случае наличия таковой (таблица 2.3) средний детерминант начинает устойчиво расти для матриц порядка, начинающегося с третьего, что характерно и для нециклических распределений (таблицы 2.1 и 2.2).

Таблица 2.1

Суммарные данные приложений 1–9, даваемые формулами (1.4) – (1.6)

Порядок	2	3	4	5	6
1					
Factor	1,08E+02	4,18E+04	1,65E+08	6,39E+12	2,40E+18
Ves	2,70E+01	2,61E+03	3,44E+06	4,00E+10	4,17E+15
det _{средний}	1,33E+00	2,13E+00	3,83E+00	7,54E+00	1,60E+01
2					
Factor	7,16E+02	1,60E+06	6,41E+10	4,48E+16	
Ves	7,96E+01	2,97E+04	2,64E+08	3,69E+13	
det _{средний}	2,80E+00	6,11E+00	1,49E+01	3,98E+01	
3					
Factor	2,96E+03	2,55E+07	6,13E+12		
Ves	1,85E+02	1,99E+05	7,98E+09		
det _{средний}	4,74E+00	1,31E+01	4,02E+01		
4					
Factor	9,30E+03	2,40E+08	2,49E+14		

Продолжение таблицы 2.1

Ves	3,72E+02	9,60E+05	1,33E+11		
det _{средний}	7,17E+00	2,38E+01	8,82E+01		
5					
Factor	2,42E+04	1,58E+09			
Ves	6,72E+02	3,66E+06			
det _{средний}	1,01E+01	3,91E+01			
6					
Factor	5,52E+04	8,03E+09			
Ves	1,13E+03	1,17E+07			
det _{средний}	1,35E+01	5,99E+01			
7					
Factor	1,14E+05	3,36E+10			
Ves	1,78E+03	3,28E+07			
det _{средний}	1,73E+01	8,68E+01			
8					
Factor	2,17E+05	1,21E+11			
Ves	2,68E+03	8,28E+07			
det _{средний}	2,17E+01	1,21E+02			
9					
Factor	3,89E+05	3,83E+11			
Ves	3,89E+03	1,91E+08			
det _{средний}	2,65E+01	1,62E+02			

Таблица 2.2

Суммарные данные приложений 10–14, даваемые формулами (1.4) – (1.6)

Порядок	2	3	4	5	6
10					
Factor	5,60E+01	1,82E+04	6,30E+07	2,21E+12	7,67E+17
Ves	2,80E+01	4,55E+03	3,94E+06	4,61E+10	4,80E+15
det _{средний}	6,91E-01	9,24E-01	1,46E+00	2,61E+00	5,11E+00
11					
Factor	1,37E+03	9,86E+06	2,08E+12		
Ves	1,71E+02	3,08E+05	8,11E+09		
det _{средний}	2,19E+00	5,05E+00	1,36E+01		
12					
Factor	1,06E+04	5,79E+08			
Ves	5,90E+02	5,36E+06			
det _{средний}	4,42E+00	1,44E+01			

Продолжение таблицы 2.2

13					
Factor	4,85E+04	1,20E+10			
Ves	1,52E+03	4,67E+07			
det _{средний}	7,39E+00	3,09E+01			
14					
Factor	1,63E+05	1,34E+11			
Ves	3,25E+03	2,68E+08			
det _{средний}	1,11E+01	5,67E+01			

Таблица 2.3

Данные по распределениям матриц из 0 и 1, представленные в [3-5] и вычисляемые по формулам (1.4) – (1.6)

Порядок матрицы	Factor	Ves	det _{средний}
2	6.00E+00	6.00E+00	3.75E-01
3	1.80E+02	9.00E+01	3.52E-01
4	2.52E+04	8.40E+03	3.85E-01
5	1.58E+07	3.16E+06	4.71E-01
6	4.33E+10	4.81E+09	6.30E-01
7	5.08E+14	1.59E+13	9.03E-01
8	2.52E+19	4.51E+17	1.37E+00

Далее, на рисунках 2.1–2.10, представим визуализацию данных для приложений 1–14.

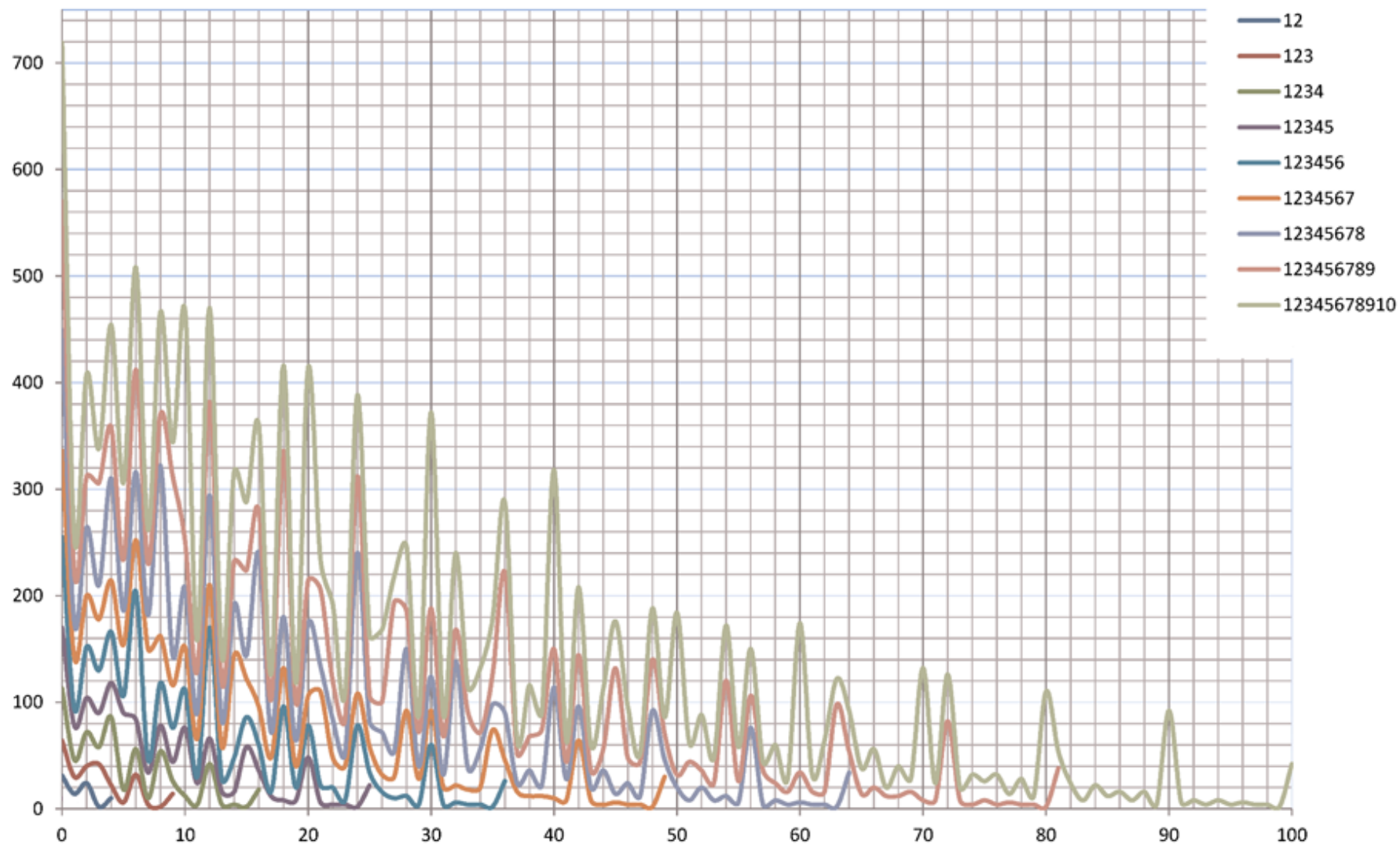


Рисунок 2.1. Зависимость количества матриц порядка 2 от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.1.1–П.9.1

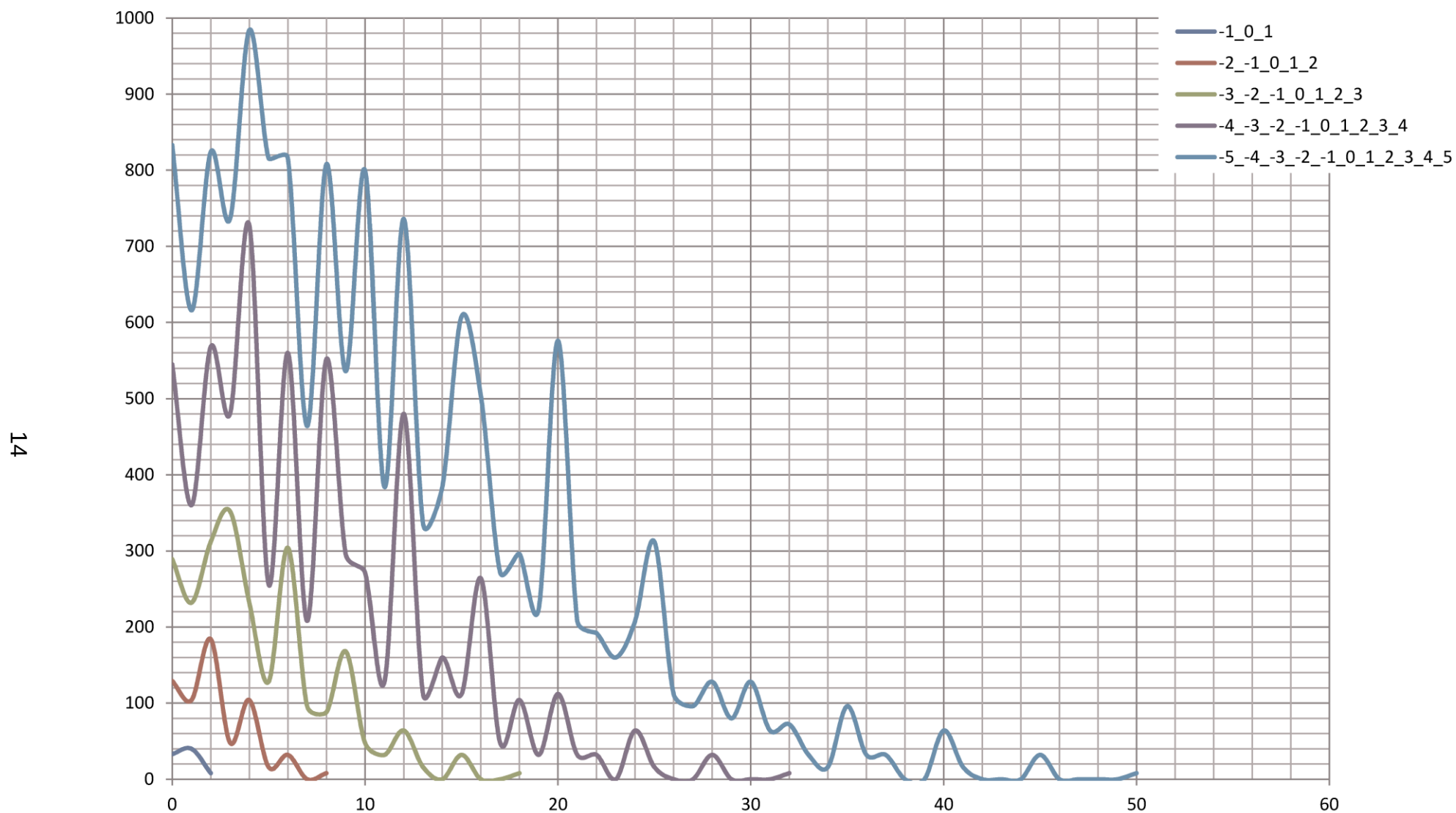


Рисунок 2.2. Зависимость количества матриц порядка 2 от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.10.1–П.14.1

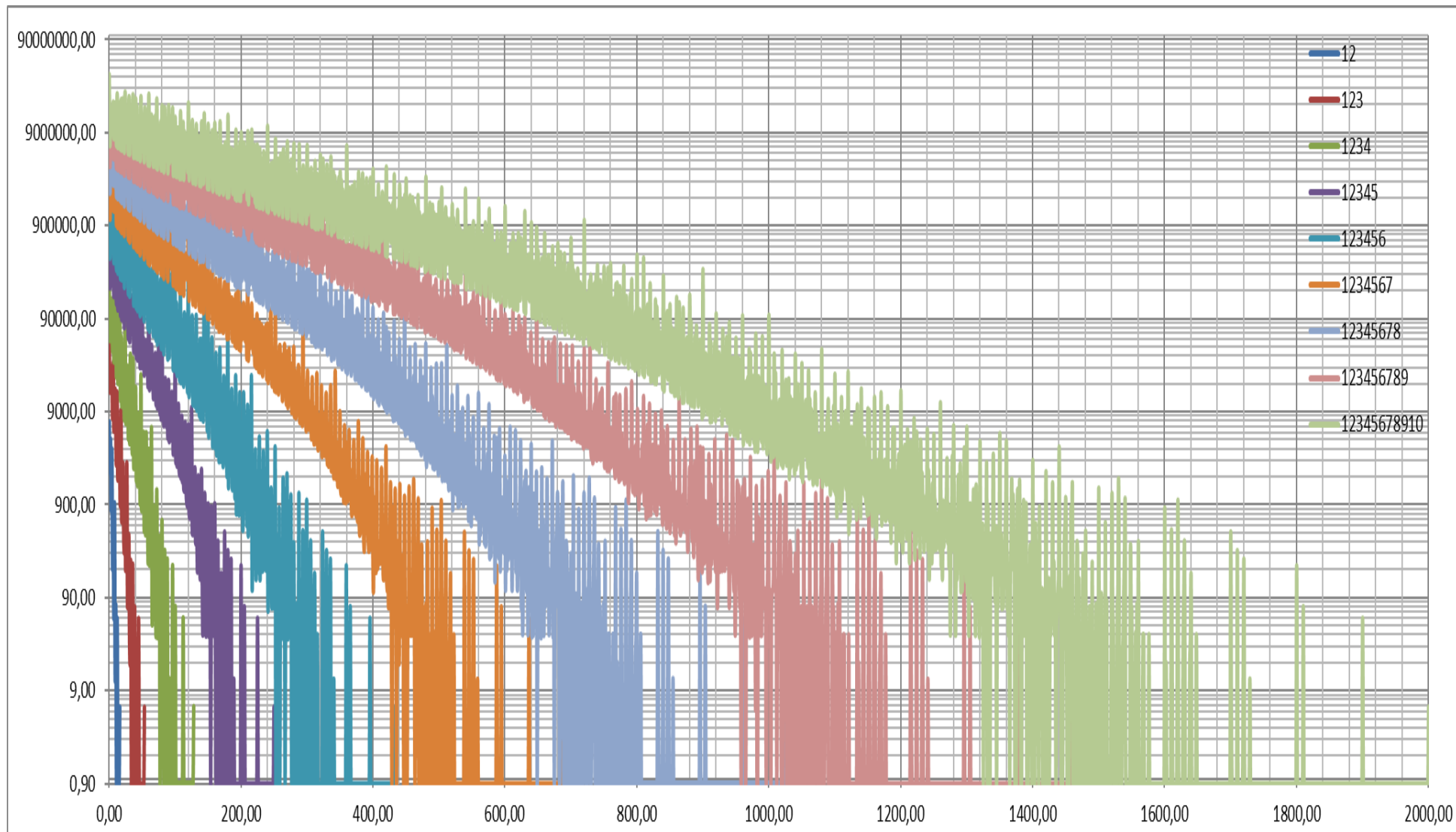


Рисунок 2.3. Зависимость логарифма количества матриц порядка 3 от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.1.2–П.9.2

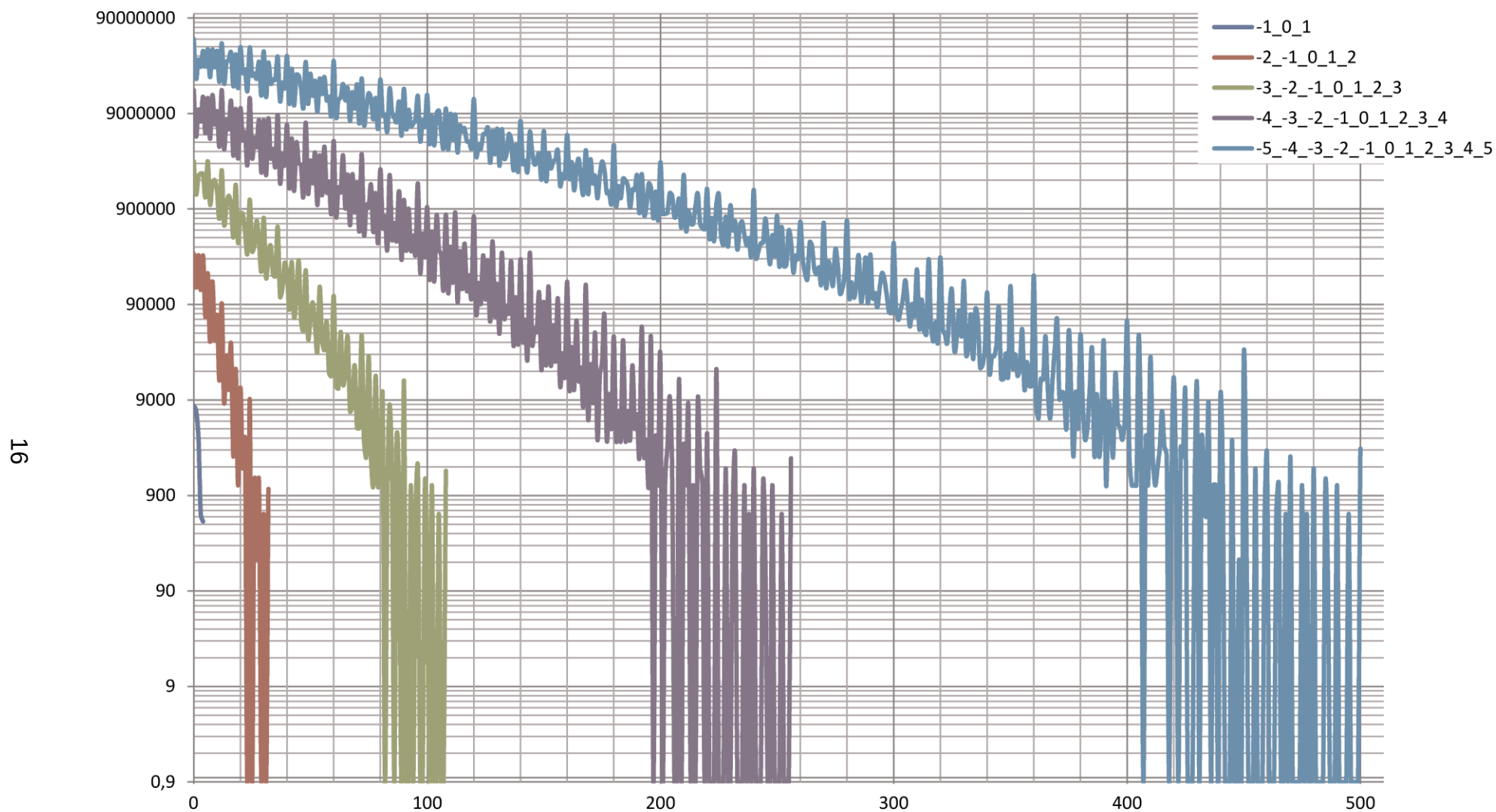


Рисунок 2.4. Зависимость логарифма количества матриц порядка 3 от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.10.2–П.14.2

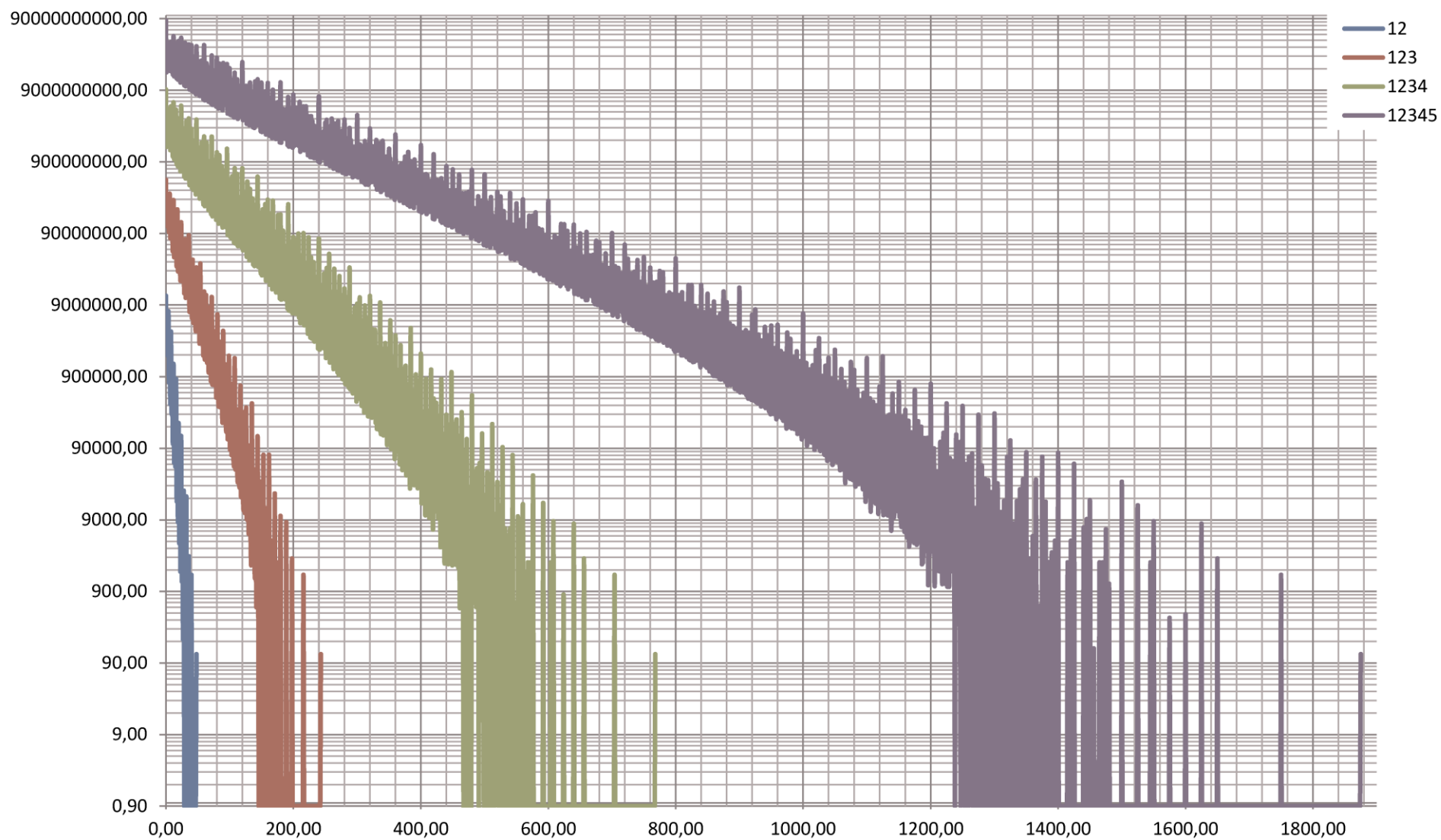


Рисунок 2.5. Зависимость логарифма количества матриц порядка 4 от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.1.3–П.4.3

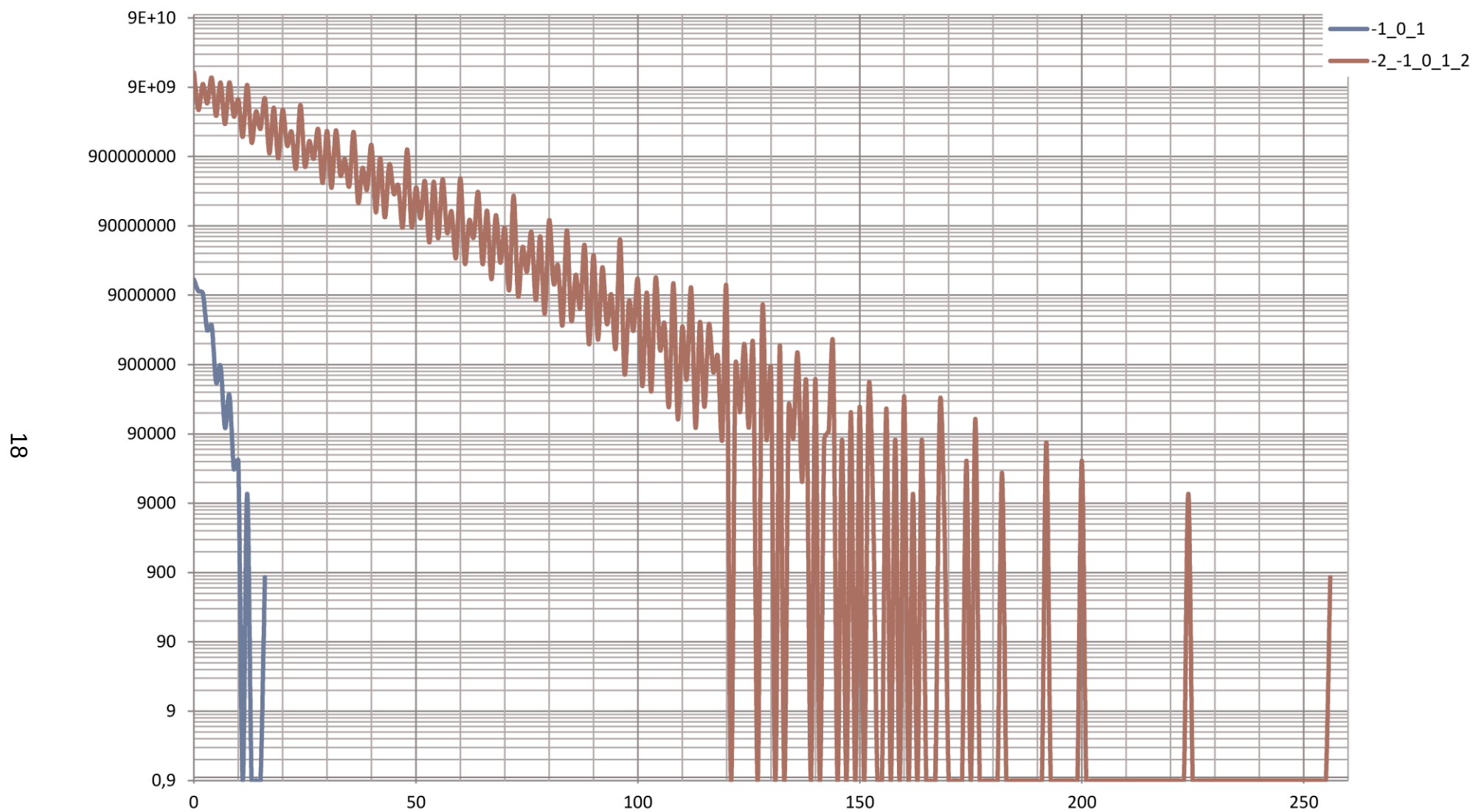


Рисунок 2.6. Зависимость логарифма количества матриц порядка 4 от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.10.3 и П.11.3

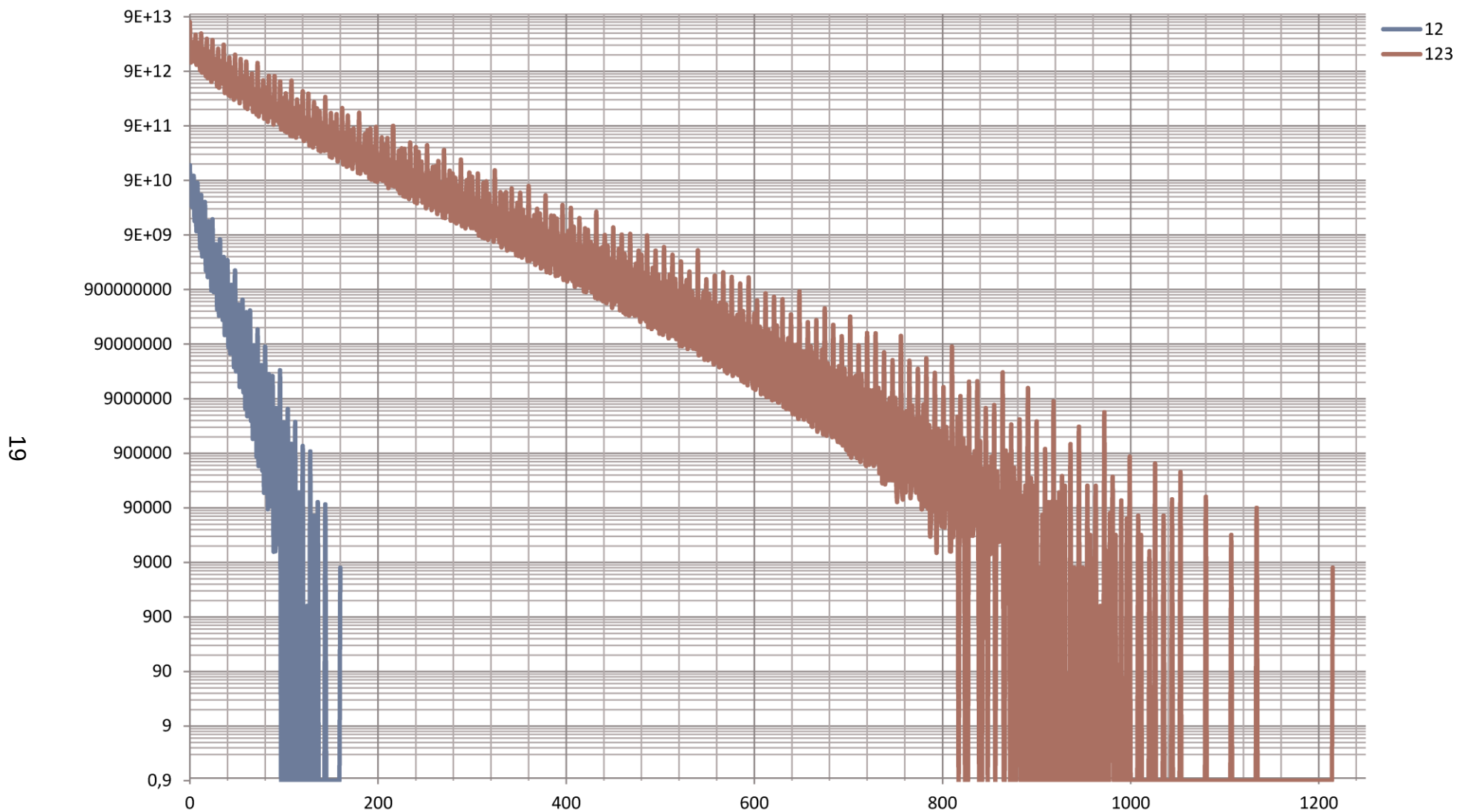


Рисунок 2.7. Зависимость логарифма количества матриц порядка 5 от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.1.4 и П.2.4

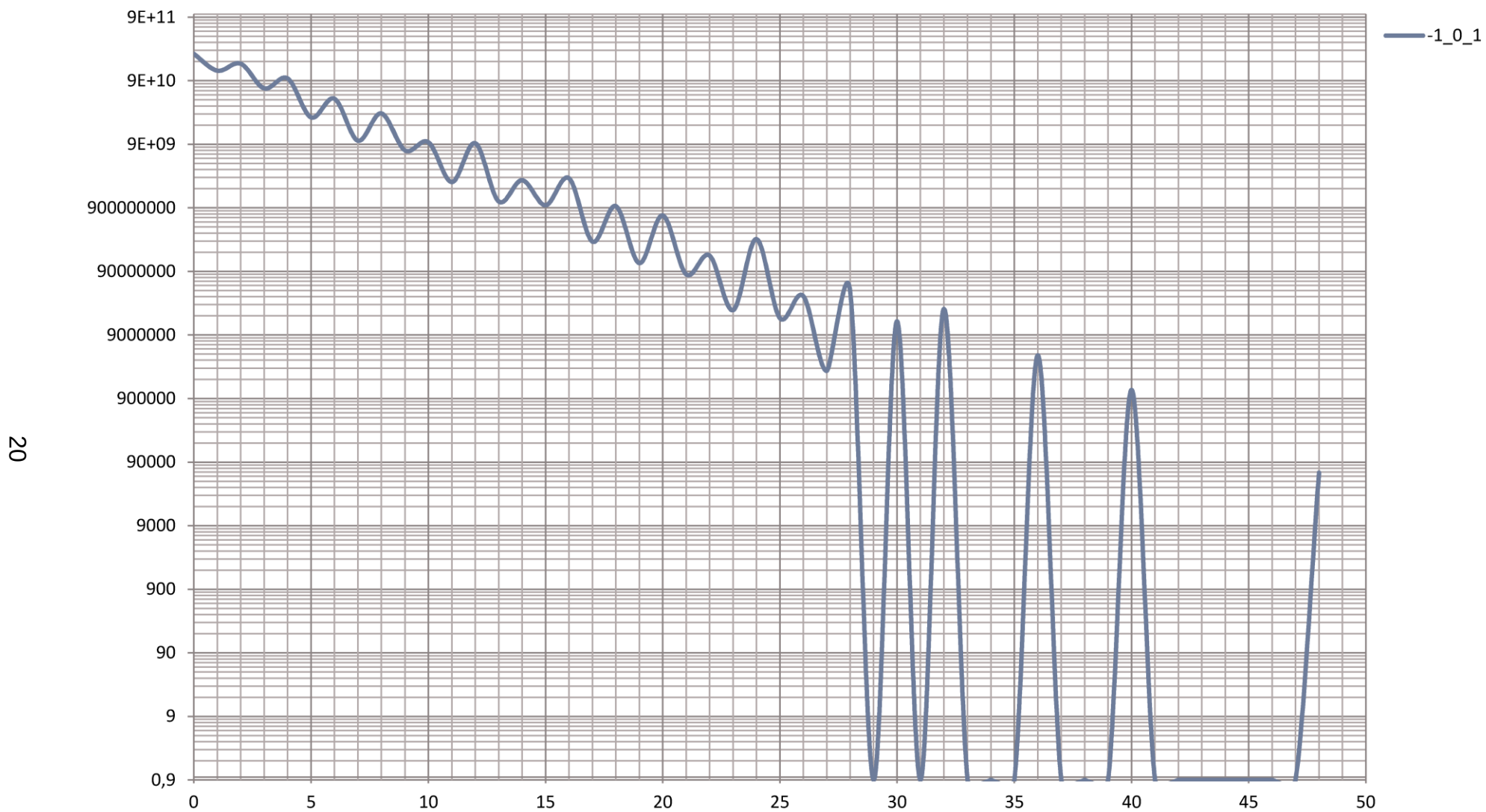


Рисунок 2.8. Зависимость логарифма количества матриц порядка 5 от модуля определителя по данным, представленным в таблице П.10.4

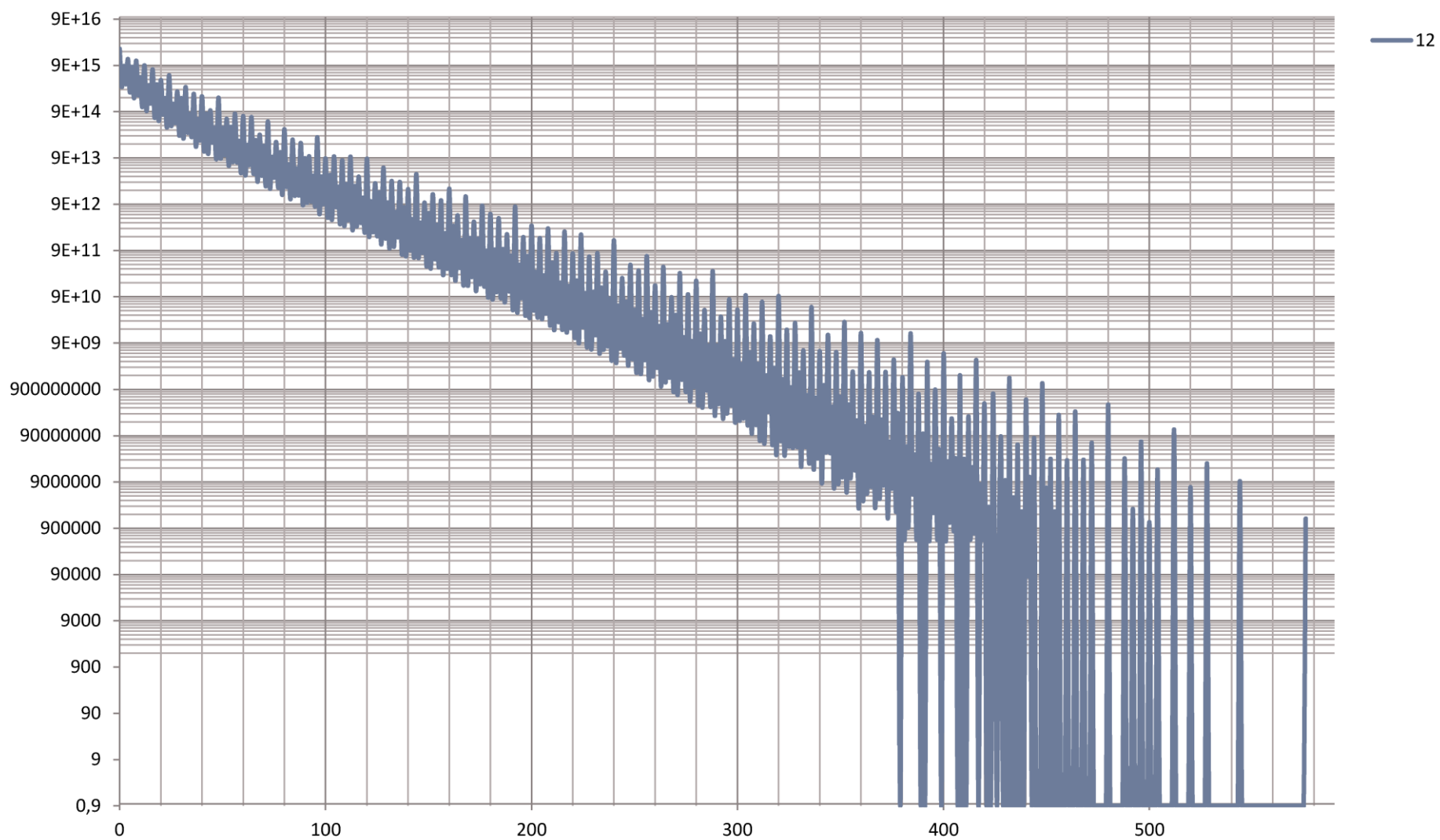


Рисунок 2.9. Зависимость логарифма количества матриц порядка 6 от модуля определителя по данным, представленным в таблице П.1.5

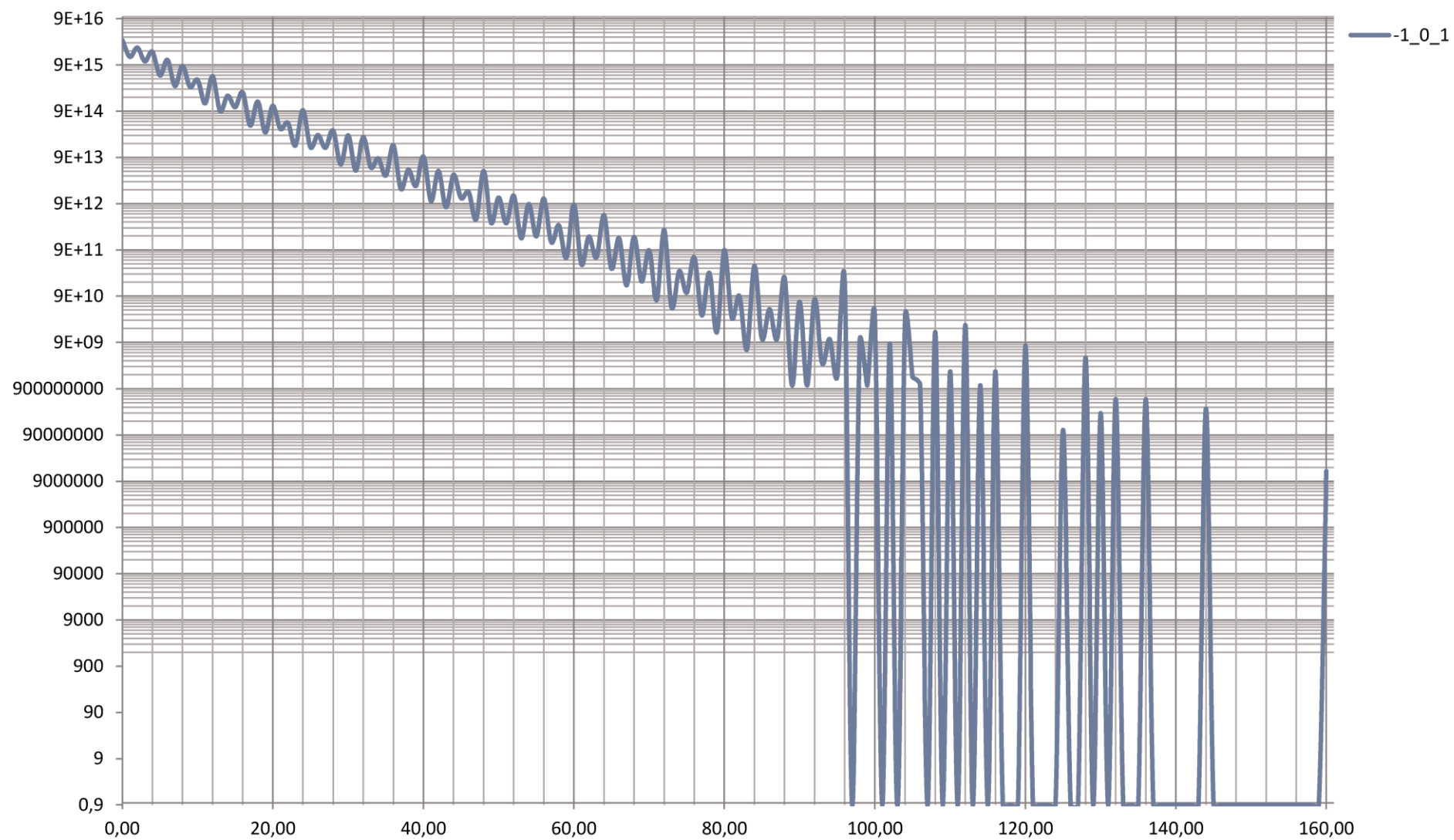


Рисунок 2.10. Зависимость логарифма количества матриц порядка 6 от модуля определителя по данным, представленным в таблице П.10.5

3. Предпосылки для поиска дальнейших распределений модулей определителей для квадратных матриц с элементами из Z_m

Заявление, сделанное в 2019 году на конференции «Марчуковские научные чтения», о том, что у КНР есть (будет) вычислительный комплекс на 10^{19} Флопс (float point per second), звучит ободряюще. Для рассмотренных в книге колец это дает продвижение вперед на несколько порядков распределений. Но при этом могут потребоваться совершенно другие алгоритмы, время работы комплекса должно исчисляться годами, а персонал должен иметь высокую квалификацию, позволяющую обрабатывать данные с объемом, сравнимым с 10^{25} бит, для чего могут потребоваться 128-разрядная архитектура (интерес к высокоразрядным архитектурам просматривается в новейших линейках микропроцессоров [15]) на серверах или рабочих станциях, а также методы проверок проводимых расчетов. Причем проверки должны проводиться на всех этапах работы комплекса: от проверки вычислительной техники на дефекты в расчетах [15] до проверки конечной сборки – полученного результата от всех базисных матриц. Согласно [1] и личным расчетам автора без коррекции ошибок компьютер может выдавать ошибочный результат каждые 10^{15} Флопс при работе арифметико-логического устройства (АЛУ) блока процессора с числами с постоянной относительной точностью (float point) [15]. Подобные ошибки могут также возникать при работе высоконагруженных приложений (постоянная нагрузка на центральный процессор) со временем работы более недели, работающих с целочисленным АЛУ блоком процессора (integer) [15], требующих размер оперативного запоминающего устройства (ОЗУ) более 5 ГБ, что соответствует работе 10^9 Хипс (см. далее) при величине мантиссы несколько сотен знаков. Подробно проблемы, возникающие при работе сложных или требующих большого количества ресурсов операционных систем, рассмотрены в [33]. К ним можно отнести, как по отдельности, так и в целом, синхронизацию ядер и потоков процессоров, коррекцию страниц ОЗУ и их виртуализацию, фрагментацию файловых систем, RAID-массивы и др. В частности, ошибка нахождения несуществующей страницы [33] совершенно по-разному проявляется в старых версиях популярной пользовательской операционной системы (ОС) Windows 10 из-за действия планировщика при виртуализации страниц. Но при работе высоконагруженных, требующих больших объемов ОЗУ приложений такая ошибка может приводить к совершенно

неожиданным результатам в области производительности и энергопотребления ЭВМ. Повышение энергопотребления даже на несколько процентов у миллионов пользователей ЭВМ приводит к значительным растратам энергопотребления, что часто не желательно. Так, для жестких дисков и ОЗУ оно может различаться в десятки раз [33]. При виртуализации страниц жесткий диск активно работает и поэтому греется, но ОС не считает это пользовательским процессом, поэтому в диспетчере задач будет показано, что диск простаивает (ситуация аналогична фоновым обновлению ОС или дефрагментации жесткого диска и др.). Но если электроника или программное обеспечение не достигли требуемого уровня надежности, быстродействия, объема обрабатываемых данных, то эту проблему можно решать дублированием вычислений. В США объем вычислений в 10^{19} Флопс давно превышен (URL: <https://en.m.wikipedia.org/wiki/Cray>), и вычисления необходимо проводить на обоих комплексах – как в КНР, так и здесь, а затем отбросить забракованные данные. Выбрать нужно КНР не только из-за наличия у нее такого комплекса, но и из-за того, что объемы передаваемой информации другим партнерам могут строго контролироваться в этой стране, так как в ней широко используются информационные сети, работающие по протоколу IPv6. Сравните вычисления с проведенными на БАК при поиске гравитационного бозона и подтверждении Стандартной Модели – здесь также работали 2 группы ATLAS и CMS [21] – после проведения непосредственных физических экспериментов на ускорителях элементарных частиц обработка результатов длилась несколько лет и только после этого был вынесен положительный вердикт о существовании гравитационного бозона. Прежде чем проводить подобные огромные вычисления необходимо решить ряд вопросов:

Какого объема и рода (имеется в виду степень контроля физических и коммуникационных параметров окружающей среды, комфорта для квалифицированного персонала) помещения могут быть выделены под вычислительный комплекс?

Каким объемом человеческих ресурсов (и какого уровня) страна или группа союзнических государств могут снабжать вычислительный комплекс?

Какого объема и качества может быть выделено электроэнергии для комплекса?

Каковы объем и качество электроники, которые страна или группа союзнических государств могут выделять комплексу ежегодно?

Какие задачи будет решать комплекс? Какой положительный эффект ожидается от деятельности вычислительного комплекса?

Кроме того, необходимо следить за стабильностью операционных систем и целостностью исходных текстов программ и их скомпилированных результатов [33].

Проблема создания эффективных и стабильных алгоритмов для любых входных данных не менее сложна и серьезна. Например, матрицы высоких порядков бывают плохо обусловленными [38] и 64-разрядная архитектура вычислений может с такой точностью уже не справиться. Даже для матриц порядка 8 с элементами из Z_2 при вычислении детерминанта при поиске ненулевого элемента его нужно обязательно сравнивать не с нулем, как в классическом методе исключения Гаусса, а брать его модуль и сравнивать его с величиной, не меньшей модуля максимальной погрешности, возникающей при вычислениях с помощью Флопс. Результаты вычислений для данных способов отличались более чем в три раза, т. е. вся точность терялась при классическом рассмотрении даже для определителей порядка 10^2 [3, 5].

Расширенная архитектура вычислений может оказаться нужной не только при вычислении матриц – современные средства измерения достигли точности в 18 знаков [24], $2^{64} \approx 10^{19}$, так что в процессе вычислений с помощью Флопс вся эта точность потеряется.

Здесь удобно ввести Хипсы (huge integer per second), которые не будут константами для данной ЭВМ, меняясь в зависимости от изменения величины памяти, отводимой для Huge Integer – числа (L), но будут таковыми для скомпилированного результата данной ЭВМ. Алгоритмы, используемые при работе с такими целыми числами, приведены в [13]. В случае, когда данные объекты не являются целыми, следует применять нотацию, принятую в [35] (мантисса, округление результата, $o(L)$, $O(L)$, где L уже может быть суммарной длиной целой и десятичной части и т. д.), для работы с вещественными числами.

При величине мантиссы хотя бы на уровне 100 знаков потеря точности при вычислении обратной матрицы от неразреженной матрицы, состоящей из элементов порядка 20 десятичных знаков не более десятого порядка, уже не будет. Если матрица разреженная (у нее большое отношение нулевых элементов к ненулевым), мантиссу можно взять значительно меньше, но Флопсы тоже могут дать удовлетворительный результат.

Если, предположим, должны выполняться вычисления с мантиссой в несколько тысяч знаков, то время выполнения в зависимости от алгоритма вырастет в среднем в 10^4 раз (метод исключения Гаусса для матрицы 64-го порядка с элементами из кольца 2^{56}). Требования к целостности исходных текстов, стабильности операционных систем и скомпилированных результатов вырастут в десятки тысяч раз (не случайно компания Microsoft поддерживает целую библиотеку, посвященную возможностям, исследованиям или совместимости с другими программными (аппаратными) продуктами для операционной системы Windows, а разработчики Linux объединились в мегакорпорации Red Hat, Android от Google и др. [33]). Так что комплекс будет обходиться в 10^9 раз дороже. Но если использовать половину знаков от первоначальной мантиссы, он будет дороже уже в 10^6 – 10^7 раз. Так что выбор оптимальной мантиссы должен вестись командой профессионалов, хорошо разбирающихся как в тонкостях математической части, так и в программных и аппаратных особенностях (например, в работе [33] для нужд криптографии предлагается использовать видеокарту, а не центральный процессор). Но все равно при поиске распределений матриц по определителям соотношение времен выполнения операций с использованием Флопс и Хипс можно сравнить с отношением времени, затраченного на поиск всего распределения с помощью Флопс, ко времени, затраченному на поиск с помощью Хипс распределений нескольких базисных матриц, использованных для поиска всего этого распределения.

Некоторые авторы принижают значение вычислений, сделанных с большой точностью, считая, что это чуть ли не набор случайных чисел. В работе «Как не ошибаться. Сила математического мышления» Элленберг Джордан утверждает, что китаец Лу Чао смог выучить наизусть и воспроизвести 67890 цифр числа π , затем автор пишет, что это не имело смысла, так как фактически это случайный набор цифр. Что бы сказали на это авторы книги [18], состоящей из полутора тысяч страниц, которая посвящена языку для работы с точными числами, полученными путем сложных вычислений; или автор первого и второго томов книги [35], где материалы исследований неразрывно связаны с точностью как самих чисел, так и различных функций от них; или производители процессорной техники (Intel, AMD и др.), тратящие миллиарды долларов на разработку всё более быстродействующей и точной техники [15, 22], так как ошибка в инженерных расчетах CAD-программ может привести к неисправимым техногенным катастрофам

(строительство мостов [9, 32], авионика (проблема воздушных маневров в турбулентных средах), энергетика [29], очистка околоземного пространства от мусора для нужд аэрокосмических систем [8]). В случае с космическим мусором, находящимся на значительном расстоянии от поверхности Земли (1000 км и более), нужны особые методы, так как современным средствам противовоздушных РЛС может быть затруднителен их поиск (рабочее расстояние ~500 км). Между тем в ближайшем будущем на высотах ~1000 км будет сосредоточено колоссальное $\sim 10^5$ количество низкоорбитальных спутников, подавляющая часть из которых выйдет из строя через несколько десятков лет после выхода на орбиту. Способ замены мусора на рабочие спутники не дает покоя многим авторам. Так, автором данной работы была выведена формула (вывод совершенно аналогичен выводу формулы для длины свободного пробега идеального газа), согласно которой при не слишком больших концентрациях спутников на низкой орбите каждые Δt секунд будет происходить столкновение спутников. При этом Δt вычисляется по формуле:

$$\Delta t = L^2 / (2^{0.5} V a N), \quad (3.1)$$

где V – скорость спутников; a – линейный размер спутника; L – линейный размер пространства, в котором сосредоточены спутники; N – количество спутников.

Аналогичная формула для Δt в годах имеет следующий вид:

$$\Delta t \approx 961 / N \text{ год}. \quad (3.2)$$

Так что ежегодно придется доставлять сначала сотни, а затем и тысячи новых спутников. Считаем, что при столкновении спутника с паразитным объектом образуются 11 новых паразитных новообразований ($B=96$), имеющих скорость и линейные размеры, сопоставимые с такими же параметрами для начальных спутников. Термин паразитное образование выбран не случайно, так как для популяций многих паразитных бактерий справедлив квадратичный закон [37]. Получим систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = -y^*x/A + C_1 - C_4^*x = f_1(t, y, x); \\ y' = x^*y/B + C_2^*x - C_3^*y = f_2(t, y, x). \end{cases} \quad (3.3)$$

Здесь x – количество спутников на заданной орбите; y – количество крупных паразитных образований, способных уничтожить спутник на той же орбите (в дальнейшем паразиты); A – константа, отвечающая за

ежегодное уничтожение спутников от столкновений с паразитами; B – константа, отвечающая за ежегодное размножение паразитов, в результате их столкновения со спутниками; C_1 – константа, отвечающая за ежегодный прирост спутников на орбите за счет доставок новых с Земли; C_2 – прирост паразитов за счет гибели спутников; C_3 – гибель паразитов из-за их постепенного старения в верхних слоях атмосферы и действия радиации, как со стороны Земли, так и внешнего космоса; C_4 – гибель спутников из-за их постепенного старения в верхних слоях атмосферы и влияния радиации внешнего космоса.

Следуя теории устойчивости А. М. Ляпунова [37], для системы дифференциальных уравнений (3.3) были получены следующие точки равновесия:

$$\begin{cases} x_{12} = [-A*(C_1/B + C_3*C_4) \pm (A^2*(C_1/B - C_3*C_4)^2 + 4*A*C_1*C_2*C_3)^{0.5}] / \\ \quad / (2*(C_2 - A*C_4/B)), \\ y_{12} = [C_1/B - C_3*C_4 \pm ((C_3*C_4 - C_1/B)^2 + 4*C_1*C_2*C_3/A)^{0.5}] / (2*C_3/A) \end{cases} \quad (3.4)$$

и соответствующие им корни характеристического уравнения:

$$\lambda_{12} = (-y/A \pm ((y/A)^2 - 4*(C_2*(y/A - C_4) + x*(y/B - C_3)/A))^{0.5})/2. \quad (3.5)$$

В [37] для устойчивости по А. М. Ляпунову в точке (x_i, y_i) в первом приближении приводятся следующие условия:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_{1i}(x_i, y_i) < 0; \\ \operatorname{Re} \lambda_{2i}(x_i, y_i) < 0. \end{cases}$$

Решения системы (3.3) и соответствующие им параметры равновесия (3.4) и (3.5) исследовались при различных константах и начальных условиях. Для решения системы (3.3) использовалась разностная схема усовершенствованного метода Эйлера 4-го порядка. Моделирование проводилось с использованием как Хипс, так и Флопс. Результаты приведены в приложении 16.

Если с орбиты не убирать отработавшие спутники, на низких орбитах будет образовываться постоянно растущее количество паразитов и придется отложить большинство запусков, пока данные объекты не переработаются естественным путем. Для высоты в 750 км, согласно [8], на «переработку» могут потребоваться долгие годы, и снова полноценно воспользоваться низкими орбитами для нужд Интернета смогут только наши потомки. Менее жесткие требования к уборке отработавших деталей будут при концентрациях $N \sim 10^4$ с привлечением специальной техники. В случае ежедневной очистки необходима доставка всего нескольких десятков новых спутников в год (1 запуск ракеты для современных аэрокосмических систем). Так как

всегда можно выбрать орбиту, на которой в данный момент нет паразитов, то при заселении этой орбиты спутниками константа C_2 является определяющей при начальном росте паразитов. В связи с этим высокий срок службы спутников является важнейшим фактором, определяющим стабильность всей группировки. Для увеличения срока службы спутников можно корректировать их орбиты не при помощи газовых струй, а с помощью магнитных крыльев (рис. 3.1), которые технически более сложны и наличие которых может повысить стоимость спутника.

На рисунке магнитные поля сердечников $\mathbf{B}_{\text{верх}} \uparrow \downarrow \mathbf{B}_{\text{низ}}$ и $\|\boldsymbol{\omega}$ (угловой скорости вращения полупроводниковой пластинки с примесями n - p - n -типа), $|\mathbf{B}_{\text{верх}}| = |\mathbf{B}_{\text{низ}}|$, $\varphi \rightarrow \max$, $\mathbf{F}_{\text{Лоренца низ}} = \mathbf{F}_{\text{Лоренца верх}}$, $|\ell_1| = |\ell_2|$, $|\ell_3| \ll 2a$. Параметры «магнитного крыла» следует выбирать из оптимального решения системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_T \int_{[\ell_3; h]} |\mathbf{J}[\mathbf{dS}; \mathbf{B}]| dt \rightarrow \min; \text{ магнитный поток через область } p\text{-типа, за } T=2\pi/\omega; \\ \int_T \int_{[\ell_1; h], i \in \{1, 2\}} |\mathbf{J}[\mathbf{dS}; \mathbf{B}]| dt \rightarrow \max; \text{ магнитный поток через области } n\text{-типа, за } T=2\pi/\omega; \\ \int_T \int_{[\ell_1; h] \cup -[\ell_3; h], i \in \{1, 2\}} |\mathbf{J}[(\mathbf{dS}; \mathbf{B}); \mathbf{M}]| dt \rightarrow \min; \text{ действие силы Лоренца } \|\mathbf{M}, \text{ за } T=2\pi/\omega; \end{array} \right. \quad (3.6)$$

(толщину полупроводниковой пластины с примесями n - p - n -типа считаем постоянной по всей длине (см. рис. 3.1)).

Магнитное крыло позволяет группировке спутников на орбите синхронно её менять, перемещаясь на более высокую или низкую, скажем, при возникновении на этой орбите паразита или заселения новой орбиты спутниками. Но это возможно сделать, пока не исчерпан рабочий ресурс солнечных батарей и внутренних источников питания, которые при использовании магнитного крыла и определяют время жизни группировки.

Другой подход к повышению стабильности группировки низкоорбитальных спутников заключается в периодическом уничтожении паразитов (повышение константы C_3). Некоторые авторы считают, что для очистки околоземного пространства эффективно использовать пучок нейтральных частиц, разогнанных до околосветовых скоростей, но более дешевым средством для низкоорбитального мусора может оказаться пучок узконаправленного высококогерентного электромагнитного излучения с энергией на порядок больше, чем указано в [8]. Трудность состоит лишь в наведении этого пучка на отработавшие свой рабочий ресурс спутники и размещении выжигателей в высокогорных районах.

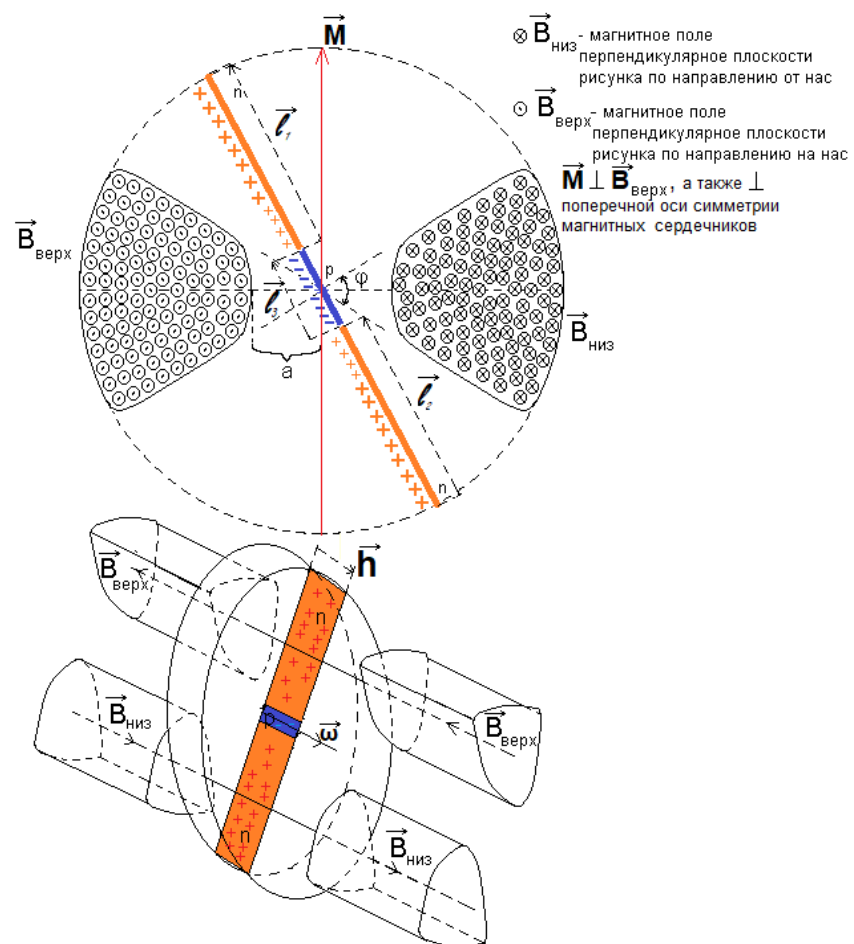
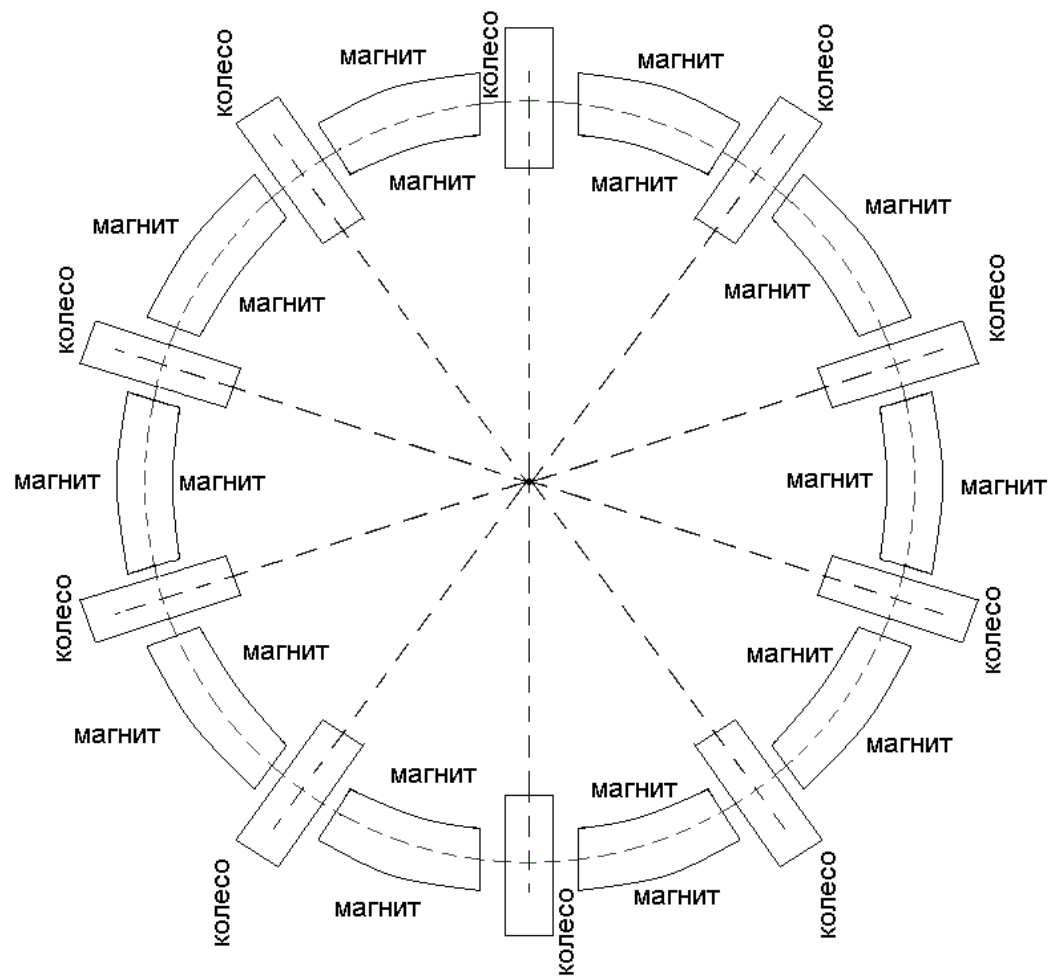


Рис. 3.1. Иллюстрация идеи «магнитного крыла»

Так, Э. Таненбаум считает, что эффективное использование низкоорбитальных спутников может заменить в ряде районов Земли кабельные линии связи, что невероятно удешевит и сделает еще более широкодоступным высокоскоростной Интернет.

