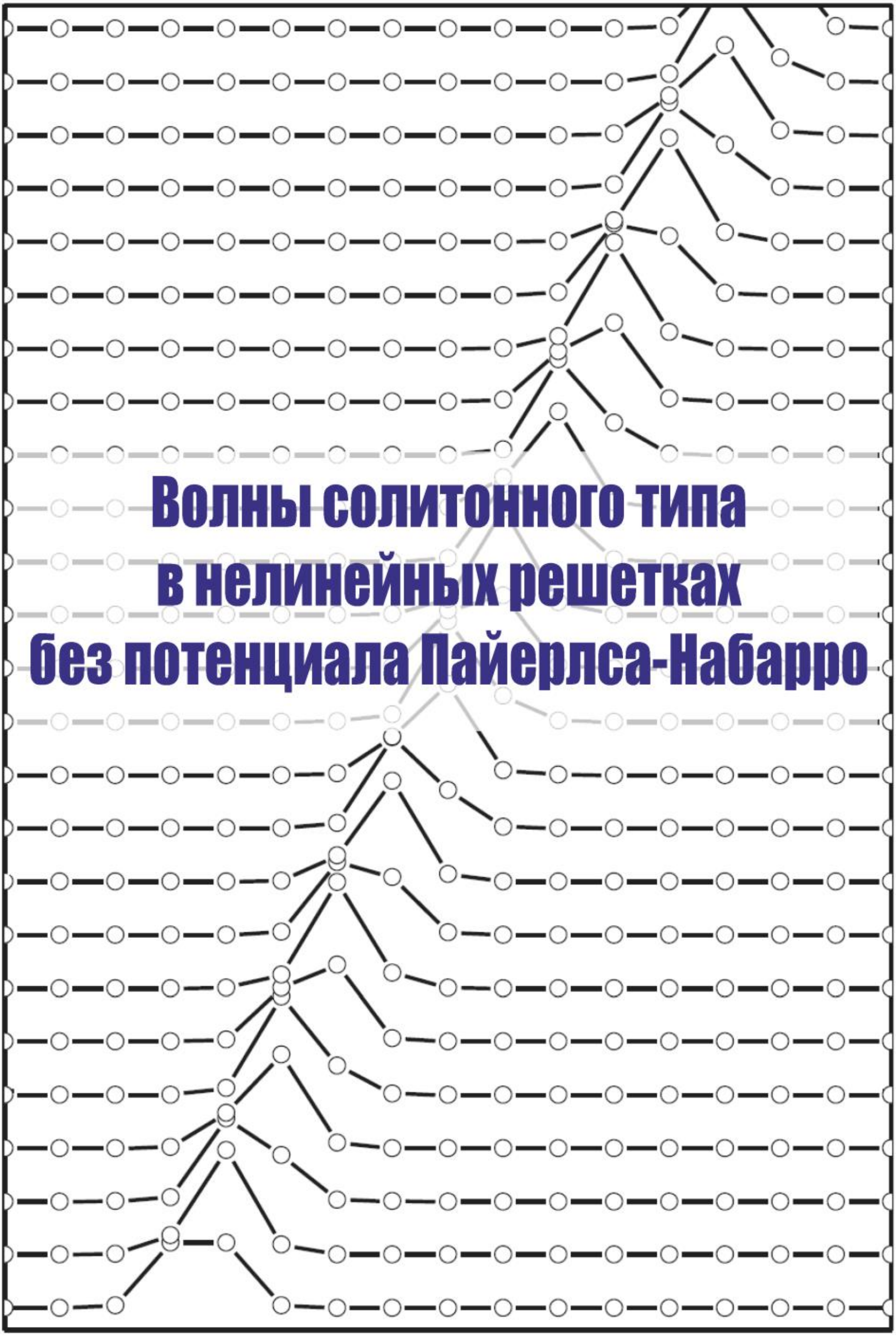
Волны солитонного типа в нелинейных решетках без потенциала Пайерлса-Набарро



ВОЛНЫ СОЛИТОННОГО ТИПА
В НЕЛИНЕЙНЫХ РЕШЕТКАХ
БЕЗ ПОТЕНЦИАЛА ПАЙЕРЛСА-НАБАРРО

Монография

Санкт-Петербург
Наукоемкие технологии
2018

УДК 539.3
ББК 22.31
Б 35

Рецензенты:

Савин Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, Институт химической физики им. Н. Н. Семенова РАН.

Екомасов Евгений Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, Башкирский государственный университет.

Б 35 Бебихов Ю. В., Корзникова Е. А., Четвериков А. П., Дмитриев С. В. Волны солитонного типа в нелинейных решетках без потенциала Пайерлса-Набарро: монография. – СПб.: Наукоемкие технологии, 2018. – 103 с.

ISBN 978-5-6041427-9-0

В данной монографии описана дискретная модель Клейн-Гордона без потенциала Пайерлса-Набарро с асимметричным локальным потенциалом. Представлен расчет кинка в этой дискретной модели при отсутствии и при наличии вязкости и показано, что скорость дрейфа кинка очень слабо зависит от параметра дискретности, и что при достаточно большом значении коэффициента вязкости происходит смена направления движения кинка. Приведены исследования обобщенного дискретного нелинейного уравнения Шредингера, представлен ряд новых точных решений в замкнутой форме, так и в виде двухточечных нелинейных отображений. Монография предназначена для научных работников, работающих в области физики конденсированного состояния, а также может быть полезна магистрантам, аспирантам, а также преподавателям соответствующих специальностей.

УДК 539.3
ББК 22.31

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского Научного фонда, грант № 16-12-10175

ISBN 978-5-6041427-9-0

Оглавление

Введение

Теоретическое изучение дискретных систем является традиционным в физике конденсированного состояния, например, при изучении колебательных спектров идеальных кристаллов, а также колебательных мод, локализованных вблизи дефектов кристаллической структуры. В последние несколько десятилетий необычайно вырос интерес к задачам, где смещения атомов от решеточных положений значительны и требуется учет нелинейных слагаемых в разложении сил межатомных взаимодействий. Нелинейные дискретные системы, по сравнению с линейными, проявляют целый ряд качественно новых физических свойств, среди которых одним из важнейших является возможность существования в них волн солитонного типа (ВСТ). ВСТ необычайно устойчивы по отношению к возмущениям и, в случаях близких к интегрируемым, взаимодействуют друг с другом почти упруго, то есть восстанавливают свои свойства после столкновения. Таким образом, ВСТ способны эффективно осуществлять перенос энергии, импульса, вещества, электрического заряда и др., что и делает их исключительно важными для физики конденсированного состояния. Такого рода волны возможны и в континуальных нелинейных системах, но дискретность среды вносит заметные корректировки в их свойства и даже может приводить к появлению качественно новых свойств. С математической точки зрения, дискретизация приводит к потере трансляционной симметрии системы, а в физическом плане это проявляется в появлении периодического потенциала, который ВСТ вынуждена преодолевать при движении воль кристалла от одной ячейки периодичности к другой. В теории дислокаций этот потенциал получил название потенциала Пайерлса-Набарро (пПН), и позже этот термин стал использоваться и в других приложениях. Революцией в теории нелинейных дискретных систем стало открытие Тодой полностью интегрируемой цепочки [1], где кинковые решения не испытывают действия пПН. В последствии были открыты и другие интегрируемые дискретные нелинейные цепочки, например, цепочка Абловица-Ладика [2], но всё же число таких систем остается весьма ограниченным. С другой стороны, известен ряд неинтегрируемых нелинейных дискретных уравнений, допускающих точные решения, например, уравнения, сводящиеся к нелинейному отображению Квиспела-Робертса-Томпсона [3]. Роль таких решений, как в теории нелинейных дискретных систем, так и в их физических приложениях весьма значительна.