Лидером по количеству потерь от вычислительных ошибок остается финансовый блок. Мировые финансовые кризисы были вызваны неправильными прогнозами развития мировой экономики. Виной было не только стремление ряда корпораций к личной выгоде, но и чисто вычислительные ошибки, вызванные недостатком анализа работы алгоритмов на конкретных вычислительных машинах, которые следовало бы изначально проверять средствами расширенной архитектуры вычислений. Поскольку данные проверки невероятно дороги как в плане времени, так и в плане вычислений, то многотриллиардные потери (банковский, налоговый сектор и др.) будут периодически повторяться. Многие задачи прогнозирования рынков сводятся к задачам экстраполяции и оптимального управления, простейшая из которых – линейное программирование – рассмотрена, например, в [10] и [16].

Сам Лу Чао наверняка тоже задумывался об этом, когда готовился к своему выступлению, для представления числа π с точностью 67890 знаков – ведь «выучить наизусть» переводится на английский как *learn by heart* – «выучить сердцем». Подобные мысли – «слишком много теории цифр» и «недостаточно статистики» – высказал на форуме «ФизтехБио-2014» в интервью с журналом «Кот Шрёдингера» нобелевский лауреат по химии (компьютерное моделирование) господин Майкл Левитт в отношении школьного образования. Необходимо понимать, что школьное образование является фундаментом для дальнейшего изучения естественных наук, и без арифметики о статистике не может быть и речи. Теория вероятностей и случайные процессы можно изучать в вузах, а в школе дополнительно изучать курсы, которые понадобятся для дальнейшего образования (ЗФТШ, журнал «КВАНТ», «выездная олимпиада ФизТеха» и др.). О китайцах, мировых лидерах по количеству ВВП и объемам научных работ Левитт высказывался с большим почтением. Однако другой Нобелевский лауреат – господин Мартин Велтман получил свою премию именно за разработку программного обеспечения для работы с числами произвольной точности [27]. Затем его работы частично были перенесены в пакеты Maxima, SciLab и др. [27]. А за эксперименты, выполненные с точностью до 14-го знака, Джонн Холл и Теодор Хелш

также получили Нобелевскую премию [24]. В [24] дается прогноз о том, что точность физических экспериментов будет расти и после 18 знака, а это делает особенно перспективными алгоритмы для работы с Хипс – разложения функции в степенные или тригонометрические ряды Маклорена, представление функции в виде цепной дроби, вычисления первообразной по параболической или формуле трапеций и т. д. [16, 35]. Численные решения плохо обусловленных систем дифференциальных уравнений высоких порядков, особенно жестких, с помощью методов Эйлера и его модификаций или Ньютона [16, 28, 37] также должны проводиться с использованием Хипс.

Введенный в [37] алгоритм нахождения логарифма натурального числа методом факторизации предполагает, что разложения натурального числа на его простые множители известны. По теореме Мертенса [13], для натурального числа, не превышающего 10^9 , имеется в среднем 4 различных простых делителя, для 10^{18} – 4, 10^{36} – 5, 10^{72} – 6 и т. д. Также, учитывается, что в соответствии с распределением простых чисел [13] их количество в интервале от $(0; x) \sim x/\ln(x)$ при x , стремящемся к бесконечности. В исследовании этого постулата, а затем строгого закона принимали участие великие ученые с мировым именем. Так, в 1808 году А. М. Лежандром была опубликована формула, выражающая этот закон, в середине XIX века он был частично доказан П. Л. Чёбышевым, окончательное доказательство было дано в конце XIX века независимо Ш. - Ж. Валле-Пуссенном и Ж. Адамаром в 1896 году, в их доказательстве присутствовали многие идеи, предложенные П. Л. Чёбышевым и развитые в работах Г. Римана [13]. Актуально подобное тождество и в криптографии – часто возникает вопрос: сколько простых чисел в последовательности из случайно выбранных целых чисел, принадлежащих кольцу Z_m ? Ответив на него, можно примерно оценить, например, порядок Хипс для вычисления детерминанта матрицы с элементами из кольца Z_m . Также в соответствии с данными законами примем, что в случае числа из 144 цифр нам с большой вероятностью придется искать делитель из $144/7=21$ цифры, в соответствии с теоремой Мертенса, или даже из 70 цифр, если мы дополнительно учтем, что основная масса простых чисел, потенциально могущая быть делителем этого числа, лежит вблизи $10^{144/2}$. В [13] были приведены данные о том, что для факторизации 129-разрядного (424 бита) RSA-числа потребовались 8 месяцев и работа 1600 компьютеров по всему миру. С уменьшением разрядности числа сложность факторизации

уменьшается, примерно как экспонента, а проверка числа на простоту длится еще быстрее [13], но главная проблема остается в составлении таблицы логарифмов. Так, для чисел меньше 72 разрядов она должна иметь около $\pi(x) \approx x/\ln(x) \approx 10^{72}/166$ значений. Но если для чисел, близких к 144-разрядности, данный метод с большой степенью вероятности неприменим, то для чисел в 20 разрядов и меньше он предпочтительнее при наличии таблицы из $\approx 2 \cdot 10^{18}$ логарифмов, заданных с точностью в 144 знака и более, чем методы, рассмотренные ниже.

Чтобы обойти требование факторизации при логарифмировании вещественного числа, его удобно представить в экспоненциальном виде: $|r| = |(A+1) \cdot 10^q|$, где A – вещественное число, меньшее 9, но не меньшее 0, а q – целое. Тогда $\ln r = \ln(1+A) + q \cdot \ln 10$. Значение $\ln 10$ легко вычислить по методу факторизации, если $A = 0$, то $q \cdot \ln 10$ и есть ответ. Далее для вычисления $\ln(1+A)$ удобно воспользоваться формулой:

$$\ln |A+1| = \int_0^A (1/(x+1)) dx. \quad (3.7)$$

Для вычисления этого интеграла с требуемой точностью можно воспользоваться формулой парабол. Следуя рассуждениям Ш.-Ж. де ла Валле-Пуссена из его книги «Курс анализа бесконечно малых» под редакцией вице-президента РАН В. А. Стеклова (3-е издание, том 1) и профессора Г. М. Фихтенгольца (2-е издание, том 2), для вывода формулы остатка в случае параболического приближения получаем, что она достигает величины не более:

$$R_{\text{парабол}} = f^{(4)}(\xi) \cdot (A-0)^5 / (180 \cdot (2 \cdot n)^4) \leq 2 \cdot A^5 / [15 \cdot (2 \cdot n)^4], \quad \xi \in [0; A] \quad (3.8)$$

Тогда для достижения точности в TOL десятичных знаков потребуется следующее количество разбиений:

$$n > 0,5 \cdot 2^{0,25} \cdot A^{5/4} / ([15 \cdot \text{TOL}])^{0,25}.$$

Для достижения $\text{TOL} = 10^{(-144)}$ нужно не менее $n = 0,3 \cdot (A)^{5/4} \cdot 10^{36}$ разбиений. Для $\text{TOL} = 10^{(-72)}$ нужно не менее $n = 0,3 \cdot (A)^{5/4} \cdot 10^{18}$ разбиений. Для $\text{TOL} = 10^{(-36)}$ нужно не менее $n = 0,3 \cdot (A)^{5/4} \cdot 10^9$ разбиений. Для $\text{TOL} = 10^{(-18)}$ нужно не менее $n = 0,3 \cdot (A)^{5/4} \cdot 10^{4,5}$ разбиений. Для $\text{TOL} = 10^{(-9)}$ нужно не менее $n = 0,3 \cdot (A)^{5/4} \cdot 10^{2,25}$ разбиений.

В случае неудачной факторизации метод парабол хорошо работает для не очень малых TOL. Но уже для $\text{TOL} < 10^{(-36)}$ он неработоспособен, если у вас нет миллиардов мощных процессоров,

способных работать параллельно, и персонала для их обслуживания. Так что для повышения точности удобно привести еще рассуждения из того же курса Валле-Пуссена, где доказывается справедливость формулы Эйлера и Маклорена для приближенного вычисления интеграла от функции $f(x)$, которая может быть разложена в свой степенной ряд до 2^*k , $k \in \mathbb{N}$ члена включительно (остаточный член ряда стремится к 0, и функция имеет непрерывные производные до 2^*k порядка включительно на интервале $(a; b)$):

$$F(x, h) = \int_a^b f(x) dx = h^*(f(a)/2 + f(a+h) + \dots + f(a+(n-1)*h) + f(b)/2) - \\ - B_2^*h^{2^*}(f^{(1)}(b) - f^{(1)}(a))/2! - B_4^*h^{4^*}(f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a))/4! - \dots \\ - B_{(2^*k-2)}^*h^{(2^*k-2)^*}(f^{(2^*k-3)}(b) - f^{(2^*k-3)}(a))/(2^*k-2)! + R; \quad (3.9)$$

$$R = -n^*f^{(2^*k)}(a+\theta^*b)*B_{2^*k}^*h^{2^*k+1}/(2^*k)!, \theta \in [0; 1]. \quad (3.10)$$

Здесь B_{2^*i} – числа Бернулли, $i \in \{1, \dots, k\}$ (см. курс Валле-Пуссена), $h = (b-a)/n$, где n – число разбиений интервала $(a; b)$.

В отличие от формулы парабол формула (3.9), кроме непрерывности производных, требует также разложения в степенной ряд, что крайне ограничивает ее применимость, так как дополнительно мы должны знать численное выражение для производных $f^{(2^*i+1)}(x)$, $i \in \{1, \dots, k-2\}$, не только максимальное по модулю выражение для четвертой и 2^*k -й производных [сравните формулы (3.10) и (3.8)]. А для вычисления чисел Бернулли высоких порядков может потребоваться символьный процессор.

Но в случае логарифмирования мы знаем численное выражение для всех производных подынтегральной функции и для сходимости интеграла в степенной ряд будем искать выражение $\ln((1+A)/5)$, из которого можно найти (3.7) путем добавления к нему $\ln 5$ и которое находится по формуле:

$$\ln |(A+1)/5| = \int_0^{-0.8+A/5} (1/(x+1)) dx. \quad (3.11)$$

При использовании Хипс достаточного порядка мы можем вычислять логарифм с произвольной точностью:

$TOL = n^*f^{(2^*k)}(a+\theta^*b)*B_{2^*k}^*h^{2^*k+1}/(2^*k)! < B_{2^*k}^*|-0.8+A/5|^{2^*k+1}/n^{2^*k}$, $\theta \in (0; 1)$, откуда

$$n > (B_{2^*k}^*|-0.8+A/5|^{2^*k+1}/TOL)^{1/(2^*k)}.$$

Для достижения $TOL = 10^{(-144)}$ нужно не менее $n = B_{2^*k}^{1/(2^*k)} * |-0.8+A/5|^{(2^*k+1)/(2^*k)} * 10^{(72/k)}$ разбиений. И уже при $k = 18$ нужно всего $n = B_{36}^{1/36} * |-0.8+A/5|^{37/36} * 10^4$ разбиений. Для $TOL = 10^{(-72)}$ нужно не менее $n = B_{2^*k}^{1/(2^*k)} * |-0.8+A/5|^{(2^*k+1)/(2^*k)} * 10^{(36/k)}$ разбиений. И уже при $k = 18$ нужно всего $n = B_{36}^{1/36} * |-0.8+A/5|^{37/36} * 10^2$ разбиений. Для $TOL = 10^{(-36)}$ нужно не менее $n = B_{2^*k}^{1/(2^*k)} * |-0.8+A/5|^{(2^*k+1)/(2^*k)} * 10^{(18/k)}$ разбиений. И уже при $k = 9$ нужно всего $n = B_{18}^{1/18} * |-0.8+A/5|^{19/18} * 10^4$ разбиений. Для $TOL = 10^{(-18)}$ нужно не менее $n = B_{2^*k}^{1/(2^*k)} * |-0.8+A/5|^{(2^*k+1)/(2^*k)} * 10^{(9/k)}$ разбиений. И уже при $k = 9$ нужно всего $n = B_{18}^{1/18} * |-0.8+A/5|^{19/18} * 10^2$ разбиений. Для $TOL = 10^{(-9)}$ нужно не менее $n = B_{2^*k}^{1/(2^*k)} * |-0.8+A/5|^{(2^*k+1)/(2^*k)} * 10^{(18/k)}$ разбиений. И уже при $k = 9$ нужно всего $n = B_{18}^{1/18} * |-0.8+A/5|^{19/18} * 10^1$ разбиений.

Требование наличия известных численных значений производных подынтегральной функции любого порядка, а не только их оценок по модулю часто может служить непреодолимым препятствием для вычисления ее интеграла с произвольной точностью. Таковыми, в частности, являются функции: $1/(1+x^2)$ – для вычисления арктангенса; $(1-x^2)^{-0.5}$ – для вычисления арксинуса. Ряд для арктангенса сходится для всех x из $[-1; 1]$ [35], по известной формуле $\sin x = 2 * \operatorname{tg}(x/2) / (1 + \operatorname{tg}^2(x/2))$ найдем $\sin$ любого главного значения, а по формуле $\operatorname{tg} x = (1 - \operatorname{tg}^2(x/2)) / (1 + \operatorname{tg}^2(x/2))$ найдем tg любого главного значения. Для функции $f(x) = \operatorname{arctg}(x) \rightarrow |f^{(s)}(x)| \leq (s-1)!$, а используя подстановки Эйлера, интеграл от $(1-x^2)^{-0.5}$ приводится к интегралу $1/(1+t^2)$ [35]. Вычисление производных высоких порядков этих функций требует крайне высокий порядок Хипс, и поиск соответствующего символьного выражения также затруднителен.

Так как формулу парабол крайне трудно использовать для $TOL < 10^{(-18)}$, можно далее увеличивать порядок аппроксимирующей прямой. Так, при интерполяции подынтегральной функции полиномами P_{2^*p} , $p \in N_0$ для ошибки интегрирования функций $1/(1+x^2)$ и $(1-x^2)^{-0.5}$ автором была получена оценка $|R_{2^*p}| < C * n^{-2^*(p+1)}$, где n – число разбиений; C – некоторая константа для p , не больших 6. Остальные p не рассматривались из-за отсутствия у автора подходящего символьного процессора для нахождения подобных оценок. Чтобы доказать это сделаем ряд предварительных замечаний. Пусть в плоскости xOy на отрезке от $[-h; h]$ задана функция $f(x)$, имеющая в каждой точке этого интервала производные до $(s+1)$ -го порядка включительно (рис. 3.2). Возьмем на оси Ox 2^*p равноотстоящих точек: $h * (k - 2^{(p-1)}) / 2^{(p-1)}$, $k \in \{0, 1, \dots, -1 + 2^*p, 2^*p\}$. Далее проведем полином

степени $2^p - P_{2^p}$, совпадающий с $f(x)$ в каждой из этих точек. Коэффициенты этого полинома можно найти из системы $1+2^p$ линейных уравнений с $1+2^p$ неизвестных:

$$P_{2^p}(h^*(k - 2^{(p-1)}))/2^{(p-1)} = f(h^*(k - 2^{(p-1)}))/2^{(p-1)}, \quad (3.12)$$

где $k \in \{0, 1, \dots, -1+2^p, 2^p\}$.

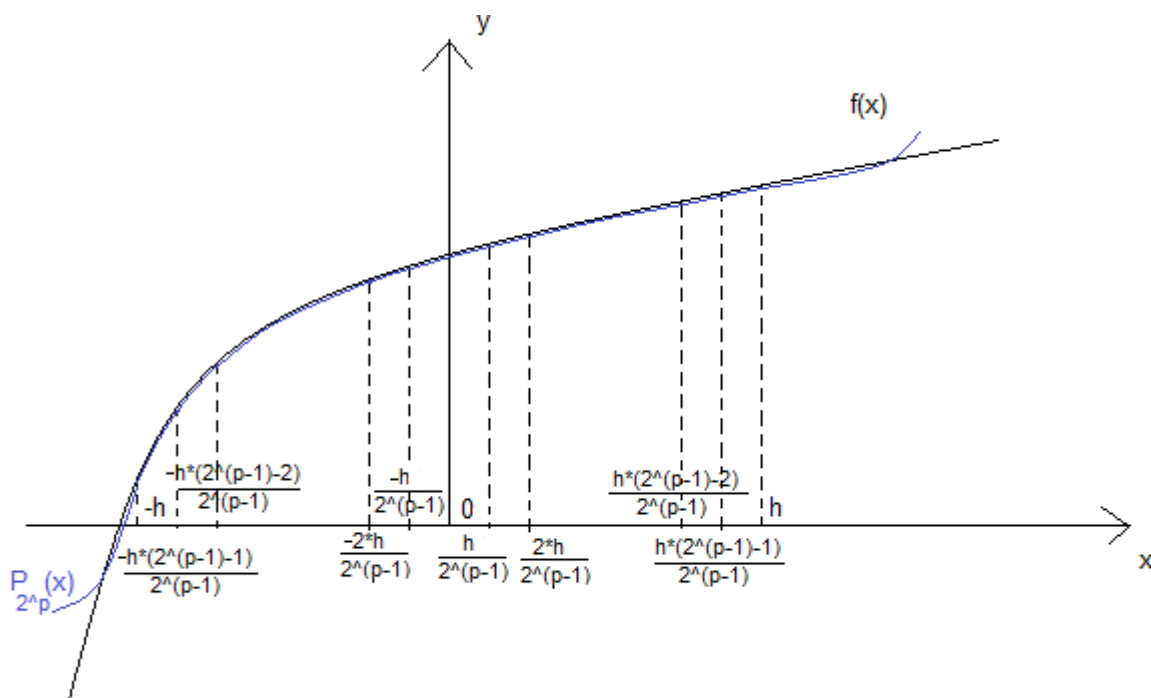


Рис. 3.2. Приближение функции $f(x)$ полиномом P_{2^p} , проходящим через ее $(1+2^p)$ отчета

Так как определитель системы есть определитель матрицы Вандермонда и отличен от 0, то коэффициенты данного полинома определяются единственным образом [10]. Можно непосредственно решать полученную систему и определить коэффициенты, но вручную это делать технически непросто и, возможно, для больших степеней придется использовать символьный процессор [16, 27].

Для вычисления различных функций, заданных интегральной зависимостью от $f(x)$:

$$F(x, h) = \int_{x-h}^{x+h} f(\theta) d\theta \quad (3.13)$$

и не выражающихся в удобной для вычислений форме, будем представлять $f(x)$ ее полиномом P_{2^p} и, перенеся начало оси Ox в т. $x_0=x$, оценивать его приближенное значение выражением:

$$F(h) \approx \int_{-h}^h P_{2^p}(\lambda) d\lambda = I_{2^p[0; 2^p]}(-h; h). \quad (3.14)$$

У функции I_{2^p} в квадратных скобках будем указывать интервал, на котором брались отчеты $f(x)$ для построения полинома P_{2^p} , а в круглых – интервал, на котором велось интегрирование этого полинома. Если данные интервалы не совпадают, то интегрирование проводилось в системе координат, отличной от той, в которой велось построение полинома (об этом речь пойдет далее).

Рассмотрим конкретный пример и вычислим приближение функции $f(x)$, заданное полиномом четвертой степени, а также сам этот полином.

Пусть кривая, заданная полиномом P_{2^2} четвертой степени:

$$y(x) = P_{2^2}(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e,$$

совпадает с функцией $f(x)$ в пяти точках $(x_0; y_0)$, $(x_{1/4}; y_{1/4})$, $(x_{2/4}; y_{2/4})$, $(x_{3/4}; y_{3/4})$, $(x_{4/4}; y_{4/4})$ (рис. 3.3).

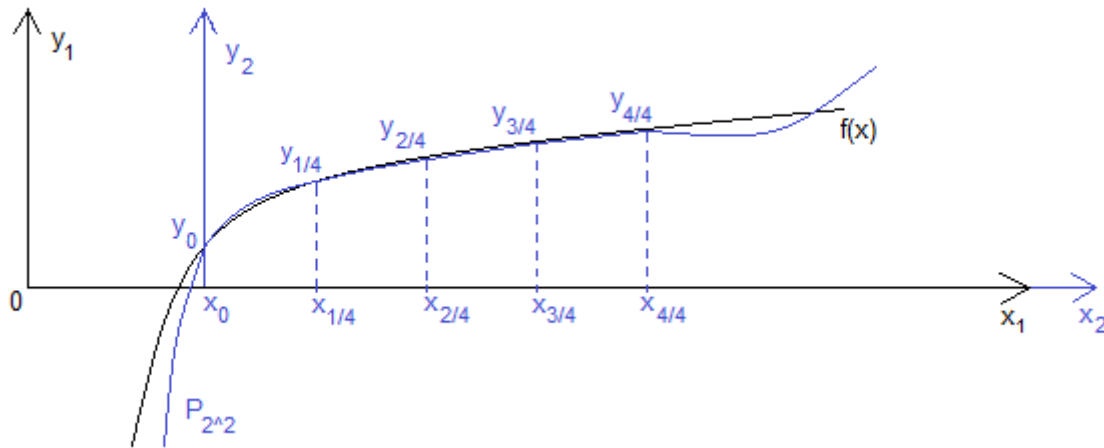


Рис. 3.3. Приближение функции $f(x)$ полиномом P_{2^2} , проходящим через ее $(1+2^2)$ отчета

Составляя в каждой из точек уравнение:

$$f(x_i) = P_{2^2}(x_i), \quad i = \{1, \dots, 5\},$$

получим систему из пяти уравнений с пятью неизвестными, определитель которой есть определитель Вандермонда и отличен от 0, следовательно, система имеет нетривиальное единственное решение [10], т. е. кривая $y(x) = P_{2^2}(x)$ задается единственным образом:

$$\begin{cases} y_0 = a \cdot x_0^4 + b \cdot x_0^3 + c \cdot x_0^2 + d \cdot x_0 + e, \\ y_{1/4} = a \cdot x_{1/4}^4 + b \cdot x_{1/4}^3 + c \cdot x_{1/4}^2 + d \cdot x_{1/4} + e, \\ y_{2/4} = a \cdot x_{2/4}^4 + b \cdot x_{2/4}^3 + c \cdot x_{2/4}^2 + d \cdot x_{2/4} + e, \\ y_{3/4} = a \cdot x_{3/4}^4 + b \cdot x_{3/4}^3 + c \cdot x_{3/4}^2 + d \cdot x_{3/4} + e, \\ y_{4/4} = a \cdot x_1^4 + b \cdot x_1^3 + c \cdot x_1^2 + d \cdot x_1 + e. \end{cases} \quad (3.15)$$

Будем считать, не нарушая общности, что начало координат проходит через точку x_0 и что каждая точка $x_0, x_{1/4}, x_{2/4}, x_{3/4}, x_{4/4}$ равноотстоит от предыдущей на расстоянии h (см. рис. 3.2). Тогда система (3.15) переписется в виде:

$$\begin{cases} y_0 = e, \\ y_{1/4} = a*h^4 + b*h^3 + c*h^2 + d*h + e, \\ y_{2/4} = 16*a*h^4 + 8*b*h^3 + 4*c*h^2 + 2*d*h + e, \\ y_{3/4} = 81*a*h^4 + 27*b*h^3 + 9*c*h^2 + 3*d*h + e, \\ y_{4/4} = 256*a*h^4 + 64*b*h^3 + 16*c*h^2 + 4*d*h + e. \end{cases} \quad (3.16)$$

Решая систему (3.6), определим коэффициенты полинома $P_{2^{\wedge}2}$:

$$\begin{cases} a = (y_{4/4} - 4*y_{1/4} + 6*y_{2/4} - 4*y_{3/4} + y_0)/(24*h^4), \\ b = (-3*y_{4/4} + 14*y_{3/4} - 24*y_{2/4} + 18*y_{1/4} - 5*y_0)/(12*h^3), \\ c = (11*y_{4/4} - 56*y_{3/4} + 114*y_{2/4} - 104*y_{1/4} + 35*y_0)/(24*h^2), \\ d = (-6*y_{4/4} + 32*y_{3/4} - 72*y_{2/4} + 96*y_{1/4} - 50*y_0)/(24*h), \\ e = y_0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Перейдем к вычислению $I_{2^{\wedge}p}(0; 4*h)$ $p = 2$ из (3.14). Для введения обозначений в дальнейшем заметим, что при перенесении начала координат вдоль оси Ox на $2*h$ можно прийти к следующему равенству:

$$I_{2^{\wedge}2[0; 4*h]}(0; 4*h) = \int_0^{4*h} P_{2^{\wedge}2}(\theta) d\theta \quad \lambda = \theta + 2*h \quad \int_{-2*h}^{2*h} P_{2^{\wedge}2}(\lambda) d\lambda = I_{2^{\wedge}2[0; 4*h]}(-2*h; 2*h).$$

Также уменьшая масштаб по оси Ox в два раза, снова придем к равенству:

$$I_{2^{\wedge}2[0; 4*h]}(-2*h; 2*h) = \int_{-2*h}^{2*h} P_{2^{\wedge}2}(\lambda) d\lambda \quad \sigma = 0.5*\lambda \quad \int_{-h}^h P_{2^{\wedge}2}(\sigma) d\sigma = 2*I_{2^{\wedge}2[0; 2*h]}(-h; h).$$

Так, в дальнейшем мы будем работать с одними и теми же полиномами, но в разных системах координат.

Подставляя выражение для полинома $P_{2^{\wedge}2}$ с его коэффициентами из (3.17) в (3.14), придем к уравнению:

$$\begin{aligned} I_{2^{\wedge}2[0; 2*h]}(-h; h) &= 0.5*I_{2^{\wedge}2[0; 4*h]}(0; 4*h) = 0.5*\int_0^{4*h} P_{2^{\wedge}2}(\theta) d\theta = \\ &= 512*a*h^5/5 + 32*b*h^4 + 32*c*h^3/3 + 4*d*h^2 + 2*e*h = \\ &= h*(7*y_{4/4} + 32*y_{3/4} + 12*y_{2/4} + 32*y_{1/4} + 7*y_0)/45. \end{aligned}$$

Далее разделим интервал $(0; 4*h)$ на n отрезков одинаковой длины и на каждом из них построим полиномы $P_{2^{\wedge}2}$, заданные отсчетами $f(x)$. Тогда найдем интеграл $F(x)$ по приближенной формуле:

$$\begin{aligned} F(x, 2*h) &= \int_{x-2*h}^{x+2*h} f(\theta) d\theta \approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{i*4*h/n}^{(i+1)*4*h/n} (P_{2^{\wedge}2})_i(\lambda) d\lambda = (2*h/45)*(7*(y_0 + y_{4*n/4}) + \\ &+ 14*\sum_{i=2}^n y_{i-1/4} + 32*\sum_{i=1}^n y_{i-1/4} + 32*\sum_{i=1}^n y_{i-3/4} + 12*\sum_{i=1}^n y_{i-1/2}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

В [16] представлена итерационная формула, по которой задается данный интеграл через интеграл от полиномов на степень в два раза меньше:

$$I_{2^p[0; 2^*h]}(-h; h) = ((4^p)^*(I_{2^{(p-1)}[0; h]}(-h; 0) + I_{2^{(p-1)}[h; 2^*h]}(0; h)) - I_{2^{(p-1)}[0; 2^*h]}(-h; h))/(-1 + 4^p). \quad (3.19)$$

Введем функцию остатка – отличие истинного значения интеграла функции $f(x)$ от его приближения, заданного интегралом от полинома от отчетов функции $f(x)$ (начало координат перенесено в т. $x_0 = x$):

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= \int_{x-h}^{x+h} f(\theta) d\theta - I_{2^1[0; 2^*h]}(x-h; x+h) = \\ &= F(x+h) - F(x-h) - h^*(f(x+h) + f(x-h) + 4*f(x))/3. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Далее продифференцируем по h функцию $\varphi(h)$ и получим уравнение:

$$\varphi'(h) = (f(x+h) + f(x-h))^2/3 - 4*f(x)/3 - h*(f'(x+h) - f'(x-h))/3. \quad (3.21)$$

Затем отступим от оригинала и будем искать не следующие производные от $\varphi'(h)$, а разложим функцию в степенной ряд по степеням h до $s = 6$ порядка включительно с остаточным членом в форме Лагранжа [35]:

$$\begin{aligned} \varphi'(h) &= (f(x) + f^{(1)}(x)*h/1! + f^{(2)}(x)*h^2/2! + f^{(3)}(x)*h^3/3! + f^{(4)}(x)*h^4/4! + \\ &+ f^{(5)}(x)*h^5/5! + f^{(6)}(\xi_1)*h^6/6! + f(x) - f^{(1)}(x)*h/1! + f^{(2)}(x)*h^2/2! - f^{(3)}(x)*h^3/3! + \\ &+ f^{(4)}(x)*h^4/4! - f^{(5)}(x)*h^5/5! + f^{(6)}(\xi_2)*h^6/6!)*2/3 - 4*f(x)/3 - h*(f^{(1)}(x) + \\ &+ f^{(2)}(x)*h/1! + f^{(3)}(x)*h^2/2! + f^{(4)}(x)*h^3/3! + f^{(5)}(x)*h^4/4! + f^{(6)}(\xi_3)*h^5/5! - \\ &- (f^{(1)}(x) - f^{(2)}(x)*h/1! + f^{(3)}(x)*h^2/2! - f^{(4)}(x)*h^3/3! + f^{(5)}(x)*h^4/4! - \\ &- f^{(6)}(\xi_4)*h^5/5!))/3 = \\ &= -4*f^{(4)}(x)*h^4/(3*4!) + ((f^{(6)}(\xi_1) + f^{(6)}(\xi_2))/3 - (f^{(6)}(\xi_3) + f^{(6)}(\xi_4)))*2*h^6/6! = \\ &= -4*f^{(4)}(x)*h^4/(3*4!) + (f^{(6)}(\eta_1)/3 - f^{(6)}(\eta_2))*4*h^6/6!, \end{aligned}$$

где $\eta_2, \eta_1 \in [-h; h]$ и последнее равенство получается при применении теоремы о промежуточных значениях (Больцано – Коши) [35].

Далее для сходимости степенного ряда будем исследовать выражение $\arctg(x)$ в точках сходимости соответствующего степенного ряда Маклорена, которое получается из равенства:

$$\arctg(x) = \int_0^x (1/(t^2+1)) dt, \quad x \in [-1; 1] \quad (3.22)$$

и приводится к виду:

$$\operatorname{arctg}(x) = \int_{-x/2}^{x/2} (1/((t+x/2)^2+1)) dt = \int_{-x/2}^{x/2} f(t) dt, \quad x \in [-1; 1]. \quad (3.23)$$

Тогда $f^{(4)}(t) \leq 3!$ и $f^{(6)}(t) \leq 5!$.

Следовательно, порядок малости на этом промежутке для указанной выше функции целиком определяется h и s . Так, при числе разбиений больше 1000: $|4*f^{(4)}(x)*h^4/(3*4!)|$ больше $|f^{(6)}(\eta_2)*4*h^6/6!|$ более чем в 375000 раз и данным членом можно пренебречь, но если разбиение только одно, то есть один полином аппроксимирует всю функцию на данном интервале, то второй член сравним с первым и им уже нельзя пренебречь. Данный метод применим и для полиномов высших порядков – всего были рассмотрены полиномы до $p = 6$ включительно, где доказательство, предложенное Валле-Пуссенном для остатка параболической формы, становится неприменимым, хотя второй член при некотором изменении первого отсутствует. Но следует учесть, что промежуток интегрирования функции $f(x)$ должен входить в круг сходимости её степенного ряда.

Далее, считая число разбиений n интервала, вложенного в $[-1; 1]$, достаточным (100 и больше), интегрируем $\varphi'(h)$ и учитываем, что $\varphi(0) = 0$, в результате получаем для остатка на интервале от $(0; h)$ формулу:

$$R_{2^{n-1}} < h^5 \max_{\xi \in (0; h)} (f^{(4)}(\xi)) / (180 * (2^n)^4). \quad (3.24)$$

Рассмотрим следующий интеграл от полинома $P_{2^{n-2}}$, построенного по отчетам функции $f(x)$:

$$I_{2^{n-2}[0; 2^*h]}(x-h; x+h) = h*(7*f(x-h) + 32*f(x-h/2) + 12*f(x) + 32*f(x+h/2) + 7*f(x+h))/45.$$

Функция остатка определится выражением:

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= \int_{x-h}^{x+h} f(\theta) d\theta - I_{2^{n-2}[0; 2^*h]}(x-h; x+h) = \\ &= F(x+h) - F(x-h) - h*(7*f(x-h) + 32*f(x-h/2) + 12*f(x) + \\ &\quad + 32*f(x+h/2) + 7*f(x+h))/45. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Снова дифференцируем функцию $\varphi(h)$ по h и приводим подобные:

$$\begin{aligned} \varphi'(h) &= (f(x+h)+f(x-h)*38 - (32*f(x-h/2) + 12*f(x) + 32*f(x+h/2)) - \\ &\quad - h*(-7*f^{(1)}(x-h) - 16*f^{(1)}(x-h/2) + 16*f^{(1)}(x+h/2) + 7*f^{(1)}(x+h)))/45. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Затем раскладываем $\varphi'(h)$ в степенной ряд по h до $s = 8$ с остаточным членом в форме Лагранжа и после приведения подобных и применения теоремы Больцано – Коши получаем:

$$\begin{aligned}\varphi'(h) &= -f^{(6)}(x) \cdot h^6/2160 + ((f^{(8)}(\xi_1) + f^{(8)}(\xi_2)) \cdot 38 - 32 \cdot (f^{(8)}(\xi_3) + f^{(8)}(\xi_4))/2^8 - \\ &\quad - 56 \cdot (f^{(8)}(\xi_5) + f^{(8)}(\xi_6)) - 128 \cdot (f^{(8)}(\xi_7) + f^{(8)}(\xi_8))/2^7) \cdot h^8/(45 \cdot 8!) = \\ &= -f^{(6)}(x) \cdot h^6/2160 + (f^{(8)}(\eta_1) \cdot 38 - f^{(8)}(\eta_2)/2^3 - 56 \cdot f^{(8)}(\eta_3) - \\ &\quad - f^{(8)}(\eta_4)) \cdot 2 \cdot h^8/(45 \cdot 8!),\end{aligned}$$

где $\eta_3, \eta_1 \in [-h; h]$; $\eta_4, \eta_2 \in [-h/2; h/2]$.

Далее для сходимости степенного ряда будем исследовать выражение $\arctg(x)$ в (3.23) в точках сходимости соответствующего степенного ряда Маклорена, тогда $f^{(6)}(t) \leq 5!$ и $f^{(8)}(t) \leq 7!$ Снова получаем, что порядок малости на этом промежутке для указанной выше функции целиком определяется h и s . Так, при числе разбиений больше 1000: $|f^{(6)}(x) \cdot h^6/2160|$ больше $|f^{(8)}(\eta_2)/2^3 + 56 \cdot f^{(8)}(\eta_3) + f^{(8)}(\eta_4)) \cdot 2 \cdot h^8/(45 \cdot 8!)|$ более чем в 133000 раз и данным членом можно пренебречь, но если разбиений меньше пятнадцати, то есть не более 15 полиномов аппроксимирует всю функцию на данном интервале, то второй член сравним с первым и им уже нельзя пренебречь.

Далее, считая число разбиений n интервала, вложенного в $[-1; 1]$, достаточным (100 и больше), интегрируем $\varphi'(h)$ и учитываем, что $\varphi(0) = 0$, в результате получаем для остатка на интервале от $(0; h)$ формулу:

$$R_{2^{\wedge}2} < h^7 \cdot \max_{\xi \in [0; h]} (f^{(6)}(\xi)) / (30240 \cdot (2^n)^6) \quad (3.27)$$

Перейдем к следующему интегралу от полинома $P_{2^{\wedge}3}$, построенного по отчетам функции $f(x)$:

$$\begin{aligned}l_{2^{\wedge}3[0; 2^{\wedge}h]}(x-h; x+h) &= h \cdot (217 \cdot f(x-h) + 1024 \cdot f(x-3 \cdot h/4) + 352 \cdot f(x-h/2) + \\ &\quad + 1024 \cdot f(x-h/4) + 436 \cdot f(x) + 1024 \cdot f(x+h/4) + 352 \cdot f(x+h/2) + \\ &\quad + 1024 \cdot f(x+3 \cdot h/4) + 217 \cdot f(x+h)) / 2835.\end{aligned}$$

Функция остатка определится выражением:

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= \int_{x-h}^{x+h} f(\theta) d\theta - l_{2^{\wedge}3[0; 2^{\wedge}h]}(x-h; x+h) = \\ &= F(x+h) - F(x-h) - h \cdot (217 \cdot f(x-h) + 1024 \cdot f(x-3 \cdot h/4) + 352 \cdot f(x-h/2) + \\ &\quad + 1024 \cdot f(x-h/4) + 436 \cdot f(x) + 1024 \cdot f(x+h/4) + \\ &\quad + 352 \cdot f(x+h/2) + 1024 \cdot f(x+3 \cdot h/4) + 217 \cdot f(x+h)) / 2835.\end{aligned} \quad (3.28)$$

Далее снова дифференцируем функцию $\varphi(h)$ по h и приводим подобные:

$$\begin{aligned}\varphi'(h) = & (f(x+h) + f(x-h)*2618 - h*(-217*f^{(1)}(x-h) - 768*f^{(1)}(x-3*h/4) - \\ & - 176*f^{(1)}(x-h/2) - 256*f^{(1)}(x-h/4) + 256*f^{(1)}(x+h/4) + 176*f^{(1)}(x+h/2) + \\ & + 768*f^{(1)}(x+3*h/4) + 217*f^{(1)}(x+h)) - (1024*f(x-3*h/4) + 352*f(x-h/2) + \\ & + 1024*f(x-h/4) + 436*f(x) + 1024*f(x+h/4) + 352*f(x+h/2) + \\ & + 1024*f(x+3*h/4)))/2835.\end{aligned}\quad (3.29)$$

На следующем шаге раскладываем $\varphi'(h)$ в степенной ряд по h до $s = 10$ с остаточным членом в форме Лагранжа и после приведения подобных и применения теоремы Больцано – Коши получаем:

$$\begin{aligned}\varphi'(h) = & -h^8*f^{(8)}(x)/1075200 + h^{10}*((f^{(10)}(\xi_1) + f^{(10)}(\xi_2))*2618 - \\ & - (1024*(f^{(10)}(\xi_3) + f^{(10)}(\xi_4))*(3/4)^{10} + 352*(f^{(10)}(\xi_5) + f^{(10)}(\xi_6))/2^{10} + \\ & + 1024*(f^{(10)}(\xi_7) + f^{(10)}(\xi_8))/4^{10} + 10*(217*f^{(10)}(\xi_9) + f^{(10)}(\xi_{10})) + \\ & + 1024*(f^{(10)}(\xi_{11}) + f^{(10)}(\xi_{12}))* (3/4)^{10} + 352*(f^{(10)}(\xi_{13}) + f^{(10)}(\xi_{14}))/2^{10} + \\ & + 1024*(f^{(10)}(\xi_{15}) + f^{(10)}(\xi_{16}))/4^{10}))/ (2835*10!) = \\ = & -h^8*f^{(8)}(x)/1075200 + h^{10}*(f^{(10)}(\eta_1)*2618 - (1024*f^{(10)}(\eta_2)*(3/4)^{10} + \\ & + 352*f^{(10)}(\eta_3)/2^{10} + 1024*f^{(10)}(\eta_4)/4^{10} + 10*(217*f^{(10)}(\eta_5) + \\ & + 1024*f^{(10)}(\eta_6)*(3/4)^{10} + 352*f^{(10)}(\eta_7)/2^{10} + \\ & + 1024*f^{(10)}(\eta_8)/4^{10}))*2/(2835*10!),\end{aligned}$$

где $\eta_5, \eta_1 \in [-h; h]$; $\eta_6, \eta_2 \in [-3*h/4; 3*h/4]$; $\eta_7, \eta_3 \in [-h/2; h/2]$; $\eta_4, \eta_8 \in [-h/4; h/4]$.

Далее для сходимости степенного ряда будем исследовать выражение $\arctg(x)$ в (3.23) в точках сходимости соответствующего степенного ряда Маклорена, тогда $f^{(8)}(t) \leq 7!$ и $f^{(10)}(t) \leq 9!$. Снова получаем, что порядок малости на этом промежутке для указанной выше функции целиком определяется h и s . Так, при числе разбиений больше 1000: $|h^8*f^{(8)}(x)/1075200|$ больше $|(1024*f^{(10)}(\eta_2)*(3/4)^{10} + 352*f^{(10)}(\eta_3)/2^{10} + 1024*f^{(10)}(\eta_4)/4^{10} + 10*(217*f^{(10)}(\eta_5) + 1024*f^{(10)}(\eta_6)*(3/4)^{10} + 352*f^{(10)}(\eta_7)/2^{10} + 1024*f^{(10)}(\eta_8)/4^{10}))*2/(2835*10!)|$ более чем в 25000 раз и данным членом можно пренебречь, но если разбиений меньше 80, то есть не более 80 полиномов аппроксимирует всю функцию на данном интервале, то второй член сравним с первым и им уже нельзя пренебречь.

Далее, считая число разбиений n интервала, вложенного в $[-1; 1]$, достаточным (100 и больше), интегрируем $\varphi'(h)$ и учитываем, что $\varphi(0) = 0$, в результате получаем для остатка на интервале от $(0; h)$ формулу:

$$R_{2\wedge 3} < h^9 * \max_{\xi \in [0; h]} (f^{(8)}(\xi)) / (19353600 * (2^n)^8) \quad (3.30)$$

Перейдем к следующему интегралу от полинома P_{2^4} , построенного по отчетам функции $f(x)$ и их функции остатка:

$$I_{2^4[0; 2^*h]}(x-h; x+h) = h \cdot (55118 \cdot f(x-h) + 262144 \cdot f(x-7^*h/8) + 88064 \cdot f(x-3^*h/4) + \\ + 262144 \cdot f(x-5^*h/8) + 110912 \cdot f(x-h/2) + 262144 \cdot f(x-3^*h/8) + \\ + 88064 \cdot f(x-h/4) + 262144 \cdot f(x-h/8) + 110232 \cdot f(x) + \\ + 262144 \cdot f(x+7^*h/8) + 88064 \cdot f(x+3^*h/4) + \\ + 262144 \cdot f(x+5^*h/8) + 110912 \cdot f(x+h/2) + \\ + 262144 \cdot f(x+3^*h/8) + 88064 \cdot f(x+h/4) + \\ + 262144 \cdot f(x+h/8) + 55118 \cdot f(x+h)) / 1445850;$$

$$\varphi(h) = \int_{x-h}^{x+h} f(\theta) d\theta - I_{2^4[0; 2^*h]}(x-h; x+h) = F(x+h) - F(x-h) - h \cdot (55118 \cdot f(x-h) + \\ + 262144 \cdot f(x-7^*h/8) + 88064 \cdot f(x-3^*h/4) + 262144 \cdot f(x-5^*h/8) + \\ + 110912 \cdot f(x-h/2) + 262144 \cdot f(x-3^*h/8) + 88064 \cdot f(x-h/4) + \\ + 262144 \cdot f(x-h/8) + 110232 \cdot f(x) + 262144 \cdot f(x+7^*h/8) + \\ + 88064 \cdot f(x+3^*h/4) + 262144 \cdot f(x+5^*h/8) + 110912 \cdot f(x+h/2) + \\ + 262144 \cdot f(x+3^*h/8) + 88064 \cdot f(x+h/4) + 262144 \cdot f(x+h/8) + \\ + 55118 \cdot f(x+h)) / 1445850. \quad (3.31)$$

Дифференцируем функцию $\varphi(h)$ по h и приводим подобные:

$$\varphi'(h) = (1390732 \cdot (f(x+h) + f(x-h)) - h \cdot (-55118 \cdot f^{(1)}(x-h) - 229376 \cdot f^{(1)}(x-7^*h/8) - \\ - 66048 \cdot f^{(1)}(x-3^*h/4) - 163840 \cdot f^{(1)}(x-5^*h/8) - 55456 \cdot f^{(1)}(x-h/2) - \\ - 98304 \cdot f^{(1)}(x-3^*h/8) - 22016 \cdot f^{(1)}(x-h/4) - 32768 \cdot f^{(1)}(x-h/8) + \\ + 229376 \cdot f^{(1)}(x+7^*h/8) + 66048 \cdot f^{(1)}(x+3^*h/4) + 163840 \cdot f^{(1)}(x+5^*h/8) + \\ + 55456 \cdot f^{(1)}(x+h/2) + 98304 \cdot f^{(1)}(x+3^*h/8) + 22016 \cdot f^{(1)}(x+h/4) + \\ + 32768 \cdot f^{(1)}(x+h/8) + 55118 \cdot f^{(1)}(x+h)) - (262144 \cdot f(x-7^*h/8) + \\ + 88064 \cdot f(x-3^*h/4) + 262144 \cdot f(x-5^*h/8) + 110912 \cdot f(x-h/2) + \\ + 262144 \cdot f(x-3^*h/8) + 88064 \cdot f(x-h/4) + 262144 \cdot f(x-h/8) + \\ + 110232 \cdot f(x) + 262144 \cdot f(x+7^*h/8) + 88064 \cdot f(x+3^*h/4) + \\ + 262144 \cdot f(x+5^*h/8) + 110912 \cdot f(x+h/2) + 262144 \cdot f(x+3^*h/8) + \\ + 88064 \cdot f(x+h/4) + 262144 \cdot f(x+h/8))) / 1445850.$$

Затем раскладываем $\varphi'(h)$ в степенной ряд по h до $s = 12$ с остаточным членом в форме Лагранжа и после приведения подобных и применения теоремы Больцано – Коши получаем:

$$\varphi'(h) = -h^{10} \cdot f^{(10)}(x) / 2229534720 + h^{12} \cdot (1390732 \cdot (f^{(12)}(\xi_1) + f^{(12)}(\xi_2)) - \\ - (262144 \cdot (f^{(12)}(\xi_3) + f^{(12)}(\xi_4)) \cdot (7/8)^{12} + 88064 \cdot (f^{(12)}(\xi_5) + f^{(12)}(\xi_6)) \cdot (3/4)^{12} + \\ + 262144 \cdot (f^{(12)}(\xi_7) + f^{(12)}(\xi_8)) \cdot (5/8)^{12} + 110912 \cdot (f^{(12)}(\xi_9) + f^{(12)}(\xi_{10})) / (2)^{12} + \\ + 262144 \cdot (f^{(12)}(\xi_{11}) + f^{(12)}(\xi_{12})) \cdot (3/8)^{12} + 88064 \cdot (f^{(12)}(\xi_{13}) + f^{(12)}(\xi_{14})) / (4)^{12} + \\ + 262144 \cdot (f^{(12)}(\xi_{15}) + f^{(12)}(\xi_{16})) / (8)^{12} + 12 \cdot [55118 \cdot (f^{(12)}(\xi_{17}) + f^{(12)}(\xi_{18})) +$$

$$\begin{aligned}
& + 262144 * (f^{(12)}(\xi_{19}) + f^{(12)}(\xi_{20})) * (7/8)^{12} + 88064 * (f^{(12)}(\xi_{21}) + f^{(12)}(\xi_{22})) * (3/4)^{12} + \\
& + 262144 * (f^{(12)}(\xi_{23}) + f^{(12)}(\xi_{24})) * (5/8)^{12} + 110912 * (f^{(12)}(\xi_{25}) + f^{(12)}(\xi_{26})) / (2)^{12} + \\
& + 262144 * (f^{(12)}(\xi_{27}) + f^{(12)}(\xi_{28})) * (3/8)^{12} + 88064 * (f^{(12)}(\xi_{29}) + f^{(12)}(\xi_{30})) / (4)^{12} + \\
& + 262144 * (f^{(12)}(\xi_{31}) + f^{(12)}(\xi_{32})) / (8)^{12}]) / (1445850 * 12!) = \\
& = - h^{10} * f^{(10)}(x) / 2229534720 + h^{12} * (1390732 * f^{(12)}(\eta_1) - \\
& - (262144 * f^{(12)}(\eta_2) * (7/8)^{12} + 88064 * f^{(12)}(\eta_3) * (3/4)^{12} + \\
& + 262144 * f^{(12)}(\eta_4) * (5/8)^{12} + 110912 * f^{(12)}(\eta_5) / (2)^{12} + \\
& + 262144 * f^{(12)}(\eta_6) * (3/8)^{12} + 88064 * f^{(12)}(\eta_7) / (4)^{12} + 262144 * f^{(12)}(\eta_8) / (8)^{12} + \\
& + 12 * [55118 * f^{(12)}(\eta_9) + 262144 * f^{(12)}(\eta_{10}) * (7/8)^{12} + 88064 * f^{(12)}(\eta_{11}) * (3/4)^{12} + \\
& + 262144 * f^{(12)}(\eta_{12}) * (5/8)^{12} + 110912 * f^{(12)}(\eta_{13}) / (2)^{12} + \\
& + 262144 * f^{(12)}(\eta_{14}) * (3/8)^{12} + 88064 * f^{(12)}(\eta_{15}) / (4)^{12} + \\
& + 262144 * f^{(12)}(\eta_{16}) / (8)^{12}]) * 2 / (1445850 * 12!),
\end{aligned}$$

где $\eta_9, \eta_1 \in [-h; h]$; $\eta_{10}, \eta_2 \in [-7*h/8; 7*h/8]$; $\eta_{11}, \eta_3 \in [-3*h/4; 3*h/4]$; $\eta_4, \eta_{12} \in [-5*h/8; 5*h/8]$; $\eta_{13}, \eta_5 \in [-h/2; h/2]$; $\eta_{14}, \eta_6 \in [-3*h/8; 3*h/8]$; $\eta_{15}, \eta_7 \in [-h/4; h/4]$; $\eta_8, \eta_{16} \in [-h/8; h/8]$.

Далее для сходимости степенного ряда будем исследовать выражение $\arctg(x)$ в (3.23) в точках сходимости соответствующего степенного ряда Маклорена, тогда $f^{(10)}(t) \leq 9!$ и $f^{(12)}(t) \leq 11!$ Снова получаем, что порядок малости на этом промежутке для указанной выше функции целиком определяется h и s . Так, при числе разбиений больше 1000: $|h^{10} * f^{(10)}(x) / 2229534720|$ больше

$$\begin{aligned}
& |(262144 * f^{(12)}(\eta_2) * (7/8)^{12} + 88064 * f^{(12)}(\eta_3) * (3/4)^{12} + 262144 * f^{(12)}(\eta_4) * (5/8)^{12} + \\
& + 110912 * f^{(12)}(\eta_5) / (2)^{12} + 262144 * f^{(12)}(\eta_6) * (3/8)^{12} + 88064 * f^{(12)}(\eta_7) / (4)^{12} + \\
& + 262144 * f^{(12)}(\eta_8) / (8)^{12} + 12 * [55118 * f^{(12)}(\eta_9) + 262144 * f^{(12)}(\eta_{10}) * (7/8)^{12} + \\
& + 88064 * f^{(12)}(\eta_{11}) * (3/4)^{12} + 262144 * f^{(12)}(\eta_{12}) * (5/8)^{12} + 110912 * f^{(12)}(\eta_{13}) / (2)^{12} + \\
& + 262144 * f^{(12)}(\eta_{14}) * (3/8)^{12} + 88064 * f^{(12)}(\eta_{15}) / (4)^{12} + 262144 * f^{(12)}(\eta_{16}) / (8)^{12}]) * 2 / \\
& / (1445850 * 12!)|
\end{aligned}$$

более чем в 960 раз и данным членом можно пренебречь, но если разбиений меньше ста (здесь мы также учли, в отличие от грубых оценок выше, различия в интервалах для η для одного разбиения и сужение интервалов для нахождения производной в случае n разбиений), то есть не более 100 полиномов аппроксимирует всю функцию на данном интервале, то второй член сравним с первым и им уже нельзя пренебречь.

Считая число разбиений n интервала, вложенного в $[-1; 1]$, достаточным (100 и больше), интегрируем $\varphi'(h)$ и учитываем, что $\varphi(0) = 0$, получаем для остатка на интервале от $(0; h)$ формулу:

$$R_{2^*4} < h^{11} * \max_{\xi \in [0; h]} (f^{(10)}(\xi)) / (49049763840 * (2^n)^{10}) \quad (3.32)$$

Перейдем к следующему интегралу от полинома P_{2^5} , построенного по отчетам функции $f(x)$:

$$l_{2^5[0; 2^*h]}(x-h; x+h) = h \cdot (56330596 \cdot f(x-h) + 268435456 \cdot f(x-15 \cdot h/16) + 89653248 \cdot f(x-7 \cdot h/8) + 268435456 \cdot f(x-13 \cdot h/16) + 113397760 \cdot f(x-3 \cdot h/4) + 268435456 \cdot f(x-11 \cdot h/16) + 89653248 \cdot f(x-5 \cdot h/8) + 268435456 \cdot f(x-9 \cdot h/16) + 112655744 \cdot f(x-h/2) + 268435456 \cdot f(x-7 \cdot h/16) + 89653248 \cdot f(x-3 \cdot h/8) + 268435456 \cdot f(x-5 \cdot h/16) + 113397760 \cdot f(x-h/4) + 268435456 \cdot f(x-3 \cdot h/16) + 89653248 \cdot f(x-h/8) + 268435456 \cdot f(x-h/16) + 112661200 \cdot f(x) + 268435456 \cdot f(x+15 \cdot h/16) + 89653248 \cdot f(x+7 \cdot h/8) + 268435456 \cdot f(x+13 \cdot h/16) + 113397760 \cdot f(x+3 \cdot h/4) + 268435456 \cdot f(x+11 \cdot h/16) + 89653248 \cdot f(x+5 \cdot h/8) + 268435456 \cdot f(x+9 \cdot h/16) + 112655744 \cdot f(x+h/2) + 268435456 \cdot f(x+7 \cdot h/16) + 89653248 \cdot f(x+3 \cdot h/8) + 268435456 \cdot f(x+5 \cdot h/16) + 113397760 \cdot f(x+h/4) + 268435456 \cdot f(x+3 \cdot h/16) + 89653248 \cdot f(x+h/8) + 268435456 \cdot f(x+h/16) + 56330596 \cdot f(x+h)) / 2958209100.$$

Функция остатка определится выражением:

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= \int_{x-h}^{x+h} f(\theta) d\theta - l_{2^5[0; 2^*h]}(x-h; x+h) = \\ &= F(x+h) - F(x-h) - h \cdot (56330596 \cdot f(x-h) + 268435456 \cdot f(x-15 \cdot h/16) + 89653248 \cdot f(x-7 \cdot h/8) + 268435456 \cdot f(x-13 \cdot h/16) + 113397760 \cdot f(x-3 \cdot h/4) + 268435456 \cdot f(x-11 \cdot h/16) + 89653248 \cdot f(x-5 \cdot h/8) + 268435456 \cdot f(x-9 \cdot h/16) + 112655744 \cdot f(x-h/2) + 268435456 \cdot f(x-7 \cdot h/16) + 89653248 \cdot f(x-3 \cdot h/8) + 268435456 \cdot f(x-5 \cdot h/16) + 113397760 \cdot f(x-h/4) + 268435456 \cdot f(x-3 \cdot h/16) + 89653248 \cdot f(x-h/8) + 268435456 \cdot f(x-h/16) + 112661200 \cdot f(x) + 268435456 \cdot f(x+15 \cdot h/16) + 89653248 \cdot f(x+7 \cdot h/8) + 268435456 \cdot f(x+13 \cdot h/16) + 113397760 \cdot f(x+3 \cdot h/4) + 268435456 \cdot f(x+11 \cdot h/16) + 89653248 \cdot f(x+5 \cdot h/8) + 268435456 \cdot f(x+9 \cdot h/16) + 112655744 \cdot f(x+h/2) + 268435456 \cdot f(x+7 \cdot h/16) + 89653248 \cdot f(x+3 \cdot h/8) + 268435456 \cdot f(x+5 \cdot h/16) + 113397760 \cdot f(x+h/4) + 268435456 \cdot f(x+3 \cdot h/16) + 89653248 \cdot f(x+h/8) + 268435456 \cdot f(x+h/16) + 56330596 \cdot f(x+h)) / 2958209100. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Дифференцируем функцию $\varphi(h)$ по h и приводим подобные:

$$\begin{aligned} \varphi'(h) = & (2901878504*(f(x-h) + f(x+h)) - (268435456*f(x-15*h/16) + \\ & + 89653248*f(x-7*h/8) + 268435456*f(x-13*h/16) + \\ & + 113397760*f(x-3*h/4) + 268435456*f(x-11*h/16) + \\ & + 89653248*f(x-5*h/8) + 268435456*f(x-9*h/16) + 112655744*f(x-h/2) + \\ & + 268435456*f(x-7*h/16) + 89653248*f(x-3*h/8) + \\ & + 268435456*f(x-5*h/16) + 113397760*f(x-h/4) + \\ & + 268435456*f(x-3*h/16) + 89653248*f(x-h/8) + 268435456*f(x-h/16) + \\ & + 112661200*f(x) + 268435456*f(x+15*h/16) + 89653248*f(x+7*h/8) + \\ & + 268435456*f(x+13*h/16) + 113397760*f(x+3*h/4) + \\ & + 268435456*f(x+11*h/16) + 89653248*f(x+5*h/8) + \\ & + 268435456*f(x+9*h/16) + 112655744*f(x+h/2) + \\ & + 268435456*f(x+7*h/16) + 89653248*f(x+3*h/8) + \\ & + 268435456*f(x+5*h/16) + 113397760*f(x+h/4) + \\ & + 268435456*f(x+3*h/16) + 89653248*f(x+h/8) + \\ & + 268435456*f(x+h/16)) - \\ & - h*(-56330596*f^{(1)}(x-h) - 251658240*f^{(1)}(x-15*h/16) - \\ & - 78446592*f^{(1)}(x-7*h/8) - 218103808*f^{(1)}(x-13*h/16) - \\ & - 85048320*f^{(1)}(x-3*h/4) - 184549376*f^{(1)}(x-11*h/16) - \\ & - 56033280*f^{(1)}(x-5*h/8) - 150994944*f^{(1)}(x-9*h/16) - \\ & - 56327872*f^{(1)}(x-h/2) - 117440512*f^{(1)}(x-7*h/16) - \\ & - 33619968*f^{(1)}(x-3*h/8) - 83886080*f^{(1)}(x-5*h/16) - \\ & - 28349440*f^{(1)}(x-h/4) - 50331648*f^{(1)}(x-3*h/16) - \\ & - 11206656*f^{(1)}(x-h/8) - 16777216*f^{(1)}(x-h/16) + \\ & + 251658240*f^{(1)}(x+15*h/16) + 78446592*f^{(1)}(x+7*h/8) + \\ & + 218103808*f^{(1)}(x+13*h/16) + 85048320*f^{(1)}(x+3*h/4) + \\ & + 184549376*f^{(1)}(x+11*h/16) + 56033280*f^{(1)}(x+5*h/8) + \\ & + 150994944*f^{(1)}(x+9*h/16) + 56327872*f^{(1)}(x+h/2) + \\ & + 117440512*f^{(1)}(x+7*h/16) + 33619968*f^{(1)}(x+3*h/8) + \\ & + 83886080*f^{(1)}(x+5*h/16) + 28349440*f^{(1)}(x+h/4) + \\ & + 50331648*f^{(1)}(x+3*h/16) + 11206656*f^{(1)}(x+h/8) + \\ & + 16777216*f^{(1)}(x+h/16) + 56330596*f^{(1)}(x+h))) / 2958209100. \end{aligned}$$

Далее раскладываем $\varphi'(h)$ в степенной ряд по h до $s = 14$ с остаточным членом в форме Лагранжа и после приведения подобных и применения теоремы Больцано – Коши получаем:

$$\begin{aligned} \varphi'(h) = & - 691*h^{12}*f^{(12)}(x)/26369153040384000 + \\ & + h^{14}*(2901878504*(f^{(14)}(\xi_1) + f^{(14)}(\xi_2)) - \\ & - (268435456*(f^{(14)}(\xi_3) + f^{(14)}(\xi_4))/16^{14} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 89653248*(f^{(14)}(\xi_5) + f^{(14)}(\xi_6))/8^{14} + \\
& + 268435456*(f^{(14)}(\xi_7) + f^{(14)}(\xi_8))*(3/16)^{14} + \\
& + 113397760*(f^{(14)}(\xi_9) + f^{(14)}(\xi_{10}))/4^{14} + \\
& + 268435456*(f^{(14)}(\xi_{11}) + f^{(14)}(\xi_{12}))* (5/16)^{14} + \\
& + 89653248*(f^{(14)}(\xi_{13}) + f^{(14)}(\xi_{14}))* (3/8)^{14} + \\
& + 268435456*(f^{(14)}(\xi_{15}) + f^{(14)}(\xi_{16}))* (7/16)^{14} + \\
& + 112655744*(f^{(14)}(\xi_{17}) + f^{(14)}(\xi_{18}))/2^{14} + \\
& + 268435456*(f^{(14)}(\xi_{19}) + f^{(14)}(\xi_{20}))* (9/16)^{14} + \\
& + 89653248*(f^{(14)}(\xi_{21}) + f^{(14)}(\xi_{22}))* (5/8)^{14} + \\
& + 268435456*(f^{(14)}(\xi_{23}) + f^{(14)}(\xi_{24}))* (11/16)^{14} + \\
& + 113397760*(f^{(14)}(\xi_{25}) + f^{(14)}(\xi_{26}))* (3/4)^{14} + \\
& + 268435456*(f^{(14)}(\xi_{27}) + f^{(14)}(\xi_{28}))* (13/16)^{14} + \\
& + 89653248*(f^{(14)}(\xi_{29}) + f^{(14)}(\xi_{30}))* (7/8)^{14} + \\
& + 268435456*(f^{(14)}(\xi_{31}) + f^{(14)}(\xi_{32}))* (15/16)^{14} - \\
& - 14*(56330596*(f^{(14)}(\xi_{33}) + f^{(14)}(\xi_{34})) + \\
& + 268435456*(f^{(14)}(\xi_{35}) + f^{(14)}(\xi_{36}))/16^{14} + \\
& + 89653248*(f^{(14)}(\xi_{37}) + f^{(14)}(\xi_{38}))/8^{14} + \\
& + 268435456*(f^{(14)}(\xi_{39}) + f^{(14)}(\xi_{40}))* (3/16)^{14} + \\
& + 113397760*(f^{(14)}(\xi_{41}) + f^{(14)}(\xi_{42}))/4^{14} + \\
& + 268435456*(f^{(14)}(\xi_{43}) + f^{(14)}(\xi_{44}))* (5/16)^{14} + \\
& + 89653248*(f^{(14)}(\xi_{45}) + f^{(14)}(\xi_{46}))* (3/8)^{14} + \\
& + 268435456*(f^{(14)}(\xi_{47}) + f^{(14)}(\xi_{48}))* (7/16)^{14} + \\
& + 112655744*(f^{(14)}(\xi_{49}) + f^{(14)}(\xi_{50}))/2^{14} + \\
& + 268435456*(f^{(14)}(\xi_{51}) + f^{(14)}(\xi_{52}))* (9/16)^{14} + \\
& + 89653248*(f^{(14)}(\xi_{53}) + f^{(14)}(\xi_{54}))* (5/8)^{14} + \\
& + 268435456*(f^{(14)}(\xi_{55}) + f^{(14)}(\xi_{56}))* (11/16)^{14} + \\
& + 113397760*(f^{(14)}(\xi_{57}) + f^{(14)}(\xi_{58}))* (3/4)^{14} + \\
& + 268435456*(f^{(14)}(\xi_{59}) + f^{(14)}(\xi_{60}))* (13/16)^{14} + \\
& + 89653248*(f^{(14)}(\xi_{61}) + f^{(14)}(\xi_{62}))* (7/8)^{14} + \\
& + 268435456*(f^{(14)}(\xi_{63}) + f^{(14)}(\xi_{64}))* (15/16)^{14}))/ (2958209100*14!) = \\
& = - 691*h^{12}*f^{(12)}(x)/26369153040384000 + h^{14}*(2901878504*f^{(14)}(\eta_1) - \\
& - (268435456*f^{(14)}(\eta_2)/16^{14} + 89653248*f^{(14)}(\eta_3)/8^{14} + \\
& + 268435456*f^{(14)}(\eta_4)*(3/16)^{14} + 113397760*f^{(14)}(\eta_5)/4^{14} + \\
& + 268435456*f^{(14)}(\eta_6)*(5/16)^{14} + 89653248*f^{(14)}(\eta_7)*(3/8)^{14} + \\
& + 268435456*f^{(14)}(\eta_8)*(7/16)^{14} + 112655744*f^{(14)}(\eta_9)/2^{14} + \\
& + 268435456*f^{(14)}(\eta_{10})*(9/16)^{14} + 89653248*f^{(14)}(\eta_{11})*(5/8)^{14} + \\
& + 268435456*f^{(14)}(\eta_{12})*(11/16)^{14} + 113397760*f^{(14)}(\eta_{13})*(3/4)^{14} + \\
& + 268435456*f^{(14)}(\eta_{14})*(13/16)^{14} + 89653248*f^{(14)}(\eta_{15})*(7/8)^{14} + \\
& + 268435456*f^{(14)}(\eta_{16})* (15/16)^{14}) - 14*(56330596*f^{(14)}(\eta_{17}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{18}) / 16^{14} + 89653248 * f^{(14)}(\eta_{19}) / 8^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{20}) * (3/16)^{14} + 113397760 * f^{(14)}(\eta_{21}) / 4^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{22}) * (5/16)^{14} + 89653248 * f^{(14)}(\eta_{23}) * (3/8)^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{24}) * (7/16)^{14} + 112655744 * f^{(14)}(\eta_{25}) / 2^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{26}) * (9/16)^{14} + 89653248 * f^{(14)}(\eta_{27}) * (5/8)^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{28}) * (11/16)^{14} + 113397760 * f^{(14)}(\eta_{29}) * (3/4)^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{30}) * (13/16)^{14} + 89653248 * f^{(14)}(\eta_{31}) * (7/8)^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{32}) * (15/16)^{14}) * 2 / (2958209100 * 14!),
\end{aligned}$$

где $\eta_{17}, \eta_1 \in [-h; h]$; $\eta_{18}, \eta_2 \in [-h/16; h/16]$; $\eta_{19}, \eta_3 \in [-h/8; h/8]$; $\eta_4, \eta_{20} \in [-3h/16; 3h/16]$; $\eta_{21}, \eta_5 \in [-h/4; h/4]$; $\eta_{22}, \eta_6 \in [-5h/16; 5h/16]$; $\eta_{23}, \eta_7 \in [-3h/8; 3h/8]$; $\eta_8, \eta_{24} \in [-7h/16; 7h/16]$; $\eta_{25}, \eta_9 \in [-h/2; h/2]$; $\eta_{26}, \eta_{10} \in [-9h/16; 9h/16]$; $\eta_{27}, \eta_{11} \in [-5h/8; 5h/8]$; $\eta_{12}, \eta_{28} \in [-11h/16; 11h/16]$; $\eta_{29}, \eta_{13} \in [-3h/4; 3h/4]$; $\eta_{30}, \eta_{14} \in [-13h/16; 13h/16]$; $\eta_{31}, \eta_{15} \in [-7h/8; 7h/8]$; $\eta_{32}, \eta_{16} \in [-15h/16; 15h/16]$.

Затем для сходимости степенного ряда будем исследовать выражение $\arctg(x)$ в (3.23) в точках сходимости соответствующего степенного ряда Маклорена, тогда $f^{(12)}(t) \leq 11!$ и $f^{(14)}(t) \leq 13!$. Снова получаем, что порядок малости на этом промежутке для указанной выше функции целиком определяется h и s . Так, при числе разбиений больше 1000: $|691 * h^{12} * f^{(12)}(x) / 26369153040384000|$ больше

$$\begin{aligned}
& |2901878504 * f^{(14)}(\eta_1) - (268435456 * f^{(14)}(\eta_2) / 16^{14} + 89653248 * f^{(14)}(\eta_3) / 8^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_4) * (3/16)^{14} + 113397760 * f^{(14)}(\eta_5) / 4^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_6) * (5/16)^{14} + 89653248 * f^{(14)}(\eta_7) * (3/8)^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_8) * (7/16)^{14} + 112655744 * f^{(14)}(\eta_9) / 2^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{10}) * (9/16)^{14} + 89653248 * f^{(14)}(\eta_{11}) * (5/8)^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{12}) * (11/16)^{14} + 113397760 * f^{(14)}(\eta_{13}) * (3/4)^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{14}) * (13/16)^{14} + 89653248 * f^{(14)}(\eta_{15}) * (7/8)^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{16}) * (15/16)^{14}) - 14 * (56330596 * f^{(14)}(\eta_{17}) + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{18}) / 16^{14} + 89653248 * f^{(14)}(\eta_{19}) / 8^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{20}) * (3/16)^{14} + 113397760 * f^{(14)}(\eta_{21}) / 4^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{22}) * (5/16)^{14} + 89653248 * f^{(14)}(\eta_{23}) * (3/8)^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{24}) * (7/16)^{14} + 112655744 * f^{(14)}(\eta_{25}) / 2^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{26}) * (9/16)^{14} + 89653248 * f^{(14)}(\eta_{27}) * (5/8)^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{28}) * (11/16)^{14} + 113397760 * f^{(14)}(\eta_{29}) * (3/4)^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{30}) * (13/16)^{14} + 89653248 * f^{(14)}(\eta_{31}) * (7/8)^{14} + \\
& + 268435456 * f^{(14)}(\eta_{32}) * (15/16)^{14}) * 2 / (2958209100 * 14!)|
\end{aligned}$$

более чем в 233 раза и данным членом можно пренебречь.

Здесь мы в отличие от грубых оценок выше учли еще и максимальное отличие $f^{(14)}(\eta_1)$ от $f^{(14)}(\eta_i)$, $i \in \{2, 3, \dots, 32\}$, на интервале $\eta_j \in [-0.5; -0.499]$, $j \in \{1, 2, \dots, 32\}$.

Далее, считая число разбиений n интервала, вложенного в $[-1; 1]$, достаточным (1000 и больше), интегрируем $\varphi'(h)$ и учитываем, что $\varphi(0)=0$, в результате получаем для остатка на интервале от $(0; h)$ формулу:

$$R_{2^{\wedge}5} < h^{13} \max_{\xi \in [0; h]} (f^{(12)}(\xi)) * 691 / (685597979049984000 * (2^n)^{12}). \quad (3.34)$$

Перейдем к следующему интегралу от полинома $P_{2^{\wedge}6}$, построенного по отчетам функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} I_{2^{\wedge}6[0; 2^*h]}(x-h; x+h) = & h * (230617460024 * f(x-h) + 1099511627776 * f(x-h/32) + \\ & + 366682832896 * f(x-h/16) + 1099511627776 * f(x-3^*h/32) + \\ & + 464297918464 * f(x-h/8) + 1099511627776 * f(x-5^*h/32) + \\ & + 366682832896 * f(x-3^*h/16) + 1099511627776 * f(x-7^*h/32) + \\ & + 461211131904 * f(x-h/4) + 1099511627776 * f(x-9^*h/32) + \\ & + 366682832896 * f(x-5^*h/16) + 1099511627776 * f(x-11^*h/32) + \\ & + 464297918464 * f(x-3^*h/8) + 1099511627776 * f(x-13^*h/32) + \\ & + 366682832896 * f(x-7^*h/16) + 1099511627776 * f(x-15^*h/32) + \\ & + 461234963712 * f(x-h/2) + 1099511627776 * f(x-17^*h/32) + \\ & + 366682832896 * f(x-9^*h/16) + 1099511627776 * f(x-19^*h/32) + \\ & + 464297918464 * f(x-5^*h/8) + 1099511627776 * f(x-21^*h/32) + \\ & + 366682832896 * f(x-11^*h/16) + 1099511627776 * f(x-23^*h/32) + \\ & + 461211131904 * f(x-3^*h/4) + 1099511627776 * f(x-25^*h/32) + \\ & + 366682832896 * f(x-13^*h/16) + 1099511627776 * f(x-27^*h/32) + \\ & + 464297918464 * f(x-7^*h/8) + 1099511627776 * f(x-29^*h/32) + \\ & + 366682832896 * f(x-15^*h/16) + 1099511627776 * f(x-31^*h/32) + \\ & + 461234920032 * f(x) + 1099511627776 * f(x+h/32) + \\ & + 366682832896 * f(x+h/16) + 1099511627776 * f(x+3^*h/32) + \\ & + 464297918464 * f(x+h/8) + 1099511627776 * f(x+5^*h/32) + \\ & + 366682832896 * f(x+3^*h/16) + 1099511627776 * f(x+7^*h/32) + \\ & + 461211131904 * f(x+h/4) + 1099511627776 * f(x+9^*h/32) + \\ & + 366682832896 * f(x+5^*h/16) + 1099511627776 * f(x+11^*h/32) + \\ & + 464297918464 * f(x+3^*h/8) + 1099511627776 * f(x+13^*h/32) + \\ & + 366682832896 * f(x+7^*h/16) + 1099511627776 * f(x+15^*h/32) + \\ & + 461234963712 * f(x+h/2) + 1099511627776 * f(x+17^*h/32) + \\ & + 366682832896 * f(x+9^*h/16) + 1099511627776 * f(x+19^*h/32) + \\ & + 464297918464 * f(x+5^*h/8) + 1099511627776 * f(x+21^*h/32) + \\ & + 366682832896 * f(x+11^*h/16) + 1099511627776 * f(x+23^*h/32) + \\ & + 461211131904 * f(x+3^*h/4) + 1099511627776 * f(x+25^*h/32) + \\ & + 366682832896 * f(x+13^*h/16) + 1099511627776 * f(x+27^*h/32) + \\ & + 464297918464 * f(x+7^*h/8) + 1099511627776 * f(x+29^*h/32) + \end{aligned}$$

$$+ 366682832896*f(x+15*h/16) + 1099511627776*f(x+31*h/32) + \\ + 230617460024*f(x+h))/24227732529000.$$

Функция остатка определится выражением:

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= \int_{x-h}^{x+h} f(\theta) d\theta - I_2^{[0; 2*h]}(x-h; x+h) = \\ &= F(x+h) - F(x-h) - h*(230617460024*f(x-h) + 1099511627776*f(x-h/32) + \\ &+ 366682832896*f(x-h/16) + 1099511627776*f(x-3*h/32) + \\ &+ 464297918464*f(x-h/8) + 1099511627776*f(x-5*h/32) + \\ &+ 366682832896*f(x-3*h/16) + 1099511627776*f(x-7*h/32) + \\ &+ 461211131904*f(x-h/4) + 1099511627776*f(x-9*h/32) + \\ &+ 366682832896*f(x-5*h/16) + 1099511627776*f(x-11*h/32) + \\ &+ 464297918464*f(x-3*h/8) + 1099511627776*f(x-13*h/32) + \\ &+ 366682832896*f(x-7*h/16) + 1099511627776*f(x-15*h/32) + \\ &+ 461234963712*f(x-h/2) + 1099511627776*f(x-17*h/32) + \\ &+ 366682832896*f(x-9*h/16) + 1099511627776*f(x-19*h/32) + \\ &+ 464297918464*f(x-5*h/8) + 1099511627776*f(x-21*h/32) + \\ &+ 366682832896*f(x-11*h/16) + 1099511627776*f(x-23*h/32) + \\ &+ 461211131904*f(x-3*h/4) + 1099511627776*f(x-25*h/32) + \\ &+ 366682832896*f(x-13*h/16) + 1099511627776*f(x-27*h/32) + \\ &+ 464297918464*f(x-7*h/8) + 1099511627776*f(x-29*h/32) + \\ &+ 366682832896*f(x-15*h/16) + 1099511627776*f(x-31*h/32) + \\ &+ 461234920032*f(x) + 1099511627776*f(x+h/32) + \\ &+ 366682832896*f(x+h/16) + 1099511627776*f(x+3*h/32) + \\ &+ 464297918464*f(x+h/8) + 1099511627776*f(x+5*h/32) + \\ &+ 366682832896*f(x+3*h/16) + 1099511627776*f(x+7*h/32) + \\ &+ 461211131904*f(x+h/4) + 1099511627776*f(x+9*h/32) + \\ &+ 366682832896*f(x+5*h/16) + 1099511627776*f(x+11*h/32) + \\ &+ 464297918464*f(x+3*h/8) + 1099511627776*f(x+13*h/32) + \\ &+ 366682832896*f(x+7*h/16) + 1099511627776*f(x+15*h/32) + \\ &+ 461234963712*f(x+h/2) + 1099511627776*f(x+17*h/32) + \\ &+ 366682832896*f(x+9*h/16) + 1099511627776*f(x+19*h/32) + \\ &+ 464297918464*f(x+5*h/8) + 1099511627776*f(x+21*h/32) + \\ &+ 366682832896*f(x+11*h/16) + 1099511627776*f(x+23*h/32) + \\ &+ 461211131904*f(x+3*h/4) + 1099511627776*f(x+25*h/32) + \\ &+ 366682832896*f(x+13*h/16) + 1099511627776*f(x+27*h/32) + \\ &+ 464297918464*f(x+7*h/8) + 1099511627776*f(x+29*h/32) + \\ &+ 366682832896*f(x+15*h/16) + 1099511627776*f(x+31*h/32) + \\ &+ 230617460024*f(x+h))/24227732529000 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Дифференцируем функцию $\varphi(h)$ по h и приводим подобные:

$$\begin{aligned} \varphi'(h) = & [23997115068976 \cdot (f(x-h) + f(x+h)) - (1099511627776 \cdot f(x-h/32) + \\ & + 366682832896 \cdot f(x-h/16) + 1099511627776 \cdot f(x-3 \cdot h/32) + \\ & + 464297918464 \cdot f(x-h/8) + 1099511627776 \cdot f(x-5 \cdot h/32) + \\ & + 366682832896 \cdot f(x-3 \cdot h/16) + 1099511627776 \cdot f(x-7 \cdot h/32) + \\ & + 461211131904 \cdot f(x-h/4) + 1099511627776 \cdot f(x-9 \cdot h/32) + \\ & + 366682832896 \cdot f(x-5 \cdot h/16) + 1099511627776 \cdot f(x-11 \cdot h/32) + \\ & + 464297918464 \cdot f(x-3 \cdot h/8) + 1099511627776 \cdot f(x-13 \cdot h/32) + \\ & + 366682832896 \cdot f(x-7 \cdot h/16) + 1099511627776 \cdot f(x-15 \cdot h/32) + \\ & + 461234963712 \cdot f(x-h/2) + 1099511627776 \cdot f(x-17 \cdot h/32) + \\ & + 366682832896 \cdot f(x-9 \cdot h/16) + 1099511627776 \cdot f(x-19 \cdot h/32) + \\ & + 464297918464 \cdot f(x-5 \cdot h/8) + 1099511627776 \cdot f(x-21 \cdot h/32) + \\ & + 366682832896 \cdot f(x-11 \cdot h/16) + 1099511627776 \cdot f(x-23 \cdot h/32) + \\ & + 461211131904 \cdot f(x-3 \cdot h/4) + 1099511627776 \cdot f(x-25 \cdot h/32) + \\ & + 366682832896 \cdot f(x-13 \cdot h/16) + 1099511627776 \cdot f(x-27 \cdot h/32) + \\ & + 464297918464 \cdot f(x-7 \cdot h/8) + 1099511627776 \cdot f(x-29 \cdot h/32) + \\ & + 366682832896 \cdot f(x-15 \cdot h/16) + 1099511627776 \cdot f(x-31 \cdot h/32) + \\ & + 461234920032 \cdot f(x) + 1099511627776 \cdot f(x+h/32) + \\ & + 366682832896 \cdot f(x+h/16) + 1099511627776 \cdot f(x+3 \cdot h/32) + \\ & + 464297918464 \cdot f(x+h/8) + 1099511627776 \cdot f(x+5 \cdot h/32) + \\ & + 366682832896 \cdot f(x+3 \cdot h/16) + 1099511627776 \cdot f(x+7 \cdot h/32) + \\ & + 461211131904 \cdot f(x+h/4) + 1099511627776 \cdot f(x+9 \cdot h/32) + \\ & + 366682832896 \cdot f(x+5 \cdot h/16) + 1099511627776 \cdot f(x+11 \cdot h/32) + \\ & + 464297918464 \cdot f(x+3 \cdot h/8) + 1099511627776 \cdot f(x+13 \cdot h/32) + \\ & + 366682832896 \cdot f(x+7 \cdot h/16) + 1099511627776 \cdot f(x+15 \cdot h/32) + \\ & + 461234963712 \cdot f(x+h/2) + 1099511627776 \cdot f(x+17 \cdot h/32) + \\ & + 366682832896 \cdot f(x+9 \cdot h/16) + 1099511627776 \cdot f(x+19 \cdot h/32) + \\ & + 464297918464 \cdot f(x+5 \cdot h/8) + 1099511627776 \cdot f(x+21 \cdot h/32) + \\ & + 366682832896 \cdot f(x+11 \cdot h/16) + 1099511627776 \cdot f(x+23 \cdot h/32) + \\ & + 461211131904 \cdot f(x+3 \cdot h/4) + 1099511627776 \cdot f(x+25 \cdot h/32) + \\ & + 366682832896 \cdot f(x+13 \cdot h/16) + 1099511627776 \cdot f(x+27 \cdot h/32) + \\ & + 464297918464 \cdot f(x+7 \cdot h/8) + 1099511627776 \cdot f(x+29 \cdot h/32) + \\ & + 366682832896 \cdot f(x+15 \cdot h/16) + 1099511627776 \cdot f(x+31 \cdot h/32)) - \\ & - h \cdot (-230617460024 \cdot f^{(1)}(x-h) - 34359738368 \cdot f^{(1)}(x-h/32) - \\ & - 22917677056 \cdot f^{(1)}(x-h/16) - 103079215104 \cdot f^{(1)}(x-3 \cdot h/32) - \\ & - 58037239808 \cdot f^{(1)}(x-h/8) - 171798691840 \cdot f^{(1)}(x-5 \cdot h/32) - \\ & - 68753031168 \cdot f^{(1)}(x-3 \cdot h/16) - 240518168576 \cdot f^{(1)}(x-7 \cdot h/32) - \\ & - 115302782976 \cdot f^{(1)}(x-h/4) - 309237645312 \cdot f^{(1)}(x-9 \cdot h/32) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 114588385280*f^{(1)}(x-5*h/16) - 377957122048*f^{(1)}(x-11*h/32) - \\
& - 174111719424*f^{(1)}(x-3*h/8) - 446676598784*f^{(1)}(x-13*h/32) - \\
& - 160423739392*f^{(1)}(x-7*h/16) - 515396075520*f^{(1)}(x-15*h/32) - \\
& - 230617481856*f^{(1)}(x-h/2) - 584115552256*f^{(1)}(x-17*h/32) - \\
& - 206259093504*f^{(1)}(x-9*h/16) - 652835028992*f^{(1)}(x-19*h/32) - \\
& - 290186199040*f^{(1)}(x-5*h/8) - 721554505728*f^{(1)}(x-21*h/32) - \\
& - 252094447616*f^{(1)}(x-11*h/16) - 790273982464*f^{(1)}(x-23*h/32) - \\
& - 345908348928*f^{(1)}(x-3*h/4) - 858993459200*f^{(1)}(x-25*h/32) - \\
& - 297929801728*f^{(1)}(x-13*h/16) - 927712935936*f^{(1)}(x-27*h/32) - \\
& - 406260678656*f^{(1)}(x-7*h/8) - 996432412672*f^{(1)}(x-29*h/32) - \\
& - 343765155840*f^{(1)}(x-15*h/16) - 1065151889408*f^{(1)}(x-31*h/32) + \\
& + 230617460024*f^{(1)}(x+h) + 34359738368*f^{(1)}(x+h/32) + \\
& + 22917677056*f^{(1)}(x+h/16) + 103079215104*f^{(1)}(x+3*h/32) + \\
& + 58037239808*f^{(1)}(x+h/8) + 171798691840*f^{(1)}(x+5*h/32) + \\
& + 68753031168*f^{(1)}(x+3*h/16) + 240518168576*f^{(1)}(x+7*h/32) + \\
& + 115302782976*f^{(1)}(x+h/4) + 309237645312*f^{(1)}(x+9*h/32) + \\
& + 114588385280*f^{(1)}(x+5*h/16) + 377957122048*f^{(1)}(x+11*h/32) + \\
& + 174111719424*f^{(1)}(x+3*h/8) + 446676598784*f^{(1)}(x+13*h/32) + \\
& + 160423739392*f^{(1)}(x+7*h/16) + 515396075520*f^{(1)}(x+15*h/32) + \\
& + 230617481856*f^{(1)}(x+h/2) + 584115552256*f^{(1)}(x+17*h/32) + \\
& + 206259093504*f^{(1)}(x+9*h/16) + 652835028992*f^{(1)}(x+19*h/32) + \\
& + 290186199040*f^{(1)}(x+5*h/8) + 721554505728*f^{(1)}(x+21*h/32) + \\
& + 252094447616*f^{(1)}(x+11*h/16) + 790273982464*f^{(1)}(x+23*h/32) + \\
& + 345908348928*f^{(1)}(x+3*h/4) + 858993459200*f^{(1)}(x+25*h/32) + \\
& + 297929801728*f^{(1)}(x+13*h/16) + 927712935936*f^{(1)}(x+27*h/32) + \\
& + 406260678656*f^{(1)}(x+7*h/8) + 996432412672*f^{(1)}(x+29*h/32) + \\
& + 343765155840*f^{(1)}(x+15*h/16) + \\
& + 1065151889408*f^{(1)}(x+31*h/32)]/2422773252900.
\end{aligned}$$

Далее раскладываем $\varphi'(h)$ в степенной ряд по h до $s = 16$ с остаточным членом в форме Лагранжа и после приведения подобных и применения теоремы Больцано – Коши получаем:

$$\begin{aligned}
\varphi'(h) = & - h^{14}*f^{(14)}(x)/1245404160 + h^{16}*[23997115068976*(f^{(16)}(\xi_1) + f^{(16)}(\xi_2)) - \\
& - (1099511627776*(f^{(16)}(\xi_3) + f^{(16)}(\xi_4))/32^{16} + \\
& + 366682832896*(f^{(16)}(\xi_5) + f^{(16)}(\xi_6))/16^{16} + \\
& + 1099511627776*(f^{(16)}(\xi_7) + f^{(16)}(\xi_8))*(3/32)^{16} + \\
& + 464297918464*(f^{(16)}(\xi_9) + f^{(16)}(\xi_{10}))/8^{16} + \\
& + 1099511627776*(f^{(16)}(\xi_{11}) + f^{(16)}(\xi_{12}))*(5/32)^{16} + \\
& + 366682832896*(f^{(16)}(\xi_{13}) + f^{(16)}(\xi_{14}))*(3/16)^{16} + \\
& + 1099511627776*(f^{(16)}(\xi_{15}) + f^{(16)}(\xi_{16}))*(7/32)^{16} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 461211131904 * (f^{(16)}(\xi_{17}) + f^{(16)}(\xi_{18})) / 4^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{19}) + f^{(16)}(\xi_{20})) * (9/32)^{16} + \\
& + 366682832896 * (f^{(16)}(\xi_{21}) + f^{(16)}(\xi_{22})) * (5/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{23}) + f^{(16)}(\xi_{24})) * (11/32)^{16} + \\
& + 464297918464 * (f^{(16)}(\xi_{25}) + f^{(16)}(\xi_{26})) * (3/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{27}) + f^{(16)}(\xi_{28})) * (13/32)^{16} + \\
& + 366682832896 * (f^{(16)}(\xi_{29}) + f^{(16)}(\xi_{30})) * (7/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{31}) + f^{(16)}(\xi_{32})) * (15/32)^{16} + \\
& + 461234963712 * (f^{(16)}(\xi_{33}) + f^{(16)}(\xi_{34})) / 2^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{35}) + f^{(16)}(\xi_{36})) * (17/32)^{16} + \\
& + 366682832896 * (f^{(16)}(\xi_{37}) + f^{(16)}(\xi_{38})) * (9/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{39}) + f^{(16)}(\xi_{40})) * (19/32)^{16} + \\
& + 464297918464 * (f^{(16)}(\xi_{41}) + f^{(16)}(\xi_{42})) * (5/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{43}) + f^{(16)}(\xi_{44})) * (21/32)^{16} + \\
& + 366682832896 * (f^{(16)}(\xi_{45}) + f^{(16)}(\xi_{46})) * (11/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{47}) + f^{(16)}(\xi_{48})) * (23/32)^{16} + \\
& + 461211131904 * (f^{(16)}(\xi_{49}) + f^{(16)}(\xi_{50})) * (3/4)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{51}) + f^{(16)}(\xi_{52})) * (25/32)^{16} + \\
& + 366682832896 * (f^{(16)}(\xi_{53}) + f^{(16)}(\xi_{54})) * (13/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{55}) + f^{(16)}(\xi_{56})) * (27/32)^{16} + \\
& + 464297918464 * (f^{(16)}(\xi_{57}) + f^{(16)}(\xi_{58})) * (7/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{59}) + f^{(16)}(\xi_{60})) * (29/32)^{16} + \\
& + 366682832896 * (f^{(16)}(\xi_{61}) + f^{(16)}(\xi_{62})) * (15/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * ((f^{(16)}(\xi_{63}) + f^{(16)}(\xi_{64})) * (31/32)^{16}) - \\
& - 16 * (230617460024 * (f^{(16)}(\xi_{65}) + f^{(16)}(\xi_{66})) + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{67}) + f^{(16)}(\xi_{68})) / 32^{16} + \\
& + 366682832896 * (f^{(16)}(\xi_{69}) + f^{(16)}(\xi_{70})) / 16^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{71}) + f^{(16)}(\xi_{72})) * (3/32)^{16} + \\
& + 464297918464 * (f^{(16)}(\xi_{73}) + f^{(16)}(\xi_{74})) / 8^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{75}) + f^{(16)}(\xi_{76})) * (5/32)^{16} + \\
& + 366682832896 * (f^{(16)}(\xi_{77}) + f^{(16)}(\xi_{78})) * (3/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{79}) + f^{(16)}(\xi_{80})) * (7/32)^{16} + \\
& + 461211131904 * (f^{(16)}(\xi_{81}) + f^{(16)}(\xi_{82})) / 4^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{83}) + f^{(16)}(\xi_{84})) * (9/32)^{16} + \\
& + 366682832896 * (f^{(16)}(\xi_{85}) + f^{(16)}(\xi_{86})) * (5/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{87}) + f^{(16)}(\xi_{88})) * (11/32)^{16} + \\
& + 464297918464 * (f^{(16)}(\xi_{89}) + f^{(16)}(\xi_{90})) * (3/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{91}) + f^{(16)}(\xi_{92})) * (13/32)^{16} + \\
& + 366682832896 * (f^{(16)}(\xi_{93}) + f^{(16)}(\xi_{94})) * (7/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{95}) + f^{(16)}(\xi_{96})) * (15/32)^{16} + \\
& + 461234963712 * (f^{(16)}(\xi_{97}) + f^{(16)}(\xi_{98})) / 2^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{99}) + f^{(16)}(\xi_{100})) * (17/32)^{16} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 366682832896 * (f^{(16)}(\xi_{101}) + f^{(16)}(\xi_{102})) * (9/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{103}) + f^{(16)}(\xi_{104})) * (19/32)^{16} + \\
& + 464297918464 * (f^{(16)}(\xi_{105}) + f^{(16)}(\xi_{106})) * (5/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{107}) + f^{(16)}(\xi_{108})) * (21/32)^{16} + \\
& + 366682832896 * (f^{(16)}(\xi_{109}) + f^{(16)}(\xi_{110})) * (11/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{111}) + f^{(16)}(\xi_{112})) * (23/32)^{16} + \\
& + 461211131904 * (f^{(16)}(\xi_{113}) + f^{(16)}(\xi_{114})) * (3/4)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{115}) + f^{(16)}(\xi_{116})) * (25/32)^{16} + \\
& + 366682832896 * (f^{(16)}(\xi_{117}) + f^{(16)}(\xi_{118})) * (13/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{119}) + f^{(16)}(\xi_{120})) * (27/32)^{16} + \\
& + 464297918464 * (f^{(16)}(\xi_{121}) + f^{(16)}(\xi_{122})) * (7/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\xi_{123}) + f^{(16)}(\xi_{124})) * (29/32)^{16} + \\
& + 366682832896 * (f^{(16)}(\xi_{125}) + f^{(16)}(\xi_{126})) * (15/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * ((f^{(16)}(\xi_{127}) + f^{(16)}(\xi_{128})) * (31/32)^{16}) / (24227732529000 * 16!) = \\
& = - h^{14} * f^{(14)}(x) / 1245404160 + h^{16} * [23997115068976 * f^{(16)}(\eta_1) - \\
& - (1099511627776 * f^{(16)}(\eta_2) / 32^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_3) / 16^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_4) * (3/32)^{16} + 464297918464 * f^{(16)}(\eta_5) / 8^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_6) * (5/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_7) * (3/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_8) * (7/32)^{16} + 461211131904 * f^{(16)}(\eta_9) / 4^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{10}) * (9/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{11}) * (5/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{12}) * (11/32)^{16} + 464297918464 * f^{(16)}(\eta_{13}) * (3/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{14}) * (13/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{15}) * (7/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{16}) * (15/32)^{16} + 461234963712 * f^{(16)}(\eta_{17}) / 2^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{18}) * (17/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{19}) * (9/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{20}) * (19/32)^{16} + 464297918464 * f^{(16)}(\eta_{21}) * (5/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{22}) * (21/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{23}) * (11/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{24}) * (23/32)^{16} + 461211131904 * f^{(16)}(\eta_{25}) * (3/4)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{26}) * (25/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{27}) * (13/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{28}) * (27/32)^{16} + 464297918464 * f^{(16)}(\eta_{29}) * (7/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{30}) * (29/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{31}) * (15/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\eta_{32}) * (31/32)^{16}) - 16 * (230617460024 * f^{(16)}(\eta_{33}) + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{34}) / 32^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{35}) / 16^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{36}) * (3/32)^{16} + 464297918464 * f^{(16)}(\eta_{37}) / 8^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{38}) * (5/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{39}) * (3/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{40}) * (7/32)^{16} + 461211131904 * f^{(16)}(\eta_{41}) / 4^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{42}) * (9/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{43}) * (5/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{44}) * (11/32)^{16} + 464297918464 * f^{(16)}(\eta_{45}) * (3/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{46}) * (13/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{47}) * (7/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{48}) * (15/32)^{16} + 461234963712 * f^{(16)}(\eta_{49}) / 2^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{50}) * (17/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{51}) * (9/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{52}) * (19/32)^{16} + 464297918464 * f^{(16)}(\eta_{53}) * (5/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{54}) * (21/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{55}) * (11/16)^{16} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{56}) * (23/32)^{16} + 461211131904 * f^{(16)}(\eta_{57}) * (3/4)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{58}) * (25/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{59}) * (13/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{60}) * (27/32)^{16} + 464297918464 * f^{(16)}(\eta_{61}) * (7/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{62}) * (29/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{63}) * (15/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\eta_{64}) * (31/32)^{16}) * 2 / (24227732529000 * 16!),
\end{aligned}$$

где $\eta_{33}, \eta_1 \in [-h; h]$; $\eta_{34}, \eta_2 \in [-h/32; h/32]$; $\eta_{35}, \eta_3 \in [-h/16; h/16]$; $\eta_4, \eta_{36} \in [-3*h/32; 3*h/32]$; $\eta_{37}, \eta_5 \in [-h/8; h/8]$; $\eta_{38}, \eta_6 \in [-5*h/32; 5*h/32]$; $\eta_{39}, \eta_7 \in [-3*h/16; 3*h/16]$; $\eta_8, \eta_{40} \in [-7*h/32; 7*h/32]$; $\eta_{41}, \eta_9 \in [-h/4; h/4]$; $\eta_{42}, \eta_{10} \in [-9*h/32; 9*h/32]$; $\eta_{43}, \eta_{11} \in [-5*h/16; 5*h/16]$; $\eta_{12}, \eta_{44} \in [-11*h/32; 11*h/32]$; $\eta_{45}, \eta_{13} \in [-3*h/8; 3*h/8]$; $\eta_{46}, \eta_{14} \in [-13*h/32; 13*h/32]$; $\eta_{47}, \eta_{15} \in [-7*h/16; 7*h/16]$; $\eta_{48}, \eta_{16} \in [-15*h/32; 15*h/32]$; $\eta_{49}, \eta_{17} \in [-h/2; h/2]$; $\eta_{50}, \eta_{18} \in [-17*h/32; 17*h/32]$; $\eta_{19}, \eta_{51} \in [-9*h/16; 9*h/16]$; $\eta_{52}, \eta_{20} \in [-19*h/32; 19*h/32]$; $\eta_{21}, \eta_{53} \in [-5*h/8; 5*h/8]$; $\eta_{22}, \eta_{54} \in [-21*h/32; 21*h/32]$; $\eta_{23}, \eta_{55} \in [-11*h/16; 11*h/16]$; $\eta_{56}, \eta_{24} \in [-23*h/32; 23*h/32]$; $\eta_{25}, \eta_{57} \in [-3*h/4; 3*h/4]$; $\eta_{26}, \eta_{58} \in [-25*h/32; 25*h/32]$; $\eta_{27}, \eta_{59} \in [-13*h/16; 13*h/16]$; $\eta_{60}, \eta_{28} \in [-27*h/32; 27*h/32]$; $\eta_{29}, \eta_{61} \in [-7*h/8; 7*h/8]$; $\eta_{62}, \eta_{30} \in [-29*h/32; 29*h/32]$; $\eta_{31}, \eta_{63} \in [-15*h/16; 15*h/16]$; $\eta_{32}, \eta_{64} \in [-31*h/32; 31*h/32]$.

Далее для сходимости степенного ряда будем исследовать выражение $\arctg(x)$ в (3.23) в точках сходимости соответствующего степенного ряда Маклорена, тогда $f^{(14)}(t) \leq 13!$ и $f^{(16)}(t) \leq 15!$ Снова получаем, что порядок малости на этом промежутке для указанной выше функции целиком определяется h и s . Так, при числе разбиений больше 1000: $|h^{14} * f^{(14)}(x) / 1245404160|$ больше

$$\begin{aligned}
& |(1099511627776 * f^{(16)}(\eta_2) / 32^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_3) / 16^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_4) * (3/32)^{16} + 464297918464 * f^{(16)}(\eta_5) / 8^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_6) * (5/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_7) * (3/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_8) * (7/32)^{16} + 461211131904 * f^{(16)}(\eta_9) / 4^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{10}) * (9/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{11}) * (5/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{12}) * (11/32)^{16} + 464297918464 * f^{(16)}(\eta_{13}) * (3/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{14}) * (13/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{15}) * (7/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{16}) * (15/32)^{16} + 461234963712 * f^{(16)}(\eta_{17}) / 2^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{18}) * (17/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{19}) * (9/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{20}) * (19/32)^{16} + 464297918464 * f^{(16)}(\eta_{21}) * (5/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{22}) * (21/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{23}) * (11/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{24}) * (23/32)^{16} + 461211131904 * f^{(16)}(\eta_{25}) * (3/4)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{26}) * (25/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{27}) * (13/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{28}) * (27/32)^{16} + 464297918464 * f^{(16)}(\eta_{29}) * (7/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{30}) * (29/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{31}) * (15/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\eta_{32}) * (31/32)^{16} + 16 * (230617460024 * f^{(16)}(\eta_{33}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{34}) / 32^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{35}) / 16^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{36}) * (3/32)^{16} + 464297918464 * f^{(16)}(\eta_{37}) / 8^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{38}) * (5/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{39}) * (3/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{40}) * (7/32)^{16} + 461211131904 * f^{(16)}(\eta_{41}) / 4^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{42}) * (9/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{43}) * (5/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{44}) * (11/32)^{16} + 464297918464 * f^{(16)}(\eta_{45}) * (3/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{46}) * (13/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{47}) * (7/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{48}) * (15/32)^{16} + 461234963712 * f^{(16)}(\eta_{49}) / 2^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{50}) * (17/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{51}) * (9/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{52}) * (19/32)^{16} + 464297918464 * f^{(16)}(\eta_{53}) * (5/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{54}) * (21/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{55}) * (11/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{56}) * (23/32)^{16} + 461211131904 * f^{(16)}(\eta_{57}) * (3/4)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{58}) * (25/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{59}) * (13/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{60}) * (27/32)^{16} + 464297918464 * f^{(16)}(\eta_{61}) * (7/8)^{16} + \\
& + 1099511627776 * f^{(16)}(\eta_{62}) * (29/32)^{16} + 366682832896 * f^{(16)}(\eta_{63}) * (15/16)^{16} + \\
& + 1099511627776 * (f^{(16)}(\eta_{64}) * (31/32)^{16}) * 2 / (24227732529000 * 16!) |
\end{aligned}$$

более чем в 4000000 раз! И данным членом можно пренебречь.

Далее, считая число разбиений n интервала, вложенного в $[-1; 1]$, достаточным (1000 и больше), интегрируем $\varphi'(h)$ и учитываем, что $\varphi(0)=0$, получаем для остатка на интервале от $(0; h)$ формулу:

$$R_{2^{\wedge}6} < h^{15} * \max_{\xi \in [0; h]} (f^{(14)}(\xi)) / (37362124800 * (2^n)^{14}). \quad (3.36)$$

В таблице 3.1 приведен интеграл от полинома $P_{2^{\wedge}p}$, построенного по отчетам функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0; h]$.

Таблица 3.1

Интеграл от полинома $P_{2^{\wedge}p}$, построенного по отчетам функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0; h]$

p	$I_{2^{\wedge}p[0; h]}(0; h)$
0	$0,5 * h * (f(0) + f(h))$
1	$h * (f(0) + 4 * f(h/2) + f(h)) / 6$
$\log_2 3$	$h * (f(0) + 3 * f(h/3) + 3 * f(2 * h/3) + f(h))$
2	$h * (7 * f(0) + 32 * f(h/4) + 12 * f(h/2) + 32 * f(3 * h/4) + 7 * f(h)) / 90$
3	$h * (217 * f(0) + 1024 * f(h/8) + 352 * f(h/4) + 1024 * f(3 * h/8) + 436 * f(h/2) + 1024 * f(5 * h/8) + 352 * f(3 * h/4) + 1024 * f(7 * h/8) + 217 * f(h)) / 5670$
4	$h * (27559 * f(0) + 131072 * f(h/16) + 44032 * f(h/8) + 131072 * f(3 * h/16) + 55456 * f(h/4) + 131072 * f(5 * h/16) + 44032 * f(3 * h/8) + 131072 * f(7 * h/16) + 55116 * f(h/2) + 131072 * f(9 * h/16) + 44032 * f(5 * h/8) + 131072 * f(11 * h/16) + 55456 * f(3 * h/4) + 131072 * f(13 * h/16) + 44032 * f(7 * h/8) + 131072 * f(15 * h/16) + 27559 * f(h)) / 1445850$

5	$ \begin{aligned} &h*(14082649*f(0) + 67108864*f(h/32) + 22413312*f(h/16) + \\ &+67108864*f(3*h/32) + 28349440*f(h/8) + 67108864*f(5*h/32) + \\ &+22413312*f(3*h/16) + 67108864*f(7*h/32) + 28163936*f(h/4) + \\ &+67108864*f(9*h/32) + 22413312*f(5*h/16) + 67108864*f(11*h/32) + \\ &+28349440*f(3*h/8) + 67108864*f(13*h/32) + 22413312*f(7*h/16) + \\ &+67108864*f(15*h/32) + 28165300*f(h/2) + 67108864*f(17*h/32) + \\ &+22413312*f(9*h/16) + 67108864*f(19*h/32) + 28349440*f(5*h/8) + \\ &+67108864*f(21*h/32) + 22413312*f(11*h/16) + 67108864*f(23*h/32) + \\ &+28163936*f(3*h/4) + 67108864*f(25*h/32) + 22413312*f(13*h/16) + \\ &+67108864*f(27*h/32) + 28349440*f(7*h/8) + 67108864*f(29*h/32) + \\ &+22413312*f(15*h/16) + 67108864*f(31*h/32) + \\ &+14082649*f(h))/1479104550 \end{aligned} $
6	$ \begin{aligned} &h*(28827182503*f(0) + 137438953472*f(h/64) + 45835354112*f(h/32)+ \\ &+137438953472*f(3*h/64) + 58037239808*f(h/16) + \\ &+137438953472*f(5*h/64) + 45835354112*f(3*h/32) + 137438953472* \\ &*f(7*h/64) + 57651391488*f(h/8) + 137438953472*f(9*h/64) + \\ &+45835354112*f(5*h/32) + 137438953472*f(11*h/64) + 58037239808* \\ &*f(3*h/16) + 137438953472*f(13*h/64) + 45835354112*f(7*h/32) + \\ &+137438953472*f(15*h/64) + 57654370464*f(h/4) + 137438953472* \\ &*f(17*h/64) + 45835354112*f(9*h/32) + 137438953472*f(19*h/64) + \\ &+58037239808*f(5*h/16) + 137438953472*f(21*h/64) +45835354112* \\ &*f(11*h/32) + 137438953472*f(23*h/64)+ 57651391488*f(3*h/8) + \\ &+137438953472*f(25*h/64)+ 45835354112*f(13*h/32) + \\ &+137438953472*f(27*h/64) +58037239808*f(7*h/16) + 137438953472* \\ &*f(29*h/64) + 45835354112*f(15*h/32) + 137438953472*f(31*h/64) + \\ &+57654365004*f(h/2) + 137438953472*f(33*h/64) +45835354112* \\ &*f(17*h/32) + 137438953472 *f(35*h/64) + 58037239808 *f(9*h/16) + \\ &+137438953472*f(37*h/64) + 45835354112*f(19*h/32) + \\ &+137438953472*f(39*h/64) +57651391488*f(5*h/8) + 137438953472* \\ &*f(41*h/64) + 45835354112 *f(21*h/32) + 137438953472*f(43*h/64) + \\ &+58037239808*f(11*h/16) + 137438953472 *f(45*h/64) + 45835354112* \\ &*f(23*h/32) + 137438953472 *f(47*h/64)+ 57654370464 *f(3*h/4) + \\ &+137438953472*f(49*h/64)+ 45835354112*f(25*h/32) + 137438953472* \\ &*f(51*h/64)+ 58037239808*f(13*h/16) + 137438953472*f(53*h/64) + \\ &+45835354112*f(27*h/32) + 137438953472*f(55*h/64) + 57651391488* \\ &*f(7*h/8) + 137438953472*f(57*h/64) + 45835354112*f(29*h/32) + \\ &+137438953472*f(59*h/64) + 58037239808*f(15*h/16) + \\ &+137438953472*f(61*h/64) + 45835354112*f(31*h/32) + \\ &+137438953472*f(63*h/64) +28827182503*f(h))/6056933132250 \end{aligned} $

В таблице 3.2 приведен остаток интеграл от полинома P_{2^p} , построенного по отчетам функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0; h]$, при количестве разбиений большем 1000.

Остатки в таблице 3.2 удовлетворяют следующей формуле:

$$|R_{2^p}(h)| \leq \left| \max_{\xi \in [0; h]} (f^{(2 \cdot p + 2)}(\xi)) \cdot \frac{h^{2 \cdot p + 3} B_{2 \cdot p + 2}}{(2 \cdot p + 2)! \cdot (2 \cdot n)^{2 \cdot p + 2} \cdot 2^{(p+1)(p-2)}} \right|.$$

Таблица 3.2

Остаток интеграла от полинома P_{2^p} , построенного по отчетам функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0; h]$, при количестве разбиений большем 1000

p	Величина не меньшая $ R_{2^p}(h) $
0	$h^3 \max_{\xi \in [0; h]} (f^{(2)}(\xi)) / (12 \cdot n^2)$
1	$h^5 \max_{\xi \in [0; h]} (f^{(4)}(\xi)) / (180 \cdot (2 \cdot n)^4)$
$\log_2 3$	$h^5 \max_{\xi \in [0; h]} (f^{(4)}(\xi)) / (540 \cdot (2 \cdot n)^4)$
2	$h^7 \max_{\xi \in [0; h]} (f^{(6)}(\xi)) / (30240 \cdot (2 \cdot n)^6)$
3	$h^9 \max_{\xi \in [0; h]} (f^{(8)}(\xi)) / (19353600 \cdot (2 \cdot n)^8)$
4	$h^{11} \max_{\xi \in [0; h]} (f^{(10)}(\xi)) / (49049763840 \cdot (2 \cdot n)^{10})$
5	$h^{13} \max_{\xi \in [0; h]} (f^{(12)}(\xi)) \cdot 691 / (685597979049984000 \cdot (2 \cdot n)^{12})$
6	$h^{15} \max_{\xi \in [0; h]} (f^{(14)}(\xi)) / (37362124800 \cdot (2 \cdot n)^{14})$

Из таблицы 3.2 для $p=5$ заключаем, что величины интегральных полиномиальных остатков также могут быть связаны с числами Бернулли [см. формулы (3.9) и (3.10)].

Для вычисления $a^{(p/q)}$, $p \in \mathbb{Z}$, $p! \neq 0$ и $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$, p, q не имеют общих делителей, удобно использовать итерационный метод Герона ($p=1$, $q=2$) и Ньютона для остальных небольших p и q :

$$x_n = x_{n-1} - (x_{n-1}^q - a) / (q \cdot x_{n-1}^{(q-1)}). \quad (3.37)$$

Когда $a^{(1/q)}$ определен с требуемой точностью, то необходимо возвести его в степень p . Для лучшей сходимости следует правильно выбрать начальное приближение x_n . Легко доказать, что в методе Герона, если $x_n \gg x^{0.5}$, то x_{n+1} и последующие будут приближаться к корню как 2^n подобно методу Больцано (визуализация приведена на

рисунках 3.4 и 3.5). Когда же x_n по порядку приблизится к корню, то скорость сходимости метода Герона резко возрастает. Но существенным недостатком метода Ньютона является то, что он является локально сходящимся [16], в отличие от метода Больцано, единственным критерием остановки алгоритма является проверка на некотором шаге: достигнута ли нужная точность, а также не превышен ли предел количества итераций алгоритма. Правильно выбрав начальное приближение в методе Больцано, можно сократить число шагов в два и более раза: сравните грубое начальное приближение $a_0=1$ и $b_0=x$ с более точным $a_0=10^{(\log(x))/2} - \varepsilon$ и $b_0=10^{(\log(x))/2} + \varepsilon$ при отыскании квадратного корня.

Если p или $q \gg 1$, то метод Ньютона неприменим из-за слишком большого роста порядка Хипс и необходимо представлять $a^{(p/q)}$ в виде $e^{((p/q)*\ln(a))}$. Способ вычисления $\ln(a) = \ln((A+1)*10^k)$, $k \in \mathbb{Z}$, $A \in [0; 9]$ представлен выше. Для нахождения e^x , где $x = (p/q)*\ln((A+1)*10^k)$, удобно x представить в виде $C*10^y$, $y \in \mathbb{Z}$, $C < 1$, и искать e^C , используя его разложение в степенной ряд. Число членов этого ряда следует выбирать в соответствии с точностью, которой необходимо достичь, и чтобы остаточный член ряда был меньше этого значения [35]:

$$r_n(x) = x^{(n+1)*e^{\theta*x}} / (n+1)!, \quad \theta \in (0,1).$$

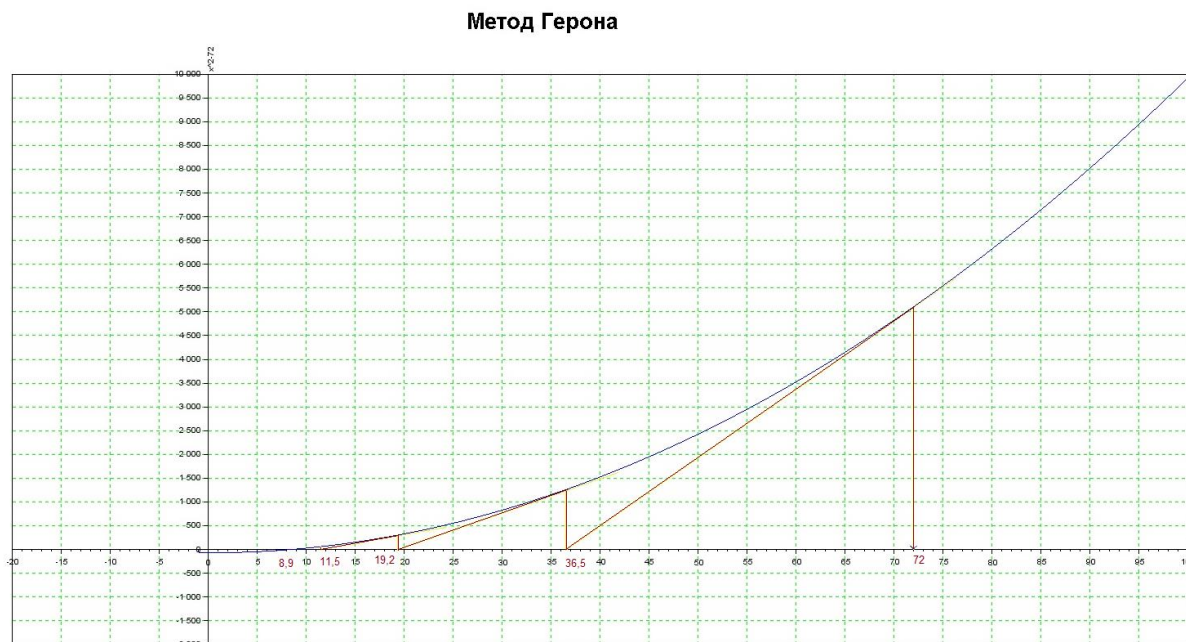


Рис. 3.4. Иллюстрация метода Герона



Рис. 3.5. Иллюстрация метода Больцано

Для вычисления функций $\sin x$ и $\cos x$ также удобно использовать их разложения в степенной ряд [35]. Функцию же $\operatorname{tg} x$ можно определить как отношение $\sin x / \cos x$.

Но Хипс в случае использования степенного ряда может быть на порядки больше, чем в случае применения метода парабол или факторизации, что дополнительно в разы увеличит время вычислений.

Описание последствий использования алгоритма, не учитывающего аппаратное округление чисел при вычислении определителей, приводится в [3].

В работе [33] утверждается, что существуют процессорные системы, состоящие из тысячи ядер, способные работать в синхронном режиме, это достигается при применении потоков [33 и 34]. В работе [19] выдвигаются прогнозы о том, что быстродействие транзистора при определенных условиях может быть увеличено в десятки тысяч раз. Таким образом, теоретически процессор сможет заработать в 10^7 раз быстрее (около 10^{16} Флопс). Данные процессоры в одноядерном варианте с минимальным для практической работы объемом памяти были частично осуществлены в Северной Америке [30]. Материал, приведенный в работе [30], по мнению автора, не позволяет сомневаться в том, что некоторые алгоритмы уже не будут надежными и их разработчикам в будущем следует учитывать это – надо помнить, что существуют тайны, которые нужно хранить не одно столетие, несмотря на экспоненциальный рост быстродействия вычислительной техники [33]. По мнению автора, в этом случае лучше уменьшить

скорость шифрования в четыре раза, но увеличить стойкость к перебору более чем в 500 раз. Когда ведущие научные державы смогут создавать процессоры около 10^{16} Флопс, их рабочая температура, согласно [19], будет сравнима с температурой жидкого азота и ниже, следовательно, дополнительно им потребуется теплонепроницаемый бункер с работающей рядом электростанцией, что могут осуществить только правительственные структуры. Но в реальной жизни данных технологий в ближайшее десятилетие не удастся достичь – роль научных сообществ снижается, уровень общественного образования падает, ведущие державы провоцируют между собой конфликты, а не стремятся к сотрудничеству в экономических, технических и гуманитарных областях.

Граница, когда должно закончиться использование Флопс и начаться использование Хипс, хорошо иллюстрируется вычислениями определителей матриц из 0 и 1. Так, произвольно выбранная матрица 32-го порядка примерно в одном случае из двухсот будет вычислена некорректно, но, возможно, с сохранением некоторой степени точности. Произвольно выбранная матрица 64-го порядка корректно не была вычислена ни разу при применении Флопс, даже при использовании методики, представленной выше, а также некоторых других (таких, как перемещение столбцов или строк матрицы между собой, транспонирование матрицы и др.). Причем вычисленный с помощью Флопс детерминант всегда был целым числом и без данных методик определить ошибочность этого числа могло только вычисление обратной матрицы. Этому можно дать простое объяснение: типичным детерминантом матриц из 0 и 1 32-го порядка является 10^8 – 10^9 , а 64-го – 10^{23} – 10^{25} (точность теряется полностью), т. е. сразу чувствуется зависимость между корректностью и числом 2^{64} (см. выше).

Матрицы более высоких порядков можно использовать для поиска случайных последовательностей, подчиняющихся равномерному распределению [3, 6], а если они будут состоять из колец более высоких порядков (2^{32} – 2^{56} в зависимости от используемой архитектуры) – то и для шифрования [3, 4, 6, 7].

При шифровании необходимо иметь максимальный запас прочности от взлома, какой только могут позволить вычислительная техника или ожидания пользователей. Компромисс крайне опасен, а алгоритм обязательно должен проверяться на прочность. Криптосистема «Алёнушка» [1] весьма показательный пример. Для достижения приемлемой скорости шифрования и сохранения

устойчивости к взлому с любого конца канала используется кольцо порядка 2^{56} и матрицы 256-го и 512-го порядков. Во второй версии «Алёнушки» при оптимально выбранном оборудовании для процессора core i9 компании Intel достигалась скорость шифрования, близкая к 100 Мбит/с при работе 4 ядер под управлением операционной системы Windows. Аналогичный результат давал процессор Ryzen 7 компании AMD при работе 4 ядер под управлением операционной системы Linux. В третьей версии «Алёнушки» скорость может превышать 150 Мбит/с, но необходимо 5 ядер процессора, при оптимально выбранном оборудовании. При количестве задействованных ядер больше 14 скорость превышала 200 Мбит/с. Если порядок кольца для каждой из трех матриц взять произвольно из интервала $(2^{48} - 2^{56})$, то скорость шифрования снижалась в 40 раз во второй версии «Алёнушки» и в 10 раз в третьей, в последней, однако, модули выбираются уже из интервала $(2^{48} - 2^{53})$, режим многопоточности не задействован. Однако определить, что это за кольца, исходя из анализа элементов в матрицах и шифруемых последовательностей (шифрование должно обязательно начинаться малыми матрицами) тоже невозможно, поэтому стойкость повышается более чем в 10^{25} раз. Архитектура 128-го разряда могла бы решить проблему скорости, но ее массовое применение не ожидается. Однако широко применяются высокоразрядные и производительные модемы и коммутаторы. Часто они не уступают в производительности отдельным элементам АЛУ и шин соответствующим элементам для серверов. При величине разрядности рабочего пакета в 1024 и 1048576 (потребуются устройства крайне больших размеров) двоичных разрядов, не считая битов исправления ошибок, скорость взаимной шифрации-дешифрации могла бы достигать Гбит и Тбит в секунду. В случае с неизвестным модулем скорость также будет падать, но уже в разы, а не в десятки раз. Величина детерминанта шифрующей и дешифрующей матрицы при этом позволяет использовать «Алёнушку» не из матрицы 512-го и двух 256-го порядка, а из матрицы 256-го и двух 128-го порядка (генерирующая матрица должна состоять из элементов кольца большего порядка, чем Z_2), что также повысит скорость и надежность коммутационной системы.

Заключение

Представленные в книге распределения показывают, что группа всех матриц из элементов данного кольца вычетов не является циклической ни для одного из рассмотренных порядков (не выполняется переход от положительных к отрицательным элементам). Приведенные в работе [3] материалы позволяют надеяться, что такого перехода нет и для других порядков (такой переход есть для матриц с элементами из 0 и 1 при замене их на -1 и 0).

Другим способом проверки данного утверждения является дальнейшее вычисление распределений определителей. Этот способ не менее трудоемок, так как требует огромных вычислительных ресурсов для матриц из 0 и 1 и чуть меньших для больших матриц из других целых чисел, которые тоже невероятно важны. Конечно, методика базисных матриц, представленная в работе [6], позволяет существенно понизить требуемые ресурсы, но она хорошо работает только с кольцами небольших порядков.

В книге также анализировалось достижение произвольной точности для элементарных функций, что важно в случае с приложениями, служащими для нахождения корней уравнений, решения систем уравнений и решения систем дифференциальных уравнений, некоторые примеры которых также представлены в книге. На примере задачи о спутниках показано, что для устойчивости [34] численного решения системы дифференциальных уравнений, предельно важно правильно выбрать шаг сетки, при котором выполняется условие $h \rightarrow 0$ для данной задачи (оно зависит от начальных условий и коэффициентов уравнения), а также обязательно проверять, что решение сходится к точке равновесия по А. М. Ляпунову [38].