В последние десятилетия дискретные нелинейные системы привлекают всё большее внимание в различных разделах физики, например, в физике фазовых превращений, физике пластической деформации, в нелинейной оптике, в физике Бозе-Эйнштейновского конденсата, при исследовании волн кальция в живых клетках, сверхпроводящих Джозефсоновских контактов, и в целом ряде других областей [4-6]. Дискретность материи на молекулярном и атомарном уровне становится заметной при работе с наноразмерными системами.

Таким образом, весьма ***актуальными*** являются следующие задачи, рассматриваемые в настоящей работе:

- построение дискретных аналогов для уравнения Клейн-Гордона и нелинейного уравнения Шредингера, для которых статические (стационарные) задачи сводятся к интегрируемым отображениям, используя методологию, предложенную в работе [7];

- изучение законов сохранения полученных дискретизаций;
- полуаналитическое и численное исследование свойств ВСТ для таких дискретных моделей;
- физическая интерпретация полученных результатов.

Глава 1
Некоторые точно решаемые нелинейные дискретные уравнения с приложениями в физике конденсированного состояния

1.1 Соотношение между континуальными уравнениями и их дискретными аналогами

Соотношение континуального и дискретного является одним из принципиальных вопросов философии и естествознания и, в ходе своего развития, научная мысль, в попытках описания окружающего мира, отдавала предпочтение то одному, то другому из этих подходов, пока не возникло понимание того, что, в приложении к некоторым явлениям, вообще не представляется возможным четко определить границы их применимости. Например, материя на атомарном уровне может приближенно описываться системой взаимодействующих материальных точек, как это принято в молекулярной динамике, но возможен и более точный квантово-механический подход, когда валентные электроны на внешних орбитах атомов представлены эффективной плотностью распределения электрического заряда. Наиболее плодотворным в физике является не противопоставление, а сочетание этих взаимопроникающих подходов, ведь нередко континуальные уравнения применяются для описания дискретных физических систем и, наоборот, дискретные уравнения используются для получения приближенных решений для континуума. Безусловно, многосторонняя задача о соотношении континуального и дискретного подходов при описании физических явлений представляется актуальной и важной.

1.1.1 Некоторые нелинейные эффекты в дискретных уравнениях

В XIX веке господство континуальной механики, физики и математики было бесспорным. Естественный ход развития науки привел к тому, что XX век открыл новые горизонты в познании и поставил новые задачи, что привело к возрастающему интересу к дискретным системам. Так, например, теория дислокаций, прообразом которой могут считаться сингулярные решения континуальной теории упругости, полученные в 1905 г. Вольтера, в своем развитии, неизбежно привела к необходимости рассмотрения атомистических моделей дислокаций, простейшей из которых является модель Френкеля-Конторовой (1938 г.) [6]. В математическом плане дислокации представляют собой топологический дефект, нередко называемый также топологическим солитоном. Классическая теория солитонов также начиналась с рассмотрения континуальных систем, описываемых нелинейными уравнениями в частных производных [33-35]. Солитонами были названы особые локализованные решения некоторых полностью интегрируемых нелинейных уравнений, обладающих бесконечным числом законов сохранения. В таких идеализированных системах солитоны взаимодействуют друг с другом абсолютно упруго, то есть после прохождения друг через друга они полностью восстанавливают свои первоначальные свойства. Кульминацией теории солитонов оказалось открытие Крускалом, Гарднером, Грином и Миурой метода обратной задачи рассеяния интегрирования некоторых нелинейных уравнений. Оказалось, что существуют и дискретные нелинейные уравнения, обладающие свойством полной интегрируемости и допускающие точные многосолитонные решения. Впервые такая дискретная модель была предложена в 1967 г. Тодой [36]. Напомним, что цепочка Тоды в континуальном пределе сводится к интегрируемому уравнению КДФ. Позже были найдены и другие интегрируемые цепочки, среди которых упомянем полученную в 1975 г. цепочку Абловица и Ладика [37, 38], дающую в континуальном пределе НУШ, а также интегрируемую дискретизацию уравнения синус-Гордона, построенную Орфанидисом в 1978 г. [39].

Следует отметить, что число найденных точно интегрируемых уравнений, как континуальных, так и дискретных, постоянно растет, но все-таки, круг таких уравнений остается весьма ограниченным [40]. Поэтому, кроме солитонов в строгом понимании этого термина чаще рассматриваются так называемые *волны солитонного типа*, которые имеют некоторые, но не все свойства солитонов. Например, весьма популярная разновидность уравнения Клейн-Гордона, уравнение синус-Гордона, является полностью интегрируемым, а значит, его локализованные решения являются солитонами; но другая его разновидность, уравнение ϕ^4, являясь неинтегрируемым, допускает решения в виде солитонных волн, распространяющихся без потери энергии на излучение, но взаимодействующих друг с другом неупруго.

Интерес к неинтегрируемым нелинейным дискретным уравнениям начал стремительно возрастать с появлением электронных вычислительных машин (ЭВМ), поскольку получение точных аналитических решений таких уравнений возможно лишь в редких случаях. Так, на заре развития ЭВМ, в 1953 г., Ферми, Паста и Улам, по результатам численного эксперимента обнаружили интересный эффект, связанный с квазипериодическим возвращением энергии колебаний в одну длинноволновую моду, что перемежалось колебательными режимами, когда энергия была распределена между многими модами. С каждым периодом, величина энергии, возвратившейся в длинноволновую моду, уменьшалась, поскольку часть ее рассеивалась в виде фононных колебательных мод малой амплитуды и, в итоге, система приходила к тепловому равновесию с энергией, поделенной поровну между всеми фононными модами. Эти результаты были опубликованы в 1955 г. и с тех пор проблема Ферми-Паста-Улама привлекает к себе значительное внимание исследователей [41].

Новую мощную волну интереса к нелинейным дискретным системам породила работа Сиверса и Такено 1988 г. [42], где было показано, что в таких системах возможны устойчивые колебательные моды с частотой, лежащей вне фононного спектра, а значит, не теряющие энергию на излучение. До этой работы существовало представление, что локализованные колебательные моды образуются на примесных атомах или на дефектах кристаллической решетки, но оказалось, что и в идеальной решетке их существование возможно, при достаточно высокой степени дискретности и нелинейности.

Не менее интересной и обещающей долгую жизнь в науке была работа по компьютерному моделированию эволюции нелинейной цепочки при возбуждении в ней не длинноволновой моды, как в экспериментах Ферми-Паста-Улама, а наоборот, коротковолновой моды [43]. Оказалось, что в этом случае, путь к равнораспределению энергии между фононными колебательными модами лежит через образование высокоамплитудных, сильно локализованных в пространстве колебательных мод.

За последние два десятилетия возникло четкое понимание того, что одновременный учет эффектов нелинейности и пространственной дискретности может объяснить многие эффекты в различных физических и биологических системах, что, как уже отмечалось во Введении, отражено в целом ряде недавних публикаций [1-7, 28-32].

1.1.2 Гомогенизация и дискретизация

Задача гомогенизации, то есть поиск континуального аналога некоторой дискретной системы, является давно стоящей проблемой физики и механики [44]. Наличие хорошо развитого математического аппарата для решения уравнений в частных производных является одним из стимулов для решения этой задачи. Гомогенизация возможна как для неупорядоченных дискретных систем, таких, например, как гранулированные и сыпучие среды, так и для дискретных систем, обладающих пространственной периодичностью, например, кристаллов. Общая схема гомогенизации для периодических систем состоит в рассмотрении одной ячейки периодичности, выборе наиболее важных степеней свободы, характеризующих структуру ячейки, и выполнении формальной математической процедуры, по разложению полей перемещений в предположении их медленного изменения от ячейки к ячейке, что позволяет удерживать только производные по пространственным координатам низких порядков. При таком подходе, результат существенно зависит от того, какие именно степени свободы ячейки были учтены. Их выбор зависит от того, какие свойства дискретной системы должен воспроизводить конструируемый континуум. Так, например, многие кристаллы диэлектриков построены из довольно жестких атомных кластеров, соединенных таким образом, что взаимный поворот кластеров требует значительно меньшей энергии, чем их деформация. В некоторых ситуациях, вращательные степени свободы кластеров могут играть существенную роль, например, при фазовых превращениях, а также при наличии заметного взаимодействия между коротковолновыми и длинноволновыми фононными колебаниями атомов. Учет вращательных степеней свободы приводит к обобщениям классической теории упругости путем введения полей, описывающих эти степени свободы (см. [45] и ссылки в этой работе). Возможны и более сложные построения, основанные на многополевом описании дискретной среды, когда континуальный аналог строится не по одной, а по нескольким ячейкам периодичности [46].

Обратная задача, то есть задача дискретизации континуальных дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных) издавна решается при их численном интегрировании. К численным схемам предъявляется ряд требований, такие, как точность и устойчивость, а иногда и определенные требования к их спектральным свойствам [47].

И задача гомогенизации, и задача дискретизации имеют неединственное решение и перед исследователем всегда стоят задачи сравнения свойств различных получаемых моделей и выбора модели, наиболее адекватно представляющей то или иное явление.

1.1.3 Свойства, приобретаемые и теряемые при дискретизации нелинейных уравнений в частных производных

Дискретизация нелинейных континуальных уравнений может приводить к потере их некоторых свойств и к появлению ряда новых свойств. Перечислим те основные отличия между континуальными уравнениями и их дискретными аналогами, которые важны для задач, рассматриваемых в физике конденсированного состояния.

Континуальные уравнения с постоянными коэффициентами нередко обладают свойством трансляционной инвариантности, когда любое решение может быть произвольно сдвинуто вдоль пространственной координаты. Это свойство очень часто теряется при дискретизации. Потеря трансляционной инвариантности приводит к тому, что статические солитонные решения становятся возможными лишь для их высокосимметричных положений относительно решетки. Эти особые конфигурации разделены энергетическим барьером Пайерлса-Набарро (см., например, [6]) и, если солитон движется вдоль решетки, он излучает энергию, взаимодействуя с этим периодическим энергетическим рельефом. Как уже отмечалось, существует ограниченное число интегрируемых цепочек [36-39], где статические солитонные решения могут располагаться произвольно относительно решетки и могут двигаться вдоль решетки с произвольной (лежащей в некотором диапазоне) скоростью, не теряя энергию на излучение.

Существование интегрируемых дискретных уравнений подсказывает, что потеря трансляционной инвариантности не является неизбежным следствием дискретизации. Это открывает простор для поиска дискретных моделей, имеющих свойства, лежащие между интегрируемыми и неинтегрируемыми моделями с потенциалом Пайерлса-Набарро. Так, например, в настоящей работе, в главах со второй по пятую, предлагается и изучается весьма широкий класс дискретных моделей, где статические солитонные решения могут располагаться произвольно относительно решетки, но излучают энергию при движении. Будет показано, что возможны даже движущиеся решения дискретных неинтегрируемых уравнений, не излучающие энергию, но только для изолированных скоростей движения.

Следующей важной характеристикой нелинейных уравнений является набор их законов сохранения. Например, трансляционная симметрия континуальных уравнений неразрывно связана с законом сохранения импульса. Как известно, интегрируемые уравнения (континуальные и дискретные) имеют бесконечное число сохраняющихся величин. Но, как правило, дискретизация интегрируемого континуального уравнения приводит к утрате всех или почти всех его законов сохранения. При выполнении процедуры дискретизации можно пытаться не потерять те или иные законы сохранения исходного уравнения.

Существенны и различия в фононных спектрах континуальных уравнений и их дискретных аналогов. Принципиальным отличием дискретных моделей является невозможность существования в них волн с полуволной короче шага решетки. Это приводит к понятию первой зоны Бриллюэна, границы которой соответствуют самым коротким малоамплитудным волнам. Это также приводит к тому, что если спектр континуального уравнения не ограничен сверху, то спектр его дискретного аналога всегда имеет максимальную частоту. Именно это свойство нелинейных дискретных уравнений ответственно за существование дискретных бризеров с частотой, лежащей выше фононного спектра [42]. Более того, фононный спектр дискретных цепочек, при некоторых значениях параметра дискретности, может вырождаться в точку, то есть волны любой длины имеют одинаковую частоту колебаний. В нелинейных системах частота зависит от амплитуды колебания. В этих условиях, практически любое высокоамплитудное колебание будет иметь частоту отличную от частоты фононного спектра, а значит, не будет излучать энергию.

Спектр малоамплитудных колебаний уравнений, линеаризованных в окрестности статического солитона, также изменяется с ростом параметра дискретности. Этот спектр состоит из сплошного спектра вакуума (о нем сказано выше) и из частот особых колебательных мод, локализованных на солитоне. С ростом параметра дискретизации могут появляться новые локализованные моды, причем, могут существовать локализованные моды, лежащие как ниже, так и выше фононного спектра.

1.2 Обзор литературы

1.2.1 Трансляционно-инвариантные дискретизации

Трансляционно-инвариантные дискретизации рассматриваются в главах данной монографии со второй по пятую. Подобные дискретизации были построены и исследованы разными авторами как для уравнения Клейн-Гордона [48-61], так и для НУШ [62-68].

Следовало бы начать обзор ТИ моделей с их определения, но, в силу новизны данного научного направления и его бурного развития, на сегодняшний день определение *ТИ модели* еще находится в стадии обсуждения. С другой стороны, не составляет труда дать определение *статического ТИ решения* некоторого разностного уравнения порядка выше первого (мы будем рассматривать только уравнения второго порядка), как решения, которое может располагаться произвольно относительно решетки. В частности, если удается найти точное статическое решение, куда входит произвольный сдвиг вдоль решетки x_0, то оно является ТИ решением. Статическое ТИ решение должно иметь трансляционную Голдстоновскую моду с нулевой частотой для любого x_0.