Приложение 1

Матрицы с элементами из множества $\{0, 1, 2\}$

Таблица П.1.1

Распределение детерминантов матриц порядка 2

0	1	2	3	4
31	14	24	2	10

Таблица П.1.2

Распределение детерминантов матриц порядка 3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6891	2022	4488	774	3480	186	720	54	924	12	72
11	12	13	14	15	16					
0	54	0	0	0	6					

Таблица П.1.3

Распределение детерминантов матриц порядка 4

0	1	2	3	4	5	6
12202161	2699544	6884160	1773384	7295664	750360	2853696
7	8	9	10	11	12	13
372072	3832416	277704	843936	103776	1355760	57744
14	15	16	17	18	19	20
280224	50328	828888	16704	128256	8352	201840
21	22	23	24	25	26	27
4320	31680	1728	133440	1296	9216	192
28	29	30	31	32	33	34
20880	0	3456	0	19104	0	0
35	36	37	38	39	40	41
0	2784	0	0	0	1536	0
42	43	44	45	46	47	48
0	0	0	0	0	0	120

Таблица П.1.4

Распределение детерминантов матриц порядка 5

0	1	2	3
175419087483	31519662120	86174190240	28872362040
4	5	6	7
109331088960	16242517800	60027654960	10491558840
8	9	10	11
81969810240	10562020320	27510379800	5110471800
12	13	14	15
48884818800	3708774600	14626753200	4668130800

Продолжение табл. П.1.4

16	17	18	19
36018839400	2029792800	12116937000	1521454800
20	21	22	23
15967212000	1835929200	5028598800	871465200
24	25	26	27
17532285600	842658960	3080647200	807410400
28	29	30	31
6059818800	389086800	3233977200	299019600
32	33	34	35
7538953920	346058280	1206477600	252914400
36	37	38	39
3552313200	135212400	764827200	152289000
40	41	42	43
3122840400	79110000	738122400	60386400
44	45	46	47
1099657680	91005600	306352800	34819200
48	49	50	51
2026611000	29376000	254383200	28425600
52	53	54	55
475489200	14832000	184135200	16808400
56	57	58	59
585814800	12139200	74692800	6004800
60	61	62	63
345717600	4406400	46123200	6513600
64	65	66	67
371386440	3625200	42972480	1641600
68	69	70	71
85488000	2109600	24825600	792000
72	73	74	75
167791200	547200	9921600	1116000
76	77	78	79
36904800	434880	9230400	172800
80	81	82	83
80740200	386400	3182400	86400
84	85	86	87
25315200	100800	1713600	144000

Окончание табл. П.1.4

88	89	90	91
22908000	14400	2136000	14400
92	93	94	95
6036000	43200	403200	21600
96	97	98	99
23767440	0	446400	14400
100	101	102	103
2577600	0	345600	0
104	105	106	107
4425600	21600	57600	0
108	109	110	111
1346400	0	57600	0
112	113	114	115
3381000	0	57600	0
116	117	118	119
172800	0	0	0
120	121	122	123
1224000	0	0	0
124	125	126	127
0	1440	0	0
128	129	130	131
971520	0	14400	0
132	133	134	135
64800	0	0	0
136	137	138	139
115200	0	0	0
140	141	142	143
0	0	0	0
144	145	146	147
104400	0	0	0
148	149	150	151
0	0	0	0
152	153	154	155
0	0	0	0
156	157	158	159
0	0	0	0
160			
7200			

Таблица П.1.5

Распределение детерминантов матриц порядка 6

0	1	2
20540753180392401	3128060363145840	8758158887430720
3	4	5
3534095050827840	12322053068042160	2351146191012720
6	7	8
8385454055560320	1772052695803440	11419075509405120
9	10	11
2078252366507280	4920812993118240	1142749219136400
12	13	14
9047723263470000	945003967173360	3313917539150400
15	16	17
1368870251475600	7334811312584400	667814185452240
18	19	20
3494339193252960	568041406333920	4350897557928720
21	22	23
797468362214400	1760182303358880	418095109566000
24	25	26
5503988442772800	453145228341840	1332793490320800
27	28	29
516583368547200	2452894591323600	272574386172000
30	31	32
1767248225892000	237925023886800	3059523542880000
33	34	35
327144482519040	799371587498400	259496087752800
36	37	38
2187698505897600	160636596163200	629299460275200
39	40	41
219662730640800	1927381505443200	124929366271200
42	43	44
812514316809600	110467746432000	956679298782480
45	46	47
197311684791600	399148342747200	86768527514400
48	49	50
1811175219496080	89696584418400	403779027098880
51	52	53
104684099965200	628210933448400	61010049700800

Продолжение табл. П.1.5

54	55	56
422662817880000	73926239461920	814419558021600
57	58	59
73708967368800	210480598440000	43324778167200
60	61	62
722370791779200	38726553967200	171557658936000
63	64	65
64901018390400	687741771582000	41682890520000
66	67	68
218466430352640	27789630422400	287732396059200
69	70	71
37532310606000	163858353753600	22352059252800
72	73	74
552026980260000	20065343997600	94707378576000
75	76	77
34174686209760	199083572344800	20471205241440
78	79	80
119970806378400	14562117576000	375138936533520
81	82	83
22097841138000	64553128675200	11787981753600
84	85	86
223817621234400	14092168600800	53460051148800
87	88	89
14274341348400	189411958651680	8609264496000
90	91	92
88628509288800	9655872062400	98022764800800
93	94	95
10432564192800	36846133588800	8356388630400
96	97	98
251480768636160	5687776972800	35604416635200
99	100	101
9132404446080	88030016148960	4630071196800
102	103	104
38593872705600	4178889662400	97009340659200
105	106	107
8056756044000	21300412795200	3405813350400

Продолжение табл. П.1.5

108	109	110	111
79885652025600	3075404760000	24388160192640	4145004122400
112	113	114	115
95862699775440	2508899054400	22388283619200	2995637450400
116	117	118	119
35542647568800	3613450629600	12421079395200	2262874320000
120	121	122	123
87040107835200	1847947348800	10393851830400	2264532422400
124	125	126	127
25581396002400	1826314292160	16204555267200	1234413691200
128	129	130	131
55069708387680	1677669019200	9876478564800	1008536832000
132	133	134	135
28717659157680	1113702912000	6110034249600	1787361660000
136	137	138	139
27147961872000	745214256000	7724726092800	673585632000
140	141	142	143
19135724990400	923643000000	4296647980800	656721751680
144	145	146	147
39940028442000	653866279200	3605358988800	809181446400
148	149	150	151
9718091575200	406613520000	5785047086400	367622841600
152	153	154	155
14743000728000	593796009600	3239704892160	393687172800
156	157	158	159
10938285154800	271436054400	2132667273600	379550577600
160	161	162	163
19484740225440	273022790400	3057611846400	200352268800
164	165	166	167
5155692141600	385277860800	1504108569600	163558569600
168	169	170	171
13240075363200	160823836800	1668410006400	243411912000
172	173	174	175
3765064896000	120586838400	1617737702400	172425715200
176	177	178	179
8419113410400	156279456000	889933132800	88822396800

Продолжение табл. П.1.5

180	181	182	183
5530425854400	80206588800	950009040000	116200656000
184	185	186	187
4473481305600	84999628800	963055267200	68543729280
188	189	190	191
2014307568000	119378059200	689148172800	48069158400
192	193	194	195
7971523698960	43367011200	441238492800	86147971200
196	197	198	199
1750556016000	35287488000	683391081600	31824057600
200	201	202	203
3090281414400	47644329600	310262400000	32801760000
204	205	206	207
1671871320000	30487622400	259917984000	40834108800
208	209	210	211
2684980418400	21773232000	494664019200	17106681600
212	213	214	215
793679040000	26158204800	182281363200	18223185600
216	217	218	219
2305037865600	15961104000	152670355200	19384012800
220	221	222	223
777719841120	11681366400	202510627200	9152352000
224	225	226	227
1983370515840	21241094400	106730784000	7424006400
228	229	230	231
660990974400	6684768000	115260537600	13697424000
232	233	234	235
783736387200	5382028800	141714748800	6492830400
236	237	238	239
311459212800	7795180800	81255571200	3940876800
240	241	242	243
1490525614800	3543782400	57028665600	7055280000
244	245	246	247
227618726400	4872528000	70841952000	2978985600
248	249	250	251
440877600000	4183488000	46955272320	2092780800

Продолжение табл. П.1.5

252	253	254	255
331878772800	2008800000	30016396800	4119854400
256	257	258	259
678288497760	1488326400	41643590400	1721260800
260	261	262	263
158176346400	2706048000	20854713600	1089676800
264	265	266	267
396675014400	1334102400	22931251200	1629331200
268	269	270	271
87907161600	797817600	36195552000	694137600
272	273	274	275
291818246400	1563494400	11970374400	818812800
276	277	278	279
101393769600	514771200	9900921600	1069718400
280	281	282	283
199352016000	418348800	14294361600	365472000
284	285	286	287
46212249600	876096000	7834060800	404870400
288	289	290	291
323250383520	257126400	7919856000	440121600
292	293	294	295
33309273600	210470400	9870336000	276566400
296	297	298	299
79115788800	426643200	3925324800	177811200
300	301	302	303
47308190400	196992000	3166905600	227577600
304	305	306	307
96877944000	155260800	5689440000	100051200
308	309	310	311
23732092800	156816000	3186777600	72576000
312	313	314	315
69703113600	64800000	1772928000	303220800
316	317	318	319
12374985600	57024000	2625177600	36028800
320	321	322	323
93694061520	74649600	1492473600	34214400

Продолжение табл. П.1.5

324	325	326	327	328
17467012800	54691200	999475200	51321600	24536390400
329	330	331	332	333
52358400	2073859200	19180800	6216652800	52876800
334	335	336	337	338
675993600	24624000	53689456800	18144000	592012800
339	340	341	342	343
30067200	5978707200	8467200	1098489600	40003200
344	345	346	347	348
13520822400	40694400	368582400	6739200	5738947200
349	350	351	352	353
8294400	625276800	11923200	25690910400	5702400
354	355	356	357	358
425606400	10886400	2171577600	16588800	187660800
359	360	361	362	363
2592000	14852707200	3801600	145152000	5184000
364	365	366	367	368
2109110400	7257600	226022400	2592000	10384718400
369	370	371	372	373
4147200	201398400	7776000	2118182400	1555200
374	375	376	377	378
66355200	7050240	3945801600	2073600	178848000
379	380	381	382	383
0	1174305600	518400	52358400	1036800
384	385	386	387	388
14453164800	5702400	34214400	518400	502329600
389	390	391	392	393
0	100051200	0	2565043200	518400
394	395	396	397	398
21772800	2073600	884908800	518400	31104000
399	400	401	402	403
0	3956450400	518400	24883200	1209600
404	405	406	407	408
211507200	777600	21254400	0	1819065600
409	410	411	412	413
0	28512000	0	156556800	518400

Продолжение табл. П.1.5

414	415	416	417	418
18662400	777600	2733264000	0	6220800
419	420	421	422	423
518400	303134400	0	2592000	0
424	425	426	427	428
533433600	86400	0	518400	57024000
429	430	431	432	433
0	9849600	0	1597406400	0
434	435	436	437	438
4147200	0	57542400	0	2073600
439	440	441	442	443
0	424051200	86400	8294400	0
444	445	446	447	448
80092800	0	0	0	1229410800
449	450	451	452	453
0	6739200	0	28512000	0
454	455	456	457	458
2073600	0	252460800	0	0
459	460	461	462	463
0	26438400	0	0	0
464	465	466	467	468
299635200	0	0	0	27216000
469	470	471	472	473
0	0	0	63244800	0
474	475	476	477	478
0	0	0	0	0
479	480	481	482	483
0	422625600	0	0	0
484	485	486	487	488
0	0	0	0	29030400
489	490	491	492	493
0	0	0	2332800	0
494	495	496	497	498
0	0	67392000	0	0
499	500	501	502	503
0	1218240	0	0	0

Окончание табл. П.1.5

504	505	506	507	508	509
16588800	0	0	0	0	0
510	511	512	513	514	515
0	0	121874400	0	0	0
516	517	518	519	520	521
0	0	0	0	6912000	0
522	523	524	525	526	527
0	0	0	0	0	0
528	529	530	531	532	533
22680000	0	0	0	0	0
534	535	536	537	538	539
0	0	0	0	0	0
540	541	542	543	544	545
0	0	0	0	9331200	0
546	547	548	549	550	551
0	0	0	0	0	0
552	553	554	555	556	557
0	0	0	0	0	0
558	559	560	561	562	563
0	0	0	0	0	0
564	565	566	567	568	569
0	0	0	0	0	0
570	571	572	573	574	575
0	0	0	0	0	0
576					
1447200					

Таблица П.1.6

Суммарные зависимости данных в таблицах П.1.1–П.1.5,
вычисляемые по формулам 1.4–1.6

Порядок	2	3	4	5	6
Factor	1,08E+02	4,18E+04	1,65E+08	6,39E+12	2,40E+18
Ves	2,70E+01	2,61E+03	3,44E+06	4,00E+10	4,17E+15
det _{средний}	1,33E+00	2,13E+00	3,83E+00	7,54E+00	1,60E+01

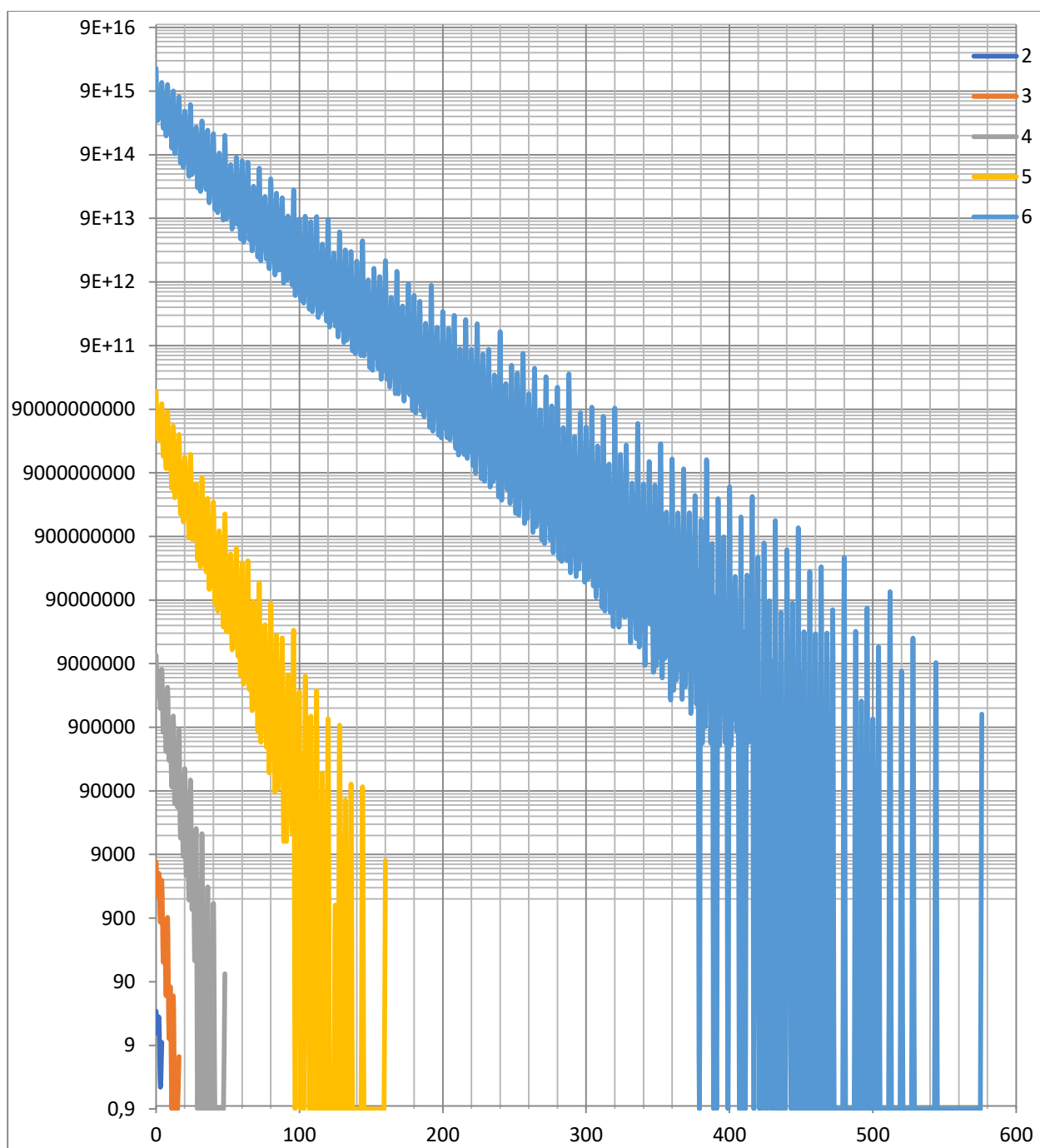


Рисунок П.1.1. Зависимость логарифма количества матриц от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.1.1–П.1.5

Приложение 2

Матрицы с элементами из множества {0, 1, 2, 3}

Таблица П.2.1

Распределение детерминантов матриц порядка 2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
64	30	40	42	22	6	32	4	2	14

Таблица П.2.2

Распределение детерминантов матриц порядка 3

0	1	2	3	4	5	6	7	8
49246	15090	24504	25182	20886	7746	30780	5838	10758
9	10	11	12	13	14	15	16	17
15654	5922	2484	14832	1764	3456	4716	2328	918
18	19	20	21	22	23	24	25	26
9480	612	780	2538	504	288	1746	180	180
27	28	29	30	31	32	33	34	35
2544	72	72	432	36	18	216	0	12
36	37	38	39	40	41	42	43	44
198	0	0	72	0	0	0	0	0
45	46	47	48	49	50	51	52	53
54	0	0	0	0	0	0	0	0
54								
6								

Таблица П.2.3

Распределение детерминантов матриц порядка 4

0	1	2	3	4
507095392	117124056	211483008	208582968	225606384
5	6	7	8	9
94158216	323581056	77592360	175747632	176962416
10	11	12	13	14
120837312	50968776	263904288	43046016	87697632
15	16	17	18	19
101271720	96312216	31483152	195045888	26993856
20	21	22	23	24
70539072	69505320	43863072	20127792	129408144
25	26	27	28	29
20661384	32506944	69957672	39877392	13209984

Продолжение табл. П.2.3

30	31	32	33	34
75014784	11529072	30035328	30546720	18526176
35	36	37	38	39
12350424	84873456	7740000	14032800	21613392
40	41	42	43	44
18151440	5965632	38719776	5263488	11519136
45	46	47	48	49
27331176	8105184	4052736	30175968	4494912
50	51	52	53	54
6895584	11205504	6325488	2749248	34295136
55	56	57	58	59
2903328	5828352	8049312	3470400	1857888
60	61	62	63	64
13907040	1635264	2568384	12465432	2944200
65	66	67	68	69
1447632	8317440	1093824	1825296	4168512
70	71	72	73	74
1846656	823968	11689680	722880	1024416
75	76	77	78	79
3200400	985056	711360	3891456	476352
80	81	82	83	84
975768	6649944	559872	351936	2785536
85	86	87	88	89
343008	403200	1481760	480768	222336
90	91	92	93	94
3933504	256848	259680	1011744	205056
95	96	97	98	99
158112	1333584	122112	144960	1760688
100	101	102	103	104
152448	87552	714240	76032	127584
105	106	107	108	109
590928	68544	51840	1628160	47232
110	111	112	113	114
65088	314496	45072	31104	312480
115	116	117	118	119
28800	25632	678240	19008	18624

Окончание табл. П.2.3

120	121	122	123	124	125	126
288576	21024	12672	150336	11232	11520	332544
127	128	129	130	131	132	133
9216	9000	98784	5760	5760	96192	5088
134	135	136	137	138	139	140
2304	381264	3456	2304	45504	2304	1440
141	142	143	144	145	146	147
43488	576	4032	131184	1152	0	25920
148	149	150	151	152	153	154
576	576	12672	1152	0	65376	192
155	156	157	158	159	160	161
0	10080	576	0	11808	144	192
162	163	164	165	166	167	168
66528	0	0	4608	0	0	2304
169	170	171	172	173	174	175
0	0	21024	0	0	0	0
176	177	178	179	180	181	182
0	2304	0	0	10224	0	0
183	184	185	186	187	188	189
0	0	0	0	0	0	8352
190	191	192	193	194	195	196
0	0	0	0	0	0	0
197	198	199	200	201	202	203
0	2592	0	0	0	0	0
204	205	206	207	208	209	210
0	0	0	0	0	0	0
211	212	213	214	215	216	217
0	0	0	0	0	1536	0
218	219	220	221	222	223	224
0	0	0	0	0	0	0
225	226	227	228	229	230	231
0	0	0	0	0	0	0
232	233	234	235	236	237	238
0	0	0	0	0	0	0
239	240	241	242	243		
0	0	0	0	120		

Таблица П.2.4

Распределение детерминантов матриц порядка 5

0	1	2	3
71807805575944	13422998493720	25660132972440	23996769462240
4	5	6	7
30801596608560	13615102332600	42424990691160	11900102009280
8	9	10	11
29309605676880	24059309228160	22093355604000	9454143830160
12	13	14	15
44449291989840	8633338926240	18093318781920	18731812779600
16	17	18	19
22767866173800	7331321748000	35581996002600	6792651262800
20	21	22	23
20052329250000	14796166701000	12725490661200	5879299973400
24	25	26	27
33766706108400	6728139961560	10982012923800	15124153330200
28	29	30	31
14693998683600	4806509582400	23341807338000	4508302855800
32	33	34	35
13652625869520	9701183711280	8391811236600	5598131972400
36	37	38	39
27632042587200	3747423452400	7396343125200	8127250879800
40	41	42	43
11963277810000	3329825866800	16124787396000	3143445148800
44	45	46	47
8427350820480	10502856040200	5813552756400	2805675643200
48	49	50	51
18128615545200	3139135423200	6311872726560	5873862888600
52	53	54	55
6613138798800	2377974612000	15132575601600	2971430420400
56	57	58	59
7281552295200	5041184743200	4139890374000	2025393273600
60	61	62	63
13628605794000	1921902771600	3713228061600	6683134510200
64	65	66	67
5516800874640	2255143826400	8227070151960	1645729870800
68	69	70	71
4220398335600	3766598969400	4204263321000	1486856758800

Продолжение табл. П.2.4

72	73	74	75
12858206977200	1414255462800	2709775598400	3974169256800
76	77	78	79
3413138340000	1639232564160	6130125622200	1219290956400
80	81	82	83
4252266608400	4545312958200	2213969244000	1106022091200
84	85	86	87
7463498314800	1350692259000	2005370364000	2498794177800
88	89	90	91
2953699342560	957681715200	7376580557400	1156226743200
92	93	94	95
2269183318800	2191205607000	1648914252000	1058812263600
96	97	98	99
5878418579640	793321286400	1774458148800	2910719635560
100	101	102	103
2253354152400	723046444800	3549635811600	690441853200
104	105	106	107
1965606555600	2373546544800	1238325526800	629969562000
108	109	110	111
6088860267600	601956722400	1472913965400	1499034219600
112	113	114	115
1872537029520	549847579200	2741003107200	662330257200
116	117	118	119
1264056054000	2026835490000	935805366000	601138630800
120	121	122	123
3884180115600	503135106480	853637734800	1175433694800
124	125	126	127
1044769272000	528841176480	3512737042200	402387105600
128	129	130	131
1143582017520	1043461006800	912675537000	368540971200
132	133	134	135
2458254541680	439500072000	649000926000	1886305690800
136	137	138	139
907691038800	323224545600	1663402424400	309419827200
140	141	142	143
995668248000	824330617200	541499335200	332723577600

Продолжение табл. П.2.4

144	145	146	147
3036411141840	337693037400	495146541600	876562855200
148	149	150	151
597459792000	249331759200	1553600674800	238829126400
152	153	154	155
626735079600	1033232565000	529991191200	271111008600
156	157	158	159
1475484888000	210049812000	378963226800	583582132800
160	161	162	163
652394290200	238948264800	1914151002600	184836211200
164	165	166	167
415565114400	670475347200	317223835200	169837005600
168	169	170	171
1392574842000	175323499200	365358960000	750289597200
172	173	174	175
346966765200	149602795200	807231470400	211025779200
176	177	178	179
404803811040	415914861600	243519768000	131849503200
180	181	182	183
1566998964000	126387410400	280605970800	372082917600
184	185	186	187
304128744000	142109006400	636193417680	128708884800
188	189	190	191
242569704000	752243349600	234664495200	102522852000
192	193	194	195
804881640000	98293953600	171751888800	375769983600
196	197	198	199
236454577200	90455234400	863346283800	86729169600
200	201	202	203
257074802400	266820094800	144281354400	97831024800
204	205	206	207
551678751600	93220401600	132351127200	402949209600
208	209	210	211
196340578320	81275270400	540146893200	67587199200
212	213	214	215
142716776400	213996441600	111194488800	75661250400

Продолжение табл. П.2.4

216	217	218	219
902226649200	72658330560	102086647200	191955877200
220	221	222	223
158157604800	62333154000	315306752400	52708176000
224	225	226	227
150502332000	346325232000	85798497600	48549304800
228	229	230	231
344116500000	46560434400	98374903200	197988949200
232	233	234	235
105503817600	42891350400	446231668200	49844721600
236	237	238	239
84341011200	138531931200	79965321600	37898164800
240	241	242	243
368167495200	36343209600	67726015200	302600930520
244	245	246	247
70868380080	47799292800	199685983680	36389577600
248	249	250	251
74300079360	111388456800	64161103680	29590675200
252	253	254	255
398234590800	32751266400	46958896800	122855893200
256	257	258	259
65989592400	26157333600	158810983200	29985664800
260	261	262	263
65492983200	162447839400	39504304800	23106276000
264	265	266	267
204474200400	26779528800	43267980000	80533231200
268	269	270	271
41995692000	20423937600	327164223000	19577246400
272	273	274	275
46941891000	91056541200	30486585600	24714682560
276	277	278	279
136328376000	17302507200	27990835200	119948674680
280	281	282	283
50177114400	15946236000	100810350000	15288458400
284	285	286	287
29656348800	71438313600	28776495600	16751690880

Продолжение табл. П.2.4

288	289	290	291
217334062800	14155250400	27129945600	52469596800
292	293	294	295
24906000000	12448065600	90686066400	14408424000
296	297	298	299
25958572800	125647591800	18172274400	12516372000
300	301	302	303
104725383600	12474170400	16689369600	42317701200
304	305	306	307
23115774000	11738080800	120611883600	9310723200
308	309	310	311
22040438400	38081077200	17578072800	8581176000
312	313	314	315
81728758800	8223141600	12862339200	86823214800
316	317	318	319
14751996000	7577121600	51266980800	8461072800
320	321	322	323
19702208400	30669498000	12598012800	7271481600
324	325	326	327
138445047600	8701610400	9892843200	27642117600
328	329	330	331
12895450080	6931514400	54690030000	5657565600
332	333	334	335
10378344000	48822984000	8306107200	6293894400
336	337	338	339
55029966000	4995338400	8483295600	22266907200
340	341	342	343
11097302400	5353725600	64281088800	5131257600
344	345	346	347
9065140800	24499519200	6380136000	4062729600
348	349	350	351
35023178400	3885307200	8354306400	53523345000
352	353	354	355
8772493200	3578040000	26094146400	4128465600
356	357	358	359
6101400000	18972948000	4900795200	3157315200

Продолжение табл. П.2.4

360	361	362	363
71571753600	3133440000	4486737600	16465723200
364	365	366	367
6345652800	3356042400	20809612800	2665656000
368	369	370	371
5584434000	27209198880	4684730400	2845101600
372	373	374	375
22339752000	2346840000	4046241600	14457240000
376	377	378	379
4426488000	2522480400	48108228600	2067883200
380	381	382	383
4494568800	10550664000	2875060800	1905436800
384	385	386	387
20488315200	2781667200	2629152000	20224461600
388	389	390	391
2986540800	1676692800	17979973200	1724025600
392	393	394	395
3486405600	8496093600	2196028800	1778853600
396	397	398	399
31947734400	1410566400	2008872000	8803348800
400	401	402	403
3280170000	1299686400	10592798400	1453734000
404	405	406	407
2085957600	28285366800	1924915200	1316066400
408	409	410	411
12818152800	1091980800	1914501600	6141520800
412	413	414	415
1736872800	1152348000	18435312000	1148378400
416	417	418	419
2092759200	5531133600	1468418400	883540800
420	421	422	423
11941965600	842299200	1162180800	11227914000
424	425	426	427
1501819200	996213600	6752666880	843636480
428	429	430	431
1207972800	5720623200	1210881600	681120000

Продолжение табл. П.2.4

432	433	434	435
23938038000	648100800	1018644000	4965829200
436	437	438	439
1000629600	629236800	5368053600	571219200
440	441	442	443
1355306400	8984702400	875354400	524764800
444	445	446	447
5692239600	594144000	668937600	3213662400
448	449	450	451
1032222000	460526400	12406550400	509198400
452	453	454	455
692632800	2902255200	555235200	633873600
456	457	458	459
5039330400	384480000	505555200	9188282400
460	461	462	463
711676800	353059200	4102603200	337060800
464	465	466	467
620636400	2869909200	418190400	310334400
468	469	470	471
9450458400	334694400	464400000	2087848800
472	473	474	475
490694400	315540000	2693232000	317520000
476	477	478	479
480484800	4660614000	313891200	236649600
480	481	482	483
3914798400	262958400	286905600	1834454400
484	485	486	487
360842400	246513600	8833625040	196401600
488	489	490	491
334493280	1491069600	330463200	182174400
492	493	494	495
2249138400	189619200	244684800	4647254400
496	497	498	499
291956400	180489600	1694239200	149817600
500	501	502	503
272332800	1190851200	176515200	137131200

Продолжение табл. П.2.4

504	505	506	507	508
5403559200	156866400	181951200	1262584800	182008800
509	510	511	512	513
121104000	1703959200	129691200	206803800	3902068800
514	515	516	517	518
131860800	125755200	1409274000	113428800	141165600
519	520	521	522	523
844308000	208512000	92404800	2948799600	86126400
524	525	526	527	528
123105600	1043200800	97790400	89971200	1343253600
529	530	531	532	533
75787200	108871200	1916866800	118252800	83937600
534	535	536	537	538
828079200	77126400	104241600	603158400	72864000
539	540	541	542	543
76375200	4711940400	56836800	65664000	540756000
544	545	546	547	548
102772800	62395200	802946400	48009600	69580800
549	550	551	552	553
1389150000	73467360	47188800	750960000	49068000
554	555	556	557	558
48427200	523288800	55864800	39758400	1615701600
559	560	561	562	563
45439200	84094800	450921600	39556800	34488000
564	565	566	567	568
520030800	38404800	36115200	1861526400	47080800
569	570	571	572	573
29332800	481939200	27878400	43358400	300470400
574	575	576	577	578
34495200	29361600	1531116000	24206400	30816000
579	580	581	582	583
269503200	37353600	27182400	309340800	24588000
584	585	586	587	588
30916800	1159905600	21340800	19094400	362385600
589	590	591	592	593
18460800	23616000	210837600	28569600	16848000

Продолжение табл. П.2.4

594	595	596	597	598
1500477600	26224800	20995200	188474400	17992800
599	600	601	602	603
14356800	327643200	13320000	16569600	570049200
604	605	606	607	608
16423200	16048800	187790400	11433600	18316800
609	610	611	612	613
156192000	14716800	11304000	772876800	9676800
614	615	616	617	618
10267200	166226400	15316800	10036800	143280000
619	620	621	622	623
8625600	14436000	660256200	8827200	9410400
624	625	626	627	628
197456400	8164800	7646400	106632000	8596800
629	630	631	632	633
8438400	601328400	6537600	8265600	91108800
634	635	636	637	638
5904000	6552000	115556400	7382400	5911200
639	640	641	642	643
315067680	10602000	4867200	87170400	4795200
644	645	646	647	648
6158400	88084800	5126400	3931200	828460800
649	650	651	652	653
4464000	6264000	65935200	4665600	3816000
654	655	656	657	658
65728800	4363200	5184000	228103200	3499200
659	660	661	662	663
3412800	81979200	2894400	2764800	62647200
664	665	666	667	668
3600000	3974400	247266000	2304000	3024000
669	670	671	672	673
43279200	2966400	2630880	71359200	2016000
674	675	676	677	678
2102400	407641200	3038400	1915200	39888000
679	680	681	682	683
2452800	3837600	32349600	2037600	1800000

Продолжение табл. П.2.4

684	685	686	687	688
203018400	1972800	1807200	29188800	1922400
689	690	691	692	693
1497600	35618400	1468800	1411200	125844000
694	695	696	697	698
1281600	1569600	32097600	1540800	1065600
699	700	701	702	703
21146400	1720800	921600	287194800	806400
704	705	706	707	708
1461600	21643200	907200	1070400	23716800
709	710	711	712	713
763200	1310400	85428000	763200	633600
714	715	716	717	718
25243200	1339200	849600	13262400	576000
719	720	721	722	723
532800	144295200	763200	561600	12844800
724	725	726	727	728
633600	619200	12772800	532800	648000
729	730	731	732	733
142048440	720000	619200	14241600	388800
734	735	736	737	738
403200	11784000	259200	374400	63633600
739	740	741	742	743
273600	734400	7214400	403200	302400
744	745	746	747	748
9194400	432000	302400	45662400	295200
749	750	751	752	753
374400	9331200	244800	122400	5947200
754	755	756	757	758
237600	417600	127147200	201600	129600
759	760	761	762	763
4888800	525600	187200	5328000	288000
764	765	766	767	768
288000	44539200	144000	244800	6746400
769	770	771	772	773
244800	331200	3902400	172800	201600

Продолжение табл. П.2.4

774	775	776	777	778	779
31716000	187200	129600	4008000	86400	115200
780	781	782	783	784	785
7005600	129600	100800	49398000	93600	86400
786	787	788	789	790	791
2923200	28800	57600	2232000	187200	86400
792	793	794	795	796	797
26704800	180000	14400	2476800	86400	115200
798	799	800	801	802	803
2318400	43200	208800	14472000	43200	100800
804	805	806	807	808	809
2721600	115200	86400	1382400	14400	14400
810	811	812	813	814	815
80921400	28800	72000	1108800	57600	43200
816	817	818	819	820	821
2908800	0	57600	10036800	86400	28800
822	823	824	825	826	827
1684800	28800	0	1137600	0	0
828	829	830	831	832	833
14104800	28800	43200	763200	28800	43200
834	835	836	837	838	839
986400	43200	43200	18745200	14400	0
840	841	842	843	844	845
1504800	0	0	360000	28800	64800
846	847	848	849	850	851
6012000	15840	0	403200	43200	14400
852	853	854	855	856	857
777600	28800	14400	5349600	0	14400
858	859	860	861	862	863
417600	28800	21600	180000	28800	28800
864	865	866	867	868	869
21031200	0	0	734400	43200	21600
870	871	872	873	874	875
835200	14400	0	3038400	0	0
876	877	878	879	880	881
489600	0	0	208800	28800	28800

Продолжение табл. П.2.4

882	883	884	885	886	887	888
2700000	0	7200	115200	0	0	230400
889	890	891	892	893	894	895
0	57600	9395400	0	0	316800	0
896	897	898	899	900	901	902
0	230400	0	0	3470400	0	7200
903	904	905	906	907	908	909
0	0	0	57600	14400	0	1080000
910	911	912	913	914	915	916
0	0	115200	0	0	115200	0
917	918	919	920	921	922	923
0	8089200	0	0	115200	0	0
924	925	926	927	928	929	930
172800	0	0	345600	0	0	230400
931	932	933	934	935	936	937
0	0	0	0	0	1324800	0
938	939	940	941	942	943	944
0	0	7200	0	0	0	0
945	946	947	948	949	950	951
2774400	0	0	0	7200	0	0
952	953	954	955	956	957	958
0	0	230400	0	0	28800	0
959	960	961	962	963	964	965
0	0	0	7200	172800	0	0
966	967	968	969	970	971	972
0	0	1440	0	0	0	5128320
973	974	975	976	977	978	979
0	0	14400	0	0	57600	7200
980	981	982	983	984	985	986
7200	244800	0	0	28800	0	0
987	988	989	990	991	992	993
0	0	0	122400	0	0	0
994	995	996	997	998	999	1000
0	0	57600	0	0	784800	0
1001	1002	1003	1004	1005	1006	1007
0	0	0	0	0	0	0

Продолжение табл. П.2.4

1008	1009	1010	1011	1012	1013	1014
64800	0	0	28800	0	0	0
1015	1016	1017	1018	1019	1020	1021
0	0	0	0	0	14400	0
1022	1023	1024	1025	1026	1027	1028
0	0	0	0	583200	0	0
1029	1030	1031	1032	1033	1034	1035
0	0	0	0	0	0	64800
1036	1037	1038	1039	1040	1041	1042
0	0	0	0	0	0	0
1043	1044	1045	1046	1047	1048	1049
0	129600	0	0	0	0	0
1050	1051	1052	1053	1054	1055	1056
0	0	0	409200	0	0	0
1057	1058	1059	1060	1061	1062	1063
0	0	0	0	0	0	0
1064	1065	1066	1067	1068	1069	1070
0	0	0	0	0	0	0
1071	1072	1073	1074	1075	1076	1077
0	0	0	0	0	0	0
1078	1079	1080	1081	1082	1083	1084
0	0	144000	0	0	0	0
1085	1086	1087	1088	1089	1090	1091
0	0	0	0	0	0	0
1092	1093	1094	1095	1096	1097	1098
0	0	0	0	0	0	0
1099	1100	1101	1102	1103	1104	1105
0	0	0	0	0	0	0
1106	1107	1108	1109	1110	1111	1112
0	28800	0	0	0	0	0
1113	1114	1115	1116	1117	1118	1119
0	0	0	0	0	0	0
1120	1121	1122	1123	1124	1125	1126
0	0	0	0	0	0	0
1127	1128	1129	1130	1131	1132	1133
0	0	0	0	0	0	0

Окончание табл. П.2.4

1134	1135	1136	1137	1138	1139	1140
90000	0	0	0	0	0	0
1141	1142	1143	1144	1145	1146	1147
0	0	0	0	0	0	0
1148	1149	1150	1151	1152	1153	1154
0	0	0	0	0	0	0
1155	1156	1157	1158	1159	1160	1161
0	0	0	0	0	0	0
1162	1163	1164	1165	1166	1167	1168
0	0	0	0	0	0	0
1169	1170	1171	1172	1173	1174	1175
0	0	0	0	0	0	0
1176	1177	1178	1179	1180	1181	1182
0	0	0	0	0	0	0
1183	1184	1185	1186	1187	1188	1189
0	0	0	0	0	0	0
1190	1191	1192	1193	1194	1195	1196
0	0	0	0	0	0	0
1197	1198	1199	1200	1201	1202	1203
0	0	0	0	0	0	0
1204	1205	1206	1207	1208	1209	1210
0	0	0	0	0	0	0
1211	1212	1213	1214	1215		
0	0	0	0	7200		

Таблица П.2.5

Суммарные зависимости данных в таблицах П.2.1–П.2.4,
вычисляемые по формулам 1.4–1.6

Порядок	2	3	4	5
Factor	7,16E+02	1,60E+06	6,41E+10	4,48E+16
Ves	7,96E+01	2,97E+04	2,64E+08	3,69E+13
det _{средний}	2,80E+00	6,11E+00	1,49E+01	3,98E+01

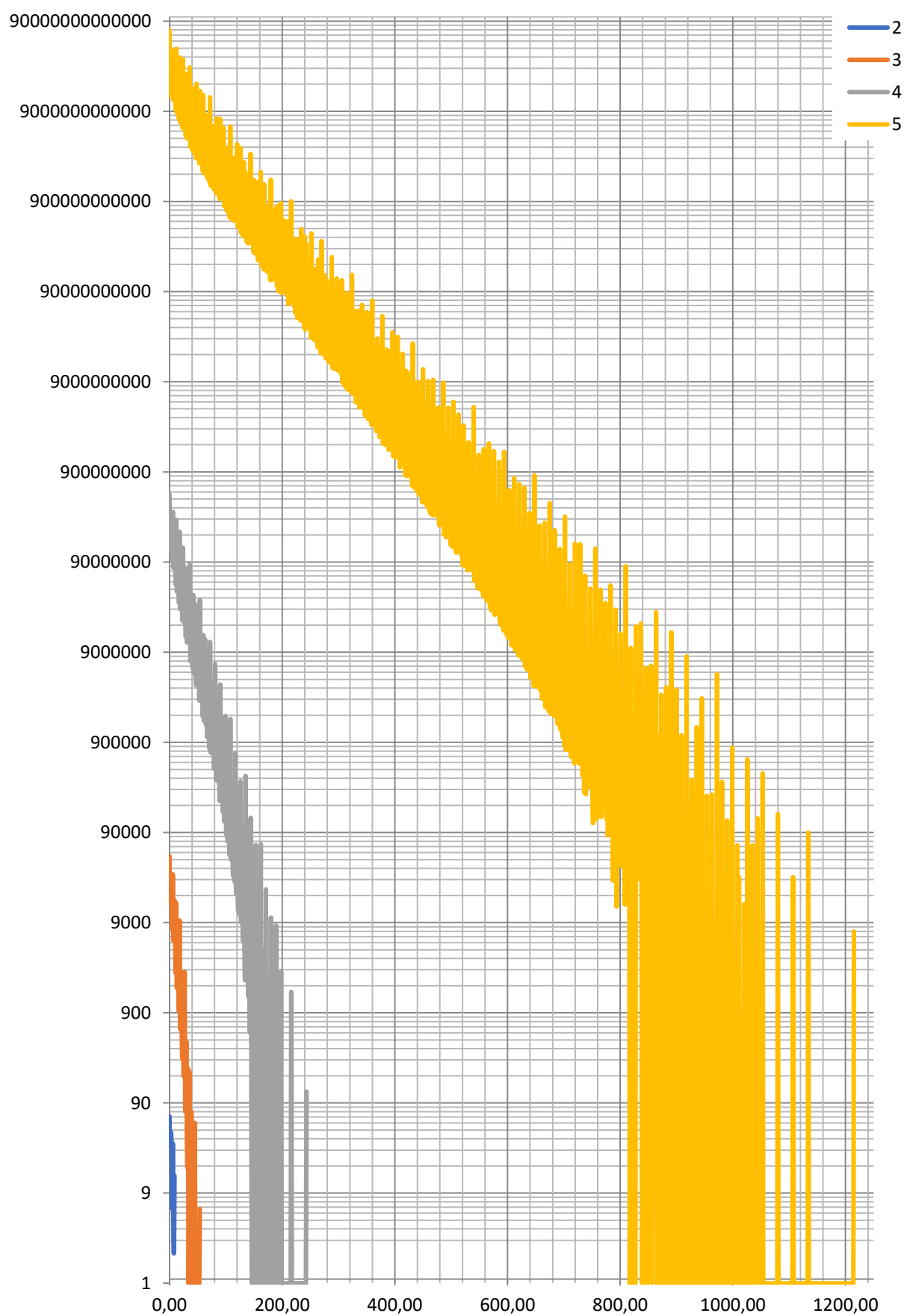


Рисунок П.2.1. Зависимость логарифма количества матриц от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.2.1–П.2.4

Приложение 3

Матрицы с элементами из множества {0, 1, 2, 3, 4}

Таблица П.3.1

Распределение детерминантов матриц порядка 2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
113	46	72	58	86	18	56	10	54	26	12	4	42	4	4	2	18

Таблица П.3.2

Распределение детерминантов матриц порядка 3

0	1	2	3	4	5
228737	53160	106242	78696	145230	40092
6	7	8	9	10	11
126846	30948	135750	57612	58758	21480
12	13	14	15	16	17
136170	18738	39888	31698	91194	11916
18	19	20	21	22	23
58116	10278	47292	18414	20574	7542
24	25	26	27	28	29
78912	7038	15912	16938	26460	4572
30	31	32	33	34	35
21906	4086	37212	7668	7488	3324
36	37	38	39	40	41
33444	2340	5436	5544	16044	1620
42	43	44	45	46	47
7848	1440	8406	3492	2628	972
48	49	50	51	52	53
22320	840	1836	1242	5328	468
54	55	56	57	58	59
2010	432	5340	612	792	216
60	61	62	63	64	65
3510	216	432	396	5874	48
66	67	68	69	70	71
450	108	864	90	144	36
72	73	74	75	76	77
1290	36	72	108	360	0
78	79	80	81	82	83
18	36	594	6	36	0
84	85	86	87	88	89
288	0	0	18	216	0

Окончание табл. П.3.2

90	91	92	93	94	95
0	12	0	0	0	0
96	97	98	99	100	101
198	0	0	0	72	0
102	103	104	105	106	107
0	0	0	0	0	0
108	109	110	111	112	113
0	0	0	0	54	0
114	115	116	117	118	119
0	0	0	0	0	0
120	121	122	123	124	125
0	0	0	0	0	0
126	127	128			
0	0	6			

Таблица П.3.3

Распределение детерминантов матриц порядка 4

0	1	2	3	4
9290375857	1485231240	3318451584	2319731448	4851442272
5	6	7	8	9
1510426488	4712779776	1307904312	5354583024	2183516736
10	11	12	13	14
2947145376	1075830696	6110220768	994275576	2415254976
15	16	17	18	19
1794809664	4770488616	833479920	3676283232	776623728
20	21	22	23	24
3438508896	1384694232	1778765088	677142960	5499975696
25	26	27	28	29
767327016	1567239168	1302769656	2586508608	557045568
30	31	32	33	34
2645625024	525176880	3337736112	932864904	1197593952
35	36	37	38	39
627680232	3635535264	436628784	1065511104	787045704
40	41	42	43	44
2595693648	388091568	1788130848	366748080	1611514944
45	46	47	48	49
888928656	848378496	327232464	3506068608	353322360

Продолжение табл. П.3.3

50	51	52	53	54
916995168	540955728	1316020560	276409152	1431851040
55	56	57	58	59
342174456	1679222640	460527552	613793376	234731088
60	61	62	63	64
2037494832	223101648	554170752	521955792	1663891752
65	66	67	68	69
261582720	924710976	190360800	859107168	337060800
70	71	72	73	74
609241248	171418464	2031539712	163060128	407744928
75	76	77	78	79
345969504	710383056	183174816	693686208	139980672
80	81	82	83	84
1211298480	330281184	334533600	126355968	1119484176
85	86	87	88	89
149064768	303507648	215349264	780822000	108889632
90	91	92	93	94
678538464	129770544	489424848	187463808	249863616
95	96	97	98	99
115198272	1374311232	89310528	260329920	214798536
100	101	102	103	104
482580048	80870688	373134528	76847616	557573616
105	106	107	108	109
182233776	186377760	69621984	733236144	66413088
110	111	112	113	114
218177856	120314016	605103960	60159168	279078048
115	116	117	118	119
69244128	285988608	144099120	139584384	60809520
120	121	122	123	124
730858656	54913248	127143072	89754048	240416880
125	126	127	128	129
54302400	272021952	42452064	476000064	78100848
130	131	132	133	134
135785568	38480544	377829024	42810624	95377248
135	136	137	138	139
104870592	271040736	33262560	154988352	31542912

Продолжение табл. П.3.3

140	141	142	143	144
220988832	58168224	78483456	36035952	558324888
145	146	147	148	149
32766336	71401824	55374624	141520992	24714720
150	151	152	153	154
138595968	23410656	193482336	54525024	73573152
155	156	157	158	159
25468992	230309760	20251008	53632224	36638208
160	161	162	163	164
266113056	20908512	102896064	17310240	99884544
165	166	167	168	169
41096160	44013888	15667200	259089600	17493696
170	171	172	173	174
48615264	34015968	84067008	13501728	64471104
175	176	177	178	179
17378688	162785760	23199984	32865408	11555712
180	181	182	183	184
165234720	11021184	38692032	20146032	97745280
185	186	187	188	189
11843424	47355552	10829088	59210784	24032424
190	191	192	193	194
29446272	8480160	230190720	8130816	22142016
195	196	197	198	199
19512768	56793696	7291584	42539616	6903360
200	201	202	203	204
80221536	12687840	18149184	7064064	73352592
205	206	207	208	209
7097184	16432704	12632256	89237376	6067296
210	211	212	213	214
34663392	5030208	34284384	9052128	13408704
215	216	217	218	219
5343264	90829536	4985376	12076992	7750080
220	221	222	223	224
34920288	4708416	18668448	3642624	78941952
225	226	227	228	229
10652040	9844416	3254400	41685984	3146112

Продолжение табл. П.3.3

230	231	232	233	234
10279296	6516768	35439552	2799360	16476864
235	236	237	238	239
3183552	19747872	4968864	8796288	2346624
240	241	242	243	244
75892824	2301120	7002432	4852248	16626816
245	246	247	248	249
2722176	10044000	2267328	24705504	3418848
250	251	252	253	254
6356160	1685376	29557248	1769184	4715712
255	256	257	258	259
3778128	46371000	1463040	7068960	1526112
260	261	262	263	264
13512768	3077856	3799296	1209024	28877904
265	266	267	268	269
1421568	4100736	2106720	9481536	1032192
270	271	272	273	274
7233888	965952	22663008	2364432	2730816
275	276	277	278	279
1161792	12344400	862272	2442240	1809216
280	281	282	283	284
15212544	729792	3689568	699840	6305472
285	286	287	288	289
1723680	2317056	680160	30012864	648288
290	291	292	293	294
2005056	1086336	5229216	526464	3057984
295	296	297	298	299
595008	8278560	1121472	1400256	423360
300	301	302	303	304
9387936	472800	1230912	761760	11505216
305	306	307	308	309
446976	2153088	352512	4145376	672768
310	311	312	313	314
1192896	297792	8860368	323712	857664
315	316	317	318	319
947520	3040704	252864	1329408	262368

Продолжение табл. П.3.3

320	321	322	323	324	325	326
12077208	465120	743616	250272	4126992	383808	609984
327	328	329	330	331	332	333
386784	4059072	207360	1185120	167616	1891008	371808
334	335	336	337	338	339	340
483840	179712	9749376	157248	424320	273888	1887840
341	342	343	344	345	346	347
137088	747360	142848	2630304	283392	347904	104256
348	349	350	351	352	353	354
2184048	107712	465984	207768	5471712	93312	433152
355	356	357	358	359	360	361
114624	1026432	166464	233280	69120	3402432	94752
362	363	364	365	366	367	368
199872	131040	1110720	81792	282528	55872	2469024
369	370	371	372	373	374	375
128736	205056	46080	1151136	54720	152064	161568
376	377	378	379	380	381	382
1251648	38688	217440	44928	705024	85536	118080
383	384	385	386	387	388	389
27648	4290864	51264	84672	61632	468288	27648
390	391	392	393	394	395	396
165024	32832	966240	45216	72576	26496	639936
397	398	399	400	401	402	403
33408	58752	54432	1871136	16704	72864	17664
404	405	406	407	408	409	410
289728	45024	51264	11232	839520	19008	46656
411	412	413	414	415	416	417
28224	265536	9792	59328	14400	1126848	28800
418	419	420	421	422	423	424
44928	6912	444096	16128	25344	19008	388512
425	426	427	428	429	430	431
12672	28512	9792	145152	18336	32256	4032
432	433	434	435	436	437	438
830304	11520	10368	12672	138816	2304	15552
439	440	441	442	443	444	445
7488	263520	5328	11136	2304	164448	10368

Продолжение табл. П.3.3

446	447	448	449	450	451	452	453
10368	6912	1036752	2304	19008	2880	69696	8064
454	455	456	457	458	459	460	461
11520	2304	227232	4032	3456	2016	103104	576
462	463	464	465	466	467	468	469
3456	2304	284352	8352	4608	0	60384	4032
470	471	472	473	474	475	476	477
5760	1728	98208	0	2880	5184	25344	1152
478	479	480	481	482	483	484	485
4032	0	393120	3168	1152	2016	35136	1728
486	487	488	489	490	491	492	493
3456	576	47232	1152	1728	0	44928	1152
494	495	496	497	498	499	500	501
192	72	142272	576	1152	0	15552	1152
502	503	504	505	506	507	508	509
2304	0	31872	1152	0	1152	29952	0
510	511	512	513	514	515	516	517
576	0	196944	0	1152	0	8640	1152
518	519	520	521	522	523	524	525
576	288	30240	576	0	0	2304	0
526	527	528	529	530	531	532	533
576	0	78192	576	0	0	5760	192
534	535	536	537	538	539	540	541
0	0	5472	0	0	0	6912	0
542	543	544	545	546	547	548	549
0	0	72576	0	0	0	0	0
550	551	552	553	554	555	556	557
0	0	8064	576	0	0	9216	0
558	559	560	561	562	563	564	565
0	192	14976	144	0	0	1152	0
566	567	568	569	570	571	572	573
0	0	2304	0	0	0	2304	0
574	575	576	577	578	579	580	581
0	0	37536	0	0	0	0	0
582	583	584	585	586	587	588	589
0	0	0	0	0	0	0	0

Окончание табл. П.3.3

590	591	592	593	594	595	596	597	598	599
0	0	15552	0	0	0	0	0	0	0
600	601	602	603	604	605	606	607	608	609
0	0	0	0	2304	0	0	0	8640	0
610	611	612	613	614	615	616	617	618	619
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
620	621	622	623	624	625	626	627	628	629
0	0	0	0	816	0	0	0	0	0
630	631	632	633	634	635	636	637	638	639
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
640	641	642	643	644	645	646	647	648	649
7968	0	0	0	0	0	0	0	0	0
650	651	652	653	654	655	656	657	658	659
0	0	0	0	0	0	2592	0	0	0
660	661	662	663	664	665	666	667	668	669
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
670	671	672	673	674	675	676	677	678	679
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
680	681	682	683	684	685	686	687	688	689
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
690	691	692	693	694	695	696	697	698	699
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
700	701	702	703	704	705	706	707	708	709
0	0	0	0	1536	0	0	0	0	0
710	711	712	713	714	715	716	717	718	719
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
720	721	722	723	724	725	726	727	728	729
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
730	731	732	733	734	735	736	737	738	739
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
740	741	742	743	744	745	746	747	748	749
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
750	751	752	753	754	755	756	757	758	759
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
760	761	762	763	764	765	766	767	768	
0	0	0	0	0	0	0	0	120	

Таблица П.3.4

Суммарные зависимости данных в таблицах П.3.1–П.3.3,
вычисляемые по формулам 1.4–1.6

Порядок	2	3	4
Factor	2,96E+03	2,55E+07	6,13E+12
Ves	1,85E+02	1,99E+05	7,98E+09
det _{средний}	4,74E+00	1,31E+01	4,02E+01

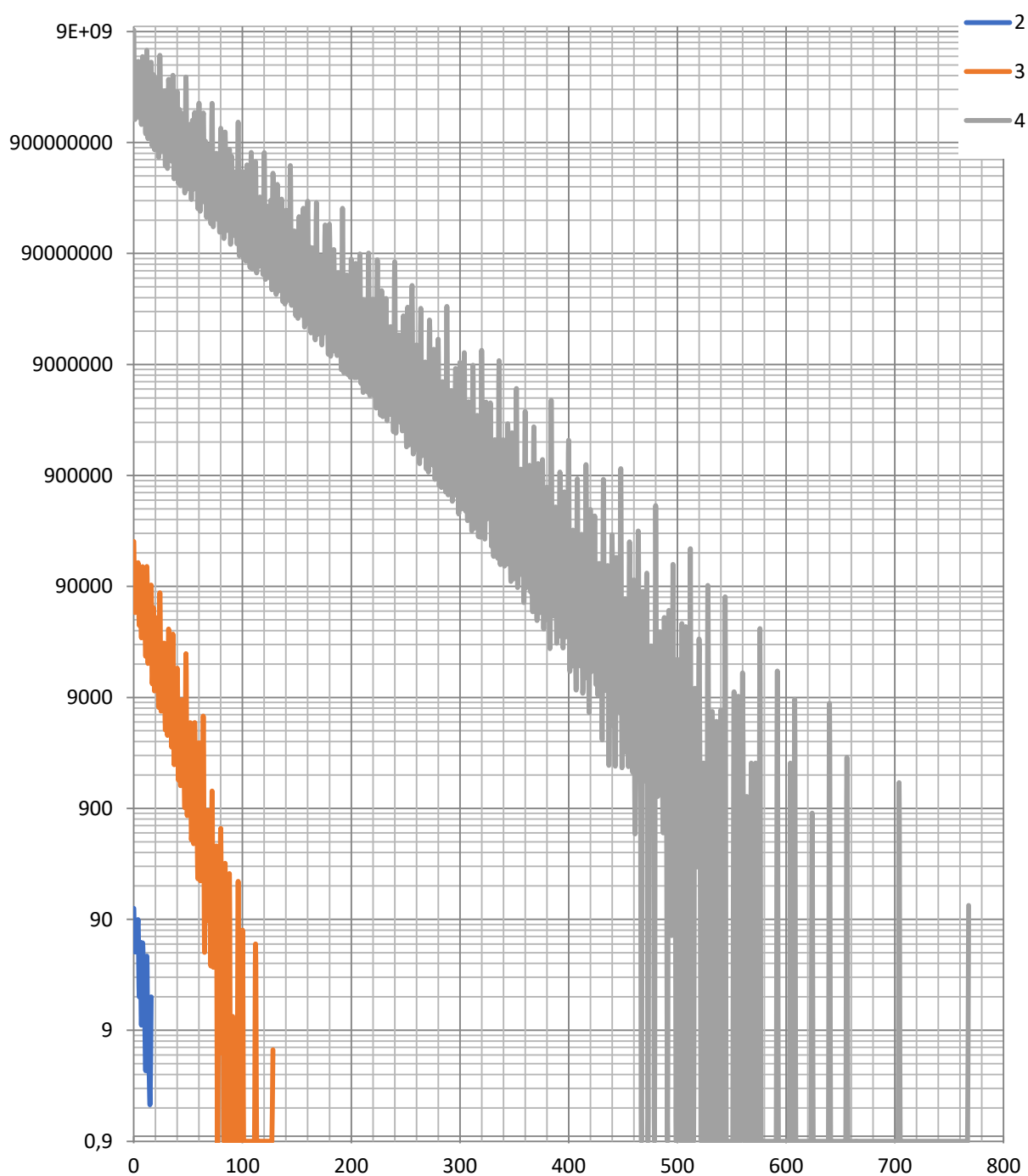


Рисунок П.3.1. Зависимость логарифма количества матриц от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.3.1–П.3.3

Матрицы с элементами из множества {0, 1, 2, 3, 4, 5}

Таблица П.4.1

Распределение детерминантов матриц порядка 2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
170	78	104	90	118	90	84	34	78	44	76	24	66
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
16	16	58	36	12	8	8	48	6	4	4	2	22

Таблица П.4.2

Распределение детерминантов матриц порядка 3

0	1	2	3	4	5	6	7
716214	196962	324312	269046	407454	259674	385956	155580
8	9	10	11	12	13	14	15
381072	217812	352230	129192	409554	114000	191652	266418
16	17	18	19	20	21	22	23
291534	97614	233328	88056	338730	126342	133740	73296
24	25	26	27	28	29	30	31
271494	140454	107064	98694	147294	55134	233874	50886
32	33	34	35	36	37	38	39
155634	77706	79110	87744	158196	40590	66330	59292
40	41	42	43	44	45	46	47
188412	34740	80982	32544	80448	102726	46818	27684
48	49	50	51	52	53	54	55
115074	26850	97488	39024	54636	22356	45066	49356
56	57	58	59	60	61	62	63
51564	30042	26244	17532	125154	16092	21744	24138
64	65	66	67	68	69	70	71
46230	34716	25740	12492	31392	18072	37740	10692
72	73	74	75	76	77	78	79
31476	10008	12744	50976	21942	8580	12312	7848
80	81	82	83	84	85	86	87
57960	8328	8532	6516	17280	20196	7020	6264
88	89	90	91	92	93	94	95
12744	4680	19530	4332	10692	4536	4608	14220
96	97	98	99	100	101	102	103
9108	3204	3708	3258	34974	2592	2916	2376
104	105	106	107	108	109	110	111
4188	10674	2124	1872	3474	1764	8046	1620

Окончание табл. П.4.2

112	113	114	115	116	117	118	119
2940	1332	1278	6858	1980	1044	900	864
120	121	122	123	124	125	126	127
6462	756	648	774	1296	9852	444	432
128	129	130	131	132	133	134	135
1086	450	2244	360	522	372	180	1836
136	137	138	139	140	141	142	143
342	288	144	216	2160	162	36	180
144	145	146	147	148	149	150	151
324	1152	72	36	288	144	900	36
152	153	154	155	156	157	158	159
48	72	0	792	36	36	36	36
160	161	162	163	164	165	166	167
918	36	0	36	108	324	0	0
168	169	170	171	172	173	174	175
18	36	144	0	0	36	0	450
176	177	178	179	180	181	182	183
6	0	0	0	288	0	0	0
184	185	186	187	188	189	190	191
18	216	0	0	0	12	0	0
192	193	194	195	196	197	198	199
0	0	0	0	0	0	0	0
200	201	202	203	204	205	206	207
198	0	0	0	0	72	0	0
208	209	210	211	212	213	214	215
0	0	0	0	0	0	0	0
216	217	218	219	220	221	222	223
0	0	0	0	0	0	0	0
224	225	226	227	228	229	230	231
0	54	0	0	0	0	0	0
232	233	234	235	236	237	238	239
0	0	0	0	0	0	0	0
240	241	242	243	244	245	246	247
0	0	0	0	0	0	0	0
248	249	250					
0	0	6					

Таблица П.4.3

Распределение детерминантов матриц порядка 4

0	1	2	3
85050353952	16488377496	30124282368	24027118584
4	5	6	7
39541546128	22180906536	41809660032	16750196808
8	9	10	11
42385078608	24032582976	37564759680	14999365944
12	13	14	15
51231477936	14223069336	27526083168	28643280000
16	17	18	19
39899600520	13164933960	37724378208	12645498120
20	21	22	23
43925369904	20062098648	23178641280	11744237280
24	25	26	27
48514251984	17726604888	21320458560	18486680760
28	29	30	31
30080014320	10573298880	41505779328	10246333392
32	33	34	35
32354441232	16076146824	18718609248	16029681240
36	37	38	39
39141054336	9370533840	17534893152	14494700616
40	41	42	43
38345768064	8841283248	26787275136	8599389648
44	45	46	47
23038646304	21122724840	15498544320	8127617856
48	49	50	51
37089207744	8989534200	23229725952	12198528888
52	53	54	55
20208611472	7495892736	22769621664	12058050072
56	57	58	59
23463408768	11182367184	12972244128	6917793552
60	61	62	63
38527652592	6738199296	12275343552	12435955344
64	65	66	67
21418817496	10505923176	18518849568	6231545088
68	69	70	71
16284772224	9482995968	18728471328	5925090384