Естественно определить ТИ модель как модель, допускающую ТИ решения. Однако, как выяснилось, некоторые модели допускают двухпараметрическое множество ТИ решений, характеризуемое точками плоскости $\left(C, x_0\right)$, где x_0, как и ранее, это произвольный сдвиг, а C - это параметр, который может изменяться непрерывно в некотором диапазоне (их будем называть ТИ моделями первого типа), в то время как другие модели допускают решения только для некоторых изолированных значений C (ТИ модели второго типа). Таким образом, ТИ модели первого типа являются интегрируемыми в статической постановке, но могут быть неинтегрируемы при динамическом рассмотрении, а ТИ модели второго типа вообще неинтегрируемы, но допускают отдельные статические решения, которые могут быть произвольно сдвинуты вдоль решетки.

Теория ТИ дискретных уравнений неразрывно связана с теорией интегрируемых отображений [49]. Именно в работе [49], по-видимому, впервые, предлагается рассматривать интегрируемые отображения как новый класс интегрируемых уравнений. В той же работе описано одно семейство разностных уравнений второго порядка и его первый интеграл.

Однако, задача поиска ТИ дискретизации первого типа для нелинейного уравнения в частных производных формулируется иначе: для данного нелинейного континуального уравнения требуется выписать его дискретный аналог, такой, что дает интегрируемую разностную задачу для нахождения статических (стационарных) решений.

Для интегрируемого отображения, описанного в [49], континуальный предел не рассматривался.

Подход к дискретизации уравнения Клейн-Гордона, предложенный Шпейтом и Вардом [50] и Шпейтом [51, 52], основан на применении идеи Богомольного [69] к дискретным уравнениям. В их методе, однако, не заложено требование интегрируемости статического аналога дискретной модели, поэтому, их метод не гарантирует построения ТИ модели первого типа, но дает уравнение, кинковые решения которого могут быть получены из двухточечной разностной задачи, то есть гарантирует получение ТИ модели второго типа.

Подход к дискретизации уравнения Клейн-Гордона, использованный Кеврекидисом [53], тоже не ставил задачей получение интегрируемой статической задачи, но построенный им класс дискретизаций обладал этим свойством, то есть, оказался ТИ дискретизацией первого типа.

Задача построения ТИ дискретизации была впервые решена в сформулированной выше постановке в работе [54]. Для ее решения был предложен метод, основанный на использовании дискретизированного первого интеграла (ДПИ) статической версии исходного континуального уравнения. Метод был развит в работе [58], и, на сегодняшний день, метод ДПИ является самым общим подходом к построению ТИ дискретизаций нелинейных уравнений второго порядка.

Применение метода ДПИ, разработанного для уравнения Клейн-Гордона, к НУШ является формальной процедурой [62, 64], поскольку поиск стационарных решений НУШ приводит к уравнению Клейн-Гордона.

ТИ модели обладают следующими свойствами: (1) отсутствие потенциала Пайерлса-Набарро, то есть отсутствие энергетических барьеров между статическими решениями, имеющими различные положения относительно решетки x_0; (2) статические ТИ модели первого типа, в отличие от моделей второго типа, являются интегрируемыми и параметр C – это константа интегрирования. Проинтегрированное статическое уравнение второго порядка это разностное уравнение первого порядка, которое можно рассматривать как нелинейное отображение, итерируя которое для выбранного C и некоторого начального значения (которое управляется параметром x_0) можно построить точное статическое решение; (3) уже упоминавшееся свойство наличия Голдстоновской моды для любого x_0.

Таким образом, можно сказать, что в ТИ моделях статические решения (например, солитонные решения) не привязаны к решетке, и могут быть ускорены сколь угодно слабым внешним полем. Это свойство делает ТИ модели потенциально интересными для приложений, и одна такая физическая модель была недавно предложена [61]. Есть все основания полагать, что число описанных реальных систем без потенциала Пайерлса-Набарро (или с неожиданно малым барьером Пайерлса-Набарро) будет расти, и такие модели найдут достойное место в современном естествознании.

Заметим, что далеко не все из известных ТИ дискретизаций уравнения Клейн-Гордона являются гамильтоновскими, как и не все ТИ дискретизации НУШ сохраняют норму. Для негамильтоновских систем мы не можем говорить о *потенциале* Пайерлса-Набарро, поскольку взаимодействия в таких системах непотенциально, и работа по перемещению частиц зависит от их траекторий. Однако, и в этом случае, для ТИ дискретизаций можно говорить об отсутствии энергетических барьеров между статическими решениями с различными x_0, так как существует путь (вдоль

Голдстоновской моды), вдоль которого одно решение может быть квазистатически трансформировано в другое так, что ни на одном из участков этого пути не потребуется затрат энергии (более подробно см. в [58]).

Для некоторых ТИ моделей Клейн-Гордона показано, что они сохраняют импульс [53, 59], а другие энергию (Гамильтониан) [50-52, 56, 58]. Однако, нам не известна ТИ модель Клейн-Гордона, сохраняющая и импульс, и энергию. Более того, для импульса, определенного стандартным образом, было доказано, что его сохранение исключает возможность сохранения энергии [57]. С другой стороны, для ТИ дискретизаций НУШ, наличие более чем одного закона сохранения возможно [64].

ТИ дискретизации допускают и точные движущиеся решения, но, если речь не идет об интегрируемой (в динамической постановке) модели, то только для изолированных значений скоростей [64].

В некоторых случаях статические и даже движущиеся решения могут быть выражены в замкнутой форме, например, через функции Якоби, но даже когда этого сделать не удается, статическое ТИ решение всегда можно получить итерационно из двухточечной разностной задачи.

Выводы

Приведен обзор теоретических представлений о волнах солитонного типа в дискретных системах в сопоставлении с солитонными волнами в континуальных нелинейных уравнениях. Дан обзор литературы по главам монографии. Сформулирован ряд открытых проблем теории и практики волн солитонного типа в дискретных системах.

Глава 2
Построение дискретного уравнения Клейн-Гордона с асимметричным потенциалом, допускающего кинковые решения свободные от потенциала Пайерлса-Набарро

Применяемый нами подход, предложенный в работе [58], основан на использовании дискретизированного первого интеграла (ДПИ) статического континуального уравнения Клейн-Гордона. Ниже, в разделе 2.1, описывается существо метода, а затем, в разделе 2.2, строится желаемая модель для выбранного нами асимметричного потенциала. Таким образом, раздел 2.1 не является оригинальным, в нем описывается известный метод, который затем применяется для построения новой дискретной модели. Наконец, в разделе 2.3 описан способ получения точных решений для статических кинков, вытекающий из метода дискретизации, основанного на ДПИ.

2.1 Дискретизация, использующая ДПИ

Опишем существо метода построения трансляционно-инвариантных (ТИ) дискретизаций, основанного на использовании дискретного аналога первого интеграла статического континуального уравнения Клейн-Гордона, следуя работе [58].

Континуальный Гамильтониан Клейн-Гордона, $H = E_K + E_P$, определяется функционалами кинетической и потенциальной энергий

$$E_K = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_t^2 dx\,, \tag{2.1}$$

$$E_P = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\phi_x^2 + 2V\left(\phi\right)\right] dx\,, \tag{2.2}$$

где $\phi(x,t)$ это неизвестная функция пространственной и временной координат, а $V(\phi)$ это заданный потенциал. Соответствующее уравнение движения имеет вид

$$\phi_{tt} = \phi_{xx} - V'\left(\phi\right) \equiv D\left(\phi\left(x;t\right)\right), \tag{2.3}$$

где $V'(\phi) = dV / d\phi$.

Уравнение (2.3) будет дискретизировано на решетке $x = nh$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ и параметр решетки $h > 0$.

Нашей целью является построение дискретной модели вида

$$\ddot{\phi}_n = D\left(h, \phi_{n-1}, \phi_n, \phi_{n+1}\right), \tag{2.4}$$

такой, что в континуальном пределе $\left(h \to 0\right)$,

$$D\left(h, \phi_{n-1}, \phi_n, \phi_{n+1}\right) \to D\left(\phi\right), \tag{2.5}$$

и такой, что трехточечное разностное статическое уравнение, соответствующее (2.4),

$$D\left(h, \phi_{n-1}, \phi_n, \phi_{n+1}\right) = 0\,, \tag{2.6}$$

допускает понижение порядка до двухточечного уравнения

$$U\left(h, \phi_{n-1}, \phi_n, C\right) = 0\,, \tag{2.7}$$

с константой интегрирования C. Если такое понижение порядка разностного уравнения достигнуто, то точные статические решения построенной дискретной модели могут быть получены рекуррентно, решая алгебраическое уравнение (2.7), начиная с любого допустимого начального значения ϕ_0. Произвольность в выборе начального значения ϕ_0 как раз и означает возможность размещения равновесных когерентных структур произвольно относительно решетки или, иными словами, означает отсутствие потенциала Пайерлса-Набарро. Важно заметить, что обычно дискретные системы обладают потенциалом Пайерлса-Набарро и допускают лишь дискретный набор равновесных состояний, отвечающих экстремумам этого потенциала. В отличие от этого, в ТИ дискретизациях имеется континуальное множество равновесных состояний.

Следуя подходу, основанному на использовании ДПИ, мы выписываем первый интеграл статического уравнения (2.3)

$$U(x) \equiv \phi_x^2 - 2V(\phi) + C = 0, \qquad (2.8)$$

с константой интегрирования C. Первый интеграл может быть взят и в модифицированной форме, например, в виде

$$v(x) \equiv p\left[g\left(\phi_x^2\right) - g\left(2V - C\right) \right] = 0, \qquad (2.9)$$

или в виде

$$w(x) \equiv p\left[g\left(\phi_x^2 + C\right) - g\left(2V\right) \right] = 0, \qquad (2.10)$$

где p и g это некоторые непрерывные функции и, кроме того, $p(0) = 0$. Заметим, что $v(x)$ и $w(x)$ эквивалентны только если $g(\xi) = \xi$. Мы будем рассматривать случай $p(\zeta) = \zeta$, $g(\xi) = \xi$, то есть немодифицированный первый интеграл, а также случай $p(\zeta) = \zeta$, $g(\xi) = \sqrt{\xi}$, для которого мы имеем две возможности

$$v(x) \equiv \pm\phi_x - \sqrt{2V(\phi) - C} = 0, \qquad (2.11)$$

и

$$w(x) \equiv \pm\sqrt{\phi_x^2 + C} - \sqrt{2V(\phi)} = 0, \qquad (2.12)$$

из которых будет рассматриваться только первая.

Построим ДПИ соответствующие уравнениям (2.8) и (2.11):

$$U\left(h,\phi_{n-1},\phi_n\right)\equiv\frac{1}{h^2}\left(\phi_n-\phi_{n-1}\right)^2-2V\left(\phi_{n-1},\phi_n\right)+C=0, \quad (2.13)$$

$$v\left(h,\phi_{n-1},\phi_n\right)\equiv\pm\frac{1}{h}\left(\phi_n-\phi_{n-1}\right)-\sqrt{2V\left(\phi_{n-1},\phi_n\right)-C}=0, \quad (2.14)$$

где мы предполагаем, что в континуальном пределе $\left(h\to 0\right)$ выполняется $V\left(\phi_{n-1},\phi_n\right)\to V\left(\phi\right)$.

Для построения дискретизаций сохраняющих импульс, посчитаем dU/dx и умножим результат на $\left(dx/d\phi\right)/2$, что даст

$$\frac{1}{2}\frac{dU}{d\phi}=D\left(x\right). \quad (2.15)$$

Дискретизируя левую часть (2.15) приходим к дискретизации уравнения Клейн-Гордона (2.3) вида

$$\ddot{\phi}_n=\frac{U\left(h,\phi_n,\phi_{n+1}\right)-U\left(h,\phi_{n-1},\phi_n\right)}{\phi_{n+1}-\phi_{n-1}}, \quad (2.16)$$

для которой статические решения, очевидно, могут быть найдены из двухточечного уравнения (2.13), а это значит, что дискретизация свободна от потенциала Пайерлса-Набарро. Отметим, что дискретизация типа (2.16) была впервые построена Кеврекидисом с использованием другого, менее общего подхода, и им же было показано, что модель (2.16) сохраняет импульс

$$P=\sum_n\dot{\phi}_n\left(\phi_{n+1}-\phi_{n-1}\right). \quad (2.17)$$

Важно отметить, что константа интегрирования C, входящая в (2.13), сокращается в итоговой трехточечной дискретизации (2.16). Это означает, что все статические решения уравнения (2.13), полученные для различных значений C (кинк соответствует выбору $C=0$), будут решениями одного и того же трехточечного уравнения (2.16), поскольку оно не зависит от C.

Еще заметим, что сингулярность в правой части (2.16) пропадает если потенциальная функция $V(\phi)$ дискретизирована так, что $V(\phi_{n-1},\phi_n)=V(\phi_n,\phi_{n-1})$.

Для построения дискретизаций обладающих Гамильтонианом, будем дискретизировать не уравнение движения (2.3), а Гамильтониан (2.1), (2.2). Для этого будет использован модифицированный первый интеграл в форме (2.11) где мы возьмем верхний знак. Перепишем функционал потенциальной энергии (2.2) с учетом (2.11) в виде

$$E_P=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[v(x)\right]^2+2\phi_x\sqrt{2V(\phi)-C}\right\}dx\,, \tag{2.18}$$

где мы отбросили несущественный постоянный член. Дискретизируя кинетическую энергию (2.1) и потенциальную энергию (2.18) получим дискретный Гамильтониан

$$\begin{aligned}\mathrm{H}=\frac{1}{2}\sum_n\Big\{&\dot{\phi}_n^2+\left[v(h,\phi_{n-1},\phi_n)\right]^2+\\&+\frac{2}{h}(\phi_n-\phi_{n-1})\sqrt{2V(\phi_{n-1},\phi_n)-C}\Big\}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Если потенциал дискретизировать как предложено Шпейтом [50-52],

$$\begin{aligned}&\sqrt{2V(\phi_{n-1},\phi_n)-C}=\frac{G(\phi_n)-G(\phi_{n-1})}{\phi_n-\phi_{n-1}},\\&G'(\phi)=\sqrt{2V(\phi)-C},\end{aligned} \tag{2.20}$$