Продолжение табл. П.4.3

72	73	74	75
27666769824	5780176320	10478577408	14687456328
76	77	78	79
14616280608	6773879208	15529076928	5366686464
80	81	82	83
25569126576	9021741528	9452969856	5107525056
84	85	86	87
21124643904	8311279680	8993487744	7459925760
88	89	90	91
15157625520	4743937728	21626334048	5608005960
92	93	94	95
11895178224	6927547680	8139974688	7386454896
96	97	98	99
20889175824	4314713040	8795590368	7656576096
100	101	102	103
18151866000	4115946816	11473650720	4021812864
104	105	106	107
12225087552	10669113504	7042066848	3839225184
108	109	110	111
15868147872	3753079488	11514566304	5603252544
112	113	114	115
12773066256	3583876320	9883166784	5900978016
116	117	118	119
8815307856	6111547608	6106697568	4025720688
120	121	122	123
22319323776	3597589728	5828251104	4882470192
124	125	126	127
8028915888	5896457952	10238054976	3061526400
128	129	130	131
10130391696	4566992832	9087592224	2929937472
132	133	134	135
11550350976	3419282784	5071306464	7908977688
136	137	138	139
8457777600	2744489376	7409541024	2684875392
140	141	142	143
11943506304	3994113456	4632608736	3023007984

Продолжение табл. П.4.3

144	145	146	147
12782919456	4267352448	4431142944	4229900208
148	149	150	151
6126402048	2410736544	11514901056	2358361440
152	153	154	155
7041155952	4088086224	4966209120	3865236192
156	157	158	159
8617018992	2212606368	3876102720	3287655936
160	161	162	163
11426427984	2494859616	6135383712	2076354720
164	165	166	167
5132288832	5645437632	3544680384	1990512576
168	169	170	171
9164119392	2099286096	6030740160	3343297152
172	173	174	175
4707162288	1868997600	4825853280	3966765888
176	177	178	179
6143406096	2708217792	3100112640	1755049248
180	181	182	183
11589947952	1718918208	3553794624	2539165392
184	185	186	187
4930678896	2903462784	4206592512	1896843600
188	189	190	191
3957225984	3005230968	4918646880	1549326816
192	193	194	195
7255088184	1517198688	2603293920	4180596960
196	197	198	199
4060128816	1456295040	4299531648	1426125312
200	201	202	203
7843471872	2095164864	2385867168	1565089152
204	205	206	207
5104842864	2408697648	2284957728	2253573312
208	209	210	211
4250423136	1500125760	6205634400	1260632736
212	213	214	215
3067549920	1846960128	2094655968	2200340736

Продолжение табл. П.4.3

216	217	218	219
5341126320	1351092192	2006678880	1736034192
220	221	222	223
5372101824	1315495728	2813663808	1114539840
224	225	226	227
3888619248	3833681568	1840274496	1070431200
228	229	230	231
3918658512	1048564224	3303851904	1847257872
232	233	234	235
2884076832	1006317504	2801520000	1833177888
236	237	238	239
2379597792	1439235936	1934823360	946919232
240	241	242	243
7349684736	928016928	1697082912	1488496536
244	245	246	247
2187835296	1839604560	2153007936	1003711680
248	249	250	251
2429841216	1266784704	3176344032	838348128
252	253	254	255
3491648688	944485056	1361413728	2425392144
256	257	258	259
2613327480	789129216	1883958624	875596608
260	261	262	263
3606329472	1224046800	1250925984	741845376
264	265	266	267
3076500240	1405973952	1430033856	1044538272
268	269	270	271
1699680960	698207616	3355456032	684257472
272	273	274	275
2201692080	1171000608	1101328128	1654970616
276	277	278	279
2328261360	644229504	1054622016	1005706656
280	281	282	283
3505372320	618324480	1445245344	605600640
284	285	286	287
1440523488	1836082560	1119928032	656773344

Продолжение табл. П.4.3

288	289	290	291	292
2682577776	620734752	1812054528	811814832	1328936928
293	294	295	296	297
547507008	1440432192	1077101136	1465115904	885047400
298	299	300	301	302
853175520	585872352	4052780928	569404608	817193088
303	304	305	306	307
714189024	1575658944	986290560	1260596160	475318368
308	309	310	311	312
1337776704	670992480	1498050432	456367968	1760201568
313	314	315	316	317
446828832	719111232	1550187120	1037825280	429685056
318	319	320	321	322
968578848	462192912	2624919600	590461920	785378496
323	324	325	326	327
476053440	1431537360	1086476160	633470976	554884704
328	329	330	331	332
1042467696	427292736	1816316928	372716640	877142304
333	334	335	336	337
561399696	581433696	756268704	1610186328	350694720
338	339	340	341	342
588703008	487270656	1774557360	368047872	845617152
343	344	345	346	347
370844544	878820480	1054958688	511946496	316684512
348	349	350	351	352
1022205600	310217760	1368514656	486497880	998958960
353	354	355	356	357
297583488	648298368	636017472	678547296	490682496
358	359	360	361	362
449727264	279983808	2167814544	300160800	431480160
363	364	365	366	367
399468384	717825504	584471232	567377856	258124608
368	369	370	371	372
809025936	380014272	853930944	278169696	784426176
373	374	375	376	377
242563392	441883008	1060375248	624314160	251053536

Продолжение табл. П.4.3

378	379	380	381	382
621892512	228332736	1236143616	309489408	348022656
383	384	385	386	387
219191040	889364568	556180752	333016128	311930928
388	389	390	391	392
484490592	205933536	968721504	238896576	578342112
393	394	395	396	397
272252448	305343648	451244160	675192480	189773568
398	399	400	401	402
292481856	316597344	1541881536	182075328	377974656
403	404	405	406	407
191295456	407787264	593000424	305759808	185332608
408	409	410	411	412
605027376	167519808	584574624	225238752	375010848
413	414	415	416	417
179780928	380352960	377913024	477947760	210735072
418	419	420	421	422
276525312	150936768	1153349616	148029696	225448128
423	424	425	426	427
210024288	369328896	505613184	288004608	155808192
428	429	430	431	432
314554176	203005488	483285600	133369920	532986384
433	434	435	436	437
130341888	224679744	429549840	289662048	151491072
438	439	440	441	442
252034272	122702976	781431984	200783496	200469696
443	444	445	446	447
117628992	350080704	287280000	172947456	152509536
448	449	450	451	452
361135080	110390976	708954528	116255088	242595072
453	454	455	456	457
141552000	158292288	294298080	353087424	101642112
458	459	460	461	462
151331904	151946616	599997600	97296192	238878144
463	464	465	466	467
95277312	269456448	323937072	138530880	91522944

Продолжение табл. П.4.3

468	469	470	471	472
288467616	99848544	330874560	116744544	216070272
473	474	475	476	477
91558080	167574816	342733872	213248352	116499168
478	479	480	481	482
120859776	80591040	695845296	83593920	115873344
483	484	485	486	487
130896000	184118976	202018464	160270464	74048832
488	489	490	491	492
179964864	95913792	297408000	70904448	202571568
493	494	495	496	497
75882240	112970688	255793464	189668544	74376480
498	499	500	501	502
126546912	65033856	601635648	83666016	92480256
503	504	505	506	507
62303616	233818608	168407136	107309952	81660624
508	509	510	511	512
128467296	58431744	290498112	64053792	163210104
513	514	515	516	517
84403968	80490240	154523808	151411824	57017952
518	519	520	521	522
87166656	68918112	343007280	51391296	105437088
523	524	525	526	527
50208768	107765280	295019448	70191936	53077824
528	529	530	531	532
173552352	53712288	184548960	63422496	115279200
533	534	535	536	537
47265408	82730304	128480256	103185504	56122272
538	539	540	541	542
61005312	50132448	331871808	41324544	58428864
543	544	545	546	547
52340832	111599616	118026720	86332032	38750976
548	549	550	551	552
82556064	51798816	236577408	41661120	119857104
553	554	555	556	557
40694400	50666688	137369088	75047328	34727616

Продолжение табл. П.4.3

558	559	560	561	562
68451264	35445120	269096160	46881360	46267200
563	564	565	566	567
32520960	85881456	97762176	44004672	50744256
568	569	570	571	572
70773984	30385728	158945088	29848896	70389120
573	574	575	576	577
37211616	45152640	156270864	104021640	27947520
578	579	580	581	582
39309696	34765344	177454944	29864448	46805760
583	584	585	586	587
27540000	59538240	104768304	34806528	25033536
588	589	590	591	592
73522656	27591168	101766816	30427776	63435072
593	594	595	596	597
23269824	48477600	83491344	47820384	28331136
598	599	600	601	602
35215872	21775104	256865184	21357504	32234112
603	604	605	606	607
27727776	42561504	68934240	34677792	19991808
608	609	610	611	612
53059968	29877552	83378304	19782240	53188704
613	614	615	616	617
18524160	24827904	76735872	48335616	17960832
618	619	620	621	622
29887488	17360640	122436000	26023104	22559616
623	624	625	626	627
18415872	52989648	118658568	21575808	22195872
628	629	630	631	632
32187168	16986240	97402560	15308928	34128000
633	634	635	636	637
18571968	19520640	50036256	36508032	16512480
638	639	640	641	642
21378816	18253872	119272752	13515264	22384512
643	644	645	646	647
13245696	32944896	55714176	17716032	12733056

Продолжение табл. П.4.3

648	649	650	651	652	653
37941312	12940416	89913216	18450144	24624288	11808000
654	655	656	657	658	659
19048320	41876064	29688864	14882976	16145280	10996416
660	661	662	663	664	665
94580064	10847232	13848768	13635552	22963104	44547264
666	667	668	669	670	671
18247680	12275136	19890432	12045600	45192096	10118016
672	673	674	675	676	677
34272816	9401472	11931264	70997400	19307616	9099072
678	679	680	681	682	683
14019552	9749952	67860432	10551744	12791232	8359488
684	685	686	687	688	689
22037568	31999104	11492352	9781056	19027968	8136096
690	691	692	693	694	695
47427840	7665408	15474528	11608224	9225792	28967328
696	697	698	699	700	701
20135088	7672608	8727552	8415648	91210512	6820416
702	703	704	705	706	707
11963424	7490880	18016080	30674304	7983360	6930432
708	709	710	711	712	713
14727168	6194304	29734848	7827696	12690720	7445088
714	715	716	717	718	719
10153152	24941712	11185344	6820416	6766272	5496192
720	721	722	723	724	725
62796480	5962176	6607680	6262848	10180800	39940704
726	727	728	729	730	731
8447904	5034816	11726496	6355008	24829344	4883328
732	733	734	735	736	737
11120256	4635072	5532480	25698384	12702192	4616640
738	739	740	741	742	743
7116192	4335552	38319840	5334144	5734080	4118976
744	745	746	747	748	749
10969344	18432576	4788288	5035392	8069184	4222656
750	751	752	753	754	755
42055584	3807360	8867328	4301856	4747392	15931872

Продолжение табл. П.4.3

756	757	758	759	760	761
10241088	3514752	3996288	4766112	30035712	3390912
762	763	764	765	766	767
4765248	3528000	6216768	18360000	3662208	3215424
768	769	770	771	772	773
9378936	3012480	18922752	3414240	5663808	2845440
774	775	776	777	778	779
4296960	27003840	5698080	4080672	3104064	2948160
780	781	782	783	784	785
25896384	2751264	3361536	3373344	6414720	12133152
786	787	788	789	790	791
3453984	2446848	4618944	2747232	13496544	2518272
792	793	794	795	796	797
6712320	2380512	2484288	12705408	4152384	2152512
798	799	800	801	802	803
3198816	2094624	40412784	2500704	2304000	2087424
804	805	806	807	808	809
4350240	12272544	2426688	2210688	3669984	1843776
810	811	812	813	814	815
13605696	1839744	3836160	1991808	2385792	9290592
816	817	818	819	820	821
4733808	1702848	1801728	2197224	17082432	1600128
822	823	824	825	826	827
2114496	1529856	3051648	17100816	1838592	1448064
828	829	830	831	832	833
3925920	1464192	8720928	1619424	3373536	1520064
834	835	836	837	838	839
1799712	7362144	2511456	1660896	1393344	1231488
840	841	842	843	844	845
17165808	1359360	1317888	1344672	2197440	7126368
846	847	848	849	850	851
1595232	1255680	2531808	1259136	12936576	1550592
852	853	854	855	856	857
2393280	1071936	1236672	7479552	1970784	1016064
858	859	860	861	862	863
1397952	958464	10048896	1417536	1017216	922752

Продолжение табл. П.4.3

864	865	866	867	868	869	870
2742288	5883552	913536	1010304	1836288	861120	6878880
871	872	873	874	875	876	877
859584	1571040	985248	878784	13892688	1702080	820800
878	879	880	881	882	883	884
770112	818496	9878256	713088	1106496	701568	1362432
885	886	887	888	889	890	891
4929408	692928	700416	1679616	733248	4601664	860544
892	893	894	895	896	897	898
1134720	606432	733536	4135968	1495488	737568	569088
899	900	901	902	903	904	905
647424	15748176	555840	718848	674784	995040	3729312
906	907	908	909	910	911	912
656928	539136	887040	558432	4016352	505152	1254336
913	914	915	916	917	918	919
487296	447552	3683808	797760	509760	544320	435456
920	921	922	923	924	925	926
6584256	512640	418752	422784	940896	7768320	402048
927	928	929	930	931	932	933
464832	859104	393984	3485952	413280	670464	398592
934	935	936	937	938	939	940
349632	2854656	762624	353664	370944	346464	4463136
941	942	943	944	945	946	947
333504	391968	475200	651072	3343584	310464	290880
948	949	950	951	952	953	954
603072	286272	4646208	321408	560160	272448	317088
955	956	957	958	959	960	961
2250144	435456	343584	228672	263808	4771200	268128
962	963	964	965	966	967	968
249984	271296	391680	2052000	313920	233856	368928
969	970	971	972	973	974	975
228288	1888992	226368	433152	244224	175680	3684504
976	977	978	979	980	981	982
416832	199296	194688	179712	3030912	208800	170496
983	984	985	986	987	988	989
173376	440208	1671264	168768	189504	266784	175104

Продолжение табл. П.4.3

990	991	992	993	994	995	996
2032128	149760	349632	175104	160704	1471392	305856
997	998	999	1000	1001	1002	1003
158400	119808	149184	6885408	161856	160704	133056
1004	1005	1006	1007	1008	1009	1010
220032	1390176	98496	107520	302016	134208	1131840
1011	1012	1013	1014	1015	1016	1017
125568	222912	108288	116928	1297440	158688	115776
1018	1019	1020	1021	1022	1023	1024
85248	99648	2111040	119232	101952	132480	170664
1025	1026	1027	1028	1029	1030	1031
3094176	91200	82368	137088	112320	921024	92736
1032	1033	1034	1035	1036	1037	1038
192960	75456	73152	1272960	141696	98496	59904
1039	1040	1041	1042	1043	1044	1045
76032	1659456	85536	62784	76608	135360	835200
1046	1047	1048	1049	1050	1051	1052
54144	70272	102240	61632	2132064	70848	95616
1053	1054	1055	1056	1057	1058	1059
63360	58176	730080	171504	76032	44352	47232
1060	1061	1062	1063	1064	1065	1066
1151712	54144	47232	45504	86976	750816	31104
1067	1068	1069	1070	1071	1072	1073
52416	78912	50688	568512	50976	92064	60480
1074	1075	1076	1077	1078	1079	1080
35712	1440672	72576	57600	32256	33984	1117728
1081	1082	1083	1084	1085	1086	1087
48672	26496	32256	54720	585216	28512	31680
1088	1089	1090	1091	1092	1093	1094
54528	42624	415008	30528	76608	33984	24768
1095	1096	1097	1098	1099	1100	1101
532800	50400	39744	16128	26496	1634880	40896
1102	1103	1104	1105	1106	1107	1108
27072	22464	74880	432432	12672	25920	32256
1109	1110	1111	1112	1113	1114	1115
25344	401184	22464	38304	27072	16128	357120

Продолжение табл. П.4.3

1116	1117	1118	1119	1120	1121	1122
24768	31680	10944	19584	654624	26688	21312
1123	1124	1125	1126	1127	1128	1129
14976	24768	1723344	10944	16704	31968	12672
1130	1131	1132	1133	1134	1135	1136
246528	19728	20160	10368	11904	262080	32928
1137	1138	1139	1140	1141	1142	1143
17856	6336	13824	523200	17856	9792	12096
1144	1145	1146	1147	1148	1149	1150
21312	251136	12672	15552	15552	12096	754848
1151	1152	1153	1154	1155	1156	1157
10944	32832	10944	7488	244800	25920	14976
1158	1159	1160	1161	1162	1163	1164
8064	6240	305280	18432	6912	5184	13248
1165	1166	1167	1168	1169	1170	1171
214848	4032	6912	12672	12672	149184	5760
1172	1173	1174	1175	1176	1177	1178
10368	9216	4608	577536	21600	10368	4032
1179	1180	1181	1182	1183	1184	1185
4608	214272	10368	5184	6912	8064	177984
1186	1187	1188	1189	1190	1191	1192
2304	4608	2304	11520	123840	4032	10656
1193	1194	1195	1196	1197	1198	1199
4032	4032	124992	1152	10176	2880	4032
1200	1201	1202	1203	1204	1205	1206
714240	6912	5184	4608	8064	86976	1152
1207	1208	1209	1210	1211	1212	1213
2304	5184	3456	42624	3456	5184	1728
1214	1215	1216	1217	1218	1219	1220
1728	110016	3312	9216	1152	2304	145152
1221	1222	1223	1224	1225	1226	1227
10944	3456	1152	6336	373536	1152	2880
1228	1229	1230	1231	1232	1233	1234
3456	1152	65088	2880	3456	1728	1728
1235	1236	1237	1238	1239	1240	1241
57024	9216	2304	0	2880	139680	2880

Продолжение табл. П.4.3

1242	1243	1244	1245	1246	1247	1248	1249
1152	576	1728	108864	576	0	1152	2304
1250	1251	1252	1253	1254	1255	1256	1257
350592	1728	1152	1152	0	43200	5472	4608
1258	1259	1260	1261	1262	1263	1264	1265
0	0	51744	4032	2304	1728	2016	59040
1266	1267	1268	1269	1270	1271	1272	1273
0	1152	1728	2016	10944	0	1152	1344
1274	1275	1276	1277	1278	1279	1280	1281
1152	224784	0	3456	576	0	40896	3168
1282	1283	1284	1285	1286	1287	1288	1289
0	0	1152	33696	1152	0	1728	1152
1290	1291	1292	1293	1294	1295	1296	1297
32256	576	1344	0	576	21888	1152	1152
1298	1299	1300	1301	1302	1303	1304	1305
0	0	237024	576	0	0	2016	28800
1306	1307	1308	1309	1310	1311	1312	1313
576	1152	0	0	9216	576	0	0
1314	1315	1316	1317	1318	1319	1320	1321
0	13824	576	1152	0	0	56736	576
1322	1323	1324	1325	1326	1327	1328	1329
0	192	0	116064	0	576	0	0
1330	1331	1332	1333	1334	1335	1336	1337
8064	0	0	0	0	12672	1152	1152
1338	1339	1340	1341	1342	1343	1344	1345
0	0	19008	1152	0	0	1224	25920
1346	1347	1348	1349	1350	1351	1352	1353
0	0	0	0	79200	0	0	0
1354	1355	1356	1357	1358	1359	1360	1361
0	2592	0	1152	0	0	4608	1152
1362	1363	1364	1365	1366	1367	1368	1369
0	0	0	27648	576	576	0	0
1370	1371	1372	1373	1374	1375	1376	1377
0	0	0	576	0	68784	0	0
1378	1379	1380	1381	1382	1383	1384	1385
0	0	12672	576	0	0	288	2304

Продолжение табл. П.4.3

1386	1387	1388	1389	1390	1391	1392	1393	1394	1395
192	0	0	0	3168	0	0	0	0	4608
1396	1397	1398	1399	1400	1401	1402	1403	1404	1405
0	0	0	0	78192	0	0	0	0	0
1406	1407	1408	1409	1410	1411	1412	1413	1414	1415
0	0	0	0	0	0	0	0	0	2304
1416	1417	1418	1419	1420	1421	1422	1423	1424	1425
0	0	0	0	4608	0	0	0	0	54816
1426	1427	1428	1429	1430	1431	1432	1433	1434	1435
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1436	1437	1438	1439	1440	1441	1442	1443	1444	1445
0	0	0	0	5760	576	0	0	0	9216
1446	1447	1448	1449	1450	1451	1452	1453	1454	1455
0	0	0	192	14688	0	0	0	0	0
1456	1457	1458	1459	1460	1461	1462	1463	1464	1465
144	0	0	0	0	0	0	0	0	2304
1466	1467	1468	1469	1470	1471	1472	1473	1474	1475
0	0	0	0	2304	0	0	0	0	6624
1476	1477	1478	1479	1480	1481	1482	1483	1484	1485
0	0	0	0	1152	0	0	0	0	0
1486	1487	1488	1489	1490	1491	1492	1493	1494	1495
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1496	1497	1498	1499	1500	1501	1502	1503	1504	1505
0	0	0	0	30720	0	0	0	0	0
1506	1507	1508	1509	1510	1511	1512	1513	1514	1515
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1516	1517	1518	1519	1520	1521	1522	1523	1524	1525
0	0	0	0	0	0	0	0	0	14400
1526	1527	1528	1529	1530	1531	1532	1533	1534	1535
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1536	1537	1538	1539	1540	1541	1542	1543	1544	1545
0	0	0	0	0	0	0	0	0	2304
1546	1547	1548	1549	1550	1551	1552	1553	1554	1555
0	0	0	0	8640	0	0	0	0	0
1556	1557	1558	1559	1560	1561	1562	1563	1564	1565
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Продолжение табл. П.4.3

1566	1567	1568	1569	1570	1571	1572	1573	1574	1575	1576
0	0	0	0	0	0	0	0	0	384	0
1577	1578	1579	1580	1581	1582	1583	1584	1585	1586	1587
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1588	1589	1590	1591	1592	1593	1594	1595	1596	1597	1598
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1599	1600	1601	1602	1603	1604	1605	1606	1607	1608	1609
0	432	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1610	1611	1612	1613	1614	1615	1616	1617	1618	1619	1620
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1621	1622	1623	1624	1625	1626	1627	1628	1629	1630	1631
0	0	0	0	7968	0	0	0	0	0	0
1632	1633	1634	1635	1636	1637	1638	1639	1640	1641	1642
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1643	1644	1645	1646	1647	1648	1649	1650	1651	1652	1653
0	0	0	0	0	0	0	2592	0	0	0
1654	1655	1656	1657	1658	1659	1660	1661	1662	1663	1664
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1665	1666	1667	1668	1669	1670	1671	1672	1673	1674	1675
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1676	1677	1678	1679	1680	1681	1682	1683	1684	1685	1686
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1687	1688	1689	1690	1691	1692	1693	1694	1695	1696	1697
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1698	1699	1700	1701	1702	1703	1704	1705	1706	1707	1708
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1709	1710	1711	1712	1713	1714	1715	1716	1717	1718	1719
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1720	1721	1722	1723	1724	1725	1726	1727	1728	1729	1730
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1731	1732	1733	1734	1735	1736	1737	1738	1739	1740	1741
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1742	1743	1744	1745	1746	1747	1748	1749	1750	1751	1752
0	0	0	0	0	0	0	0	1536	0	0
1753	1754	1755	1756	1757	1758	1759	1760	1761	1762	1763
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Окончание табл. П.4.3

1764	1765	1766	1767	1768	1769	1770	1771	1772	1773	1774
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1775	1776	1777	1778	1779	1780	1781	1782	1783	1784	1785
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1786	1787	1788	1789	1790	1791	1792	1793	1794	1795	1796
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1797	1798	1799	1800	1801	1802	1803	1804	1805	1806	1807
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1808	1809	1810	1811	1812	1813	1814	1815	1816	1817	1818
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1819	1820	1821	1822	1823	1824	1825	1826	1827	1828	1829
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1830	1831	1832	1833	1834	1835	1836	1837	1838	1839	1840
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1841	1842	1843	1844	1845	1846	1847	1848	1849	1850	1851
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1852	1853	1854	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1863	1864	1865	1866	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1874	1875									
0	120									

Таблица П.4.4

Суммарные зависимости данных в таблицах П.4.1–П.4.3,
вычисляемые по формулам 1.4–1.6

Порядок	2	3	4
Factor	9,30E+03	2,40E+08	2,49E+14
Ves	3,72E+02	9,60E+05	1,33E+11
det _{средний}	7,17E+00	2,38E+01	8,82E+01

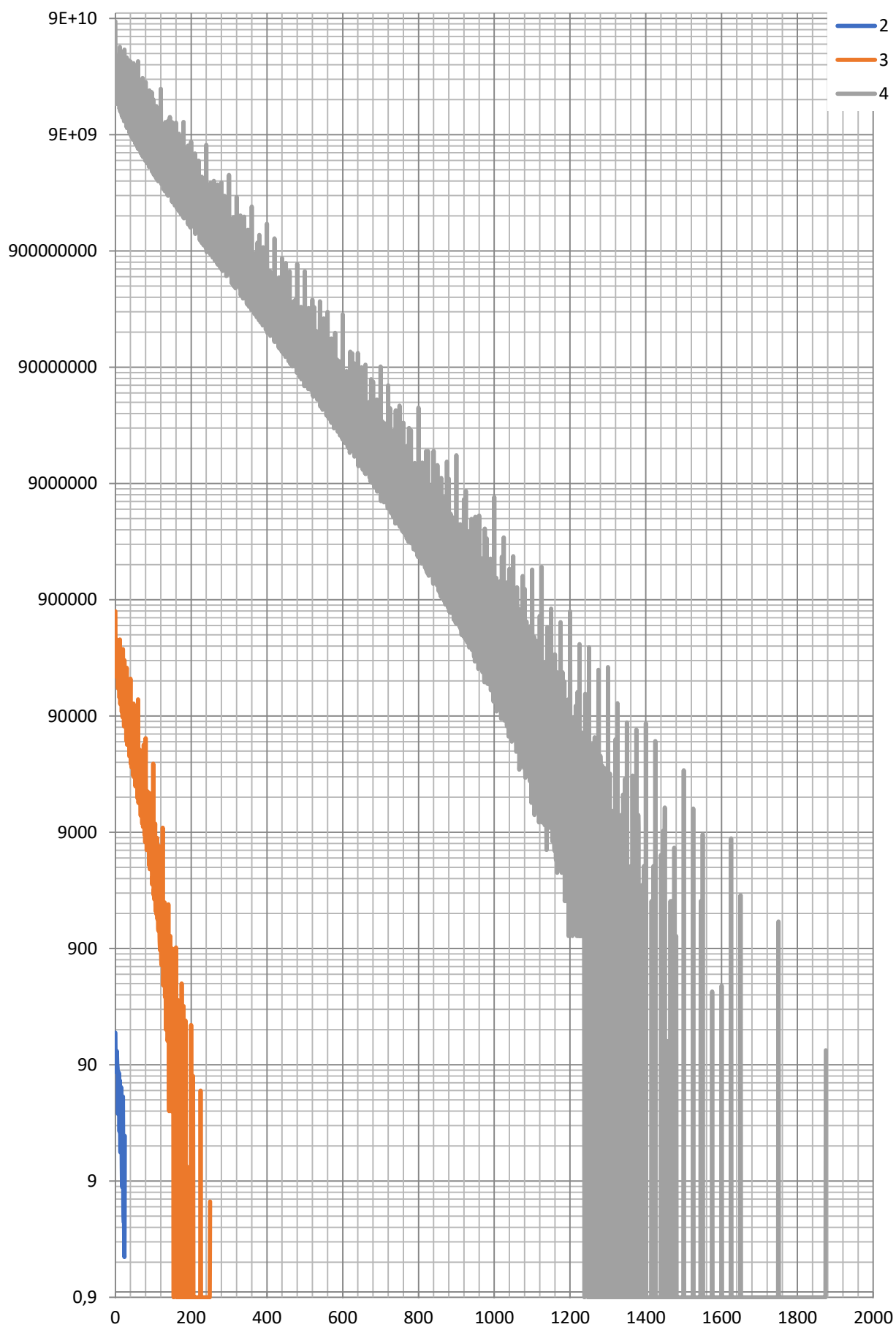


Рисунок П.4.1. Зависимость логарифма количества матриц от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.4.1–П.4.3

Матрицы с элементами из множества {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

Таблица П.5.1

Распределение детерминантов матриц порядка 2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
255	94	152	130	166	106	204	46	118	76	112	30	170	28	48
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
86	60	16	96	20	78	22	20	8	78	34	16	10	12	4
30	31	32	33	34	35	36								
60	4	6	4	4	2	26								

Таблица П.5.2

Распределение детерминантов матриц порядка 3

0	1	2	3	4	5	6
2110081	409956	822786	663210	1056282	525066	1321398
7	8	9	10	11	12	13
358998	1051806	618150	903624	299994	1547334	283416
14	15	16	17	18	19	20
610620	678780	873354	241746	1110414	235656	943998
21	22	23	24	25	26	27
413622	460638	199242	1308978	328374	416628	377118
28	29	30	31	32	33	34
571230	166230	1019034	157320	574062	283752	322326
35	36	37	38	39	40	41
239934	1018722	129366	293382	242406	640140	116784
42	43	44	45	46	47	48
553698	110196	357828	362388	231984	99900	788292
49	50	51	52	53	54	55
103530	356868	175446	299922	85446	488730	143334
56	57	58	59	60	61	62
321480	159336	171360	73152	749484	69066	155754
63	64	65	66	67	68	69
161118	260940	117732	308358	59004	194004	112320
70	71	72	73	74	75	76
219360	53838	556734	50472	111960	195660	163494
77	78	79	80	81	82	83
52212	237780	43128	270144	97734	92340	38916
84	85	86	87	88	89	90
305856	70758	82908	71460	137934	33444	347814

Продолжение табл. П.5.2

91	92	93	94	95	96	97
35376	104994	61704	68292	63018	281106	26460
98	99	100	101	102	103	104
65532	61398	172422	24552	132012	22140	95574
105	106	107	108	109	110	111
84780	50184	20268	225924	18684	83466	35820
112	113	114	115	116	117	118
80826	16992	102366	34110	56934	34992	35964
119	120	121	122	123	124	125
15624	253134	14004	32076	25524	47052	40542
126	127	128	129	130	131	132
93072	10656	48336	21564	54066	10152	97092
133	134	135	136	137	138	139
9696	22896	40362	37782	8136	53838	7560
140	141	142	143	144	145	146
53334	14904	17964	7608	123816	15426	16164
147	148	149	150	151	152	153
12492	21240	5796	95922	4968	20298	12114
154	155	156	157	158	159	160
13572	12348	54648	3924	10620	8424	29238
161	162	163	164	165	166	167
3672	38034	3132	12600	16362	8172	2736
168	169	170	171	172	173	174
42894	2676	16290	6552	9396	2340	21186
175	176	177	178	179	180	181
7164	9546	4356	5220	1980	72990	1512
182	183	184	185	186	187	188
4320	3672	6768	3114	15534	1332	5004
189	190	191	192	193	194	195
3336	6168	1080	21780	756	2808	4410
196	197	198	199	200	201	202
4212	720	14238	720	6558	1746	1836
203	204	205	206	207	208	209
504	14238	1332	1620	1494	2430	552
210	211	212	213	214	215	216
10476	432	1800	864	1188	1062	21174

Продолжение табл. П.5.2

217	218	219	220	221	222	223	224	225	226
120	720	720	2754	324	3492	144	1296	1998	684
227	228	229	230	231	232	233	234	235	236
180	4770	144	1188	288	828	180	3348	198	612
237	238	239	240	241	242	243	244	245	246
288	180	180	5436	72	252	264	576	576	1260
247	248	249	250	251	252	253	254	255	256
72	288	72	852	180	3270	0	108	414	396
257	258	259	260	261	262	263	264	265	266
0	828	0	306	108	72	36	1728	72	108
267	268	269	270	271	272	273	274	275	276
0	108	108	1908	36	90	72	108	324	1008
277	278	279	280	281	282	283	284	285	286
0	0	0	300	72	72	0	36	18	72
287	288	289	290	291	292	293	294	295	296
0	1188	0	18	36	36	0	432	36	36
297	298	299	300	301	302	303	304	305	306
0	0	36	918	0	0	0	36	108	324
307	308	309	310	311	312	313	314	315	316
0	0	0	18	36	144	0	0	0	36
317	318	319	320	321	322	323	324	325	326
0	0	0	0	0	0	0	450	6	0
327	328	329	330	331	332	333	334	335	336
0	0	0	288	0	0	0	0	18	216
337	338	339	340	341	342	343	344	345	346
0	0	0	0	12	0	0	0	0	0
347	348	349	350	351	352	353	354	355	356
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
357	358	359	360	361	362	363	364	365	366
0	0	0	198	0	0	0	0	0	72
367	368	369	370	371	372	373	374	375	376
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
377	378	379	380	381	382	383	384	385	386
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
387	388	389	390	391	392	393	394	395	396
0	0	0	0	0	0	0	0	0	54

Окончание табл. П.5.2

397	398	399	400	401	402	403	404	405	406
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
407	408	409	410	411	412	413	414	415	416
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
417	418	419	420	421	422	423	424	425	426
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
427	428	429	430	431	432				
0	0	0	0	0	6				

Таблица П.5.3

Суммарные зависимости данных в таблицах П.5.1 и П.5.2,
вычисляемые по формулам 1.4–1.6

Порядок	Factor	Ves	$ \det _{\text{средний}}$
2	2,42E+04	6,72E+02	1,01E+01
3	1,58E+09	3,66E+06	3,91E+01

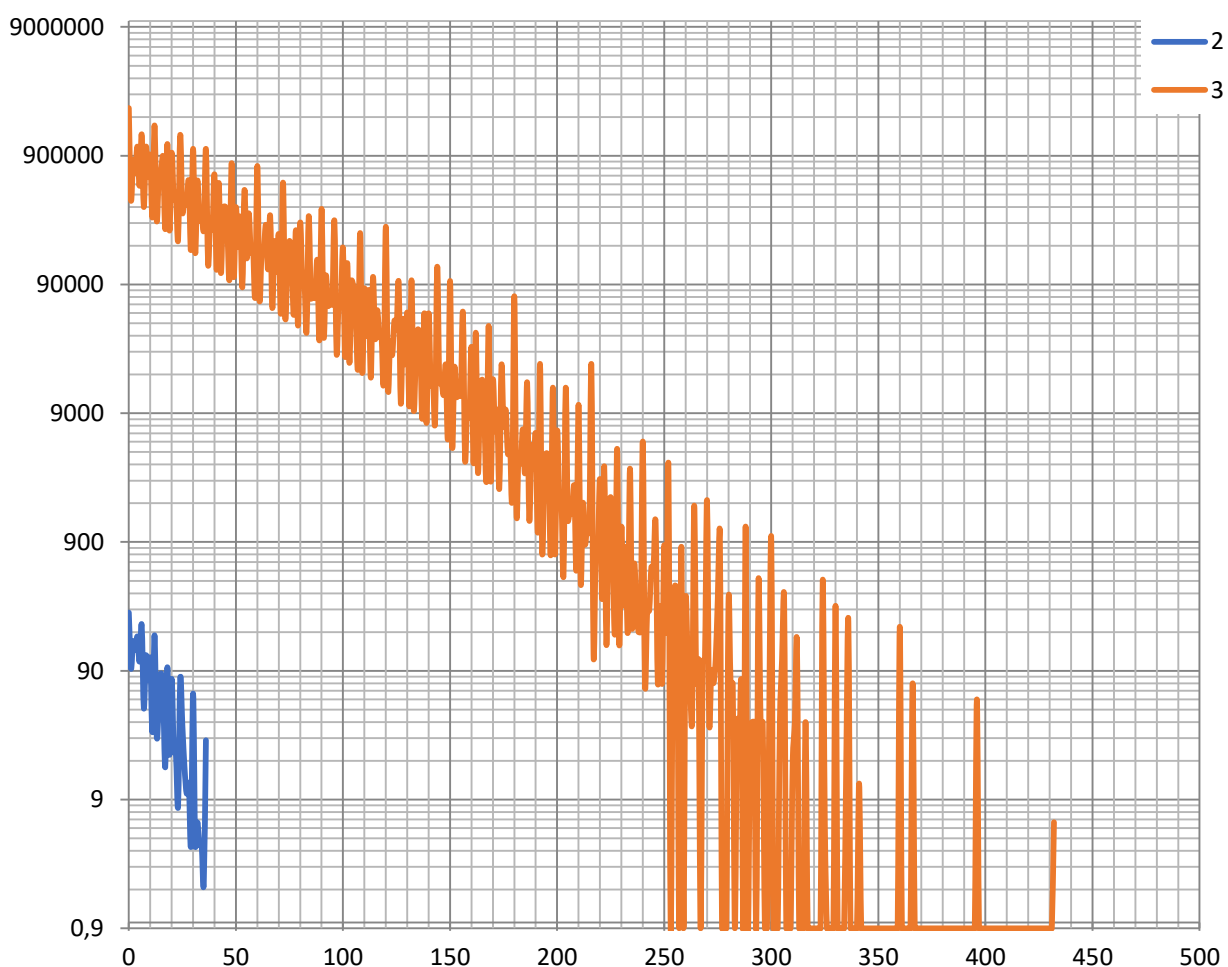


Рисунок П.5.1. Зависимость логарифма количества матриц от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.5.1 и П.5.2

Матрицы с элементами из множества {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Таблица П.6.1

Распределение детерминантов матриц порядка 2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
336	142	200	178	214	154	252	150	162	116	152	66	210
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
58	144	122	96	48	132	40	106	110	48	40	108	58
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
32	30	92	28	92	20	22	18	20	74	46	16	12
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49		
12	10	8	64	8	4	6	4	4	2	30		

Таблица П.6.2

Распределение детерминантов матриц порядка 3

0	1	2	3	4	5	6
4663844	1096368	1883454	1606590	2293404	1357494	2789460
7	8	9	10	11	12	13
1313142	2293680	1539282	2080878	925350	3154158	878406
14	15	16	17	18	19	20
1971906	1690074	2015238	810186	2456130	770334	2166780
21	22	23	24	25	26	27
1557126	1305486	728316	2773602	982224	1191978	1105578
28	29	30	31	32	33	34
1960902	647028	2358684	613242	1500846	938376	1030788
35	36	37	38	39	40	41
1135182	2298108	553716	945990	837864	1627314	507708
42	43	44	45	46	47	48
2030670	491940	1102902	1078752	830934	455508	1882674
49	50	51	52	53	54	55
700500	1054134	675432	944466	406980	1340034	578196
56	57	58	59	60	61	62
1338498	607716	673344	370584	1826766	359208	621900
63	64	65	66	67	68	69
869184	857424	492798	1013904	327564	731940	518778
70	71	72	73	74	75	76
1093584	308016	1424010	298872	515448	676854	632688
77	78	79	80	81	82	83
452370	832158	272340	867384	451182	446472	257094

Продолжение табл. П.6.2

84	85	86	87	88	89	90
1410570	371952	419634	393840	569016	235278	1038690
91	92	93	94	95	96	97
373632	497556	350010	366498	317160	882810	208602
98	99	100	101	102	103	104
585732	346410	603936	196596	573102	190872	426882
105	106	107	108	109	110	111
671922	297396	178704	747870	174204	405756	269100
112	113	114	115	116	117	118
600102	163584	468990	251388	336114	259884	246168
119	120	121	122	123	124	125
264432	799308	149868	232056	216342	288774	225744
126	127	128	129	130	131	132
700518	132372	290130	198594	290910	125316	448092
133	134	135	136	137	138	139
218046	190368	265566	255978	113220	334242	110340
140	141	142	143	144	145	146
537300	160560	166788	109452	462666	165402	157896
147	148	149	150	151	152	153
304362	198576	94140	402786	92124	191100	134712
154	155	156	157	158	159	160
251766	135360	298890	83592	128304	115164	225726
161	162	163	164	165	166	167
163458	236544	75168	146214	155376	112752	71028
168	169	170	171	172	173	174
474696	69672	156816	98856	128304	65412	189648
175	176	177	178	179	180	181
222138	120444	84150	92592	58248	324948	56592
182	183	184	185	186	187	188
167178	76644	104436	89118	150048	53172	93960
189	190	191	192	193	194	195
142656	108552	47124	165762	46260	69480	95796
196	197	198	199	200	201	202
205038	43056	131796	41976	102084	55854	59868
203	204	205	206	207	208	209
97902	130320	59472	55584	52416	62676	35724

Продолжение табл. П.6.2

210	211	212	213	214	215	216
308124	34344	54756	44514	47628	52236	130146
217	218	219	220	221	222	223
76494	43848	39186	63144	28800	86040	27288
224	225	226	227	228	229	230
99630	55026	37368	25488	82332	24624	49194
231	232	233	234	235	236	237
77616	37710	22680	71406	33660	33732	28404
238	239	240	241	242	243	244
77202	20448	79362	19548	26964	25572	28548
245	246	247	248	249	250	251
112446	51804	17652	25830	22212	28842	16272
252	253	254	255	256	257	258
147768	15408	20664	24354	21744	14472	42570
259	260	261	262	263	264	265
46782	23616	17550	17784	12312	37368	15426
266	267	268	269	270	271	272
47928	14832	16488	11304	39816	10440	13956
273	274	275	276	277	278	279
43002	13284	12642	29448	9180	11952	11430
280	281	282	283	284	285	286
44796	8136	24696	8064	10944	12132	9936
287	288	289	290	291	292	293
28134	23220	7128	11358	8388	9072	6696
294	295	296	297	298	299	300
87624	7956	7326	7092	7344	5832	16506
301	302	303	304	305	306	307
24138	6336	5940	6444	6138	11556	4680
308	309	310	311	312	313	314
21054	5400	6060	4140	9900	4176	4716
315	316	317	318	319	320	321
23376	4608	3564	8244	3960	4554	3780
322	323	324	325	326	327	328
17244	3024	8604	4218	3168	3420	3096
329	330	331	332	333	334	335
14022	7200	2484	2556	2376	2664	3006

Продолжение табл. П.6.2

336	337	338	339	340	341	342	343	344	345
17334	2124	2268	2304	2250	1812	4644	24504	1776	2088
346	347	348	349	350	351	352	353	354	355
1872	1476	4230	1620	9108	1344	1170	1332	3420	2034
356	357	358	359	360	361	362	363	364	365
1008	6426	1188	972	4176	1080	1008	1188	5700	1098
366	367	368	369	370	371	372	373	374	375
2124	1080	702	828	912	4392	1818	756	720	684
376	377	378	379	380	381	382	383	384	385
702	612	7092	756	432	540	468	792	1566	4518
386	387	388	389	390	391	392	393	394	395
432	288	540	540	1926	576	3330	432	288	648
396	397	398	399	400	401	402	403	404	405
1332	576	324	2952	294	108	1044	396	288	180
406	407	408	409	410	411	412	413	414	415
2682	192	234	360	216	216	216	2196	612	270
416	417	418	419	420	421	422	423	424	425
144	144	216	252	3798	144	108	180	72	396
426	427	428	429	430	431	432	433	434	435
576	1512	144	0	180	108	852	288	1308	72
436	437	438	439	440	441	442	443	444	445
0	72	360	288	18	1494	36	36	252	90
446	447	448	449	450	451	452	453	454	455
72	0	1044	36	72	72	0	36	36	1404
456	457	458	459	460	461	462	463	464	465
72	36	72	36	72	108	1692	108	0	18
466	467	468	469	470	471	472	473	474	475
36	108	336	936	0	0	0	0	288	72
476	477	478	479	480	481	482	483	484	485
72	0	0	36	18	72	0	360	0	0
486	487	488	489	490	491	492	493	494	495
0	36	36	0	828	0	18	36	0	0
496	497	498	499	500	501	502	503	504	505
0	432	36	0	0	0	0	36	918	0
506	507	508	509	510	511	512	513	514	515
0	0	0	36	108	324	0	0	0	0

Окончание табл. П.6.2

516	517	518	519	520	521	522	523	524	525
18	36	144	0	0	0	0	36	0	0
526	527	528	529	530	531	532	533	534	535
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
536	537	538	539	540	541	542	543	544	545
0	0	0	450	6	0	0	0	0	0
546	547	548	549	550	551	552	553	554	555
288	0	0	0	0	0	18	216	0	0
556	557	558	559	560	561	562	563	564	565
0	0	0	12	0	0	0	0	0	0
566	567	568	569	570	571	572	573	574	575
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
576	577	578	579	580	581	582	583	584	585
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
586	587	588	589	590	591	592	593	594	595
0	0	198	0	0	0	0	0	0	72
596	597	598	599	600	601	602	603	604	605
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
606	607	608	609	610	611	612	613	614	615
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
616	617	618	619	620	621	622	623	624	625
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
626	627	628	629	630	631	632	633	634	635
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
636	637	638	639	640	641	642	643	644	645
0	54	0	0	0	0	0	0	0	0
646	647	648	649	650	651	652	653	654	655
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
656	657	658	659	660	661	662	663	664	665
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
666	667	668	669	670	671	672	673	674	675
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
676	677	678	679	680	681	682	683	684	685
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
686									
6									

Таблица П.6.3

Суммарные зависимости данных в таблицах П.6.1 и П.6.2,
вычисляемые по формулам 1.4–1.6

Порядок	Factor	Ves	$ \det _{\text{средний}}$
2	5,52E+04	1,13E+03	1,35E+01
3	8,03E+09	1,17E+07	5,99E+01

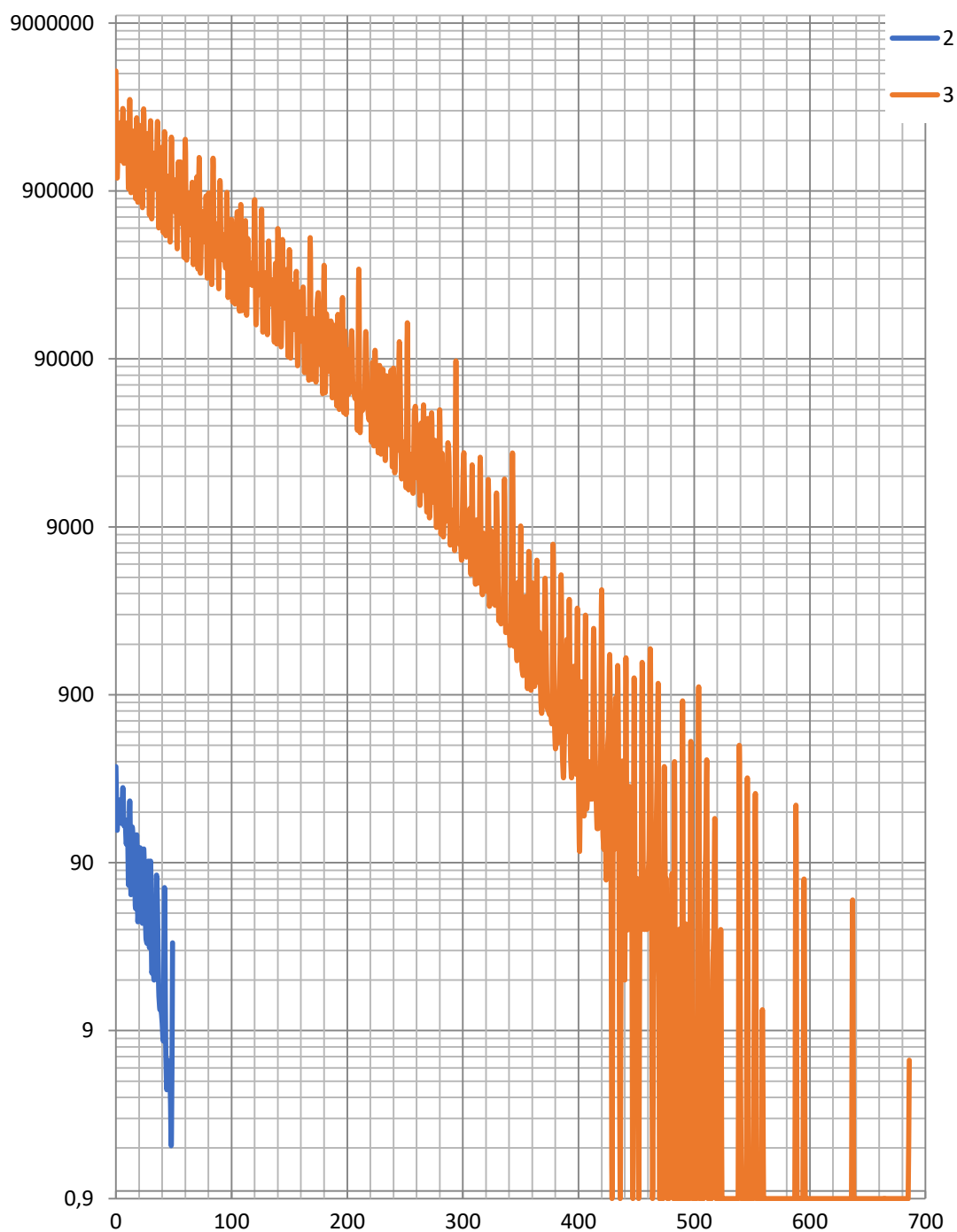


Рисунок П.6.1. Зависимость логарифма количества матриц от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.6.1 и П.6.2

Матрицы с элементами из множества {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

Таблица П.7.1

Распределение детерминантов матриц порядка 2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
449	174	264	210	310	186	316	182	322	144	208	90	294
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
82	192	144	240	72	180	64	174	134	84	52	240	82
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
72	54	150	40	124	32	138	38	56	98	90	24	36
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
22	114	28	96	20	36	14	24	12	92	46	20	8
52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
20	8	12	6	76	4	8	4	6	4	4	2	34

Таблица П.7.2

Распределение детерминантов матриц порядка 3

0	1	2	3	4	5
10289331	2062140	3893550	2898990	5163594	2519646
6	7	8	9	10	11
5485788	2444748	5909988	2837730	4360596	1842162
12	13	14	15	16	17
6843618	1774698	4123428	3087558	5800152	1669056
18	19	20	21	22	23
5017620	1602006	5164644	2887092	3034068	1507524
24	25	26	27	28	29
7125318	1973934	2861082	2224890	4711878	1378836
30	31	32	33	34	35
4930272	1328166	5015616	1951938	2574144	2232282
36	37	38	39	40	41
5443572	1224000	2399220	1776546	4963578	1181592
42	43	44	45	46	47
4349628	1135692	3166836	2185050	2162826	1067976
48	49	50	51	52	53
5929776	1498746	2670804	1515258	2860368	987624
54	55	56	57	58	59
3206076	1327788	4235238	1387656	1846674	912420

Продолжение табл. П.7.2

60	61	62	63	64	65
4649400	891972	1743390	1823844	3613602	1165584
66	67	68	69	70	71
2600982	822798	2360112	1193274	2677602	786204
72	73	74	75	76	77
4431864	767754	1510524	1489374	2123070	1070166
78	79	80	81	82	83
2255112	717822	3517638	1121646	1399554	686052
84	85	86	87	88	89
3748320	939348	1325700	966978	2412870	641052
90	91	92	93	94	95
2612520	924072	1784628	890784	1203858	832662
96	97	98	99	100	101
3796218	586512	1632882	930096	2116944	562518
102	103	104	105	106	107
1736226	550620	2043030	1456812	1053054	526356
108	109	110	111	112	113
2441094	515736	1352466	727614	2696940	492030
114	115	116	117	118	119
1485594	672408	1368378	739512	920484	706260
120	121	122	123	124	125
3129606	473796	882216	653544	1241748	632778
126	127	128	129	130	131
1902234	424170	1955670	596250	1083162	405036
132	133	134	135	136	137
1760148	607668	768960	776280	1479582	379224
138	139	140	141	142	143
1141740	371340	1840296	513558	705996	387408
144	145	146	147	148	149
2395704	487314	674856	776898	961056	333684
150	151	152	153	154	155
1312344	327060	1238358	479178	910170	428814
156	157	158	159	160	161
1351710	305496	595476	415692	1732506	463014
162	163	164	165	166	167
938406	286560	832266	532134	545436	274968

Продолжение табл. П.7.2

168	169	170	171	172	173	174
2145708	277176	719946	380574	753732	255888	764514
175	176	177	178	179	180	181
594396	1125132	333432	478620	239724	1339446	235980
182	183	184	185	186	187	188
695748	312084	910908	310968	655362	236340	629856
189	190	191	192	193	194	195
474690	558714	210600	1577178	204840	401616	355968
196	197	198	199	200	201	202
901584	197100	626652	193068	1027860	243738	369540
203	204	205	206	207	208	209
309438	794430	268560	354024	243324	824616	181236
210	211	212	213	214	215	216
974682	167580	487008	212562	323604	228258	990558
217	218	219	220	221	222	223
261444	309168	196650	581886	158736	435528	146664
224	225	226	227	228	229	230
1080594	254736	282384	139248	589410	135792	362178
231	232	233	234	235	236	237
295092	558342	129276	405756	174726	369396	158310
238	239	240	241	242	243	244
409212	122724	1055988	118080	244152	156072	339840
245	246	247	248	249	250	251
332892	348372	116844	464328	135360	290166	105408
252	253	254	255	256	257	258
714048	109800	206136	166302	604032	97164	292356
259	260	261	262	263	264	265
172764	359064	122274	186984	91368	564732	121248
266	267	268	269	270	271	272
290334	107748	251784	84528	316710	82908	431916
273	274	275	276	277	278	279
178092	161388	110616	340002	76860	154440	95706
280	281	282	283	284	285	286
674094	72180	214020	70560	208224	108450	150624
287	288	289	290	291	292	293
145116	591192	66888	168786	78372	189072	63360

Продолжение табл. П.7.2

294	295	296	297	298	299	300
361998	81270	278316	78264	119628	60228	296118
301	302	303	304	305	306	307
115776	115020	67266	299514	70344	160596	51732
308	309	310	311	312	313	314
263244	61686	126498	49896	327600	47016	97920
315	316	317	318	319	320	321
124782	141336	46008	135558	46800	379608	51480
322	323	324	325	326	327	328
161838	42780	189954	50154	84492	47808	210510
329	330	331	332	333	334	335
79974	129438	37404	114444	44208	75528	42138
336	337	338	339	340	341	342
507780	34488	73944	39420	115146	33780	95670
343	344	345	346	347	348	349
97548	168420	41400	62964	29772	132570	29376
350	351	352	353	354	355	356
129570	36174	205452	26496	79866	30366	83304
357	358	359	360	361	362	363
60822	54252	25272	189144	24120	50400	27918
364	365	366	367	368	369	370
137946	26532	68490	22536	155070	25974	50178
371	372	373	374	375	376	377
48618	91134	20268	44064	25884	112320	19908
378	379	380	381	382	383	384
99732	18684	64134	20196	38052	18108	239022
385	386	387	388	389	390	391
43362	36180	18324	52488	15768	48294	15876
392	393	394	395	396	397	398
208596	16704	30960	15750	57924	13968	30312
399	400	401	402	403	404	405
32940	116106	12780	34416	13296	41112	16032
406	407	408	409	410	411	412
54666	11568	86616	10980	27072	12132	36648
413	414	415	416	417	418	419
26568	27252	11448	102420	10656	21132	9792

Продолжение табл. П.7.2

420	421	422	423	424	425	426
72594	9180	20088	9900	62640	9396	22824
427	428	429	430	431	432	433
23274	28296	8280	18216	7488	83712	7416
434	435	436	437	438	439	440
34086	8586	24048	7488	18432	6984	52704
441	442	443	444	445	446	447
18198	14832	6336	25452	6822	13500	6408
448	449	450	451	452	453	454
148980	5400	15228	5652	18684	5328	11844
455	456	457	458	459	460	461
12078	42768	4716	10188	4824	16686	4536
462	463	464	465	466	467	468
21600	4644	47052	4482	8748	3780	16566
469	470	471	472	473	474	475
8892	8964	3600	31302	3180	8784	3714
476	477	478	479	480	481	482
20772	3564	7308	2952	47952	2460	6624
483	484	485	486	487	488	489
6804	10476	3024	7272	2664	26154	2592
490	491	492	493	494	495	496
13002	2232	10890	2196	5472	2340	28908
497	498	499	500	501	502	503
5346	6120	1908	7398	2016	4644	2304
504	505	506	507	508	509	510
29304	1746	3780	1764	6228	1656	4788
511	512	513	514	515	516	517
4608	45636	1704	3312	1314	5832	1332
518	519	520	521	522	523	524
7338	1368	13260	828	2520	1224	4788
525	526	527	528	529	530	531
3492	2808	1236	16776	900	2574	900
532	533	534	535	536	537	538
8532	1656	2952	1062	9684	900	2340
539	540	541	542	543	544	545
3630	4020	972	2016	1080	13032	612

Продолжение табл. П.7.2

546	547	548	549	550	551	552	553	554
5148	900	2880	540	1638	756	7632	1962	1584
555	556	557	558	559	560	561	562	563
720	2196	648	1296	696	14094	360	1404	432
564	565	566	567	568	569	570	571	572
1980	594	1584	2160	5580	360	954	324	1512
573	574	575	576	577	578	579	580	581
720	3168	612	10614	252	936	252	1440	1890
582	583	584	585	586	587	588	589	590
1440	540	4788	138	648	396	4608	540	846
591	592	593	594	595	596	597	598	599
252	5850	180	1044	990	1044	396	576	288
600	601	602	603	604	605	606	607	608
2952	108	1638	180	720	234	432	360	6084
609	610	611	612	613	614	615	616	617
288	576	108	756	252	504	342	5580	180
618	619	620	621	622	623	624	625	626
540	108	612	252	648	1206	3960	72	324
627	628	629	630	631	632	633	634	635
36	324	324	1620	324	2016	108	288	36
636	637	638	639	640	641	642	643	644
576	1362	540	144	3942	36	252	36	1134
645	646	647	648	649	650	651	652	653
180	324	108	1770	0	72	126	468	144
654	655	656	657	658	659	660	661	662
72	36	2214	36	612	36	162	72	144
663	664	665	666	667	668	669	670	671
180	1692	108	180	36	144	72	108	180
672	673	674	675	676	677	678	679	680
4230	36	216	0	72	108	396	576	1116
681	682	683	684	685	686	687	688	689
72	72	0	144	72	852	216	1308	0
690	691	692	693	694	695	696	697	698
0	0	108	360	252	0	162	0	36
699	700	701	702	703	704	705	706	707
0	234	72	72	0	1818	0	36	18

Продолжение табл. П.7.2

708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718
90	0	36	0	792	0	72	0	72	36	0
719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729
36	1188	72	108	0	0	0	72	108	1704	36
730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740
0	0	18	36	108	324	936	0	0	0	0
741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751
0	288	72	72	0	0	0	36	18	72	0
752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762
360	0	0	0	0	36	36	0	0	0	0
763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773
0	36	0	0	0	828	0	18	0	0	0
774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784
0	0	432	36	0	0	0	0	0	36	918
785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795
0	0	0	0	0	36	108	324	0	0	0
796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806
0	0	18	36	144	0	0	0	0	0	36
807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839
0	0	0	450	6	0	0	0	0	0	0
840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850
288	0	0	0	0	0	0	18	216	0	0
851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861
0	0	0	0	12	0	0	0	0	0	0
862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905
0	198	0	0	0	0	0	0	0	72	0

Окончание табл. П.7.2

906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	54
961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
994	995	996	997	998	999	1000	1001	1002	1003	1004
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1005	1006	1007	1008	1009	1010	1011	1012	1013	1014	1015
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1016	1017	1018	1019	1020	1021	1022	1023	1024		
0	0	0	0	0	0	0	0	6		

Таблица П.7.3

Суммарные зависимости данных в таблицах П.7.1 и П.7.2,
вычисляемые по формулам 1.4–1.6

Порядок	Factor	Ves	$ \det _{\text{средний}}$
2	1,14E+05	1,78E+03	1,73E+01
3	3,36E+10	3,28E+07	8,68E+01

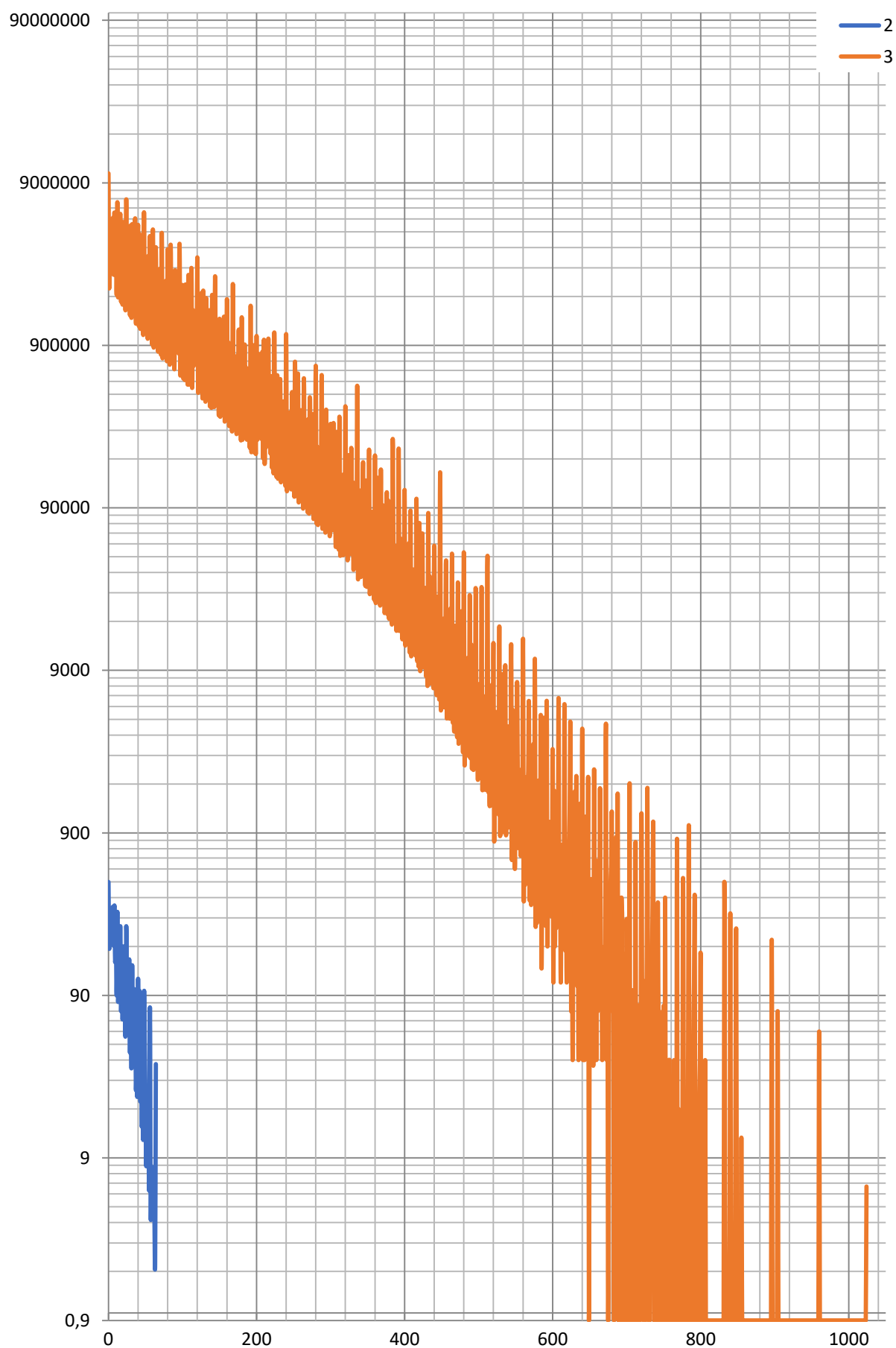


Рисунок 7.1. Зависимость логарифма количества матриц от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.7.1 и П.7.2