то последний член Гамильтониана (2.19) сводится к $(2/h)\left[G(\phi_n)-G(\phi_{n-1})\right]$ и он исчезает при телескопическом суммировании. С учетом (2.20), ДПИ (2.14) приобретает вид

$$\hat{v}\left(h,\phi_{n-1},\phi_n\right) \equiv \pm\frac{1}{h}\left(\phi_n-\phi_{n-1}\right)-\frac{G\left(\phi_n\right)-G\left(\phi_{n-1}\right)}{\phi_n-\phi_{n-1}}=0. \quad (2.21)$$

Гамильтониан (2.19) сводится к виду

$$\hat{\mathrm{H}}=\frac{1}{2}\sum_n\left\{\dot{\phi}_n^2+\left[\hat{v}\left(h,\phi_{n-1},\phi_n\right)\right]^2\right\}, \quad (2.22)$$

а соответствующие уравнения движения приобретают форму

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_n=&-\hat{v}\left(h,\phi_{n-1},\phi_n\right)\frac{\partial}{\partial\phi_n}\hat{v}\left(h,\phi_{n-1},\phi_n\right)-\\&-\hat{v}\left(h,\phi_n,\phi_{n+1}\right)\frac{\partial}{\partial\phi_n}\hat{v}\left(h,\phi_n,\phi_{n+1}\right),\end{aligned} \quad (2.23)$$

откуда видно, что статические решения модели (2.23) могут быть найдены из двухточечного ДПИ (2.21), а значит, эта модель свободна от потенциала Пайерлса-Набарро.

Заметим, что в отличие от моделей (2.16) сохраняющих импульс, Гамильтоновская модель (2.23) включает константу интегрирования C через функцию G. Модель Шпейта соответствует частному случаю нашей модели при $C=0$, которая имеет решение в виде кинка. Модели с $C\neq 0$ имеют решения отличные от кинка.

2.2 Две дискретные модели Клейн-Гордона с асимметричным потенциалом

Применим теорию дискретизации, изложенную в разделе 2.1, для построения дискретной модели Клейн-Гордона с асимметричным потенциалом.

Мы возьмем функцию G' в виде полинома четвертой степени

$$G'=a\phi^4+b\phi^2+c\phi+d, \quad (2.24)$$

где кубический член отсутствует в силу того, что сдвигом на константу $\phi\to\phi-\phi_0$ всегда можно добиться равенства нулю соответствующего коэффициента. Тогда, согласно (2.20), локальный потенциал (при $C=0$) будет:

$$V(\phi)=\frac{1}{2}\left(a\phi^4+b\phi^2+c\phi+d\right)^2. \qquad (2.25)$$

Простая дискретная модель Клейн-Гордона с таким потенциалом (обозначим ее как ДМКГ1), имеет вид $\ddot{\phi}_n=\left(1/h^2\right)\left(\phi_{n-1}-2\phi_n+\phi_{n+1}\right)-V'\left(\phi_n\right)$, что с учетом (2.25) дает:

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_n=\frac{1}{h^2}&\left(\phi_{n-1}-2\phi_n+\phi_{n+1}\right)-\\ -&\left(a\phi_n^4+b\phi_n^2+c\phi_n+d\right)\left(4a\phi_n^3+2b\phi_n+c\right).\end{aligned} \qquad (2.26)$$

Гамильтониан ДМКГ1 имеет вид

$$H_1=\frac{1}{2}\sum_n\left\{\dot{\phi}_n^2+\frac{1}{h^2}(\phi_n-\phi_{n-1})^2+(a\phi_n^4+b\phi_n^2+c\phi_n+d)^2\right\}. \qquad (2.27)$$

Более сложная дискретная модель Клейн-Гордона (ее обозначим ДМКГ2) определяется уравнением (2.23), где

$$\begin{aligned}\hat{v}(\phi_{n-1},\phi_n)=&\frac{\phi_n-\phi_{n-1}}{h}-\\ &-\frac{a}{5}\left(\phi_n^4+\phi_n^3\phi_{n-1}+\phi_n^2\phi_{n-1}^2+\phi_n\phi_{n-1}^3+\phi_{n-1}^4\right)-\\ &-\frac{b}{3}\left(\phi_n^2+\phi_n\phi_{n-1}+\phi_{n-1}^2\right)-\frac{c}{2}\left(\phi_n+\phi_{n-1}\right)-d,\end{aligned} \qquad (2.28)$$

что было найдено подстановкой проинтегрированного выражения (2.24) в (2.21). Эта модель имеет гамильтониан

$$H_2=\frac{1}{2}\sum_n\left\{\dot{\phi}_n^2+[u(\phi_{n-1},\phi_n)]^2\right\}. \qquad (2.29)$$

За асимметрию потенциала отвечает параметр c. При $c=0$ потенциал является симметричным. Потенциал (2.25) зависит от четырех параметров. Зафиксируем высоту потенциального барьера на уровне 0.5, а расстояние между минимумами равным 2, также как это принято для классической модели φ^4. Степень асимметрии будем варьировать параметром c . Остается еще один свободный параметр b, который мы положим равным нулю.

На рис. 2.1 изображен потенциал (2.25) при $b=0$ и $a=-1,\ c=0,\ d=1$ (пунктирная линия); $a=-83988,$ $c=0.382925,$ $d=0.860756$ (штрих пунктирная линия); $a=-0.643049,$ $c=0.626843,$ $d=0.706344$ (сплошная линия). Хорошо видно, что асимметрия потенциала растет с увеличением параметра c , в то время как высота потенциального барьера и расстояния между минимумами не изменяются.

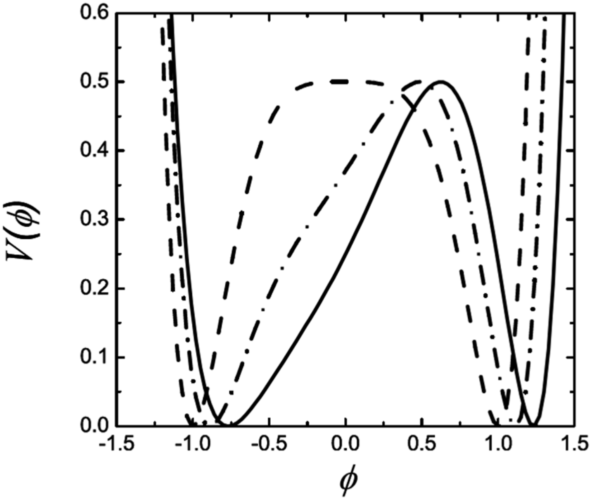


Рис. 2.1. Потенциал $V(\phi)$, заданный выражением (2.25), для $b=0$ при $a=-1,\ c=0,\ d=1$ (пунктирная линия); $a=-0.83988,$ $c=0.382925,$ $d=0.860756$ (штрих пунктирная линия); $a=-0.643049,$ $c=0.626843,$ $d=0.706344$ (сплошная линия)

2.3 Нахождение статических кинковых решений уравнений ДМКГ1 и ДМКГ2

Прежде всего отметим, что для модели ДМКГ1, заданной уравнением движения (2.26), не известен метод нахождения точных статических кинковых решений, и приходится прибегать к численным методам. Среди таких методов наиболее популярными являются метод стрельбы (см., например, [70]) и градиентный метод.