Матрицы с элементами из множества {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Таблица П.8.1

Распределение детерминантов матриц порядка 2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
570	222	312	306	358	234	412	230	370	312	252	130
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
382	118	232	224	280	102	336	100	214	206	120	84
24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
312	106	100	194	186	72	188	68	168	90	72	126
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
222	52	68	74	150	44	144	36	56	132	48	44
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
140	70	32	44	36	24	120	26	106	36	24	16
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
34	16	16	98	54	14	20	12	12	16	8	8
72	73	74	75	76	77	78	79	80	81		
82	8	4	8	4	6	4	4	2	38		

Таблица П.8.2

Распределение детерминантов матриц порядка 3

0	1	2	3	4	5
19945864	4070796	6950418	6435288	8818944	4918884
6	7	8	9	10	11
10864296	4767108	9883722	7371156	7852092	3827184
12	13	14	15	16	17
13040244	3692958	7441998	7046748	9705000	3500484
18	19	20	21	22	23
11655714	3441732	9102720	6611688	5842644	3270120
24	25	26	27	28	29
13488174	4070112	5533764	6650802	8361720	3055014
30	31	32	33	34	35
10389132	2997846	8586366	4983876	5046138	4558872
36	37	38	39	40	41
12572742	2799504	4874184	4664970	8832066	2690118
42	43	44	45	46	47
9296478	2621592	6091584	6586446	4471362	2567934

Продолжение табл. П.8.2

48	49	50	51	52	53
11604456	3283338	5321520	4135968	5578980	2384172
54	55	56	57	58	59
9085776	3133548	7680420	3941082	3950964	2248344
60	61	62	63	64	65
10033614	2211138	3798270	5743830	6564180	2813592
66	67	68	69	70	71
6393924	2092644	4762014	3510630	5398752	2012724
72	73	74	75	76	77
10887324	1979640	3369906	4157892	4450308	2595918
78	79	80	81	82	83
5697756	1872324	6607860	4389168	3132162	1798992
84	85	86	87	88	89
8267562	2330190	3011490	2986452	4870410	1714446
90	91	92	93	94	95
7632450	2282064	3850134	2854008	2854080	2166588
96	97	98	99	100	101
8073036	1606284	3558162	3576762	4430184	1555110
102	103	104	105	106	107
4634874	1530900	4233612	4082184	2545236	1482462
108	109	110	111	112	113
7555938	1459458	3233484	2464614	5234112	1414296
114	115	116	117	118	119
4245894	1837494	3129282	3117888	2296656	1835058
120	121	122	123	124	125
7308396	1408266	2227338	2251674	2925720	1697442
126	127	128	129	130	131
5997324	1267524	3954228	2135934	2698536	1229436
132	133	134	135	136	137
4774122	1674222	2016936	3611514	3254148	1173078
138	139	140	141	142	143
3482370	1155420	3983340	1991808	1883862	1236648
144	145	146	147	148	149
6861900	1448856	1825632	2519280	2379060	1071810
150	151	152	153	154	155
3838140	1053864	2892702	2396448	2318502	1348020

Продолжение табл. П.8.2

156	157	158	159	160	161
3907764	1006380	1652850	1706058	3672546	1358310
162	163	164	165	166	167
4187820	961668	2087802	2142468	1536408	933156
168	169	170	171	172	173
5277132	959340	1919484	2133558	1947384	889488
174	175	176	177	178	179
2591712	1566360	2613192	1485540	1399968	851616
180	181	182	183	184	185
4916406	837972	1840206	1422342	2252016	1062036
186	187	188	189	190	191
2362518	873720	1754100	2650842	1654086	776772
192	193	194	195	196	197
4040640	766332	1234368	1690164	2199546	743760
198	199	200	201	202	203
2908980	730908	2456250	1242828	1156860	1003104
204	205	206	207	208	209
2662650	914886	1120968	1639620	2031894	740460
210	211	212	213	214	215
3035808	667368	1422018	1131066	1053684	832824
216	217	218	219	220	221
4229880	913206	1018440	1083060	1712646	664932
222	223	224	225	226	227
1771830	609768	2442042	1801044	957204	591048
228	229	230	231	232	233
2224512	580356	1200168	1372662	1555182	564804
234	235	236	237	238	239
2223630	751986	1166454	940032	1198890	539280
240	241	242	243	244	245
3164220	532728	885708	1484832	1099008	1001106
246	247	248	249	250	251
1469718	546972	1374768	849870	991392	492012
252	253	254	255	256	257
3124080	525024	763524	1046052	1535640	469404
258	259	260	261	262	263
1329804	667854	1211484	1107198	716832	446328

Продолжение табл. П.8.2

264	265	266	267	268	269
2072898	567090	987456	741888	903240	425772
270	271	272	273	274	275
2272752	420048	1235616	1005750	648936	565386
276	277	278	279	280	281
1510236	401328	629820	984402	1765074	388836
282	283	284	285	286	287
1140048	383148	788490	839016	638976	546552
288	289	290	291	292	293
2613906	378288	713520	618498	735444	353592
294	295	296	297	298	299
1415520	444096	928026	983412	534672	359928
300	301	302	303	304	305
1425672	480834	517464	564300	970236	410994
306	307	308	309	310	311
1321758	316152	898140	538074	593922	306504
312	313	314	315	316	317
1418886	301284	466452	1325724	596988	291096
318	319	320	321	322	323
835740	301428	1117986	491850	640638	298740
324	325	326	327	328	329
1700802	361482	422208	468918	715032	426186
330	331	332	333	334	335
927180	262332	510084	675918	395748	320346
336	337	338	339	340	341
1690398	247392	394272	427572	582066	253020
342	343	344	345	346	347
1036602	400524	620454	510570	353628	228636
348	349	350	351	352	353
809208	223848	560004	688476	685746	216396
354	355	356	357	358	359
618822	264744	414576	541944	319464	205884
360	361	362	363	364	365
1613106	211332	307512	362142	549930	245232
366	367	368	369	370	371
564480	192852	581172	528066	333588	286020

Продолжение табл. П.8.2

372	373	374	375	376	377
653364	182160	299196	383580	510012	182916
378	379	380	381	382	383
1235724	174492	392610	304218	256608	170424
384	385	386	387	388	389
967788	318330	248004	457416	310860	158472
390	391	392	393	394	395
524988	167832	673140	276804	232416	183456
396	397	398	399	400	401
805230	148860	221076	400194	470994	145332
402	403	404	405	406	407
415170	146784	266868	611886	307116	140376
408	409	410	411	412	413
650412	133596	223668	237330	247716	201186
414	415	416	417	418	419
597168	144144	401400	225216	196200	122472
420	421	422	423	424	425
604530	120384	177840	379494	321822	136482
426	427	428	429	430	431
330462	182106	212508	211248	183294	109332
432	433	434	435	436	437
1039350	107820	234048	214578	194904	112284
438	439	440	441	442	443
298440	103032	320598	520464	154044	97308
444	445	446	447	448	449
329310	107406	142380	173826	494868	92484
450	451	452	453	454	455
451926	93564	166464	164898	128772	159462
456	457	458	459	460	461
430038	87480	125244	327924	173034	81396
462	463	464	465	466	467
330930	79812	250524	164304	115308	77688
468	469	470	471	472	473
431286	126486	122580	139662	207612	75468
474	475	476	477	478	479
208476	84822	194160	237564	101052	68832

Продолжение табл. П.8.2

480	481	482	483	484	485	486	487
393804	69744	97596	193518	124200	72864	464916	63972
488	489	490	491	492	493	494	495
182430	117792	142998	61308	200016	61992	89784	232542
496	497	498	499	500	501	502	503
181092	95454	155880	56448	112374	104760	79308	55296
504	505	506	507	508	509	510	511
669834	60030	81684	100656	92088	51660	148788	85608
512	513	514	515	516	517	518	519
202596	227280	68904	53046	154602	49428	93540	88020
520	521	522	523	524	525	526	527
145254	45900	226476	44172	76212	130662	59112	44508
528	529	530	531	532	533	534	535
226512	44280	61164	154152	100110	39996	106416	43596
536	537	538	539	540	541	542	543
116388	73224	51948	67224	273126	36072	48960	68904
544	545	546	547	548	549	550	551
120618	38934	125496	34524	58968	136242	53736	33228
552	553	554	555	556	557	558	559
169632	52992	43200	65124	53748	31248	160506	30864
560	561	562	563	564	565	566	567
121032	57528	38916	28980	92610	31320	37476	268272
568	569	570	571	572	573	574	575
80964	27468	73926	26136	46116	50076	45288	29412
576	577	578	579	580	581	582	583
316398	24516	32436	46944	40716	33030	61740	23868
584	585	586	587	588	589	590	591
70344	106710	28620	21240	85806	20952	30096	41724
592	593	594	595	596	597	598	599
60852	20196	144288	29088	31500	38412	26964	19224
600	601	602	603	604	605	606	607
100242	18324	31008	86868	29160	20286	46476	17388
608	609	610	611	612	613	614	615
55350	42966	21798	17856	112068	15840	20196	33048
616	617	618	619	620	621	622	623
61830	15300	39996	14544	24348	95688	17712	20142

Продолжение табл. П.8.2

624	625	626	627	628	629	630	631
74646	15444	17244	26424	20772	12576	93690	12708
632	633	634	635	636	637	638	639
39438	25308	15444	12924	36288	18684	14940	62082
640	641	642	643	644	645	646	647
39078	11304	28440	10404	23598	22698	13068	10764
648	649	650	651	652	653	654	655
204594	9936	12960	26190	14292	9684	25236	9972
656	657	658	659	660	661	662	663
24822	53766	16200	8496	28728	8172	10944	17352
664	665	666	667	668	669	670	671
21420	11574	50202	7704	11268	15876	9018	7704
672	673	674	675	676	677	678	679
49158	7560	8568	56250	10704	6444	17568	9846
680	681	682	683	684	685	686	687
17154	13932	7596	6408	48198	6606	10674	12924
688	689	690	691	692	693	694	695
16428	6084	15480	5796	7848	46098	6156	5508
696	697	698	699	700	701	702	703
25632	5544	6228	10728	9936	4896	45912	4896
704	705	706	707	708	709	710	711
16260	10782	4932	6966	13590	4464	5022	30510
712	713	714	715	716	717	718	719
11340	4356	13968	4392	5652	8208	4788	3816
720	721	722	723	724	725	726	727
43122	6660	3924	7596	4896	3996	9000	3888
728	729	730	731	732	733	734	735
14448	58632	3720	2916	8622	2628	3528	9198
736	737	738	739	740	741	742	743
10602	2928	20016	2844	3582	5760	4140	2988
744	745	746	747	748	749	750	751
14184	2826	3024	15858	3024	3780	5580	2304
752	753	754	755	756	757	758	759
7992	5184	2664	2178	29934	2124	2160	4392
760	761	762	763	764	765	766	767
5886	2340	5184	3528	2736	12762	2304	1836

Продолжение табл. П.8.2

768	769	770	771	772	773	774	775
13878	2088	4482	3600	2808	1728	13536	1746
776	777	778	779	780	781	782	783
4716	5184	1872	1764	3942	1548	1692	14868
784	785	786	787	788	789	790	791
7824	1818	3384	972	2268	3096	1656	2322
792	793	794	795	796	797	798	799
19044	1560	1260	2844	1296	1188	3906	1512
800	801	802	803	804	805	806	807
4608	9270	1692	828	2664	1260	1620	2052
808	809	810	811	812	813	814	815
3960	1548	13212	972	1584	1944	648	1440
816	817	818	819	820	821	822	823
6534	1416	756	10944	1080	720	2268	972
824	825	826	827	828	829	830	831
3888	2160	1782	828	8568	900	720	1548
832	833	834	835	836	837	838	839
3726	2490	1872	936	936	9216	828	576
840	841	842	843	844	845	846	847
5634	864	1008	1404	864	540	6156	1530
848	849	850	851	852	853	854	855
1854	1584	468	792	1206	612	876	4332
856	857	858	859	860	861	862	863
2052	432	1152	360	612	1224	792	576
864	865	866	867	868	869	870	871
12888	612	432	720	648	504	1152	684
872	873	874	875	876	877	878	879
1908	4320	468	468	810	288	720	864
880	881	882	883	884	885	886	887
2268	540	5868	540	372	648	252	756
888	889	890	891	892	893	894	895
2592	1314	396	6174	432	144	792	216
896	897	898	899	900	901	902	903
3654	900	612	180	3636	216	216	846
904	905	906	907	908	909	910	911
972	540	576	288	144	3114	396	144

Продолжение табл. П.8.2

912	913	914	915	916	917	918	919	920	921
1476	216	504	396	252	252	4500	180	216	504
922	923	924	925	926	927	928	929	930	931
72	252	486	216	180	3204	864	180	432	216
932	933	934	935	936	937	938	939	940	941
288	180	324	396	5058	216	270	288	72	216
942	943	944	945	946	947	948	949	950	951
324	504	918	4314	216	108	180	36	180	360
952	953	954	955	956	957	958	959	960	961
1620	360	1440	144	72	216	0	612	1386	468
962	963	964	965	966	967	968	969	970	971
144	1692	108	0	180	36	972	324	288	36
972	973	974	975	976	977	978	979	980	981
2898	108	36	72	72	324	180	72	6	1404
982	983	984	985	986	987	988	989	990	991
0	0	576	72	72	90	36	36	1638	108
992	993	994	995	996	997	998	999	1000	1001
108	72	72	108	0	72	144	2052	108	108
1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009	1010	1011
108	0	72	108	108	180	3726	144	108	108
1012	1013	1014	1015	1016	1017	1018	1019	1020	1021
0	36	72	396	576	1044	72	0	0	0
1022	1023	1024	1025	1026	1027	1028	1029	1030	1031
144	108	852	180	1308	0	0	0	0	72
1032	1033	1034	1035	1036	1037	1038	1039	1040	1041
360	252	0	144	18	0	36	0	234	72
1042	1043	1044	1045	1046	1047	1048	1049	1050	1051
72	0	468	0	0	36	0	72	0	36
1052	1053	1054	1055	1056	1057	1058	1059	1060	1061
0	1566	0	0	18	18	72	36	0	0
1062	1063	1064	1065	1066	1067	1068	1069	1070	1071
576	0	72	72	0	0	0	0	36	1188
1072	1073	1074	1075	1076	1077	1078	1079	1080	1081
84	36	0	0	0	0	72	108	1692	36
1082	1083	1084	1085	1086	1087	1088	1089	1090	1091
0	0	0	18	36	108	324	936	0	0

Продолжение табл. П.8.2

1092	1093	1094	1095	1096	1097	1098	1099	1100	1101
0	0	0	0	288	72	72	0	0	0
1102	1103	1104	1105	1106	1107	1108	1109	1110	1111
0	36	18	72	0	360	0	0	0	0
1112	1113	1114	1115	1116	1117	1118	1119	1120	1121
0	36	36	0	0	0	0	0	0	36
1122	1123	1124	1125	1126	1127	1128	1129	1130	1131
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1132	1133	1134	1135	1136	1137	1138	1139	1140	1141
0	0	828	0	18	0	0	0	0	0
1142	1143	1144	1145	1146	1147	1148	1149	1150	1151
0	432	36	0	0	0	0	0	0	36
1152	1153	1154	1155	1156	1157	1158	1159	1160	1161
918	0	0	0	0	0	0	36	108	324
1162	1163	1164	1165	1166	1167	1168	1169	1170	1171
0	0	0	0	0	0	18	36	144	0
1172	1173	1174	1175	1176	1177	1178	1179	1180	1181
0	0	0	0	0	36	0	0	0	0
1182	1183	1184	1185	1186	1187	1188	1189	1190	1191
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1192	1193	1194	1195	1196	1197	1198	1199	1200	1201
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1202	1203	1204	1205	1206	1207	1208	1209	1210	1211
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1212	1213	1214	1215	1216	1217	1218	1219	1220	1221
0	0	0	450	6	0	0	0	0	0
1222	1223	1224	1225	1226	1227	1228	1229	1230	1231
0	0	288	0	0	0	0	0	0	0
1232	1233	1234	1235	1236	1237	1238	1239	1240	1241
18	216	0	0	0	0	0	0	0	12
1242	1243	1244	1245	1246	1247	1248	1249	1250	1251
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1252	1253	1254	1255	1256	1257	1258	1259	1260	1261
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1262	1263	1264	1265	1266	1267	1268	1269	1270	1271
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Окончание табл. П.8.2

1272	1273	1274	1275	1276	1277	1278	1279	1280	1281
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1282	1283	1284	1285	1286	1287	1288	1289	1290	1291
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1292	1293	1294	1295	1296	1297	1298	1299	1300	1301
0	0	0	0	198	0	0	0	0	0
1302	1303	1304	1305	1306	1307	1308	1309	1310	1311
0	0	0	72	0	0	0	0	0	0
1312	1313	1314	1315	1316	1317	1318	1319	1320	1321
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1322	1323	1324	1325	1326	1327	1328	1329	1330	1331
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1332	1333	1334	1335	1336	1337	1338	1339	1340	1341
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1342	1343	1344	1345	1346	1347	1348	1349	1350	1351
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1352	1353	1354	1355	1356	1357	1358	1359	1360	1361
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1362	1363	1364	1365	1366	1367	1368	1369	1370	1371
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1372	1373	1374	1375	1376	1377	1378	1379	1380	1381
0	0	0	0	0	54	0	0	0	0
1382	1383	1384	1385	1386	1387	1388	1389	1390	1391
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1392	1393	1394	1395	1396	1397	1398	1399	1400	1401
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1402	1403	1404	1405	1406	1407	1408	1409	1410	1411
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1412	1413	1414	1415	1416	1417	1418	1419	1420	1421
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1422	1423	1424	1425	1426	1427	1428	1429	1430	1431
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1432	1433	1434	1435	1436	1437	1438	1439	1440	1441
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1442	1443	1444	1445	1446	1447	1448	1449	1450	1451
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1452	1453	1454	1455	1456	1457	1458			
0	0	0	0	0	0	6			

Таблица П.8.3

Суммарные зависимости данных в таблицах П.8.1 и П.8.2,
вычисляемые по формулам 1.4–1.6

Порядок	Factor	Ves	$ \det _{\text{средний}}$
2	2,17E+05	2,68E+03	2,17E+01
3	1,21E+11	8,28E+07	1,21E+02

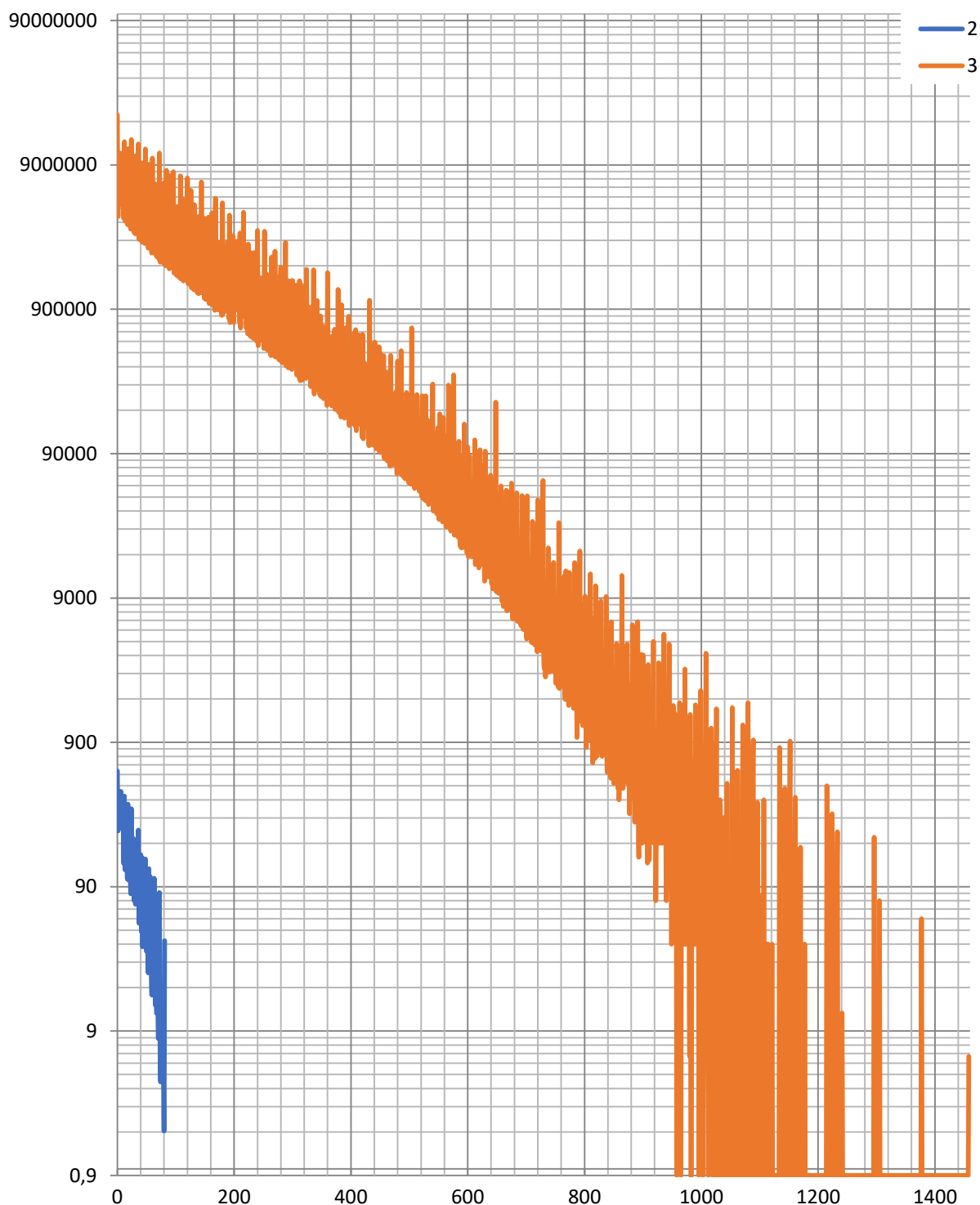


Рисунок П.8.1. Зависимость логарифма количества матриц от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.8.1 и П.8.2

Матрицы с элементами из множества {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Таблица П.9.1

Распределение детерминантов матриц порядка 2

0	1	2	3	4	5	6	7	8
719	254	408	338	454	306	508	262	466
9	10	11	12	13	14	15	16	17
344	468	158	470	142	316	288	360	126
18	19	20	21	22	23	24	25	26
416	118	414	234	192	108	388	162	168
27	28	29	30	31	32	33	34	35
218	246	88	372	88	240	114	132	178
36	37	38	39	40	41	42	43	44
288	64	116	90	318	64	208	60	112
45	46	47	48	49	50	51	52	53
176	96	52	188	86	184	62	88	48
54	55	56	57	58	59	60	61	62
172	58	150	44	60	28	174	32	64
63	64	65	66	67	68	69	70	71
122	92	38	56	20	40	28	132	24
72	73	74	75	76	77	78	79	80
126	20	32	26	32	14	28	12	110
81	82	83	84	85	86	87	88	89
54	24	8	22	12	16	8	16	4
90	91	92	93	94	95	96	97	98
92	6	8	4	8	4	6	4	4
99	100							
2	42							

Таблица П.9.2

Распределение детерминантов матриц порядка 3

0	1	2	3	4	5
37518971	6674010	12919920	10036458	16546740	8810214
6	7	8	9	10	11
19050912	7762074	18517296	11333694	16932930	6479214
12	13	14	15	16	17
23372892	6248256	14007732	12130002	18473736	5974314

Продолжение табл. П.9.2

18	19	20	21	22	23
20287056	5833518	20479530	10476864	11570910	5632062
24	25	26	27	28	29
24458436	7819512	11044086	10373598	16218258	5316378
30	31	32	33	34	35
21824982	5251032	16866888	8279370	10263816	8535216
36	37	38	39	40	41
22782090	4940208	9914220	7770384	20682492	4813056
42	43	44	45	46	47
17241948	4735422	12799500	11575344	9326286	4580928
48	49	50	51	52	53
21876228	5701206	13449204	7024914	11918310	4384638
54	55	56	57	58	59
16540800	6337134	15466932	6665886	8464608	4142736
60	61	62	63	64	65
23147316	4106916	8297748	9335910	13722888	5797002
66	67	68	69	70	71
12837222	3903336	10514112	6112854	13489572	3821706
72	73	74	75	76	77
20630256	3752658	7517304	8164512	9930678	4816578
78	79	80	81	82	83
11652732	3580758	17190384	7293984	7141518	3471552
84	85	86	87	88	89
16616556	5003388	6933798	5341662	11039478	3325086
90	91	92	93	94	95
17488206	4301466	8891520	5147154	6552432	4646232
96	97	98	99	100	101
16406136	3156408	7882284	6280290	12955020	3060234
102	103	104	105	106	107
9831744	3021516	9822276	7953516	6055326	2944818
108	109	110	111	112	113
15015210	2909466	9094158	4521510	11524344	2835144
114	115	116	117	118	119
9080334	4105458	7561530	5532696	5574906	3573588
120	121	122	123	124	125
18651276	2892348	5463342	4218372	7266744	3997932

Продолжение табл. П.9.2

126	127	128	129	130	131
12052524	2597004	9252384	4065156	7996656	2531610
132	133	134	135	136	137
10940166	3261282	5053320	7009032	8003052	2441574
138	139	140	141	142	143
7852644	2411946	11641314	3766842	4841244	2645544
144	145	146	147	148	149
14286468	3417894	4713354	4632876	6193422	2269764
150	151	152	153	154	155
10999908	2239290	7269816	4437360	5836062	3246318
156	157	158	159	160	161
9345078	2161044	4374378	3387276	11339304	2773920
162	163	164	165	166	167
8799960	2084274	5653116	4787658	4163094	2035278
168	169	170	171	172	173
11721690	2113554	6329232	3959712	5374440	1961712
174	175	176	177	178	179
6263712	3802296	6989208	2996712	3872466	1893060
180	181	182	183	184	185
13784484	1869822	4897194	2912292	6021720	2691594
186	187	188	189	190	191
5899770	2006730	4878504	4778892	5647602	1761570
192	193	194	195	196	197
9512100	1741608	3533652	3948678	5734656	1700280
198	199	200	201	202	203
6899238	1681254	8896146	2588958	3358368	2162124
204	205	206	207	208	209
6918714	2423898	3282876	3233484	5739264	1744284
210	211	212	213	214	215
9161334	1565352	4238316	2436786	3136824	2292120
216	217	218	219	220	221
9524064	2018892	3070116	2337876	6519582	1604244
222	223	224	225	226	227
4697118	1456920	6347988	4190400	2929608	1424988
228	229	230	231	232	233
6006942	1407312	4571568	2907306	4537674	1373832

Продолжение табл. П.9.2

234	235	236	237	238	239
5561730	2042982	3658482	2084868	3538548	1326420
240	241	242	243	244	245
10530666	1309536	2837988	2912886	3516660	2563434
246	247	248	249	250	251
4115916	1362660	4221630	1933218	4399494	1235484
252	253	254	255	256	257
7595010	1343160	2498940	2743938	4529040	1192320
258	259	260	261	262	263
3832758	1556352	5224944	2350638	2386044	1151532
264	265	266	267	268	269
5909526	1736154	3023562	1727820	3048660	1111428
270	271	272	273	274	275
7114716	1096812	3970932	2237256	2233332	1805712
276	277	278	279	280	281
4535910	1059192	2182356	2136492	6724992	1034820
282	283	284	285	286	287
3318102	1024128	2809044	2264544	2297784	1349406
288	289	290	291	292	293
6664908	1024560	3301974	1500750	2668716	962388
294	295	296	297	298	299
3921894	1426176	3161286	2139030	1948392	1000452
300	301	302	303	304	305
6504210	1246770	1901556	1383228	3328542	1370610
306	307	308	309	310	311
3684312	889020	3154080	1335312	3034092	865116
312	313	314	315	316	317
4407066	853920	1777716	3173010	2317266	836460
318	319	320	321	322	323
2696904	898092	5142678	1241910	2225520	855552
324	325	326	327	328	329
4602744	1327392	1659888	1197468	2664792	1061964
330	331	332	333	334	335
4027554	766440	2104164	1544382	1584252	1132920
336	337	338	339	340	341
4883238	740628	1614960	1114704	3368808	789456

Продолжение табл. П.9.2

342	343	344	345	346	347
3010716	1010004	2421516	1588644	1476576	697104
348	349	350	351	352	353
2939418	687204	3351840	1562394	2680584	671328
354	355	356	357	358	359
2157642	1034604	1824894	1353168	1379088	648576
360	361	362	363	364	365
6420348	655752	1347336	1018116	2264394	961272
366	367	368	369	370	371
2032236	617148	2312916	1285200	2148744	845532
372	373	374	375	376	377
2591676	594252	1362312	1360008	2003274	618444
378	379	380	381	382	383
3350904	573876	2721090	862434	1198872	558396
384	385	386	387	388	389
3200238	1170558	1171980	1163646	1518804	538380
390	391	392	393	394	395
2853594	565884	2330382	800424	1116288	793800
396	397	398	399	400	401
2886444	513612	1092384	1035360	3588504	499896
402	403	404	405	406	407
1625274	528816	1368720	1685532	1364436	518448
408	409	410	411	412	413
2464344	476172	1748772	714150	1301904	627480
414	415	416	417	418	419
2040534	695790	1822794	688608	1045956	446472
420	421	422	423	424	425
3824172	440820	945252	945000	1515906	713508
426	427	428	429	430	431
1431612	599202	1187784	701136	1556586	414036
432	433	434	435	436	437
3155394	409320	1203870	904896	1131696	418080
438	439	440	441	442	443
1322262	393984	2380716	1205538	893016	383724
444	445	446	447	448	449
1643904	573282	817668	571680	1896510	369900

Продолжение табл. П.9.2

450	451	452	453	454	455
2840832	392724	1024200	546426	780192	753552
456	457	458	459	460	461
1847394	350316	761184	850860	1743282	340560
462	463	464	465	466	467
1479906	335952	1305288	745434	723204	327888
468	469	470	471	472	473
1883202	444204	1233864	486090	1112778	339888
474	475	476	477	478	479
1049166	504384	1134138	704574	674172	304236
480	481	482	483	484	485
2963862	316668	654372	617580	881388	449766
486	487	488	489	490	491
1553646	290232	1032174	433332	1486266	279504
492	493	494	495	496	497
1224072	289620	647820	896436	1122546	396756
498	499	500	501	502	503
896598	265356	1596282	399834	577332	259128
504	505	506	507	508	509
2275788	385956	600372	400968	726516	247392
510	511	512	513	514	515
1394766	349794	1056786	607404	536688	360414
516	517	518	519	520	521
1039662	250416	696792	354024	1506414	228528
522	523	524	525	526	527
1067850	224172	654228	658566	495540	231600
528	529	530	531	532	533
1308132	221580	872964	484650	806322	224136
534	535	536	537	538	539
701010	316188	750672	313200	458928	297588
540	541	542	543	544	545
2208792	198144	444924	298188	832536	295560
546	547	548	549	550	551
846648	190764	561672	450702	860334	192960
552	553	554	555	556	557
987192	255528	412632	406710	531900	178632

Продолжение табл. П.9.2

558	559	560	561	562	563
891630	188472	1724718	279702	389124	168948
564	565	566	567	568	569
747684	258678	381276	681096	635472	164772
570	571	572	573	574	575
958032	161136	507024	240696	489438	257220
576	577	578	579	580	581
1337538	156600	361008	231066	874116	204390
582	583	584	585	586	587
511038	155556	561456	514086	332748	144324
588	589	590	591	592	593
765486	147504	593388	211338	598746	136980
594	595	596	597	598	599
745722	287190	406764	202788	320040	131472
600	601	602	603	604	605
1429542	128880	395850	306486	384660	201294
606	607	608	609	610	611
421092	124416	562860	248526	541710	125892
612	613	614	615	616	617
727182	118152	274356	268830	562944	114444
618	619	620	621	622	623
388476	113184	724512	314082	257868	147582
624	625	626	627	628	629
654228	179646	250020	170064	325800	110856
630	631	632	633	634	635
1262880	103968	399276	153072	237312	157554
636	637	638	639	640	641
435726	142794	238500	262674	947718	96012
642	643	644	645	646	647
322020	93888	355734	216198	227448	92340
648	649	650	651	652	653
850782	93240	476532	173466	272952	86256
654	655	656	657	658	659
296244	136620	396486	224568	258804	83520
660	661	662	663	664	665
733392	80784	191160	126432	313344	164916

Продолжение табл. П.9.2

666	667	668	669	670	671	672	673
424872	80712	243144	116064	365112	79020	530406	73980
674	675	676	677	678	679	680	681
176184	308592	233688	71784	248148	99288	576990	104040
682	683	684	685	686	687	688	689
171072	68220	458382	109350	201510	99360	310350	68076
690	691	692	693	694	695	696	697
444996	62820	202500	205470	153036	100728	336708	65556
698	699	700	701	702	703	704	705
147636	90504	654192	58428	355074	62256	289608	134910
706	707	708	709	710	711	712	713
137628	69012	250146	56088	299700	147834	215748	55164
714	715	716	717	718	719	720	721
215226	87984	167616	77544	127080	51480	1016742	62316
722	723	724	725	726	727	728	729
123840	72612	158940	85014	170568	48132	223572	190950
730	731	732	733	734	735	736	737
255774	48504	206712	44892	109584	122976	208674	44796
738	739	740	741	742	743	744	745
264294	43272	337422	64584	119988	39924	228168	67374
746	747	748	749	750	751	752	753
99612	107946	136116	48348	322884	37944	182304	56520
754	755	756	757	758	759	760	761
93528	62748	311328	36504	89568	54072	351108	34344
762	763	764	765	766	767	768	769
124128	42228	114372	146268	84276	33192	210006	33228
770	771	772	773	774	775	776	777
216072	46764	106668	30492	196290	55692	132318	55044
778	779	780	781	782	783	784	785
76428	32364	326862	31284	75708	93582	152514	48114
786	787	788	789	790	791	792	793
101340	26892	94212	40284	165186	32958	236070	27984
794	795	796	797	798	799	800	801
66024	63036	86940	25380	105786	26964	429336	66510
802	803	804	805	806	807	808	809
61776	23076	110250	48294	61596	34272	92772	23400

Продолжение табл. П.9.2

810	811	812	813	814	815	816	817
401850	22284	84384	30924	54468	36756	125748	23700
818	819	820	821	822	823	824	825
54468	74280	206496	19332	70920	19620	80136	50472
826	827	828	829	830	831	832	833
58086	18468	142344	18108	119700	26280	84702	22896
834	835	836	837	838	839	840	841
64224	30834	62820	56016	44820	16704	256266	15876
842	843	844	845	846	847	848	849
41832	22968	56952	28332	106632	20250	71028	22104
850	851	852	853	854	855	856	857
127008	15228	72738	14976	45192	66318	59904	13500
858	859	860	861	862	863	864	865
51372	13932	151866	24048	34056	13140	132480	22986
866	867	868	869	870	871	872	873
33408	18216	52092	11448	115974	11556	51012	40734
874	875	876	877	878	879	880	881
33876	27090	54900	11628	29448	16416	160956	10980
882	883	884	885	886	887	888	889
83070	10584	38532	25704	27936	10296	58158	13662
890	891	892	893	894	895	896	897
73350	36720	36360	10404	35244	17550	52962	13752
898	899	900	901	902	903	904	905
24912	8280	301266	9144	22392	15390	37692	15444
906	907	908	909	910	911	912	913
31032	8568	31140	21816	76914	7020	49932	7200
914	915	916	917	918	919	920	921
20664	19368	28764	9360	50238	7272	100620	9900
922	923	924	925	926	927	928	929
18576	8424	38466	13860	18684	18792	33876	6588
930	931	932	933	934	935	936	937
69102	9192	23940	8244	17136	12006	56430	7092
938	939	940	941	942	943	944	945
19128	8280	81360	5328	20808	6444	28332	33450
946	947	948	949	950	951	952	953
15384	5148	25848	5124	55026	6804	26622	4788

Продолжение табл. П.9.2

954	955	956	957	958	959	960	961
33390	9666	18756	6192	13500	5940	95796	4248
962	963	964	965	966	967	968	969
12132	12906	18324	8694	18684	4392	20808	5832
970	971	972	973	974	975	976	977
42336	4068	38238	5256	10980	10710	21144	4248
978	979	980	981	982	983	984	985
14616	3492	60360	10692	10584	3420	21168	6660
986	987	988	989	990	991	992	993
9252	6210	14004	4464	57078	3744	17784	4428
994	995	996	997	998	999	1000	1001
12348	5580	16092	3240	9108	11916	96504	4332
1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009
10152	2664	10980	6804	7920	3096	37362	3132
1010	1011	1012	1013	1014	1015	1016	1017
23256	3420	10836	2304	9324	5526	11808	8424
1018	1019	1020	1021	1022	1023	1024	1025
7488	2556	40842	2376	6930	2664	13146	5004
1026	1027	1028	1029	1030	1031	1032	1033
19452	2424	8892	3312	20196	1728	12978	2340
1034	1035	1036	1037	1038	1039	1040	1041
5724	11808	9540	2424	7272	1980	37056	2340
1042	1043	1044	1045	1046	1047	1048	1049
5040	2538	17460	3636	5112	2736	8928	1836
1050	1051	1052	1053	1054	1055	1056	1057
29448	1656	6516	8604	5724	3132	11808	3024
1058	1059	1060	1061	1062	1063	1064	1065
4644	2412	24696	1764	12150	1800	9372	4140
1066	1067	1068	1069	1070	1071	1072	1073
3996	1512	7596	1584	13644	7038	8112	1512
1074	1075	1076	1077	1078	1079	1080	1081
4572	3564	4752	1836	5076	1944	41580	1548
1082	1083	1084	1085	1086	1087	1088	1089
3672	1656	5148	1980	4356	1512	7578	5868
1090	1091	1092	1093	1094	1095	1096	1097
11664	1512	6156	1188	2772	1728	5580	1404

Продолжение табл. П.9.2

1098	1099	1100	1101	1102	1103	1104	1105	1106	1107
10260	1296	22590	1260	2448	684	6462	1764	3474	4590
1108	1109	1110	1111	1112	1113	1114	1115	1116	1117
4536	792	12708	1044	4248	1512	2520	1944	8946	1368
1118	1119	1120	1121	1122	1123	1124	1125	1126	1127
2916	1044	23994	468	2412	612	3708	6096	2700	2022
1128	1129	1130	1131	1132	1133	1134	1135	1136	1137
4716	864	8352	1296	2880	648	10578	1404	5346	1116
1138	1139	1140	1141	1142	1143	1144	1145	1146	1147
2628	684	15750	1260	1836	2664	4536	1152	2268	936
1148	1149	1150	1151	1152	1153	1154	1155	1156	1157
2826	720	9612	720	9270	828	2196	1062	2484	540
1158	1159	1160	1161	1162	1163	1164	1165	1166	1167
2124	936	12636	2898	1980	396	2610	1152	1008	792
1168	1169	1170	1171	1172	1173	1174	1175	1176	1177
3330	954	14328	576	1944	648	1404	972	2700	612
1178	1179	1180	1181	1182	1183	1184	1185	1186	1187
2052	1764	10062	720	1332	612	2052	360	1224	720
1188	1189	1190	1191	1192	1193	1194	1195	1196	1197
5940	612	5976	576	1980	216	1368	432	2052	3108
1198	1199	1200	1201	1202	1203	1204	1205	1206	1207
1584	396	14976	504	648	288	1926	792	3906	1080
1208	1209	1210	1211	1212	1213	1214	1215	1216	1217
2448	396	5760	522	1404	216	1188	4158	2646	792
1218	1219	1220	1221	1222	1223	1224	1225	1226	1227
1458	504	7542	252	720	360	5400	612	972	432
1228	1229	1230	1231	1232	1233	1234	1235	1236	1237
1044	252	4428	504	1926	1134	1080	288	1080	396
1238	1239	1240	1241	1242	1243	1244	1245	1246	1247
684	468	5832	300	2088	144	1116	216	702	216
1248	1249	1250	1251	1252	1253	1254	1255	1256	1257
1512	288	5004	1080	972	306	432	324	720	324
1258	1259	1260	1261	1262	1263	1264	1265	1266	1267
792	324	11178	216	504	144	972	324	576	540
1268	1269	1270	1271	1272	1273	1274	1275	1276	1277
900	1152	2736	360	900	192	450	36	828	468

Продолжение табл. П.9.2

1278	1279	1280	1281	1282	1283	1284	1285	1286	1287
2988	396	6318	288	324	36	648	144	684	1836
1288	1289	1290	1291	1292	1293	1294	1295	1296	1297
1548	324	2448	108	432	108	540	216	3636	540
1298	1299	1300	1301	1302	1303	1304	1305	1306	1307
684	144	6102	108	306	36	864	918	576	324
1308	1309	1310	1311	1312	1313	1314	1315	1316	1317
540	90	1296	180	450	36	1422	216	540	144
1318	1319	1320	1321	1322	1323	1324	1325	1326	1327
324	36	4302	72	216	198	504	0	288	180
1328	1329	1330	1331	1332	1333	1334	1335	1336	1337
216	108	2268	0	828	36	360	0	396	162
1338	1339	1340	1341	1342	1343	1344	1345	1346	1347
180	180	3096	504	180	84	450	0	72	72
1348	1349	1350	1351	1352	1353	1354	1355	1356	1357
468	324	5220	162	432	72	108	72	216	216
1358	1359	1360	1361	1362	1363	1364	1365	1366	1367
504	918	4014	72	108	36	144	0	216	324
1368	1369	1370	1371	1372	1373	1374	1375	1376	1377
1692	288	1152	180	180	0	144	0	576	1314
1378	1379	1380	1381	1382	1383	1384	1385	1386	1387
576	144	1620	36	0	0	216	36	972	180
1388	1389	1390	1391	1392	1393	1394	1395	1396	1397
324	36	864	0	144	0	72	54	324	144
1398	1399	1400	1401	1402	1403	1404	1405	1406	1407
72	0	2682	0	0	0	522	36	108	72
1408	1409	1410	1411	1412	1413	1414	1415	1416	1417
60	0	792	36	72	72	108	0	108	0
1418	1419	1420	1421	1422	1423	1424	1425	1426	1427
0	36	2034	36	108	0	144	0	36	36
1428	1429	1430	1431	1432	1433	1434	1435	1436	1437
72	144	1548	108	216	36	72	0	36	72
1438	1439	1440	1441	1442	1443	1444	1445	1446	1447
108	180	3726	72	108	0	36	0	36	72
1448	1449	1450	1451	1452	1453	1454	1455	1456	1457
432	576	1008	72	0	0	0	0	144	72

Продолжение табл. П.9.2

1458	1459	1460	1461	1462	1463	1464	1465	1466	1467
852	180	1308	0	0	0	0	0	72	360
1468	1469	1470	1471	1472	1473	1474	1475	1476	1477
252	0	144	0	18	0	36	0	234	72
1478	1479	1480	1481	1482	1483	1484	1485	1486	1487
72	0	468	0	0	0	36	0	72	0
1488	1489	1490	1491	1492	1493	1494	1495	1496	1497
36	0	216	0	0	0	0	0	72	36
1498	1499	1500	1501	1502	1503	1504	1505	1506	1507
0	0	1350	0	0	18	90	0	0	0
1508	1509	1510	1511	1512	1513	1514	1515	1516	1517
0	0	576	0	84	0	0	0	0	0
1518	1519	1520	1521	1522	1523	1524	1525	1526	1527
0	36	1188	72	36	0	0	0	0	0
1528	1529	1530	1531	1532	1533	1534	1535	1536	1537
72	108	1692	36	0	0	0	0	18	36
1538	1539	1540	1541	1542	1543	1544	1545	1546	1547
108	324	936	0	0	0	0	0	0	0
1548	1549	1550	1551	1552	1553	1554	1555	1556	1557
288	72	72	0	0	0	0	0	36	18
1558	1559	1560	1561	1562	1563	1564	1565	1566	1567
72	0	360	0	0	0	0	0	0	36
1568	1569	1570	1571	1572	1573	1574	1575	1576	1577
36	0	0	0	0	0	0	0	36	0
1578	1579	1580	1581	1582	1583	1584	1585	1586	1587
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1588	1589	1590	1591	1592	1593	1594	1595	1596	1597
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1598	1599	1600	1601	1602	1603	1604	1605	1606	1607
0	0	828	0	18	0	0	0	0	0
1608	1609	1610	1611	1612	1613	1614	1615	1616	1617
0	0	432	36	0	0	0	0	0	0
1618	1619	1620	1621	1622	1623	1624	1625	1626	1627
0	36	918	0	0	0	0	0	0	0
1628	1629	1630	1631	1632	1633	1634	1635	1636	1637
36	108	324	0	0	0	0	0	0	0

Продолжение табл. П.9.2

1638	1639	1640	1641	1642	1643	1644	1645	1646	1647
18	36	144	0	0	0	0	0	0	0
1648	1649	1650	1651	1652	1653	1654	1655	1656	1657
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1658	1659	1660	1661	1662	1663	1664	1665	1666	1667
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1668	1669	1670	1671	1672	1673	1674	1675	1676	1677
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1678	1679	1680	1681	1682	1683	1684	1685	1686	1687
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1688	1689	1690	1691	1692	1693	1694	1695	1696	1697
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1698	1699	1700	1701	1702	1703	1704	1705	1706	1707
0	0	450	6	0	0	0	0	0	0
1708	1709	1710	1711	1712	1713	1714	1715	1716	1717
0	0	288	0	0	0	0	0	0	0
1718	1719	1720	1721	1722	1723	1724	1725	1726	1727
0	18	216	0	0	0	0	0	0	0
1728	1729	1730	1731	1732	1733	1734	1735	1736	1737
0	12	0	0	0	0	0	0	0	0
1738	1739	1740	1741	1742	1743	1744	1745	1746	1747
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1748	1749	1750	1751	1752	1753	1754	1755	1756	1757
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1758	1759	1760	1761	1762	1763	1764	1765	1766	1767
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1768	1769	1770	1771	1772	1773	1774	1775	1776	1777
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1778	1779	1780	1781	1782	1783	1784	1785	1786	1787
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1788	1789	1790	1791	1792	1793	1794	1795	1796	1797
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1798	1799	1800	1801	1802	1803	1804	1805	1806	1807
0	0	198	0	0	0	0	0	0	0
1808	1809	1810	1811	1812	1813	1814	1815	1816	1817
0	0	72	0	0	0	0	0	0	0

Окончание табл. П.9.2

1818	1819	1820	1821	1822	1823	1824	1825	1826	1827
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1828	1829	1830	1831	1832	1833	1834	1835	1836	1837
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1838	1839	1840	1841	1842	1843	1844	1845	1846	1847
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1848	1849	1850	1851	1852	1853	1854	1855	1856	1857
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865	1866	1867
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1878	1879	1880	1881	1882	1883	1884	1885	1886	1887
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1888	1889	1890	1891	1892	1893	1894	1895	1896	1897
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1898	1899	1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907
0	0	54	0	0	0	0	0	0	0
1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1918	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1998	1999	2000							
0	0	6							

Таблица П.9.3

Суммарные зависимости данных в таблицах П.9.1 и П.9.2,
вычисляемые по формулам 1.4–1.6

Порядок	Factor	Ves	$ \det _{\text{средний}}$
2	3,89E+05	3,89E+03	2,65E+01
3	3,83E+11	1,91E+08	1,62E+02

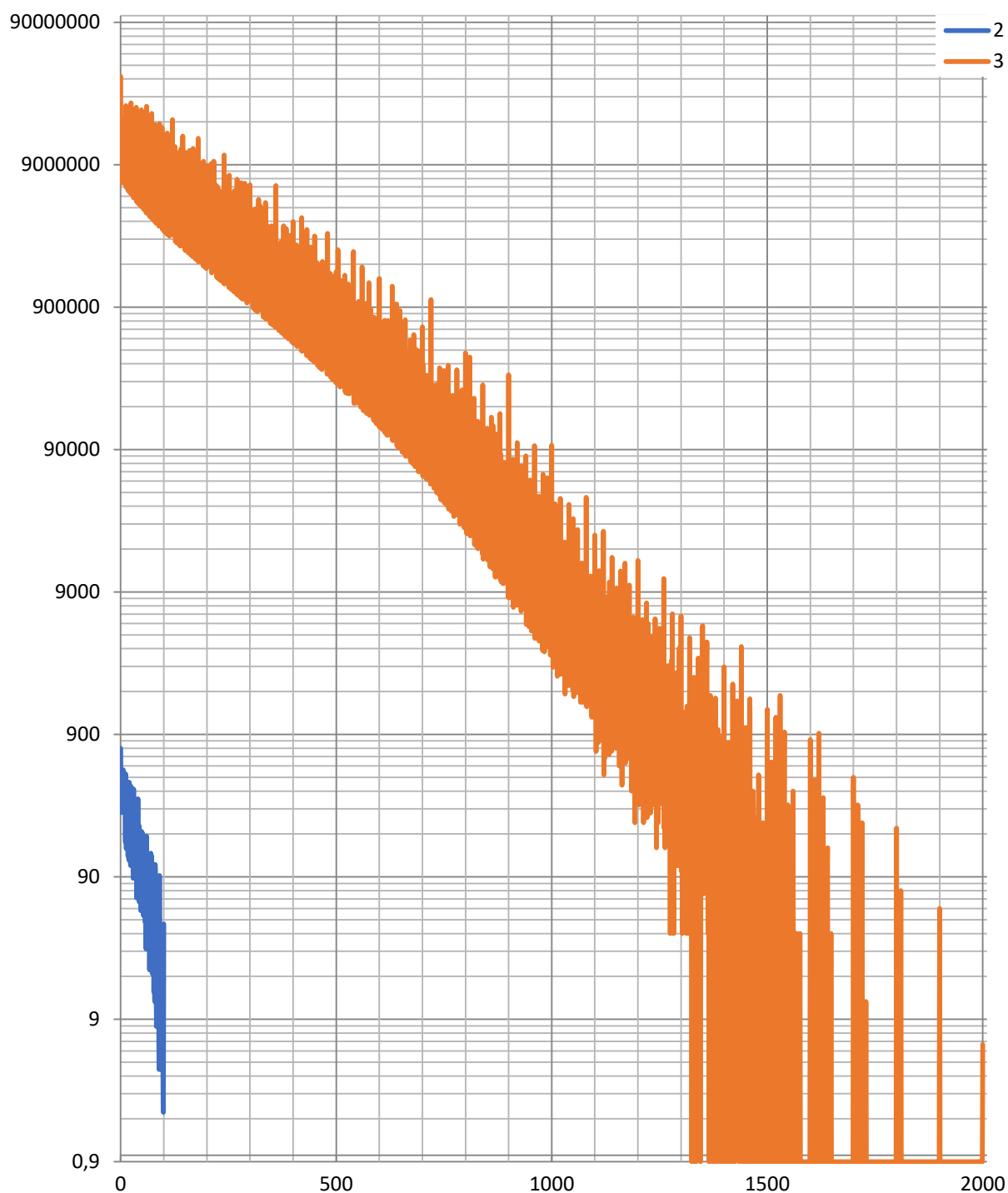


Рисунок П.9.1. Зависимость логарифма количества матриц от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.9.1 и П.9.2

Приложение 10

Матрицы с элементами из множества $\{-1, 0, 1\}$

Таблица П.10.1

Распределение детерминантов матриц порядка 2

0	1	2
33	40	8

Таблица П.10.2

Распределение детерминантов матриц порядка 3

0	1	2	3	4
7875	6960	3792	576	480

Таблица П.10.3

Распределение детерминантов матриц порядка 4

0	1	2	3	4	5
15099201	10340736	9648384	2798592	3297408	500736
6	7	8	9	10	11
847872	110592	325632	27648	36864	0
12	13	14	15	16	
12288	0	0	0	768	

Таблица П.10.4

Распределение детерминантов матриц порядка 5

0	1	2	3
237634987683	129599358720	166792865280	68291604480
4	5	6	7
97855530240	23883110400	46889011200	10258329600
8	9	10	11
27612748800	7211673600	9680486400	2291957760
12	13	14	15
9356083200	1133568000	2451456000	988876800
16	17	18	19
2633940480	265420800	957235200	121651200
20	21	22	23
682598400	81100800	159989760	22118400
24	25	26	27
289996800	16588800	36864000	2457600
28	29	30	31
43622400	0	14745600	0

Окончание табл. П.10.4

32	33	34	35
23040000	0	0	0
36	37	38	39
4300800	0	0	0
40	41	42	43
1228800	0	0	0
44	45	46	47
0	0	0	0
48			
61440			

Таблица П.10.5

Распределение детерминантов матриц порядка 6

0	1	2
30790882980309201	13530237091695360	21260096669368320
3	4	5
10791037479582720	17366828637338880	5364117461633280
6	7	8
11549643885722880	3168003598379520	8559880782213120
9	10	11
3025367270300160	4269892057171200	1331142425030400
12	13	14
5140131747264000	904890507590400	1938265536441600
15	16	17
1102901185612800	2302613943782400	441071599334400
18	19	20
1447689291552000	313727912352000	1176008530924800
21	22	23
374412222086400	506423872512000	163009218067200
24	25	26
944885670336000	150346509995520	274602849177600
27	28	29
145689148761600	341251576800000	63617973926400
30	31	32
268424783193600	46826776166400	247026812348160
33	34	35
54963418890240	85731773299200	36778121625600

Продолжение табл. П.10.5

36	37	38
164648150496000	18816786432000	48779300044800
39	40	41
21815333683200	93974054803200	10263556915200
42	43	44
45899218944000	7573517107200	37964177514240
45	46	47
11889834393600	16085031321600	4106059776000
48	49	50
45472864665600	3458786918400	12209224089600
51	52	53
3418885324800	13362521702400	1611635097600
54	55	56
8829399859200	1777947770880	11648522649600
57	58	59
1322326425600	3058178457600	610467840000
60	61	62
8655991603200	439006003200	1754962329600
63	64	65
621969408000	5096932024320	356106240000
66	67	68
1617686691840	155005747200	1708956057600
69	70	71
188448768000	878012006400	74317824000
72	73	74
2423734272000	50960793600	313727385600
75	76	77
107628134400	621615513600	34717040640
78	79	80
286919884800	14863564800	893808967680
81	82	83
30641356800	90773913600	6370099200
84	85	86
404412825600	10882252800	46714060800
87	88	89
10616832000	227642572800	1061683200
90	91	92
68567040000	1061683200	77679820800

Окончание табл. П.10.5

93	94	95	96
3185049600	10616832000	1592524800	188997304320
97	98	99	100
0	9289728000	1061683200	34239283200
101	102	103	104
0	8493465600	0	30788812800
105	106	107	108
1592524800	1061683200	0	15099494400
109	110	111	112
0	2123366400	0	21366374400
113	114	115	116
0	1061683200	0	2123366400
117	118	119	120
0	0	0	7697203200
121	122	123	124
0	0	0	0
125	126	127	128
115015680	0	0	4220559360
129	130	131	132
0	265420800	0	530841600
133	134	135	136
0	0	0	530841600
137	138	139	140
0	0	0	0
141	142	143	144
0	0	0	331776000
145	146	147	148
0	0	0	0
149	150	151	152
0	0	0	0
153	154	155	156
0	0	0	0
157	158	159	160
0	0	0	14745600

Таблица П.10.6

Суммарные зависимости данных в таблицах П.10.1– П.10.5,
вычисляемые по формулам 1.4–1.6

Порядок	2	3	4	5	6
Factor	5,60E+01	1,82E+04	6,30E+07	2,21E+12	7,67E+17
Ves	2,80E+01	4,55E+03	3,94E+06	4,61E+10	4,80E+15
$ \det _{\text{средний}}$	6,91E-01	9,24E-01	1,46E+00	2,61E+00	5,11E+00

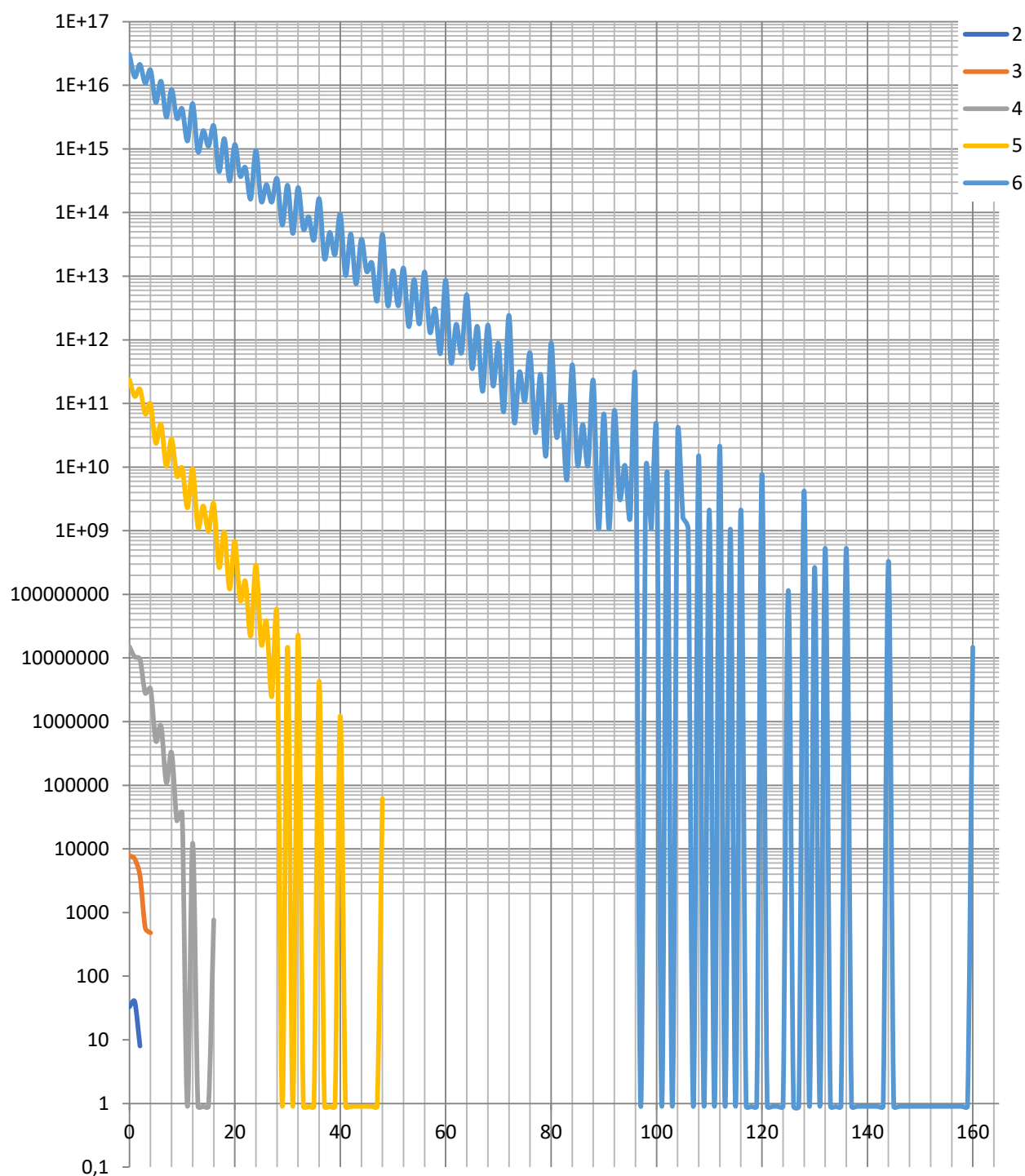


Рисунок П.10.1. Зависимость логарифма количества матриц от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.10.1– П.10.5

Матрицы с элементами из множества {-2, -1, 0, 1, 2}

Таблица П.11.1

Распределение детерминантов матриц порядка 2

0	1	2	3	4	5	6	7	8
129	104	184	48	104	16	32	0	8

Таблица П.11.2

Распределение детерминантов матриц порядка 3

0	1	2	3	4	5	6
305381	135408	295392	127584	291264	66720	190368
7	8	9	10	11	12	13
36672	156576	38400	68832	14400	92160	8448
14	15	16	17	18	19	20
26304	11520	34608	2304	19008	1152	12096
21	22	23	24	25	26	27
1728	3456	0	9216	0	1152	192
28	29	30	31	32		
1152	0	576	0	1056		

Таблица П.11.3

Распределение детерминантов матриц порядка 4

0	1	2	3	4
14711905729	4245160320	9997846272	5292286464	12372644736
5	6	7	8	9
3483068928	10513079808	2654622720	10551800832	3406904832
10	11	12	13	14
6005454336	1740085248	9712740864	1438731264	4019552256
15	16	17	18	19
2262786048	6213720960	1004620800	4553938944	848775168
20	21	22	23	24
4258331136	1294639104	2050369536	606965760	4969234944
25	26	27	28	29
655861248	1506693120	839353344	2232434688	374501376
30	31	32	33	34
2103902208	318763008	2140369152	482365440	826103808
35	36	37	38	39
334934016	2028767232	196116480	618651648	300429312

Продолжение табл. П.11.3

40	41	42	43	44
1321468416	141557760	851011584	119992320	694192128
45	46	47	48	49
260017152	344641536	86298624	1137838080	87100416
50	51	52	53	54
322578432	115255296	397443072	52051968	389019648
55	56	57	58	59
59830272	423481344	71976960	144912384	31113216
60	61	62	63	64
436709376	25989120	108195840	61396992	276129408
65	66	67	68	69
25307136	148709376	15335424	127862784	26505216
70	71	72	73	74
83595264	10690560	244273152	8828928	44457984
75	76	77	78	79
19685376	73064448	7692288	63197184	4866048
80	81	82	83	84
108229632	13347840	23998464	3317760	77555712
85	86	87	88	89
3870720	17694720	5787648	47185920	1769472
90	91	92	93	94
33951744	2064384	22708224	3465216	9216000
95	96	97	98	99
1548288	56942592	663552	7320576	2764800
100	101	102	103	104
15068160	442368	9768960	368640	16011264
105	106	107	108	109
1474560	3465216	221184	13387776	147456
110	111	112	113	114
3133440	552960	11501568	110592	3686400
115	116	117	118	119
221184	3428352	700416	1179648	73728
120	121	122	123	124
8957952	0	847872	184320	1769472
125	126	127	128	129
110592	1511424	0	4506624	73728

Окончание табл. П.11.3

130	131	132	133	134	135	136
688128	0	1695744	0	221184	76800	1327104
137	138	139	140	141	142	143
18432	405504	0	552960	0	73728	98304
144	145	146	147	148	149	150
1545216	0	73728	0	184320	0	221184
151	152	153	154	155	156	157
0	368640	9216	0	0	208896	0
158	159	160	161	162	163	164
73728	0	313344	0	12288	0	73728
165	166	167	168	169	170	171
0	0	0	221184	6144	0	0
172	173	174	175	176	177	178
0	0	36864	0	147456	0	0
179	180	181	182	183	184	185
0	0	0	24576	0	0	0
186	187	188	189	190	191	192
0	0	0	0	0	0	67584
193	194	195	196	197	198	199
0	0	0	0	0	0	0
200	201	202	203	204	205	206
36864	0	0	0	0	0	0
207	208	209	210	211	212	213
0	0	0	0	0	0	0
214	215	216	217	218	219	220
0	0	0	0	0	0	0
221	222	223	224	225	226	227
0	0	0	12288	0	0	0
228	229	230	231	232	233	234
0	0	0	0	0	0	0
235	236	237	238	239	240	241
0	0	0	0	0	0	0
242	243	244	245	246	247	248
0	0	0	0	0	0	0
249	250	251	252	253	254	255
0	0	0	0	0	0	0
256						
768						

Таблица П.11.4

Суммарные зависимости данных в таблицах П.11.1– П.11.3,
вычисляемые по формулам 1.4–1.6

Порядок	2	3	4
Factor	1,37E+03	9,86E+06	2,08E+12
Ves	1,71E+02	3,08E+05	8,11E+09
det _{средний}	2,19E+00	5,05E+00	1,36E+01

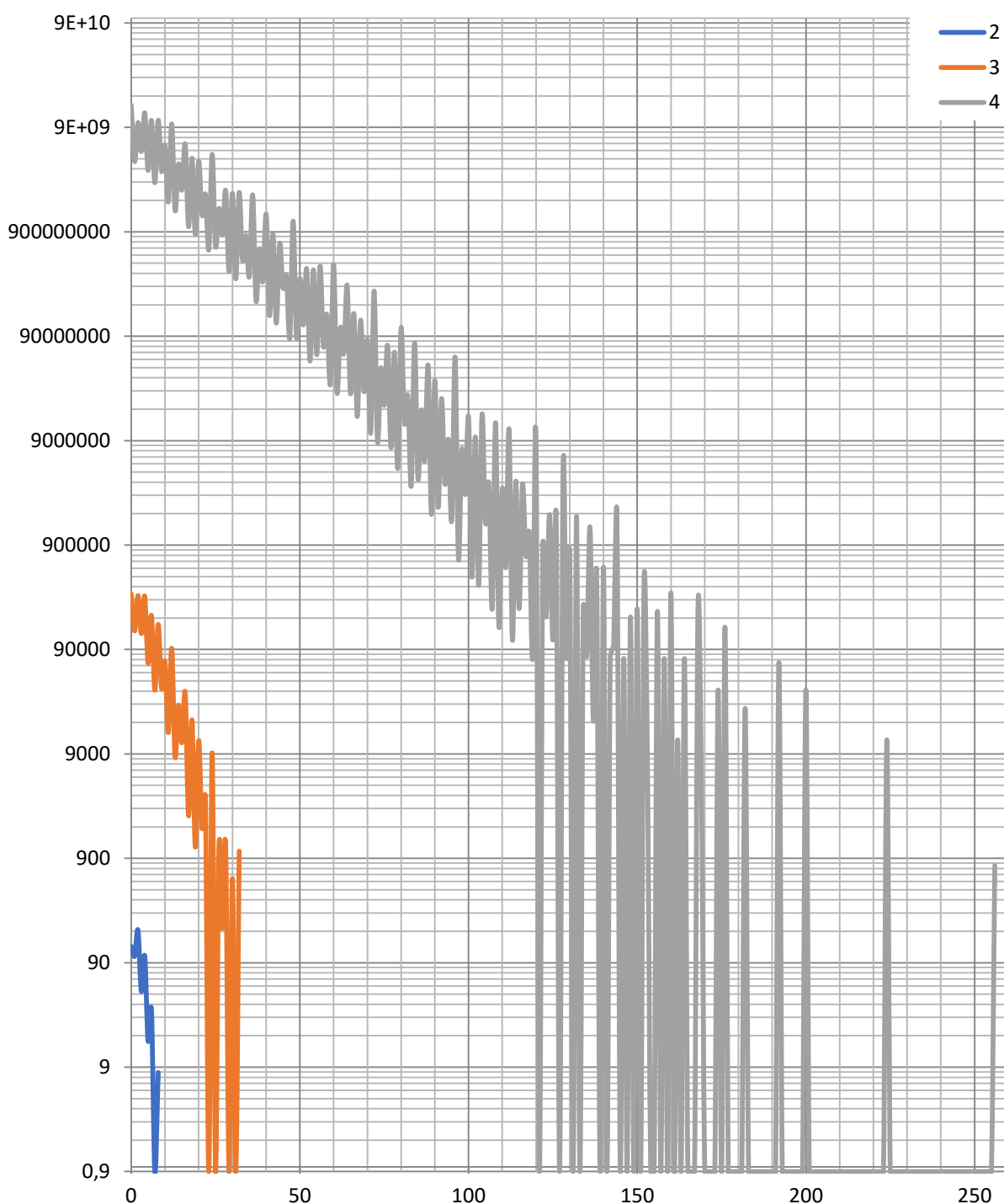


Рисунок П.11.1. Зависимость логарифма количества матриц от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.11.1– П.11.3

Матрицы с элементами из множества {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}

Таблица П.12.1

Распределение детерминантов матриц порядка 2

0	1	2	3	4	5	6	7
289	232	312	352	232	128	304	96
8	9	10	11	12	13	14	15
88	168	48	32	64	16	0	32
16	17	18					
0	0	8					

Таблица П.12.2

Распределение детерминантов матриц порядка 3

0	1	2	3	4	5	6
2840071	1281648	1972704	2121840	2082624	1193088	2846160
7	8	9	10	11	12	13
1002816	1707072	1806000	1361376	718848	2301552	619872
14	15	16	17	18	19	20
962304	1238400	985488	455616	1616352	399552	803424
21	22	23	24	25	26	27
808128	518976	307584	1127088	326784	378528	675888
28	29	30	31	32	33	34
396096	200448	727200	172800	295392	370368	184320
35	36	37	38	39	40	41
178368	584304	109440	131712	245664	191232	79488
42	43	44	45	46	47	48
250560	66816	108288	259200	62208	48384	205344
49	50	51	52	53	54	55
40320	62784	94464	53952	28800	138000	39744
56	57	58	59	60	61	62
29952	59328	17280	16128	110592	12672	11904
63	64	65	66	67	68	69
46464	13248	18432	41472	6912	8064	20736
70	71	72	73	74	75	76
4608	4608	42912	3456	2304	25920	2304
77	78	79	80	81	82	83
1152	16128	1152	3072	9792	0	1152

Окончание табл. П.12.2

84	85	86	87	88	89	90
8064	1728	0	3456	576	0	14400
91	92	93	94	95	96	97
0	0	1152	0	576	1728	0
98	99	100	101	102	103	104
0	1152	192	0	1152	0	0
105	106	107	108			
576	0	0	1632			

Таблица П.12.3

Суммарные зависимости данных в таблицах П.12.1 и П.12.2,
вычисляемые по формулам 1.4–1.6

Порядок	Factor	Ves	$ \det _{\text{средний}}$
2	1,06E+04	5,90E+02	4,42E+00
3	5,79E+08	5,36E+06	1,44E+01

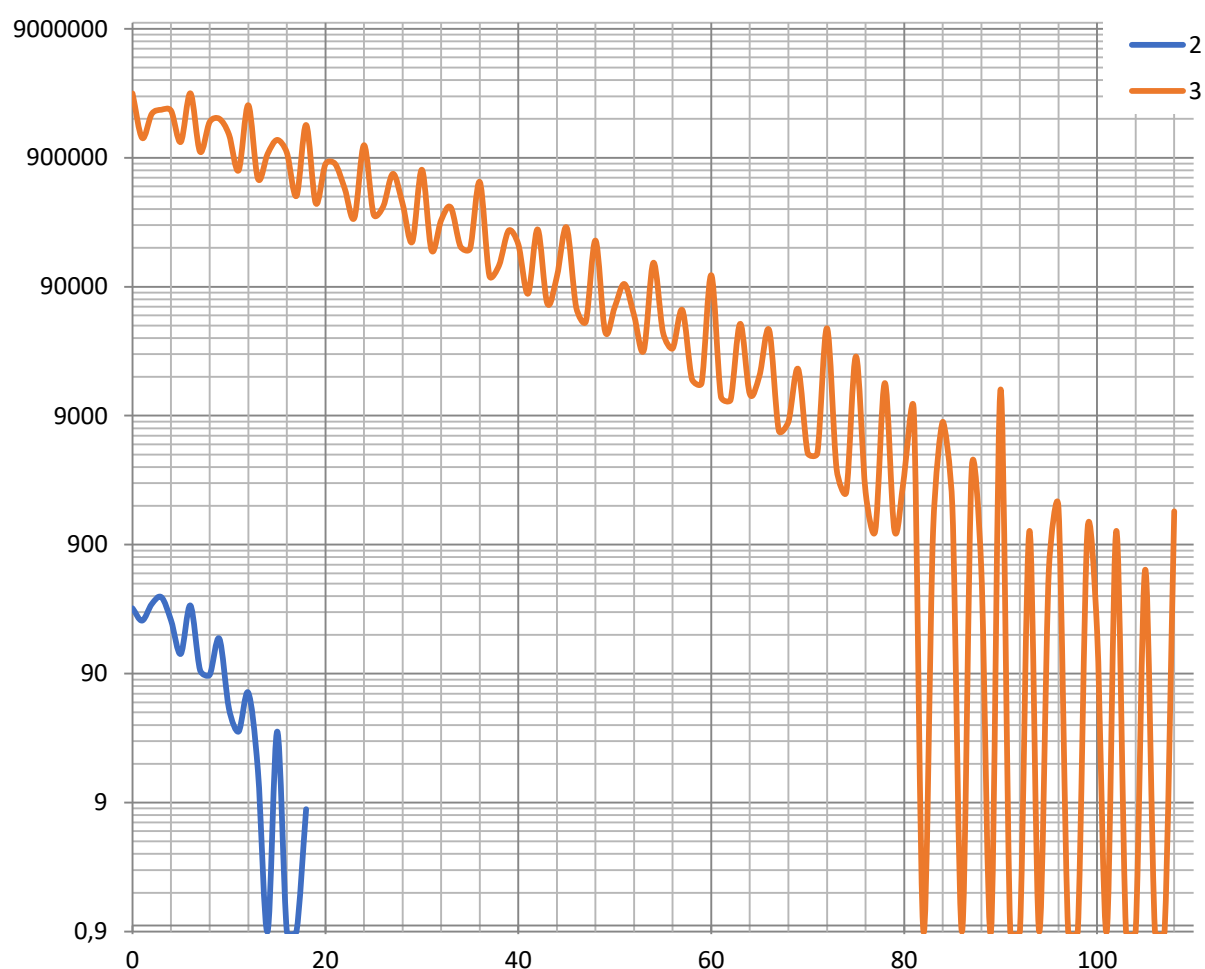


Рисунок П.12.1. Зависимость логарифма количества матриц от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.12.1 и П.12.2

Матрицы с элементами из множества {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}

Таблица П.13.1

Распределение детерминантов матриц порядка 2

0	1	2	3	4	5	6	7
545	360	568	480	728	256	560	208
8	9	10	11	12	13	14	15
552	296	272	128	480	112	160	112
16	17	18	19	20	21	22	23
264	48	104	32	112	32	32	0
24	25	26	27	28	29	30	31
64	16	0	0	32	0	0	0
32							
8							

Таблица П.13.2

Распределение детерминантов матриц порядка 3

0	1	2	3	4	5
15787785	5194416	9859872	7455024	13443792	5597760
6	7	8	9	10	11
13090320	4899744	14040240	6946224	9445728	4057536
12	13	14	15	16	17
15846480	3847776	7788192	6219360	12157584	3252960
18	19	20	21	22	23
10059360	3041088	10206336	4788000	5693760	2610432
24	25	26	27	28	29
13068144	3104544	5006688	4028016	7603296	2162880
30	31	32	33	34	35
7651584	2035392	7999728	3083328	3824928	2514048
36	37	38	39	40	41
8677536	1687488	3369408	2604960	6833856	1478592
42	43	44	45	46	47
4934016	1390848	4450752	2732256	2560896	1215936
48	49	50	51	52	53
7208208	1311168	2889120	1675872	3498144	991296
54	55	56	57	58	59
3279120	1251648	4047744	1357056	1732608	811008

Продолжение табл. П.13.2

60	61	62	63	64	65
4638528	754560	1512960	1349760	3279360	912768
66	67	68	69	70	71
2058624	610560	2084832	831168	1691136	526464
72	73	74	75	76	77
3376752	488448	995712	928800	1617216	515520
78	79	80	81	82	83
1317312	396288	2335584	577152	746496	337536
84	85	86	87	88	89
2038464	437760	640512	419328	1374912	263808
90	91	92	93	94	95
1119744	328704	905472	330048	475776	303936
96	97	98	99	100	101
1663056	194688	496704	283392	937632	163584
102	103	104	105	106	107
523584	156672	770496	340416	297216	127872
108	109	110	111	112	113
785568	118656	362304	153792	826944	96768
114	115	116	117	118	119
326016	130752	390528	125952	182016	106560
120	121	122	123	124	125
754560	72576	150912	91584	293760	101376
126	127	128	129	130	131
260736	59904	411888	67968	148032	44928
132	133	134	135	136	137
313344	65088	87552	73152	253440	33408
138	139	140	141	142	143
107136	34560	267264	37440	62208	24192
144	145	146	147	148	149
313056	34560	50688	46656	119808	18432
150	151	152	153	154	155
95616	20736	138816	20736	54720	22848
156	157	158	159	160	161
104256	12672	27648	16128	155520	11520
162	163	164	165	166	167
32256	11520	61056	14400	19584	8064

Окончание табл. П.13.2

168	169	170	171	172	173
144576	5760	21312	8448	45312	3456
174	175	176	177	178	179
16128	22656	68544	3456	10368	4608
180	181	182	183	184	185
41472	3456	6912	3456	38016	3456
186	187	188	189	190	191
6912	3456	20736	4608	6336	2304
192	193	194	195	196	197
52704	2304	3456	1152	33984	0
198	199	200	201	202	203
3456	1152	23040	0	1152	2880
204	205	206	207	208	209
9792	1728	0	0	14976	0
210	211	212	213	214	215
2880	1152	6912	0	1152	0
216	217	218	219	220	221
8256	1728	1152	0	4032	0
222	223	224	225	226	227
0	0	19008	0	0	0
228	229	230	231	232	233
1728	0	0	576	2304	0
234	235	236	237	238	239
0	0	1152	0	576	0
240	241	242	243	244	245
1728	0	0	0	1152	192
246	247	248	249	250	251
0	0	1152	0	0	0
252	253	254	255	256	
576	0	0	0	2208	

Таблица П.13.3

Суммарные зависимости данных в таблицах П.13.1 и П.13.2,
вычисляемые по формулам 1.4–1.6

Порядок	Factor	Ves	det _{средний}
2	4,85E+04	1,52E+03	7,39E+00
3	1,20E+10	4,67E+07	3,09E+01

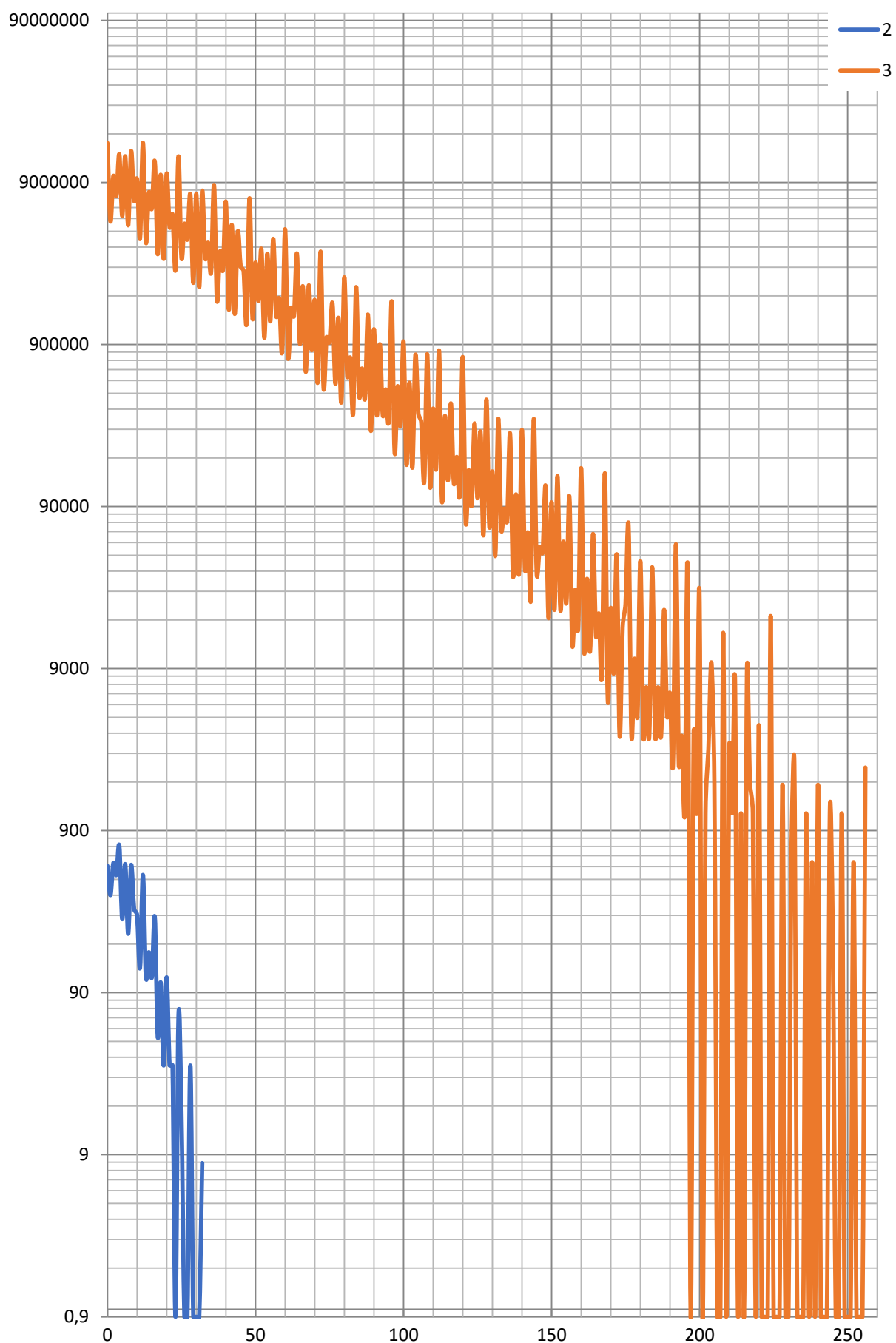


Рисунок П.13.1. Зависимость логарифма количества матриц от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.13.1 и П.13.2

Матрицы с элементами из множества {-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}

Таблица П.14.1

Распределение детерминантов матриц порядка 2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
833	616	824	736	984	816	816	464	808	536
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
800	384	736	336	384	608	504	272	296	224
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
576	208	192	160	208	312	112	96	128	80
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
128	64	72	32	16	96	32	32	0	0
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
64	16	0	0	0	32	0	0	0	0
50									
8									

Таблица П.14.2

Распределение детерминантов матриц порядка 3

0	1	2	3	4	5
54304331	20852976	32799072	27834480	40613136	27884496
6	7	8	9	10	11
42288336	21666528	42102384	27418704	40597392	19393536
12	13	14	15	16	17
48888144	18534816	30739680	32862240	39030576	17337312
18	19	20	21	22	23
37489920	16621440	44451984	23927616	25721280	15510528
24	25	26	27	28	29
44149968	22479024	23615808	20966736	31180704	13869792
30	31	32	33	34	35
40267296	13413696	30642000	18593856	20454336	20354208
36	37	38	39	40	41
35304384	12155712	18945600	16610400	35832720	11365920
42	43	44	45	46	47
26407008	10937472	22836288	22518864	16570368	10282176
48	49	50	51	52	53
31159440	11390784	23485728	13774176	19705344	9382464

Продолжение табл. П.14.2

54	55	56	57	58	59
20803920	14400576	21738432	12394944	13403808	8554176
60	61	62	63	64	65
32001408	8286720	12509376	13204704	18311136	12353568
66	67	68	69	70	71
16591104	7538496	14995008	10176768	18146112	7069248
72	73	74	75	76	77
20961168	6855552	10154688	14634000	12946944	7825344
78	79	80	81	82	83
13096224	6224256	20352432	8704704	8798112	5836032
84	85	86	87	88	89
16464096	9292320	8126016	7374240	11942784	5289984
90	91	92	93	94	95
16332048	6165312	9843264	6649920	7054848	7924416
96	97	98	99	100	101
13683312	4618368	7578432	6571584	14021184	4325760
102	103	104	105	106	107
8392032	4181760	8816160	9614304	5681664	3900672
108	109	110	111	112	113
10116384	3775104	8928576	4802688	8784000	3522816
114	115	116	117	118	119
6638400	5842368	6301728	4619136	4563072	3902976
120	121	122	123	124	125
12773088	3224448	4221312	3832992	5429184	5485008
126	127	128	129	130	131
6370176	2742912	5904624	3358656	6216864	2553984
132	133	134	135	136	137
6177600	3042240	3358080	5476032	4797216	2292480
138	139	140	141	142	143
4235328	2214144	7492992	2680704	2867328	2222208
144	145	146	147	148	149
5771616	3538080	2645376	2880576	3410880	1843200
150	151	152	153	154	155
5895504	1771776	3458688	2404224	2837952	2996160
156	157	158	159	160	161
3690432	1579392	2083200	1901952	5375952	1873728
162	163	164	165	166	167
2779008	1412352	2445408	3007296	1760256	1300608

Продолжение табл. П.14.2

168	169	170	171	172	173
3712896	1289088	2981088	1680576	2004864	1168128
174	175	176	177	178	179
2027520	2828352	2300160	1323072	1369728	1033344
180	181	182	183	184	185
4210848	989568	1560384	1171584	1869696	1796928
186	187	188	189	190	191
1575360	931968	1440000	1430976	2021184	813312
192	193	194	195	196	197
2086560	783360	968832	1661184	1470144	720000
198	199	200	201	202	203
1369152	690048	2778480	805824	804096	825984
204	205	206	207	208	209
1318464	1237536	741888	849600	1148544	579456
210	211	212	213	214	215
2051712	535680	849024	633024	627840	963648
216	217	218	219	220	221
1307136	634176	567936	555264	1465344	440064
222	223	224	225	226	227
724608	414720	999360	1292544	472320	380160
228	229	230	231	232	233
747072	364032	980928	539136	669312	337536
234	235	236	237	238	239
578112	665856	484992	373248	444096	291456
240	241	242	243	244	245
1426752	275328	326016	391872	402048	715008
246	247	248	249	250	251
411264	238464	479040	290304	765264	223488
252	253	254	255	256	257
581568	226944	235008	533376	412320	194688
258	259	260	261	262	263
292608	270144	665088	277056	192384	165888
264	265	266	267	268	269
402624	368640	207360	186624	219264	148608
270	271	272	273	274	275
645120	135936	252288	193536	142848	340992
276	277	278	279	280	281
237312	117504	131328	190656	676224	105984

Продолжение табл. П.14.2

282	283	284	285	286	287
153216	105984	147456	295488	97920	140544
288	289	290	291	292	293
277632	92160	300672	104832	118656	84096
294	295	296	297	298	299
133632	191808	166464	114624	74880	73728
300	301	302	303	304	305
398304	82176	62208	79488	103104	161280
306	307	308	309	310	311
93888	52992	91008	69120	209088	49536
312	313	314	315	316	317
101376	48384	43776	268416	56448	36864
318	319	320	321	322	323
58752	36864	279648	50688	44352	35712
324	325	326	327	328	329
83136	126720	29952	42624	78336	42048
330	331	332	333	334	335
158976	26496	32256	70848	24192	80640
336	337	338	339	340	341
61056	19584	20736	31104	119808	17280
342	343	344	345	346	347
25728	25920	34560	84096	14976	14976
348	349	350	351	352	353
27648	16128	139968	19584	27072	16128
354	355	356	357	358	359
19584	49536	11520	22464	12672	12672
360	361	362	363	364	365
180288	8064	5760	14976	14784	41856
366	367	368	369	370	371
11520	5760	14400	31104	62208	9216
372	373	374	375	376	377
10944	10368	4608	47808	11520	2304
378	379	380	381	382	383
10944	4608	43776	8064	3456	4608
384	385	386	387	388	389
12096	30528	2304	10368	2304	5760
390	391	392	393	394	395
36864	1152	8256	5760	2304	17280

Окончание табл. П.14.2

396	397	398	399	400	401
5184	4608	3456	5760	60768	2304
402	403	404	405	406	407
1152	1152	1152	43200	2304	0
408	409	410	411	412	413
3456	1152	25344	2304	1152	1728
414	415	416	417	418	419
2880	6912	2880	2304	0	1152
420	421	422	423	424	425
15552	1152	0	2880	2304	10368
426	427	428	429	430	431
0	0	0	1152	11520	0
432	433	434	435	436	437
3456	1152	576	6912	0	1152
438	439	440	441	442	443
1152	0	9216	1728	0	0
444	445	446	447	448	449
0	3456	0	0	192	0
450	451	452	453	454	455
23616	1152	0	0	0	1728
456	457	458	459	460	461
0	0	0	576	2304	0
462	463	464	465	466	467
0	0	576	1152	0	0
468	469	470	471	472	473
576	0	2304	0	0	0
474	475	476	477	478	479
0	1152	0	576	0	0
480	481	482	483	484	485
1728	0	0	0	0	1152
486	487	488	489	490	491
192	0	0	0	1152	0
492	493	494	495	496	497
0	0	0	576	0	0
498	499	500			
0	0	2784			

Таблица П.14.3

Суммарные зависимости данных в таблицах П.14.1 и П.14.2,
вычисляемые по формулам 1.4–1.6

Порядок	Factor	Ves	$ \det _{\text{средний}}$
2	1,63E+05	3,25E+03	1,11E+01
3	1,34E+11	2,68E+08	5,67E+01

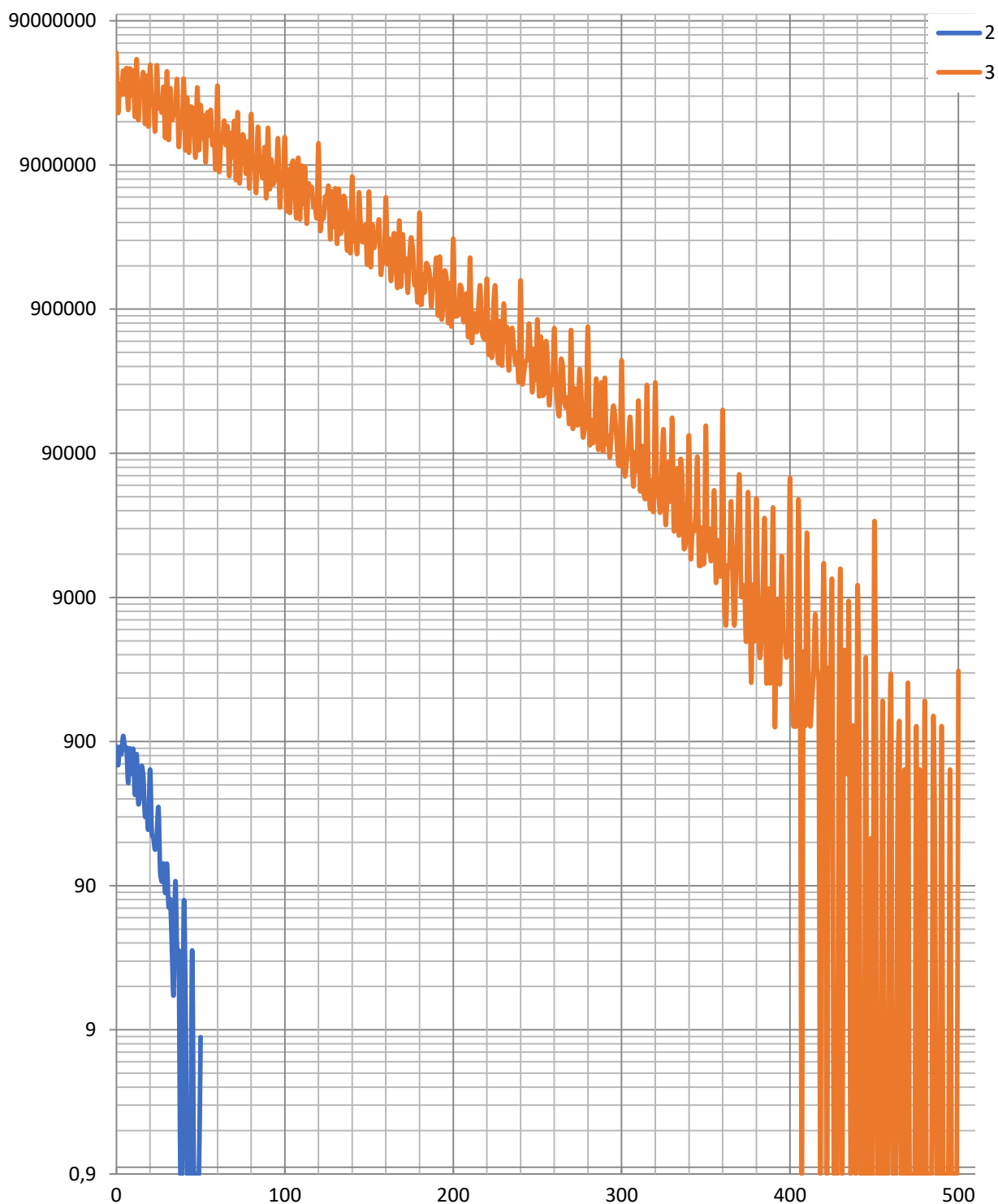


Рисунок П.14.1. Зависимость логарифма количества матриц от модуля определителя по данным, представленным в таблицах П.14.1 и П.14.2

Усовершенствованный алгоритм Гаусса для кольца Z_m

Для рассмотрения данного алгоритма будем считать, что у нас определены три типа переменных – логического (истина или ложь), целочисленного (все целые числа внутри заданного диапазона) и вещественного типа [float – числа, заданные экспоненциальной формой, когда часть бит отводится на экспоненту, а оставшаяся – на мантиссу со знаком, при этом относительная точность всех таких чисел одинакова; HIPS – числа, заданные с произвольной точностью в виде десятичного вещественного числа (см. главу 3)]. Диапазон принимаемых значений данных типов определяется архитектурой компьютера.

```
int i, zul = 0, n0x, n0y, x, y, j, oul=1, oul_doub=1, sign=1;
int n; // порядок матрицы
int n_1=n+oul;
float a[n][n]; // матрица, детерминант которой требуется вычислить
float ld_p_delta, ld_n_delta; // погрешности, возникающие при
                               применении Флопс
float det=1.0; // вычисляемый детерминант
float ld_zer=0.00000, temp, ld_one=1.0000, ld_rev_sign=-1.000,
ld_one_doub=1.00000;
bool sfnne;

for (i=zul; i<n; i++)
{
    n0x=zul;
    n0y=zul;
    sfnne=false;
    for (x=i; x<n; x++)
        for (y=i; y<n; y++)
            if (!sfnne && ((a[x][y]<=ld_n_delta) ||
                           (a[x][y]>=ld_p_delta)))
            {
                n0x=x;
                n0y=y;
                sfnne=true;
            }
    if (!sfnne)
    {
        det=ld_zer;
        break;
    }
}
```

```

if (n0x!=i)
{
    for (j=zul; j<n; j++)
    {
        temp=a[i][j];
        a[i][j]=a[n0x][j];
        a[n0x][j]=temp;
    }
    sign=zul-sign;
}
if (n0y!=i)
{
    for (j=zul; j<n; j++)
    {
        temp=a[j][i];
        a[j][i]=a[j][n0y];
        a[j][n0y]=temp;
    }
    sign=zul-sign;
}
if (a[i][i]==ld_one)
{
    oul+=i;
    for(y=oul; y<n; y++)
        if (a[i][y]!=ld_zer)
            for (x=n_1;x>i;--x)
                a[x][y]-=a[x][i]*a[i][y];
    oul= oul_doub;
    continue;
}
if (a[i][i]==ld_rev_sign)
{
    oul+=i;
    for(y=oul; y<n; y++)
        if (a[i][y]!=ld_zer)
            for (x=n_1;x>i;--x)
                a[x][y]+=a[x][i]*a[i][y];
    oul= oul_doub;
    sign=zul-sign;
    continue;
}
else
{
    det*=a[i][i];
    ld_one/=a[i][i];
    for (x=n_1;x>i;x--)

```

```

        a[x][i]*=ld_one;
    oul+=i;
    for(y=oul; y<n; y++)
        if (a[i][y]!=ld_zer)
            for (x=n_1;x>i;x--)
                a[x][y]-=a[x][i]*a[i][y];
    oul= oul_doub;
    ld_one= ld_one_doub;
}
}
det*=sign;

```

Также в данном алгоритме, в отличие от классического алгоритма Гаусса, ищется не просто нулевой элемент, а элемент, модуль которого больше аппаратной ошибки, как данной ЭВМ, так и данной матрицы. Для некоторых матриц с элементами из Z_2 порядка 8 и больше определители без данного условия будут вычислены неверно, также если матрица плохо обусловлена, то тип float использовать нельзя и необходимо перейти на HIPS, порядок которого определяется степенью обусловленности (см. главу 3).

Далее алгоритм для ЭВМ был реализован на языке C/C++ и скомпилирован с использованием компилятора g++ сообществ свободного программного обеспечения Cygwin [18] и GNU C/C++ [18].

**Решения системы дифференциальных уравнений задачи
о спутниках, для разностной схемы усовершенствованного
метода Эйлера 4-го порядка, при различных начальных условиях
и константах этой системы**

Рассмотрим задачу о спутниках, даваемую системой (3.3). Якобиан этой системы по аргументам $(t; x; y)$ имеет вид:

$$\frac{D(t; f_1; f_2)}{D(t; x; y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-y/A - C_4) & (-x/A) \\ 0 & (y/B + C_2) & (x/B - C_3) \end{vmatrix} \quad (\text{П.16.1})$$

Следовательно, вообще говоря, функции $x(t)$ и $y(t)$ не являются линейно независимыми между собой, но имеют ограниченные в замкнутой области непрерывные частные производные любого порядка.

Так как правые части уравнений системы (3.3) определены и непрерывны, а также все коэффициенты (П.16.1) ограничены в конечной области по $(x; y)$, то система (3.3) удовлетворяет условиям существования и единственности [38] и к ней могут быть применены метод Эйлера и его модификации. В случае модификации 4-го порядка требуется также непрерывность частных производных в конечной области $(x; y)$ правых частей (3.3) до 4-го порядка включительно, что также выполняется, радиус сходимости степенных рядов $f_1(t, x, y)$ и $f_2(t, x, y)$ равен бесконечности [36].

Для поиска решения системы (3.3) усовершенствованным методом Эйлера 4-го порядка автором была выведена следующая разностная схема:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = h \cdot f_1(t_i, y_i, x_i) \\ k_1 = h \cdot f_2(t_i, y_i, x_i) \\ m_2 = h \cdot f_1(t_i + h/2, y_i + k_1/2, x_i + m_1/2) \\ k_2 = h \cdot f_2(t_i + h/2, y_i + k_1/2, x_i + m_1/2) \\ m_3 = h \cdot f_1(t_i + h/2, y_i + k_2/2, x_i + m_2/2) \\ k_3 = h \cdot f_2(t_i + h/2, y_i + k_2/2, x_i + m_2/2) \\ m_4 = h \cdot f_1(t_i + h, y_i + k_3, x_i + m_3) \\ k_4 = h \cdot f_2(t_i + h, y_i + k_3, x_i + m_3) \\ x_{i+1} = x_i + (m_1 + 2 \cdot m_2 + 2 \cdot m_3 + m_4)/6 \\ y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)/6 \\ t_{i+1} = t_i + h \end{array} \right. \quad (\text{П.16.2})$$

Для любых рассмотренных констант и начальных условий в (3.3) данная схема приводила к точкам равновесия (3.4) при их наличии [38] и надлежащем выборе величины шага h . В частности, она показала, что классическая разностная схема Рунге – Кутта здесь не работает, так как при выборе условий в виде:

$$A = 961, B = 50, h = 0.0003, C_1 = 2000, C_2 = 0.002, C_3 = 0.002, C_4 = 0.002, \\ N_{\text{итераций}} = 1000000, N_{x0} = 1000000, N_{y0} = 0$$

количество паразитов становилось отрицательным, а при $B \approx 100$ переставало расти из-за плохой обусловленности схемы. При значительном изменении величины шага проблема пропадала. Данные рассуждения применимы ко всем задачам по расчетам концентраций химических реагентов [16, 20] или задачи типа Лотки – Вольтерра [39], которая является частным случаем данной задачи о спутниках так, что без проверки сходимости к точке равновесия по А. М. Ляпунову пользоваться схемой нельзя, так как она может терять свою устойчивость без выполнения условия $h \rightarrow 0$ здесь [34]. Наличие отрицательных решений, также указывает на некорректность разностной схемы и должно проверяться в процессе вычислений.

При начальных условиях и константах, близких к точке равновесия, зависимость $x(y)$ представляла собой закручивающуюся к точке равновесия спираль с неограниченным количеством витков, что говорит о жесткой зависимости количества спутников от наличия паразитов. Данный пример является хорошо обусловленной задачей и даже значительные вариации в константах, начальных условиях и шаге h не приводили к серьезным аппаратным ошибкам и существенным различиям при вычислениях с помощью Флопс или Хипс. На графиках будут приведены решения, полученные в 1000000 узлов (П.16.2) с помощью Хипс и в 10000000 узлов с помощью Флопс, которые во всех рассмотренных случаях графически неотличимы и имели различие менее чем 10^{-15} при оптимальном выборе h . Для визуализации рисунков П.16.1 – П.16.16 понадобился объем данных около 1 ГБ.

Классификация велась по следующим направлениям:

1. Количество порождающихся паразитов при столкновении паразита со спутником: $B = 300$ и $B = 96$.
2. Начальное количество спутников на орбите: $N_{x0} = \{50, 100, 500, 1000, 3000, 10000, 40000, 1000000\}$.
3. Количество ежегодных зачинок с Земли в суммировании с естественным (которое по порядку величины может быть сопоставимо

4. с C_2) уничтожением паразитов от окружающей среды: $C_3 = \{0.002, 0.1, 1, 10, 50, 150, 300\}$.

Ежегодные поставки с Земли считаем пропорциональными начальному количеству спутников и C_2 : $C_1 = C_2 * N_{x0}$. C_4 считаем равным C_2 . Всего рассматриваем $2*7*8$ ситуаций без учета варьирования h .

Из рисунков П.16.1 – П.16.16 можно определить, с какой периодичностью группировка спутников должна менять орбиту посредством магнитного крыла или другого приспособления. Если же данного оборудования нет, то с какой периодичностью необходимо проводить выжигательные работы с Земли. Также из данных графиков понятно, что выжигательные работы могут поддерживать группировку спутников на одной орбите не более 50000 штук при оптимальных доставках новых с Земли.

Константа $B = 300$.

$C1 = 0.1$; $C2 = 0.002$; $C4 = 0.002$; $Nx0 = 50$; $Ny0 = 0$; $A = 961$; $B = 300$;

$C3 = \begin{cases} 0.002; \\ 0.1; \\ 1; \\ 10; \\ 50; \\ 150; \\ 300; \end{cases}$

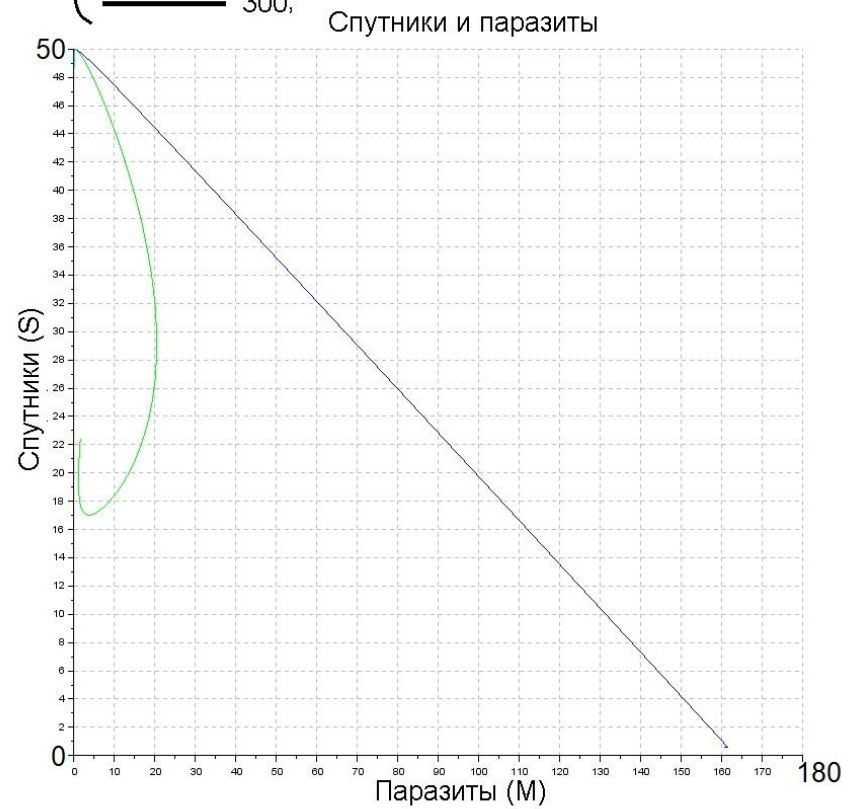
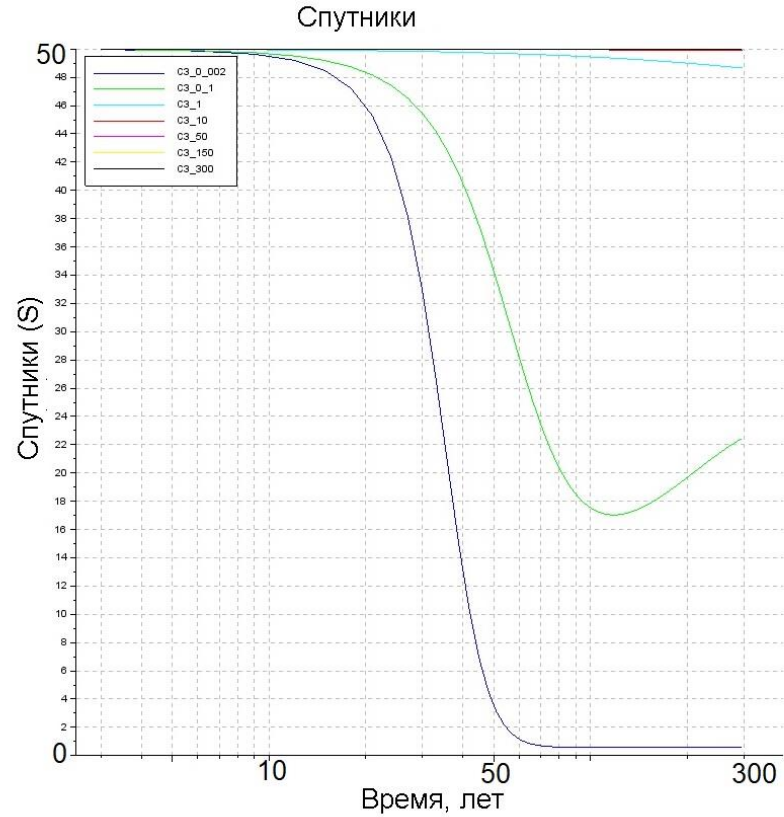


Рисунок П.16.1. 50 инертных спутников

$C1 = 0.2$; $C2 = 0.002$; $C4 = 0.002$; $Nx0 = 100$; $Ny0 = 0$; $A = 961$; $B = 300$;

$C3 = \begin{cases} 0.002; \\ 0.1; \\ 1; \\ 10; \\ 50; \\ 150; \\ 300; \end{cases}$

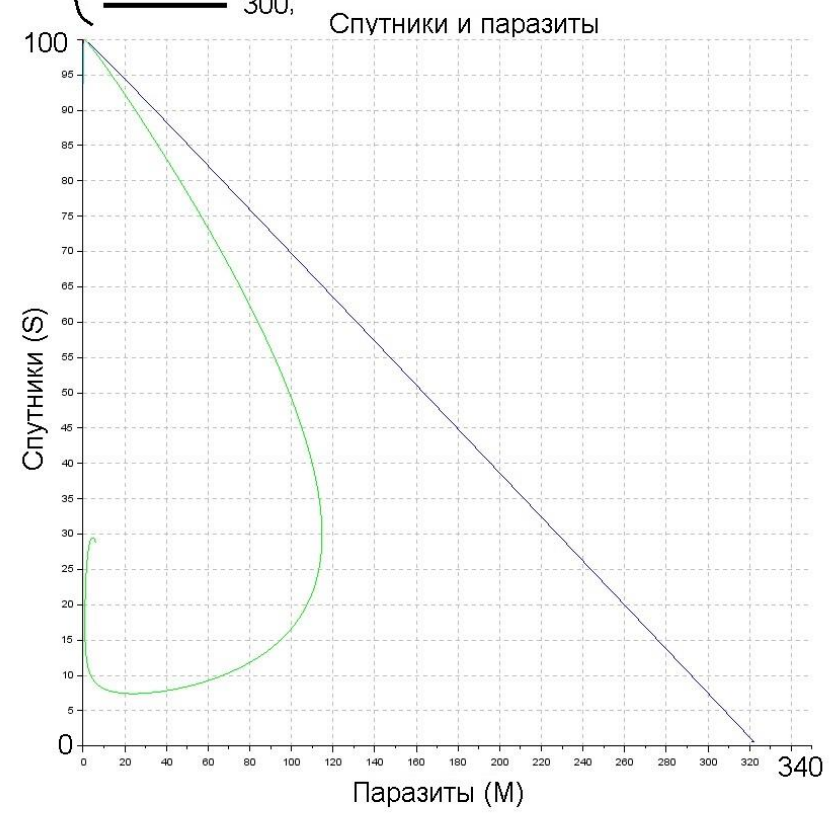
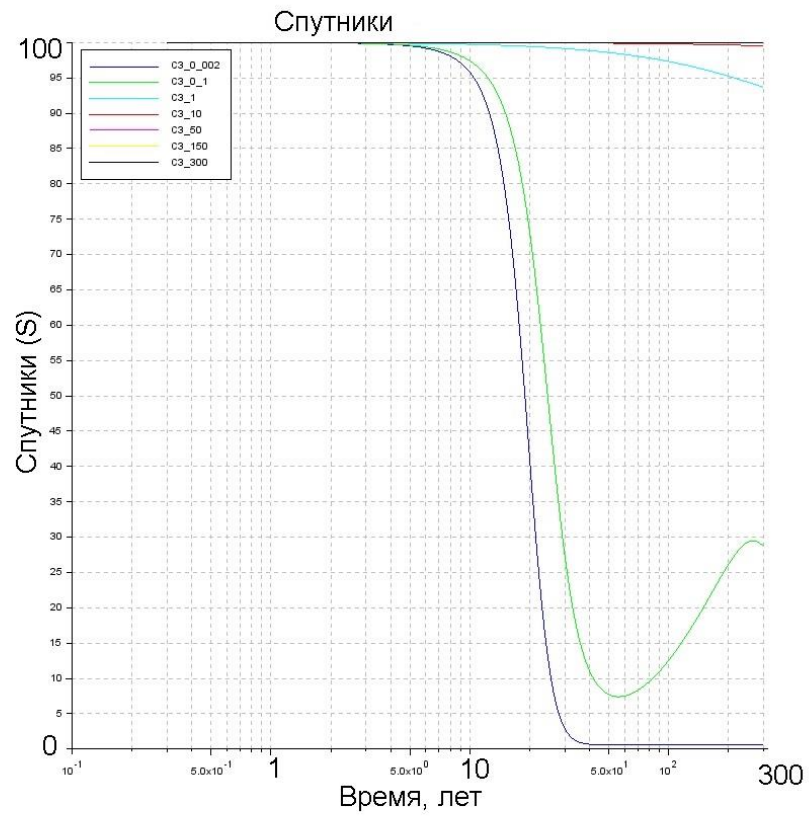


Рисунок П.16.2. 100 инертных спутников

$C1 = 1$; $C2 = 0.002$; $C4 = 0.002$; $Nx0 = 500$; $Ny0 = 0$; $A = 961$; $B = 300$;

$C3 = \begin{cases} 0.002; \\ 0.1; \\ 1; \\ 10; \\ 50; \\ 150; \\ 300; \end{cases}$

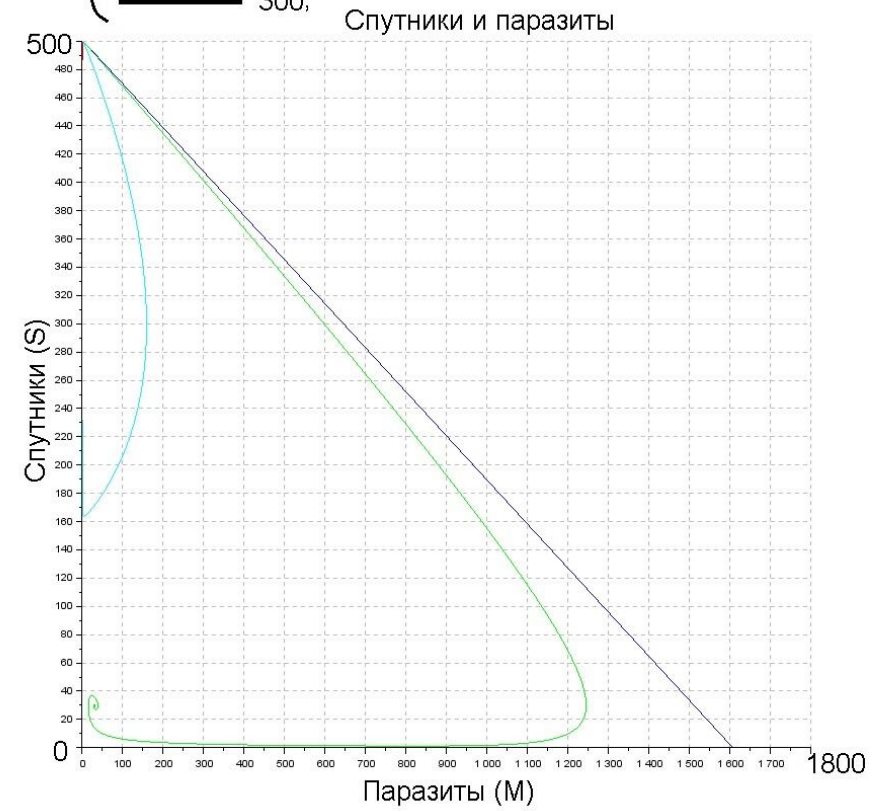
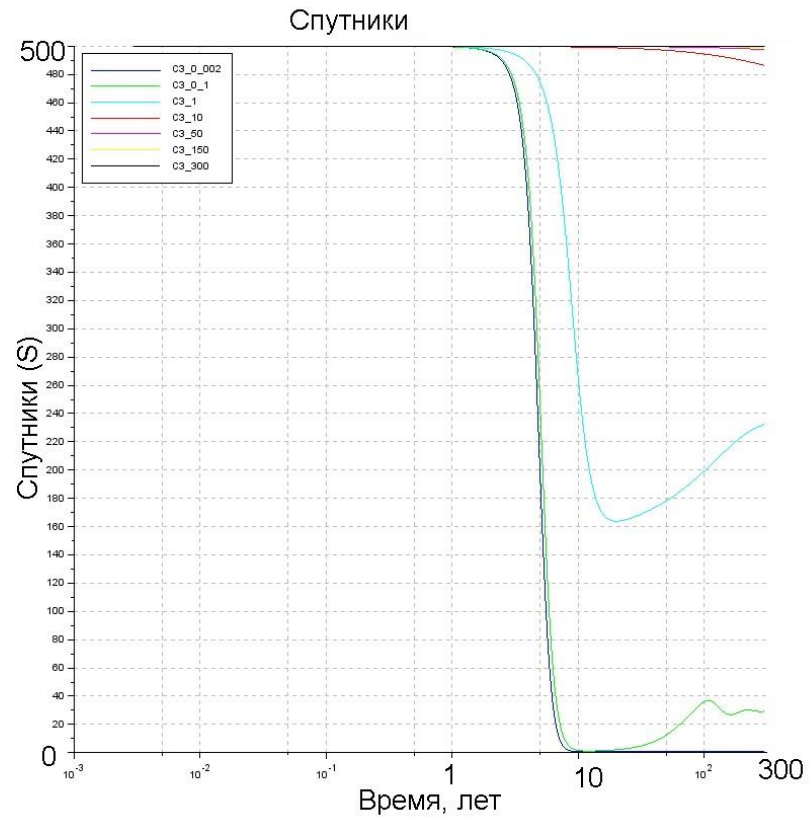


Рисунок П.16.3. 500 инертных спутников

$C1 = 2; C2 = 0.002; C4 = 0.002; Nx0 = 1000; Ny0 = 0; A = 961; B = 300;$

$C3 = \begin{cases} 0,002; \\ 0,1; \\ 1; \\ 10; \\ 50; \\ 150; \\ 300; \end{cases}$

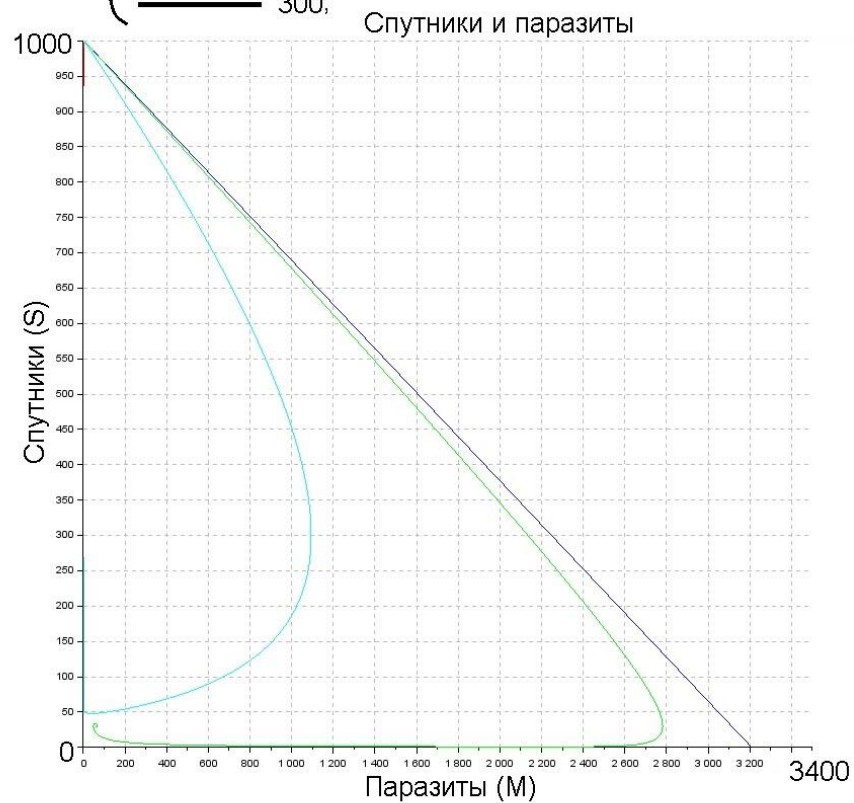
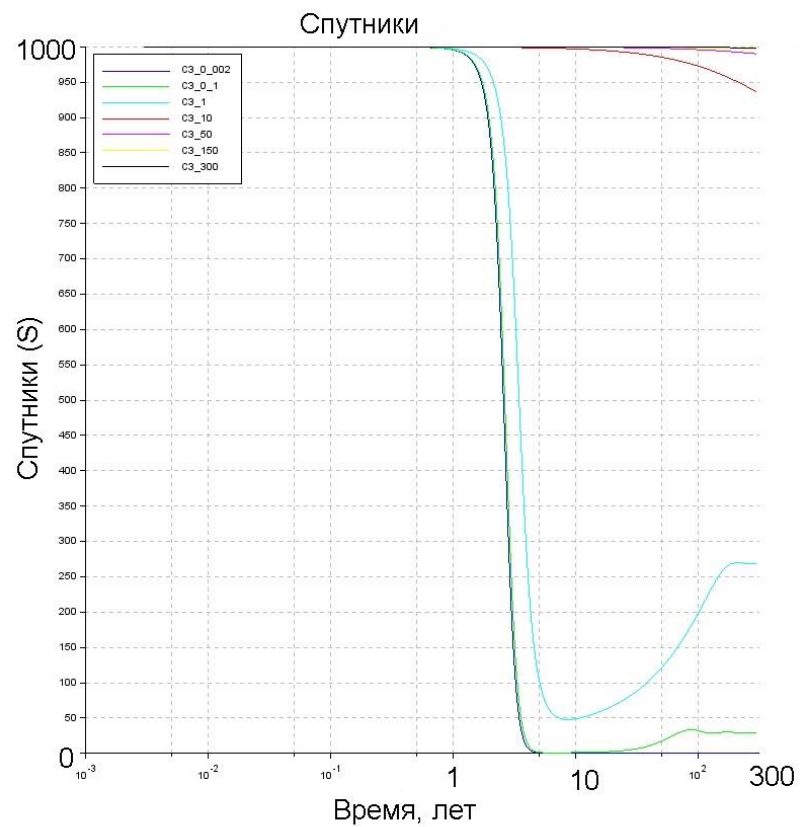


Рисунок П.16.4. 1000 инертных спутников

$C1 = 6$; $C2 = 0.002$; $C4 = 0.002$; $Nx0 = 3000$; $Ny0 = 0$; $A = 961$; $B = 300$;

$C3 = \begin{cases} 0.002; \\ 0.1; \\ 1; \\ 10; \\ 50; \\ 150; \\ 300; \end{cases}$

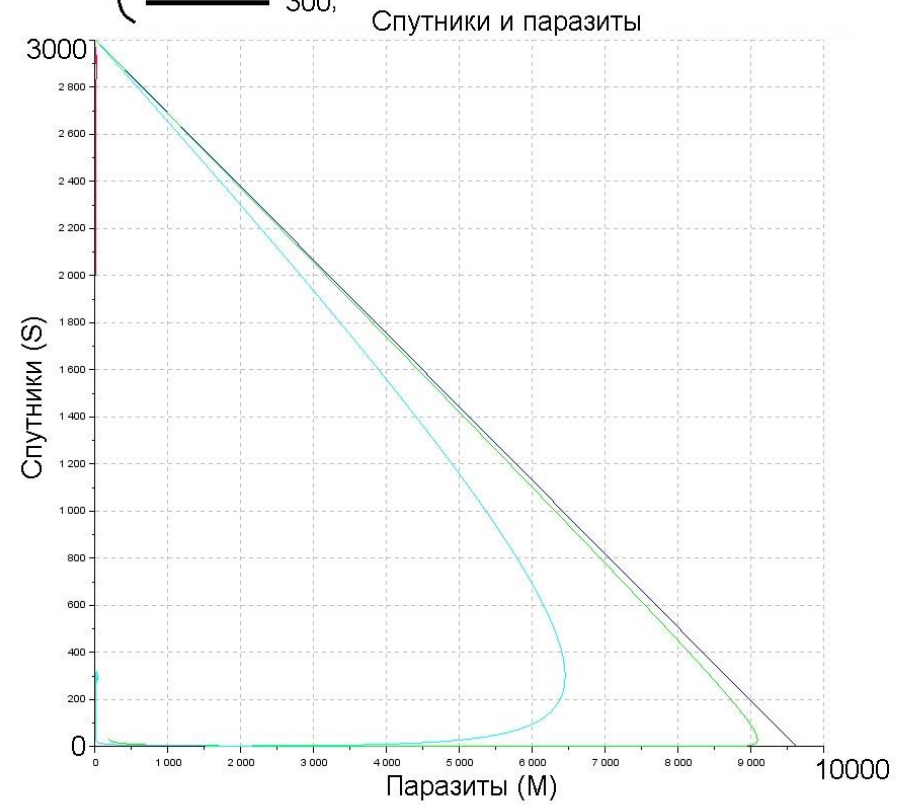
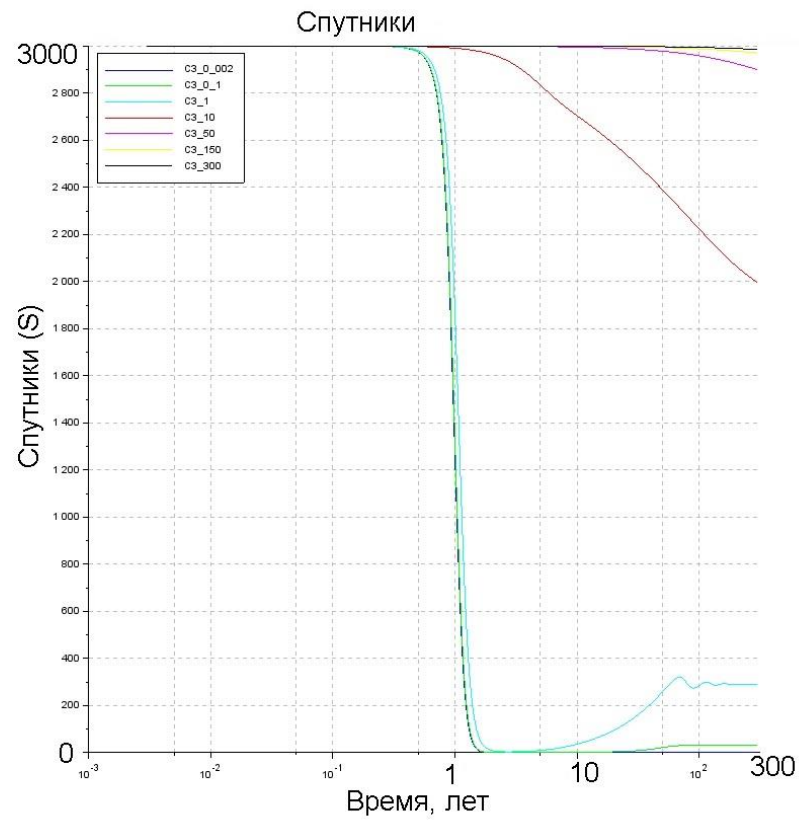


Рисунок П.16.5. 3000 инертных спутников

$C1 = 20$; $C2 = 0.002$; $C4 = 0.002$; $Nx0 = 10000$; $Ny0 = 0$; $A = 961$; $B = 300$;

$C3 = \begin{cases} 0,002; \\ 0,1; \\ 1; \\ 10; \\ 50; \\ 150; \\ 300; \end{cases}$

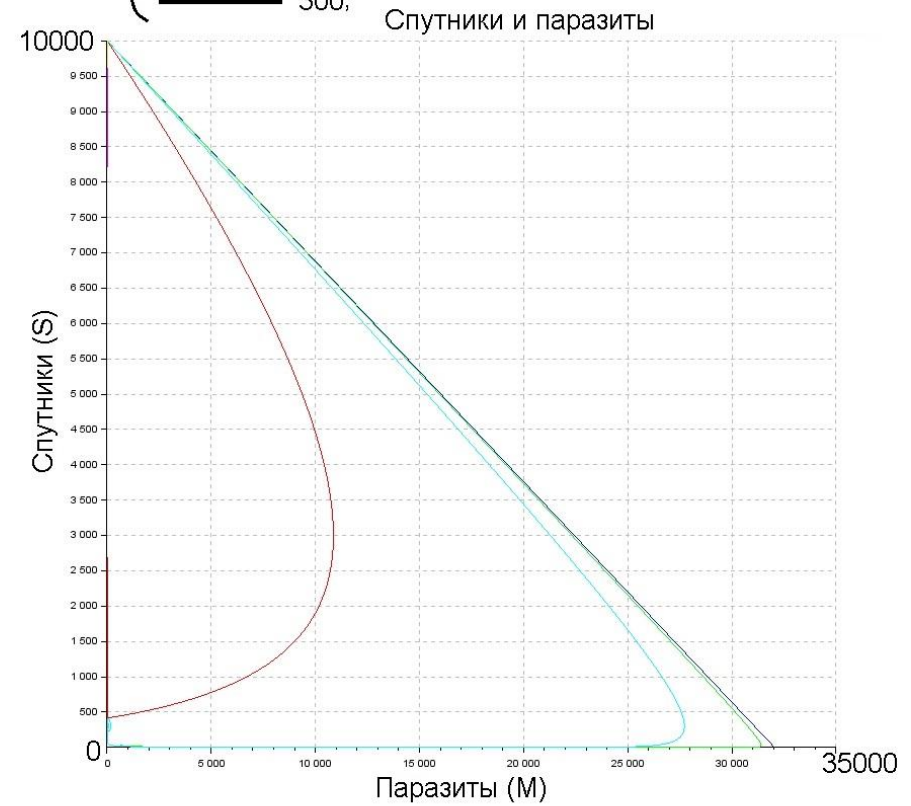
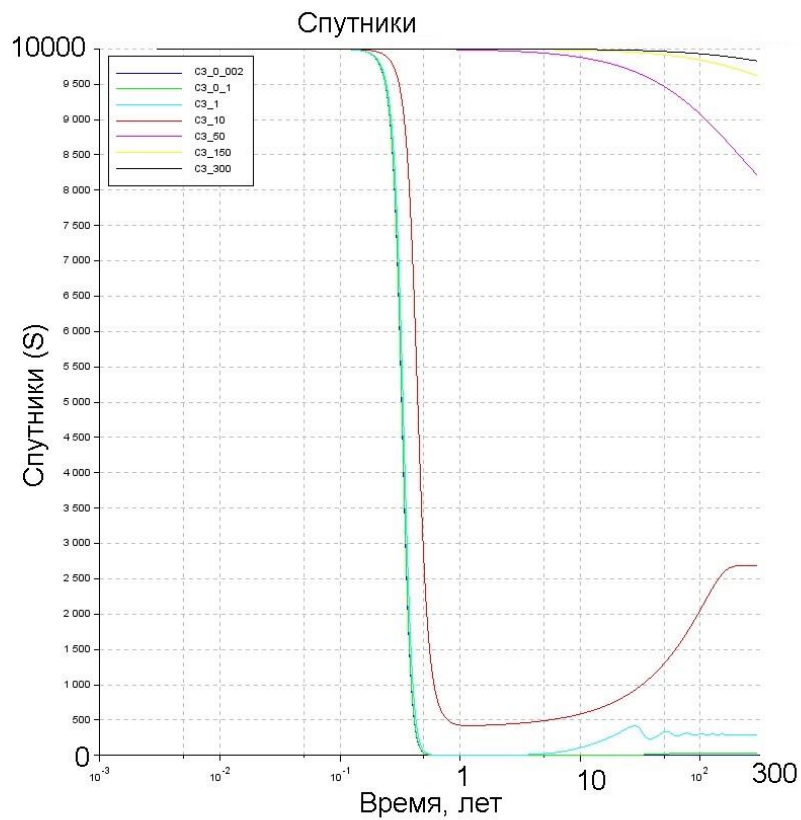


Рисунок П.16.6. 10000 инертных спутников

На рисунке П.16.6. при $C3=1$ зависимость $S(M)$ представлена более чем 12 витками.