Метод стрельбы основан на линеаризации уравнения (2.26) в окрестности любого из минимумов потенциала. Линейное уравнение может быть точно решено, и это решение будет достаточно точно описывать «хвост» кинка. Весь кинк далее строится итерационно из нелинейного статического аналога уравнения (2.26), переписанного в виде

$$\begin{aligned}\phi_{n+1} &= 2\phi_n - \phi_{n-1} + \\ &+ h^2\left(a\phi_n^4 + b\phi_n^2 + c\phi_n + d\right)\left(4a\phi_n^3 + 2b\phi_n + c\right),\end{aligned} \quad (2.30)$$

где в качестве начальных условий для φ_{n-1}, φ_n используются значения, найденные из решения линеаризованного уравнения для «хвоста» кинка. Выбор величины φ_{n-1} влияет на то, получим ли мы кинковое или какое-либо другое решение. Варьируя значение φ_{n-1} следует добиться того, чтобы получить именно кинковое решение с асимптотикой $\varphi_n \to \varphi_{V1}$ при $n \to -\infty$ и $\varphi_n \to \varphi_{V2}$ при $n \to +\infty$, где φ_{V1} и φ_{V2} - это положения минимумов потенциала. Подбор параметра φ_{n-1} осуществлялся численно методом проб и ошибок (методом стрельбы).

Градиентный метод основан на минимизации потенциальной энергии модели ДМКГ1, которая, как видно из (2.27), имеет вид

$$P_1 = \frac{1}{2}\sum_n \left[\frac{1}{h^2}(\phi_n - \phi_{n-1})^2 + (a\phi_n^4 + b\phi_n^2 + c\phi_n + d)^2 \right]. \quad (2.31)$$

Минимизация начинается для некоторой начальной конфигурации, в качестве которой можно взять следующую: частицы с номерами $n<0$ лежат в одном минимуме потенциала, а с номерами $n \geq 0$ в другом.

Наиболее практичным, однако, является метод отыскания приближенных статических кинковых решений, основанный на добавлении к левой части уравнения движения (2.26) вязкого члена $\gamma\dot{\phi}_n$ с коэффициентом вязкости γ . Релаксационная динамика для начальных условий взятых, например, в том же виде, что и для градиентного метода, завершится формированием равновесного кинка. Заметим, что выбор коэффициента вязкости γ влияет на скорость сходимости к равновесному решению. Слишком малые значения γ приведут к медленно затухающему колебательному режиму, а слишком большие значения к весьма медленному движению в сторону равновесной конфигурации. Согласно нашему опыту, хорошие результаты даёт выбор γ зависящий от максимального по n значения правой части уравнения (2.26), то есть от максимального значения силы, $\max F_n$, движущей систему к положению равновесия. В начале релаксации максимальная сила велика, и значение γ тоже должно быть относительно большим. С уменьшением максимальной силы следует уменьшать γ .

Как уже отмечалось, для модели ДМКГ2 точные решения для статических кинков могут быть найдены итерационно из решения двухточечного уравнения

$$
\begin{gathered}
\frac{\phi_n-\phi_{n-1}}{h}-\frac{a}{5}\left(\phi_n^4+\phi_n^3\phi_{n-1}+\phi_n^2\phi_{n-1}^2+\phi_n\phi_{n-1}^3+\phi_{n-1}^4\right)- \\
-\frac{b}{3}\left(\phi_n^2+\phi_n\phi_{n-1}+\phi_{n-1}^2\right)-\frac{c}{2}\left(\phi_n+\phi_{n-1}\right)-d=0,
\end{gathered}
\tag{2.32}
$$

для любого начального значения φ_n (или φ_{n-1}), лежащего между двумя минимумами потенциала. На каждом шаге приходится решать алгебраическое уравнение четвертой степени и встает проблема выбора нужного корня. Для нахождения корней уравнения четвертой степени нами использовалась программа на языке С++, текст которой приводится в Приложении А. При выборе корня мы руководствовались следующим. Комплексно-сопряженные корни нами не рассматривались, поскольку мы интересуемся только действительными решениями. Из вещественных корней выбирался тот, который обеспечивал удовлетворение трехточечного уравнения, определенного выражениями (2.23), (2.28). Кроме того, нами использовался метод получения равновесных кинковых решений уравнения ДМКГ2 путем добавления к левой части уравнения (2.23) вязкого члена, как это было описано выше для уравнения ДМКГ1. Результаты, полученные обоими методами, совпадали.

Выводы

Во второй главе были построены две дискретные модели Клейн-Гордона (ДМКГ1 и ДМКГ2) с асимметричным потенциалом. Модель ДМКГ1 является классической дискретизацией в то время как ДМКГ2 получена по методу ДПИ [58]. Принципиальным отличием ДМКГ2 от ДМКГ1 является то, что для статической задачи модели ДМКГ2 может быть получен первый интеграл, имеющий вид двухточечного нелинейного отображения. Статические кинковые решения могут быть найдены из этого отображения для любого допустимого начального значения. Таким образом, статическая задача для ДМКГ2 имеет континуум решений, параметризованных выбором начального значения отображения. Этот факт говорит об отсутствии потенциала Пайерлса-Набарро в такой модели, поскольку равновесный кинк может быть размещен произвольно относительно решетки. Хорошо известно, что классическая дискретизация приводит к появлению потенциала Пайерлса-Набарро и поэтому статическая задача для уравнения ДМКГ1 имеет лишь несколько решений, соответствующих экстремумам этого потенциала, причем, минимумам отвечают устойчивые, а максимумам – неустойчивые равновесные решения.

В разделе 2.3 описаны численные и полуаналитические процедуры, используемые при построении равновесных кинковых решений для ДМКГ1 и ДМКГ2. Свойства этих решений исследуются в главе 3, где также рассматривается ратчет кинков при наличии периодически изменяющейся во времени внешней силы и при наличии или отсутствии демпфирования.

Глава 3
Свойства кинковых решений в дискретных моделях Клейн-Гордона с асимметричным потенциалом. Ратчет кинков

В главе сравниваются некоторые свойства кинков в двух дискретных моделях Клейн-Гордона с асимметричным потенциалом, ДМКГ1 и ДМКГ2, построенных во второй главе. В частности, сравниваются формы кинковых решений, спектры вакуумных решений и частоты колебательных мод, локализованных на кинках. Затем исследуется ратчет кинков под действием внешней силы, изменяющейся во времени по гармоническому закону, в отсутствии и при наличии вязкости.

Все численные результаты, представленные в этой главе, получены для набора параметров потенциала $a = -0.643049$, $b = 0$, $c = 0.626843$, $d = 0.706344$, что соответствует сплошной линии на рис. 2.1.

3.1 Форма кинков

Следуя численным и полуаналитическим методикам, описанным в разделе 2.3, нами были получены равновесные кинковые решения для ДМКГ1 и ДМКГ2, и результаты представлены на рис. 3.1 (а) и (б), соответственно. Значение параметра дискретности в данном случае выбрано $h = 0.6$. Пунктирные линии показывают положения минимумов, а штрихпунктирная – максимума локального потенциала.