$C1 = 80$; $C2 = 0.002$; $C4 = 0.002$; $Nx0 = 40000$; $Ny0 = 0$; $A = 961$; $B = 300$;

$C3 = \begin{cases} 0.002; \\ 0.1; \\ 1; \\ 10; \\ 50; \\ 150; \\ 300; \end{cases}$

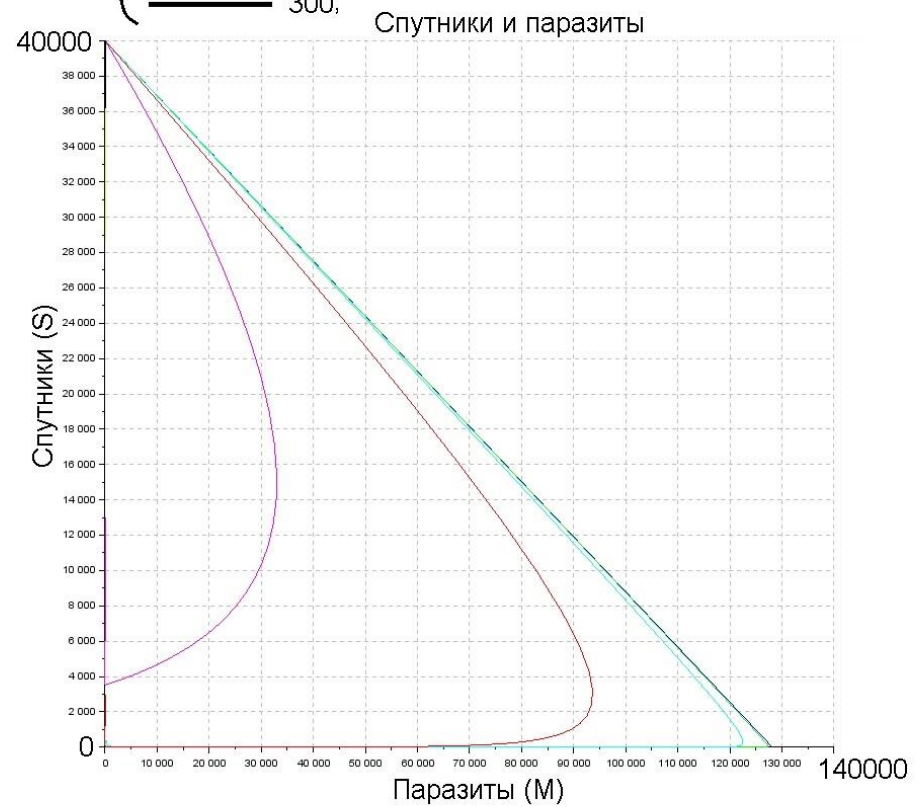
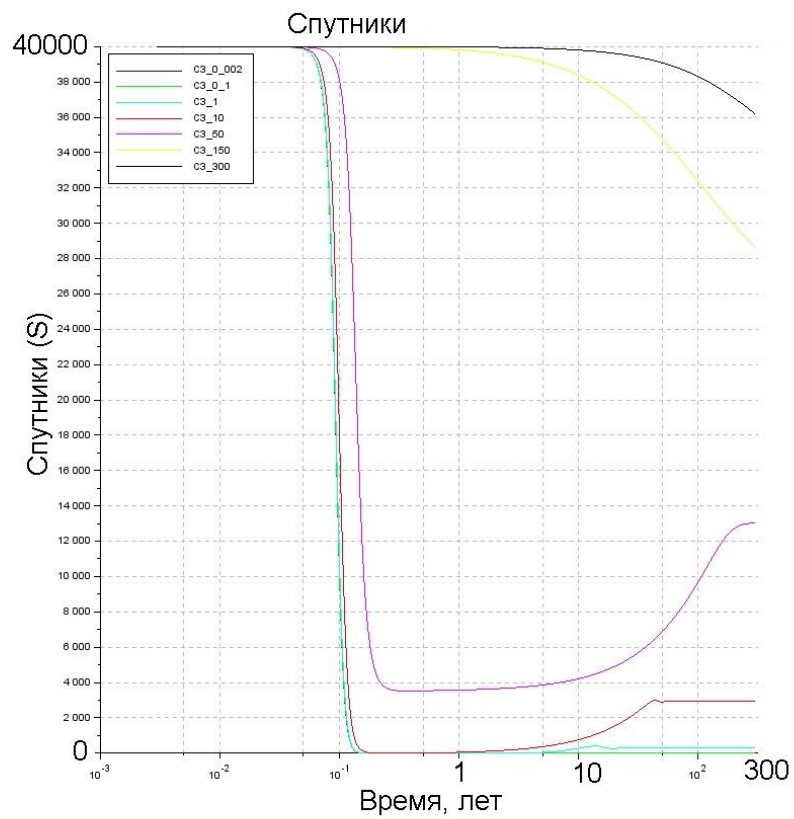


Рисунок П.16.7. 40000 инертных спутников

$C1 = 2000$; $C2 = 0.002$; $C4 = 0.002$; $Nx0 = 1000000$; $Ny0 = 0$; $A = 961$; $B = 300$;

$C3 = \begin{cases} 0.002; \\ 0.1; \\ 1; \\ 10; \\ 50; \\ 150; \\ 300; \end{cases}$

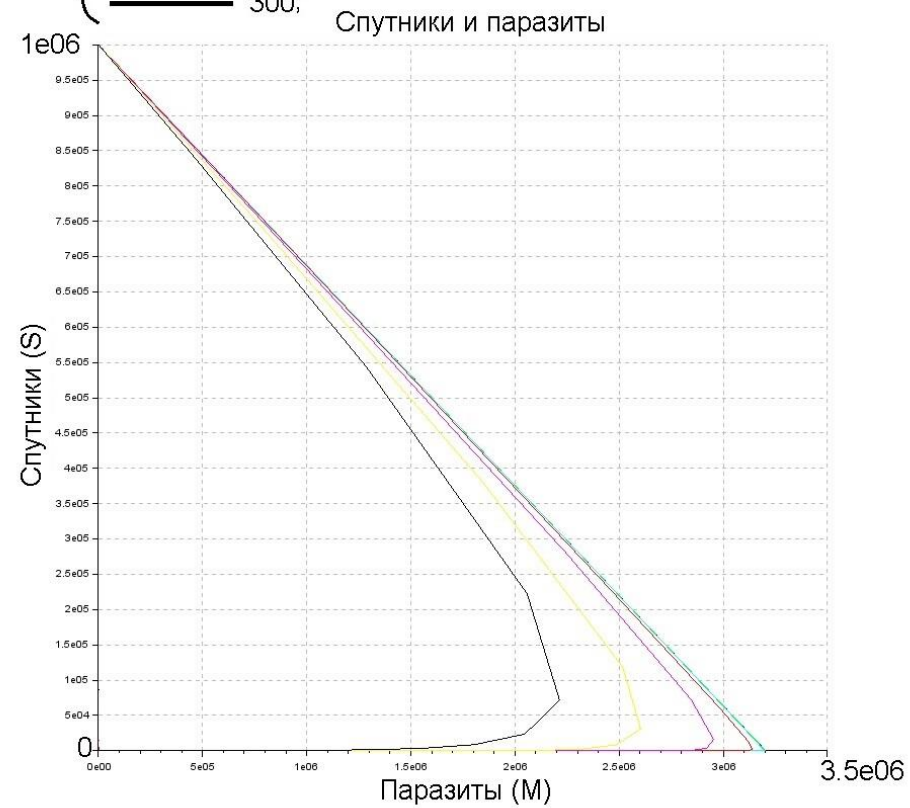
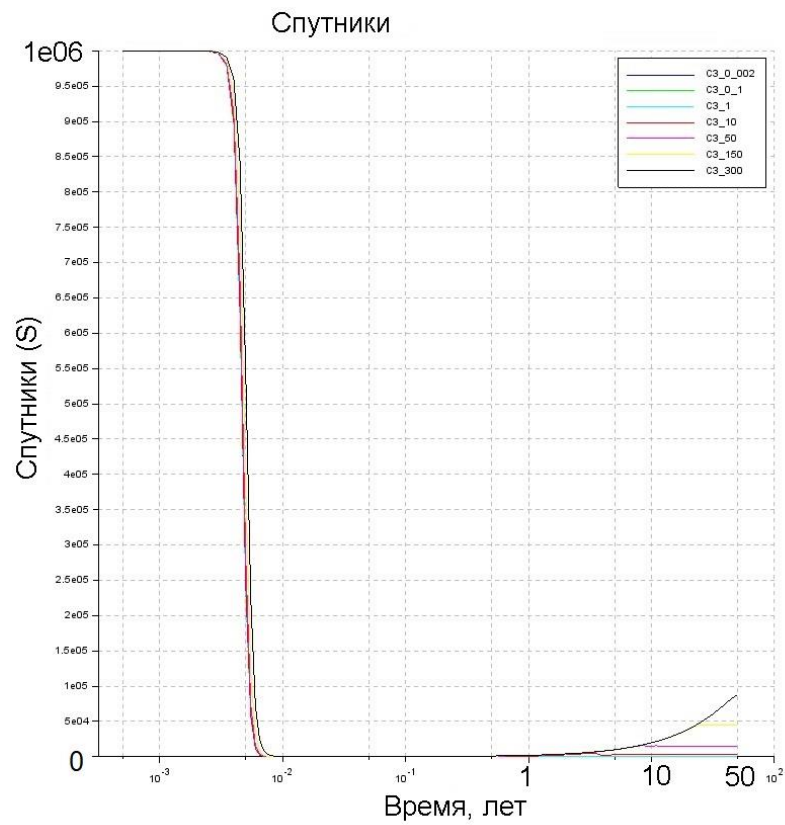


Рисунок П.16.8. 1000000 инертных спутников

Константа $B = 96$.

$C1 = 0.1$; $C2 = 0.002$; $C4 = 0.002$; $Nx0 = 50$; $Ny0 = 0$; $A = 961$; $B = 96$;

$C3 = \begin{cases} 0.002; \\ 0.1; \\ 1; \\ 10; \\ 50; \\ 150; \\ 300; \end{cases}$

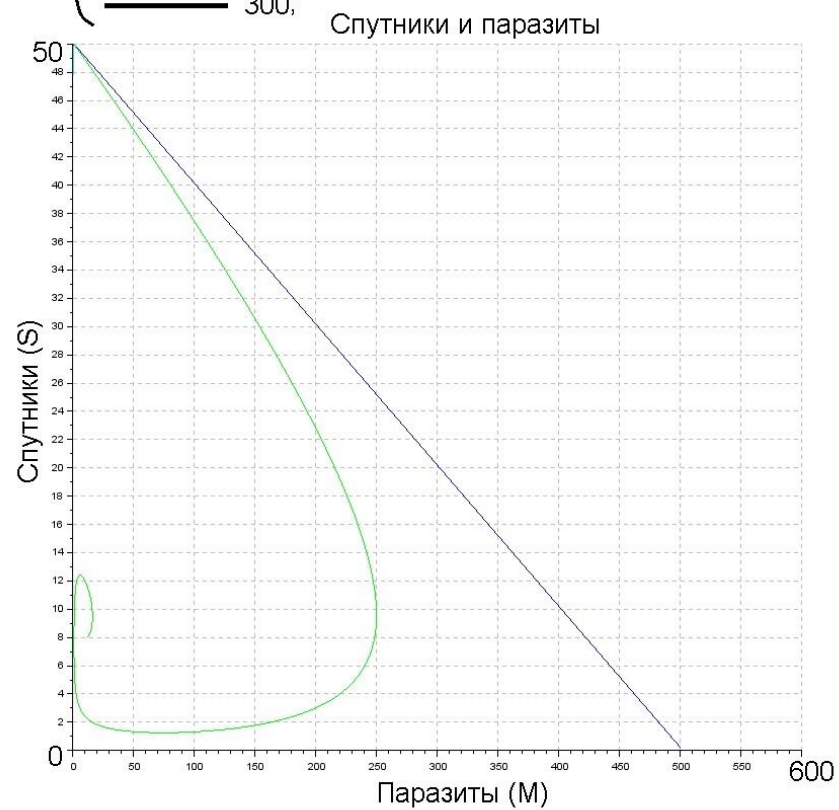
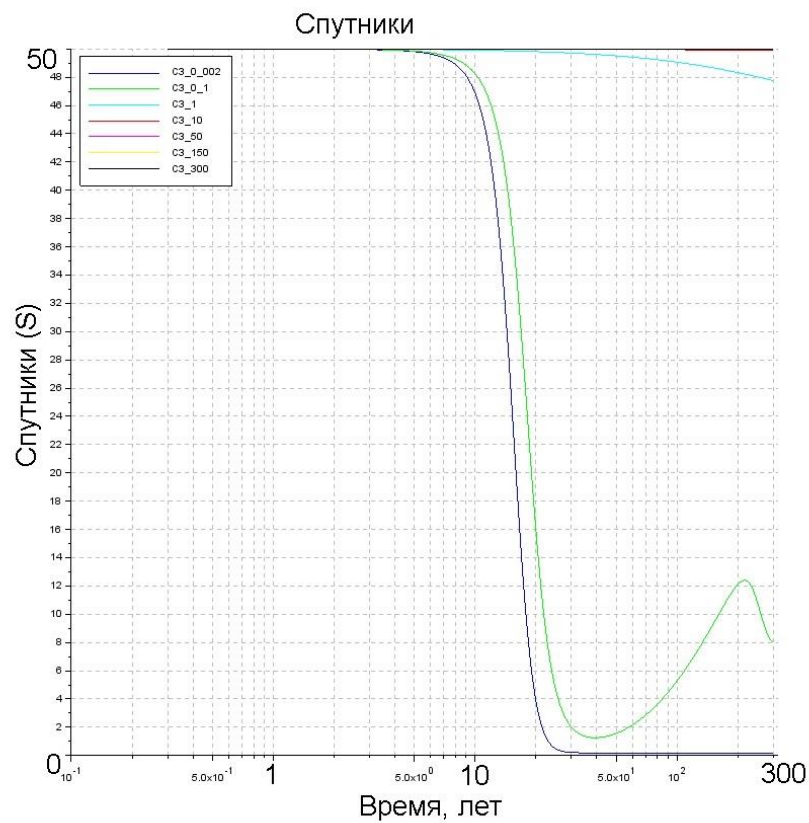


Рисунок П.16.9. 50 шатких спутников

$C1 = 0.2$; $C2 = 0.002$; $C4 = 0.002$; $Nx0 = 100$; $Ny0 = 0$; $A = 961$; $B = 96$;

$C3 = \begin{cases} 0.002; \\ 0.1; \\ 1; \\ 10; \\ 50; \\ 150; \\ 300; \end{cases}$

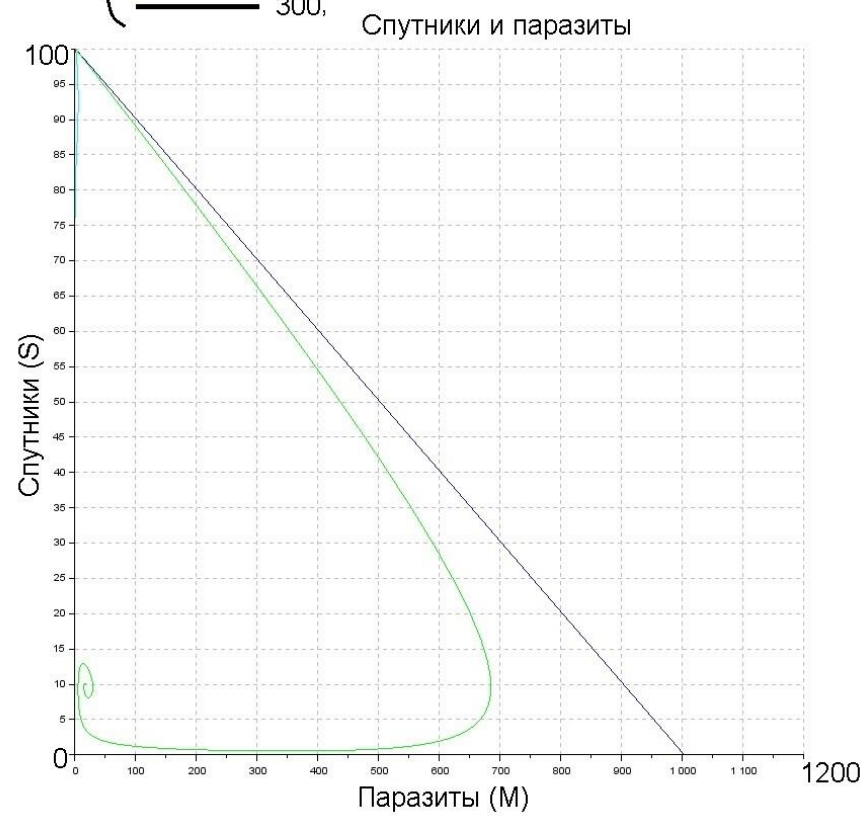
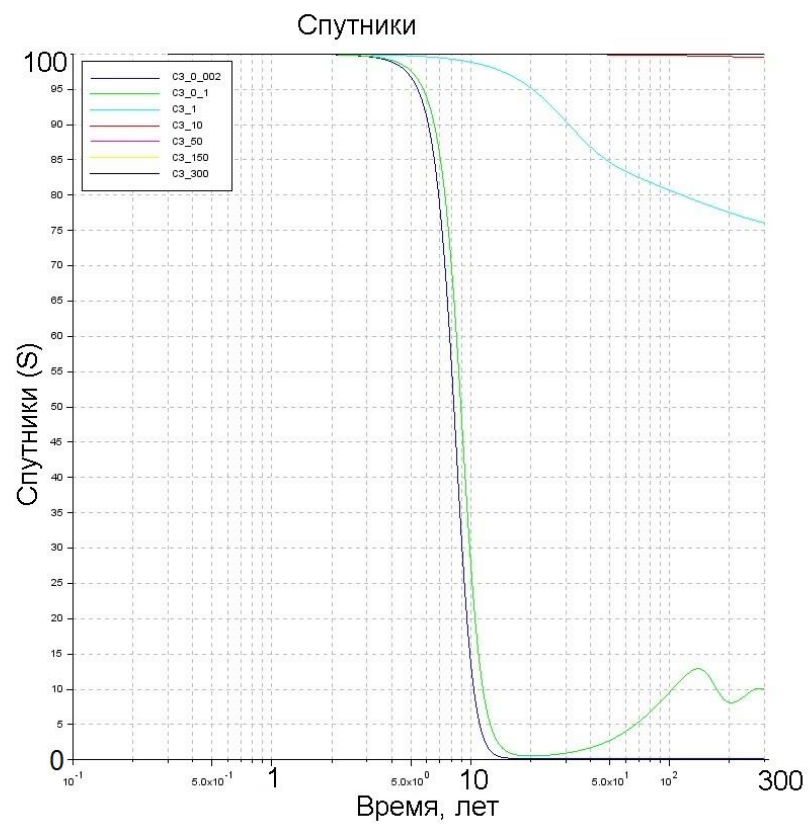


Рисунок П.16.10. 100 шатких спутников

$C1 = 1$; $C2 = 0.002$; $C4 = 0.002$; $Nx0 = 500$; $Ny0 = 0$; $A = 961$; $B = 96$;

$C3 = \begin{cases} 0.002; \\ 0.1; \\ 1; \\ 10; \\ 50; \\ 150; \\ 300; \end{cases}$

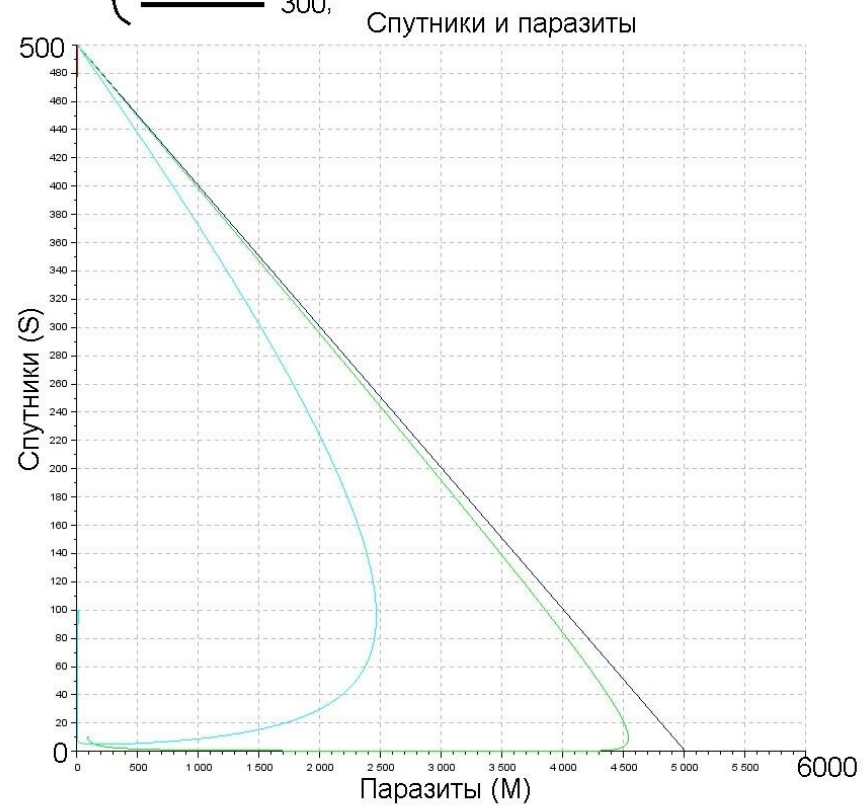
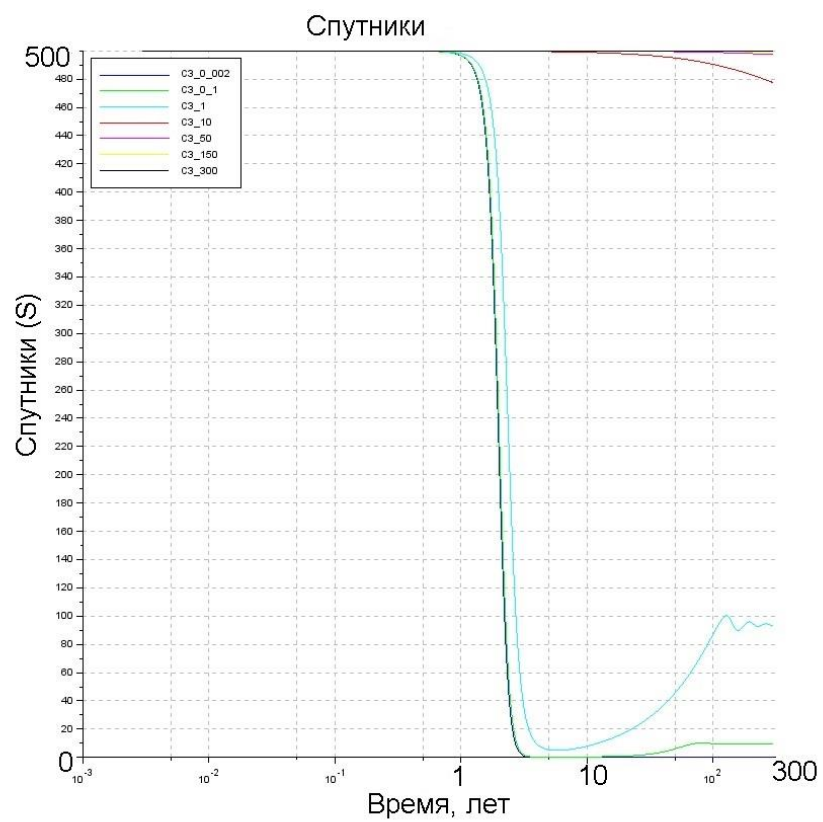


Рисунок П.16.11. 500 шатких спутников

$C1 = 2$; $C2 = 0.002$; $C4 = 0.002$; $Nx0 = 1000$; $Ny0 = 0$; $A = 961$; $B = 96$;

$C3 = \begin{cases} 0,002; \\ 0,1; \\ 1; \\ 10; \\ 50; \\ 150; \\ 300; \end{cases}$

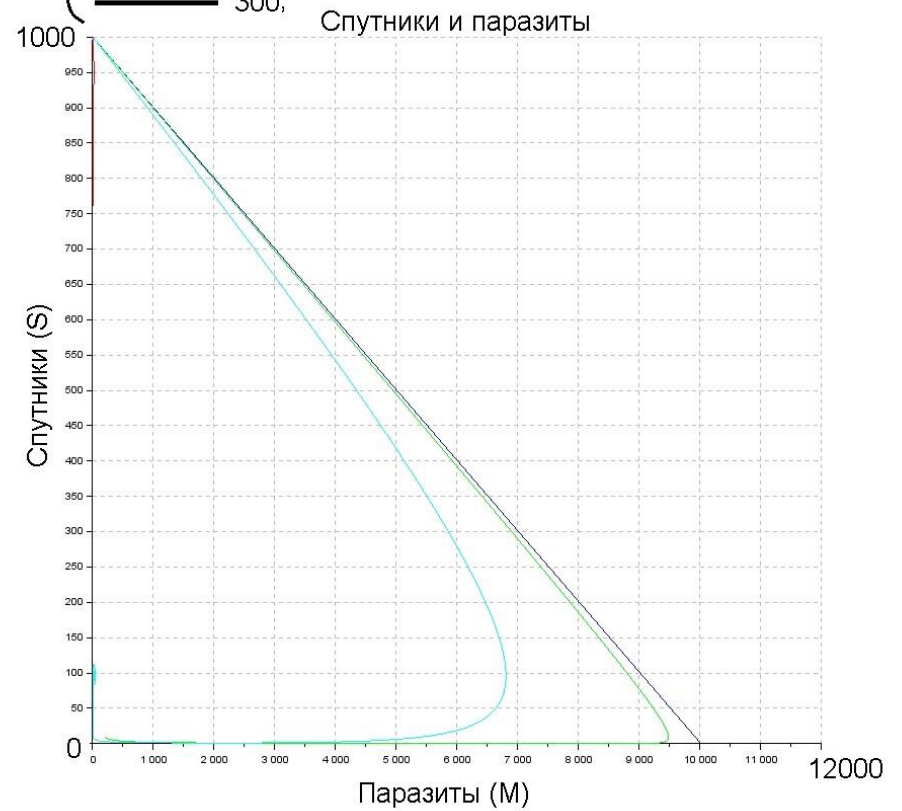
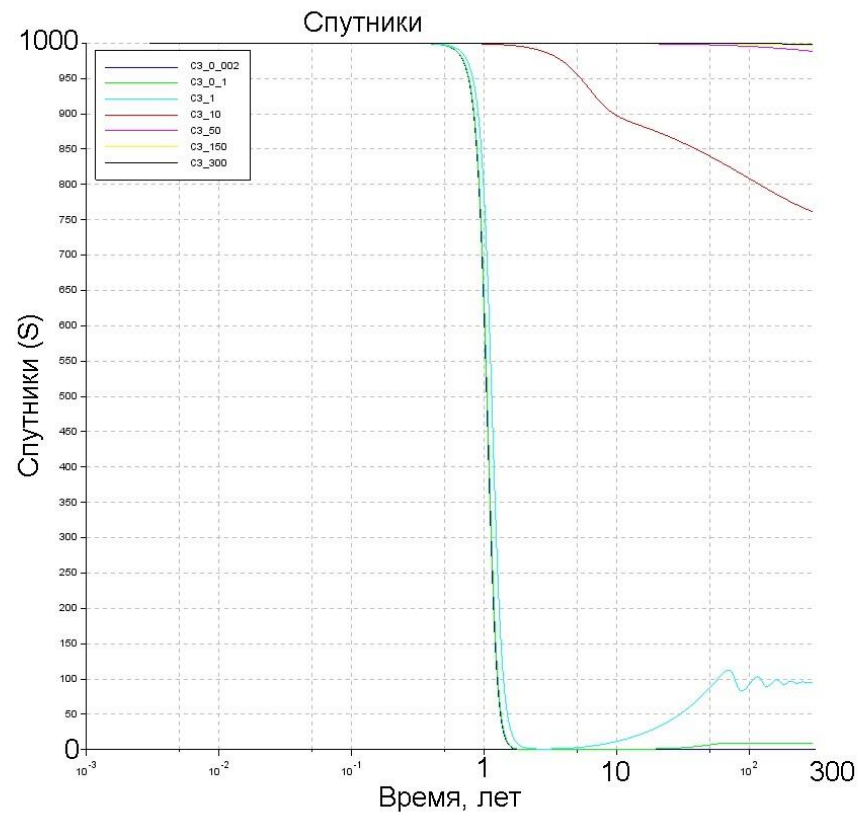


Рисунок П.16.12. 1000 шатких спутников

$C1 = 6$; $C2 = 0.002$; $C4 = 0.002$; $Nx0 = 3000$; $Ny0 = 0$; $A = 961$; $B = 96$;

$C3 = \begin{cases} 0,002; \\ 0,1; \\ 1; \\ 10; \\ 50; \\ 150; \\ 300; \end{cases}$

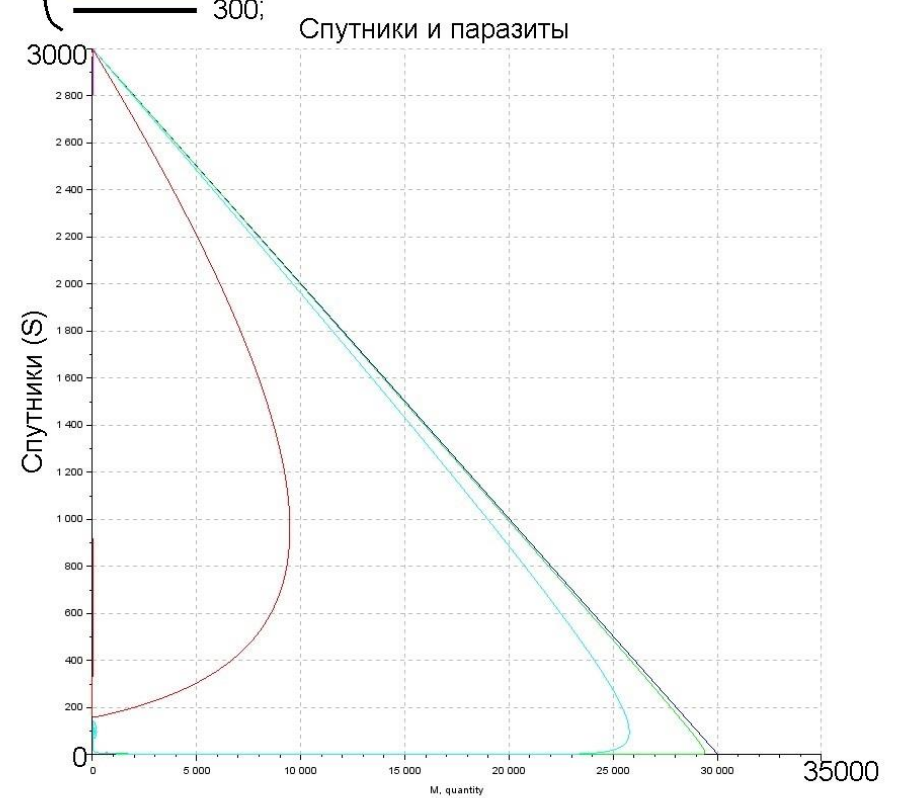
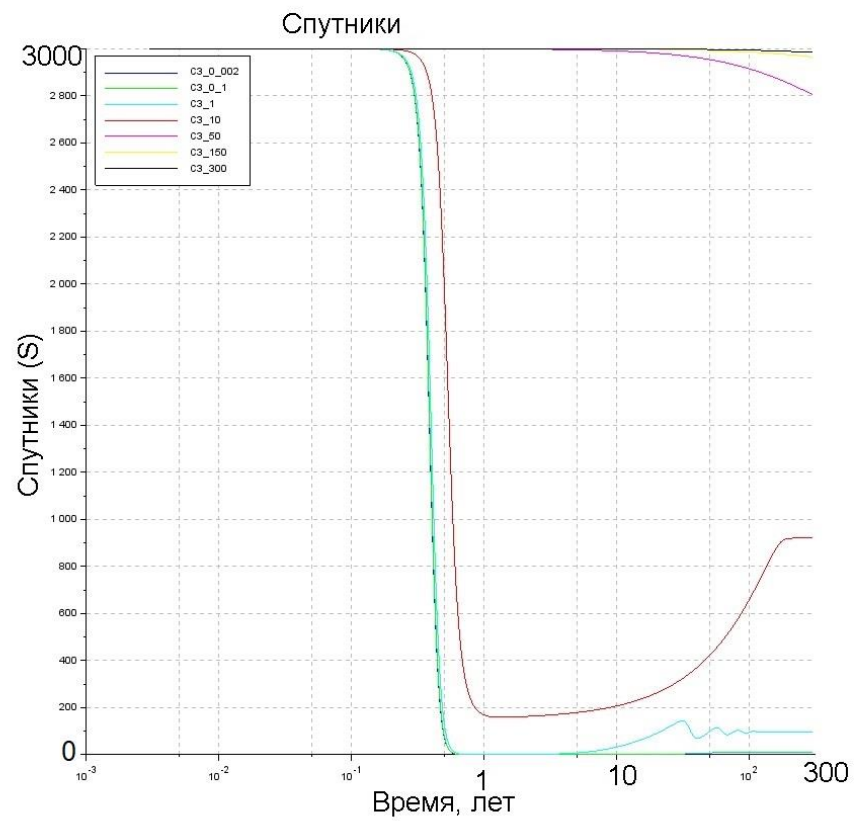


Рисунок П.16.13. 3000 шатких спутников

$C1 = 20$; $C2 = 0.002$; $C4 = 0.002$; $Nx0 = 10000$; $Ny0 = 0$; $A = 961$; $B = 96$;

$C3 = \begin{cases} 0.002; \\ 0.1; \\ 1; \\ 10; \\ 50; \\ 150; \\ 300; \end{cases}$

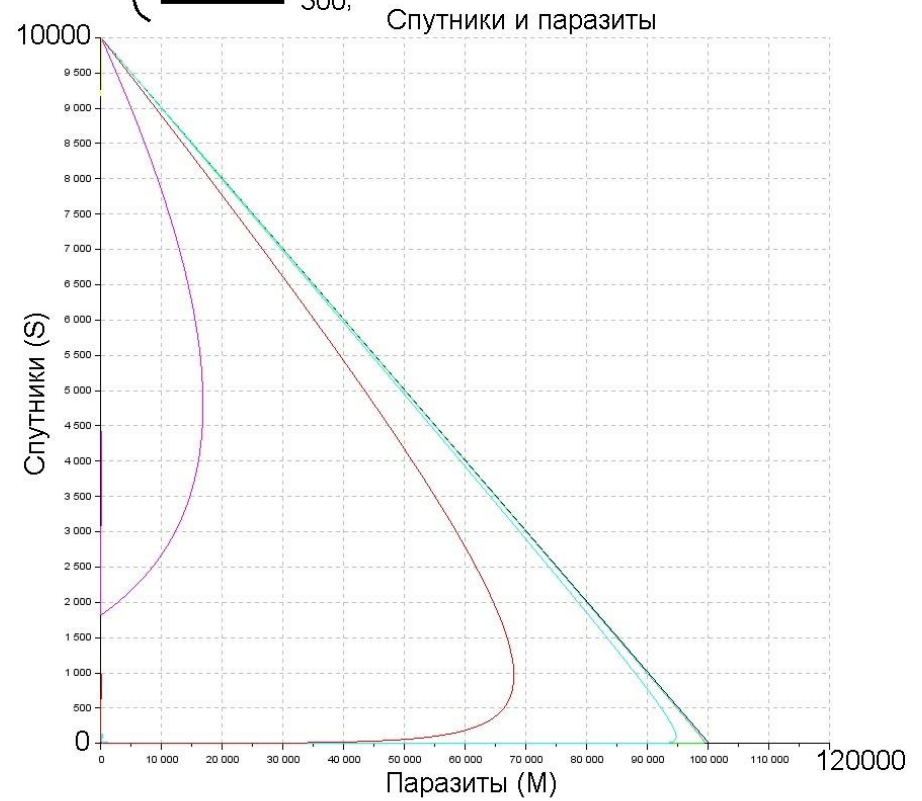
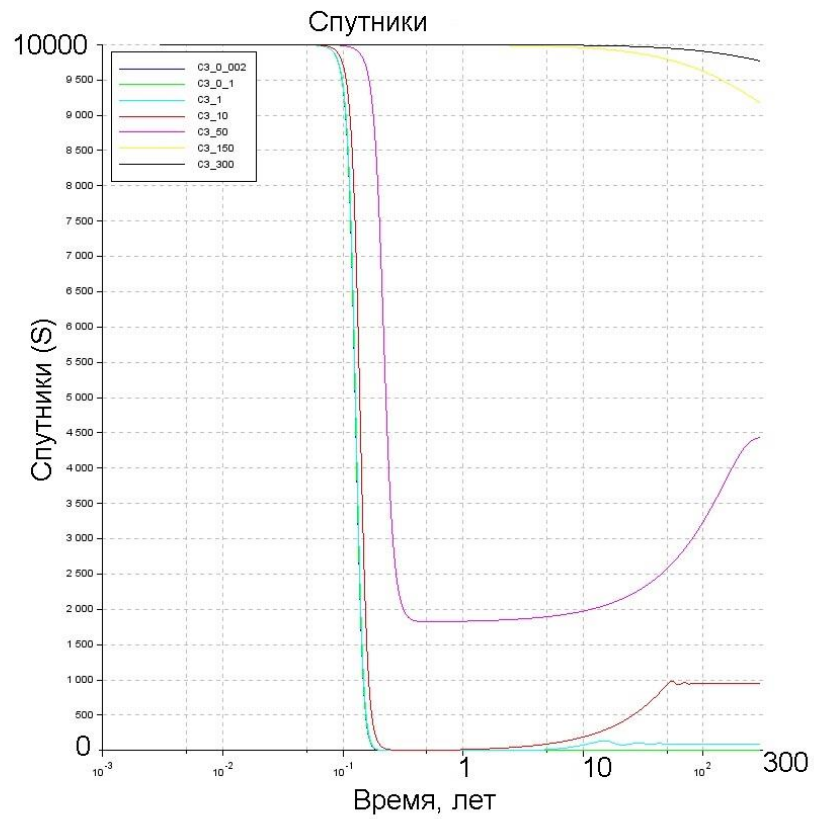


Рисунок П.16.14. 10000 шатких спутников

На рисунке П.16.15. при $C_3=10$ зависимость $S(M)$ представлена более чем 20 витками.

$C_1 = 80$; $C_2 = 0.002$; $C_4 = 0.002$; $N_{x0} = 40000$; $N_{y0} = 0$; $A = 961$; $B = 96$;

$C_3 = \begin{cases} 0,002; \\ 0,1; \\ 1; \\ 10; \\ 50; \\ 150; \\ 300; \end{cases}$

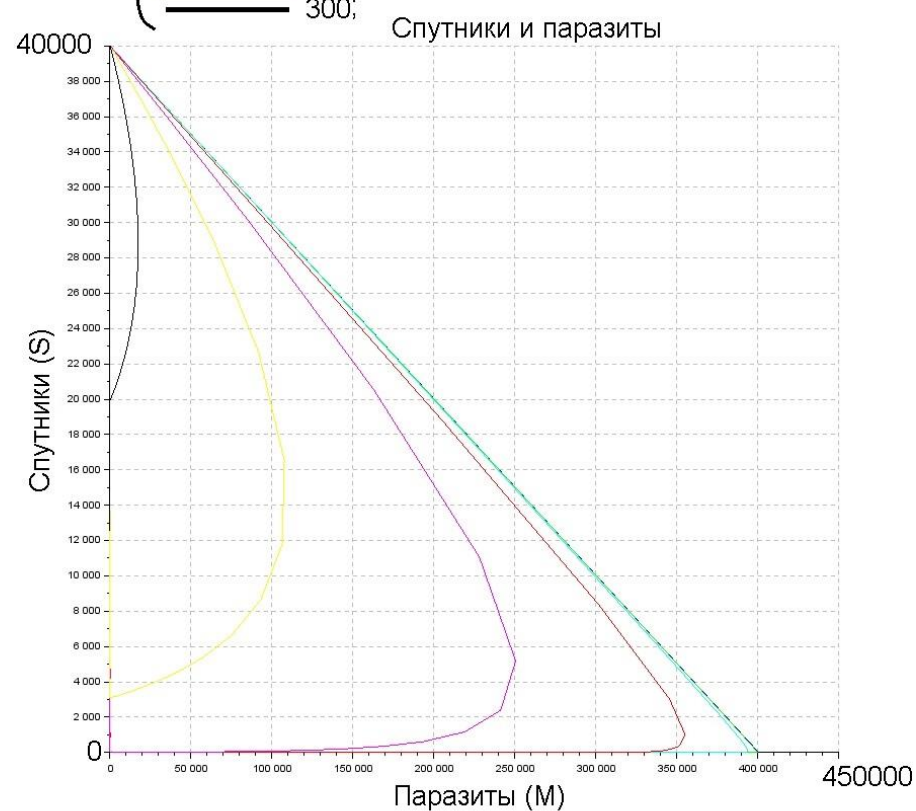
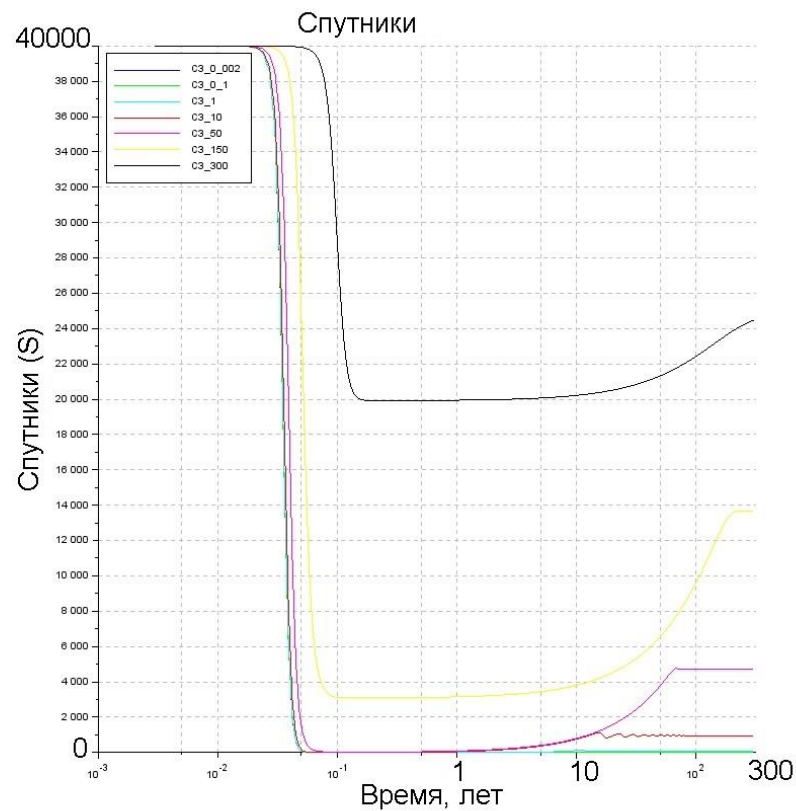


Рисунок П.16.15. 40000 шатких спутников

$C1 = 2000$; $C2 = 0.002$; $C4 = 0.002$; $Nx0 = 1000000$; $Ny0 = 0$; $A = 961$; $B = 96$;

$C3 = \begin{cases} 0,002; \\ 0,1; \\ 1; \\ 10; \\ 50; \\ 150; \\ 300; \end{cases}$

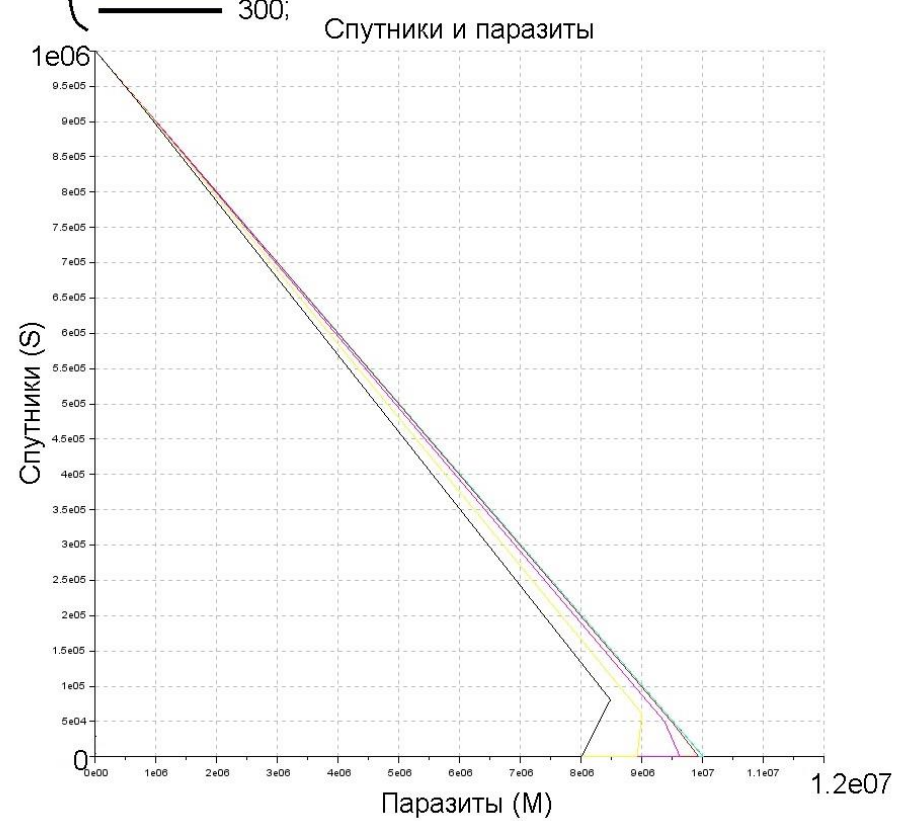
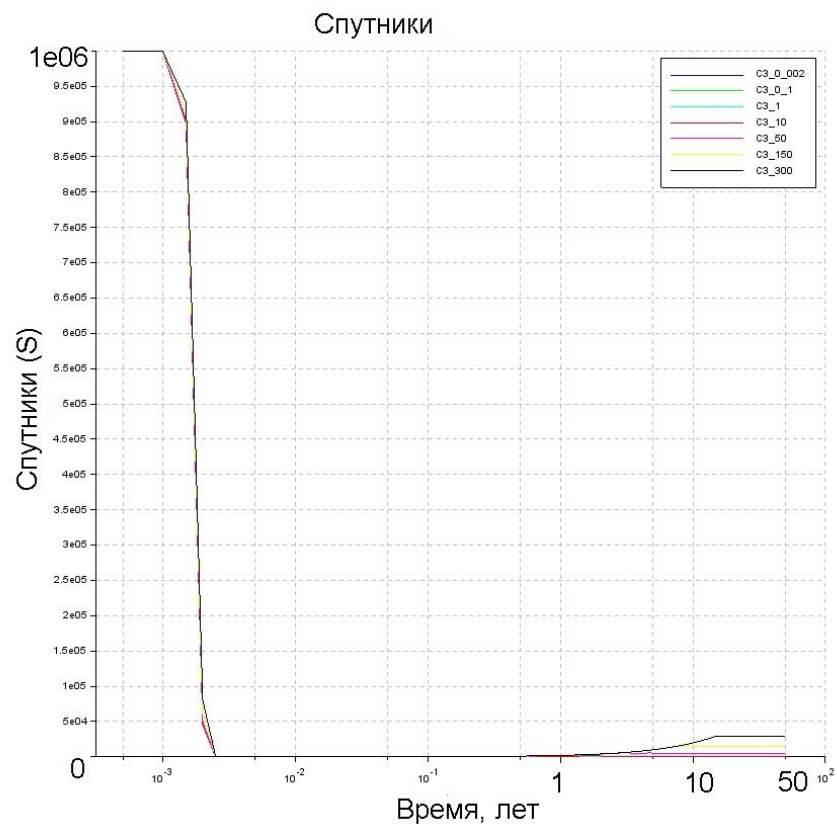


Рисунок П.16.16. 1000000 шатких спутников

Список литературы

1. Адамов Д. Ю. Синхронизация, связь и помехоустойчивость в микросхемах для информационных сетей // Нано- и микросистемная техника. – 2008. – № 12 (101). – С. 38–44.
2. Александров А. В., Дородницын Л. В., Дубень А. П. Моделирование турбулентного течения на основе генерации стохастического поля скоростей // Марчуковские научные чтения – 2019: труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» / Институт вычислительной математики и матем. геофизики СО РАН. – Новосибирск, 2019. – С. 14–19.
3. Антипин Н. А. Аспекты вычисления детерминантов матриц и их распределений по определителям // Марчуковские научные чтения – 2019: труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» / Институт вычислительной математики и матем. геофизики СО РАН. – Новосибирск, 2019. – С. 34–37.
4. Антипин Н. А. Аспекты шифра Хилла для разреженных матриц // Альманах мировой науки. – 2016. – № 10-1(13). – С. 7–13.
5. Антипин Н. А. Разреженные матрицы из нулей и единиц // Перспективы развития науки и образования: сб. науч. тр. – Москва, 2017. – С. 6–10.
6. Антипин Н. А. Теоретические и практические аспекты матриц из нулей и единиц // Альманах мировой науки. – 2018. – № 1(21). – С. 6–35.
7. Теоретико-числовые аспекты шифра Хилла для матриц различного порядка / Н. А. Антипин, В. Н. Макеев, Р. Ю. Манеев, Ф. А. Федулов // Альманах мировой науки. – 2016. – № 1-1(4). – С. 6–10.
8. Апполонов В. В. Уничтожение космического мусора и объектов естественного происхождения лазерным излучением // Квантовая электроника. – 2013. – Т. 43, № 9. – С. 890–894.
9. Бугакова Т. Ю. Определение изменения пространственно-временного состояния техногенных систем методами численного моделирования // Марчуковские научные чтения – 2019: труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» / Институт вычислительной математики и матем. геофизики СО РАН. – Новосибирск, 2019. – С. 58–64.

10. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва: Наука, 2013. – 222 с.
11. Виноградов И. М. Основы теории чисел: учеб. пособие. – 12-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 176 с.
12. Воропаева О. Ф., Гаврилова К. С., Сенотрусова С. Д. Математическое моделирование функционирования системы биомаркеров дегенеративных заболеваний // Марчуковские научные чтения – 2019: труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» / Институт вычислительной математики и матем. геофизики СО РАН. – Новосибирск, 2019. – С. 86–91.
13. Введение в теоретико-числовые методы криптографии: учеб. пособие / М. М. Глухов, И. А. Круглов, А. Б. Пичкур, А. В. Черемушкин. – Санкт-Петербург: Лань, 2011. – 400 с.
14. Голубятников В. П., Минушкина Л. С. О циклах в блочно-линейных моделях кольцевых генных сетей // Марчуковские научные чтения – 2019: труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» / Институт вычислительной математики и матем. геофизики СО РАН. – Новосибирск, 2019. – С. 106–111.
15. Гуров В. В. Микропроцессорные системы: учебник. – Москва: ИНФРА-М, 2016. – 336 с.
16. Гурский Д. А., Турбина Е. С. Вычисления в Mathcad 12. – Санкт-Петербург: Питер, 2006. – 544 с.
17. Гусев С. А., Николаев В. Н. Решение задачи теплообмена крыла самолета методом Монте-Карло // Марчуковские научные чтения – 2019: труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» / Институт вычислительной математики и матем. геофизики СО РАН. – Новосибирск, 2019. – С. 127–132.
18. Дейтел Х. М., Дейтел П. Дж. Как программировать на C++: пер. с англ. – 5-е изд. – Москва: ООО «Бином-Пресс», 2008. – 1456 с.
19. Драгунов В. П., Неизвестный И. Г., Гридчин В. А. Основы наноэлектроники: учеб. пособие. – Москва: Логос, 2011. – 496 с.
20. Иржак В. И. Структурная кинетика формирования полимеров: учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2015. – 448 с.

21. Ишханов Б. С., Капитонов И. М., Юдин Н. П. Частицы и атомные ядра: учебник. – Изд. стереотип. – Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2017. – 584 с.
22. Киреев В. Ю. Нанотехнологии в микроэлектронике. Нанолитография – процессы и оборудование: учебно-справочное руководство. – Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2016. – 320 с.
23. Крюков П. Г. Лазеры ультракоротких импульсов // Квантовая электроника. – 2001. – Т. 31, № 2 – С. 95–119.
24. Крюков П. Г. Лазеры ультракоротких импульсов и их применение: учеб. пособие. – Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2012. – 248 с.
25. Лазер на неодимовом стекле с энергией импульсов 220 Дж и частотой их следования 0.02 Гц / А. А. Кузьмин, О. В. Кулагин, Е. А. Хазанов, А. А. Шайкин // Квантовая электроника. – 2013. – Т. 43, № 7 – С. 597–599.
26. Курбацкая Л. И. Математическое моделирование турбулентных течений в устойчиво стратифицированной среде: циркуляция над городским островом тепла // Марчуковские научные чтения – 2019: труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» / Институт вычислительной математики и матем. геофизики СО РАН. – Новосибирск, 2019. – С. 253–260.
27. Матюшкин И. В. Моделирование и визуализация средствами MATLAB физики наноструктур. – Москва: Техносфера, 2011. – 168 с.: 20 с. цв. вкл.
28. Мельников А. А. Расчет электромагнитных и температурных полей методом конечных элементов: учеб. пособие / Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет) – М., 2000. – 68 с.
29. Паасонен В. И. Исследование устойчивости трехслойных разностных схем для уравнения Шредингера с симметричными многоточечными операторами // Марчуковские научные чтения – 2019: труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» / Институт вычислительной математики и матем. геофизики СО РАН. – Новосибирск, 2019. – С. 366–372.
30. Раткин Л. С. Современные импортозамещающие технологии: от квантовой наноэлектроники – к компьютерной стеганографии // Нано- и микросистемная техника. – 2014. – № 12 (173). – С. 47–50.

31. Савельев И. В. Курс общей физики: учебник в 3 т. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2011. – Т. 1: Механика. Молекулярная физика. – 432 с.

32. Стогний П. В., Хохлов Н. И., Петров И. Б. Численное моделирование волновых процессов в геологических средах с газовыми карманами в зоне арктического шельфа с помощью сеточно-характеристического метода // Марчуковские научные чтения – 2019: труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» / Институт вычислительной математики и матем. геофизики СО РАН. – Новосибирск, 2019. – С. 461–464.

33. Таненбаум Э., Бос Х. Современные операционные системы. – 4-е изд. – Санкт-Петербург: Питер, 2019. – 1120 с.

34. Тихонов А. В., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. / Учеб. для вузов. – 4-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 256 с.

35. Уильямс Энтони Параллельное программирование на C++ в действии. Практика разработки многопоточных программ. / пер. с англ. А. А. Слинкина. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 672 с.

36. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. – 4-е изд. – Санкт-Петербург: Лань, 2002. – Ч. 1, 2.

37. Чеботарев Н. Г. Теория Галуа. – Изд. 3-е. – Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 152 с.

38. Шалдырван В. А., Медведев К. В. Дифференциальные уравнения. – М.: Вузовская книга, 2008. – 356 с.

39. Шарый С. П. Оценка вариабельности решения, полученного с помощью интервальной регуляризации // Марчуковские научные чтения – 2019: труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» / Институт вычислительной математики и матем. геофизики СО РАН. – Новосибирск, 2019. – С. 550–556.

40. Шилов И. А. Экология. – 7-е изд. – М.: Юрайт, 2012. – 512 с.

Научное издание

Антипин Николай Александрович

**Аспекты распределений матриц из целых чисел
порядка от 2 до 6 по их определителям**

Монография

Издательство «Наукоемкие технологии»

ООО «Корпорация «Интел Групп»

<http://publishing.intelgr.com>

E-mail: publishing@intelgr.com

Тел.: (812) 945-50-63

ISBN 978-5-6046047-5-5



Подписано в печать 08.06.2021.

Формат 60×84/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Объем 13 печ.л. Тираж 500 экз.