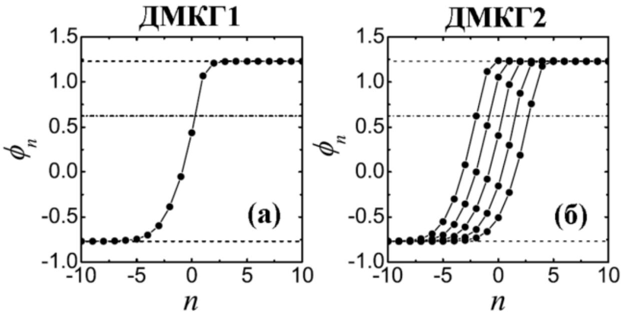


Рис. 3.1. (а) Устойчивый равновесный кинк в ДМКГ1, где кинк испытывает действие потенциала Пайерлса-Набарро, и (б) семейство равновесных кинков в ДМКГ2, где кинк свободен от потенциала Пайерлса-Набарро. В обоих случаях параметр дискретности $h = 0.6$. Пунктирные линии показывают положения минимумов, а штрихпунктирная – максимума локального потенциала.

Отметим, что кинки в обеих моделях имеют асимметричную форму, что связано с асимметрией локального потенциала.

Поскольку кинк в ДМКГ1 испытывает действие потенциала Пайерлса-Набарро, для него имеется одно положение устойчивого равновесия, соответствующего минимуму потенциала Пайерлса-Набарро, которое и представлено на рис. 3.1 (а). Имеется ещё одно равновесное положение, но оно неустойчиво и любое малое возмущение приведет к уходу системы от этого равновесного положения, поскольку оно соответствует максимуму потенциала Пайерлса-Набарро.

В ДМКГ2 потенциал Пайерлса-Набарро отсутствует и равновесный кинк может располагаться произвольно относительно решетки. Потенциальные энергии всех кинков, представленных на рис. 3.1 (б), в точности равны нулю. Это следует из того, что кинки в ДМКГ2 удовлетворяют двухточечному разностному уравнению $u(\phi_{n-1}, \phi_n) = 0$, а гамильтониан этой модели дается выражением (2.29). Наличие континуума равновесных кинков является отличительной особенностью модели ДМКГ2 по сравнению с классическими дискретными моделями, где имеется конечное число равновесных кинковых решений, соответствующих экстремумам потенциала Пайерлса-Набарро.

Для ДМКГ1 интересно рассчитать, как потенциал Пайерлса-Набарро и высота потенциального барьера Пайерлса-Набарро зависят от параметра дискретности h (см. рис. 3.2). Проблема расчета потенциальной энергии кинка как функции его положения относительно решетки состоит в том, что имеется только две равновесных конфигурации, отвечающих минимуму и максимуму потенциала Пайерлса-Набарро, как отмечалось выше.

Для того, чтобы получить равновесное кинковое решение для других его положений относительно решетки нами фиксировалось положение одной из частиц вблизи максимума локального потенциала, $\phi_{\max} = 0.62462$. Меняя положение частицы с зафиксированной координатой в окрестности максимума потенциала и проводя процедуру релаксации для свободных частиц, мы получали равновесные конфигурации кинков с различным расположением относительно решетки. Энергия равновесного кинка вычислялась по выражению (2.27). Координата кинка определялась как точка пересечения отрезка, соединяющего две соседние частицы, расположенные по разные стороны от максимума локального потенциала, с линией $\phi = \phi_{\max}$. Таким образом, начало отсчета абсциссы на рис. 3.2 отвечает положению кинка с одной из частиц, находящейся на максимуме локального потенциала.

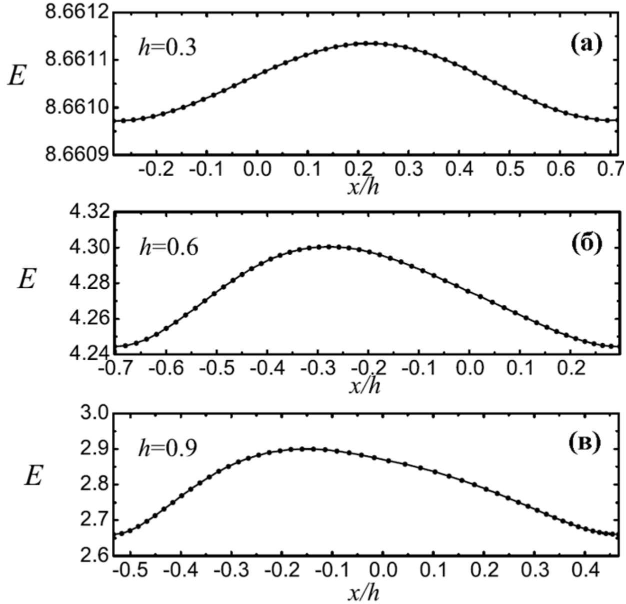


Рис. 3.2. Потенциальная энергия статического кинка в ДМКГ1 как функция безразмерной координаты кинка x/h для (а) $h=0.3$, (б) $h=0.6$, (в) $h=0.9$. Для получения неравновесного кинка координата одной частицы фиксировалась вблизи максимума локального потенциала, φ_{max}

Как видно из рис. 3.2, при малых h, потенциальный рельеф Пайерлса-Набарро близок к синусоидальному, который с ростом h становится менее симметричным. Высота барьера Пайерлса-Набарро определяется как разность между максимальной и минимальной энергиями потенциального рельефа. Видно, что эта величина быстро растет с ростом h: при $h=0.3$ высота барьера равна 1.7×10^{-4}, при $h=0.6$ она равна 5.5×10^{-2}, а при $h=0.9$ составляет 0.24.

3.2 Колебательные спектры кинков

Обе рассматриваемые дискретные модели имеют тривиальные решения, называемые вакуумами, вида $\phi_n = \phi_{\min 1}$ и $\phi_n = \phi_{\min 2}$, где $\phi_{\min 1}$ и $\phi_{\min 2}$ - координаты минимумов локального потенциала.

Прежде чем говорить о колебательных спектрах кинков, рассчитаем границы малоамплитудных колебаний цепочки, целиком лежащей в одном из минимумов локального потенциала или, иными словами, рассчитаем границы фононных спектров вакуумных решений. Нижняя граница фононного спектра j-го вакуума соответствует бесконечно длинной волне вида

$$\phi_n(t) = \phi_{\min j} + A\sin(\omega t)\,, \tag{3.1}$$

в то время как верхняя граница отвечает наиболее короткой волне вида

$$\phi_n(t) = \phi_{\min j} + (-1)^n A\sin(\omega t)\,, \tag{3.2}$$

где ω - частота, а A - малая амплитуда решения.

Сразу заметим, что поскольку обе дискретные модели имеют общий континуальный предел, то нижние границы спектров вакуумов у них совпадают, поскольку речь идет о бесконечно длинной волне. Линеаризуя уравнения движения ДМКГ1 (2.26) и ДМКГ2 (2.23), (2.28) вблизи j -го вакуумного решения и подставляя в них (3.1), находим нижнюю границу фононного спектра соответствующего вакуума,

$$\begin{aligned}\omega^2 = 28a^2\phi^6_{\max j} + 30ab\phi^4_{\max j} + 20ac\phi^3_{\max j} + \\ + 6\left(b^2 + 2ad\right)\phi^2_{\max j} + 6bc\phi_{\max j} + c^2 + 2bd.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Верхние границы спектров вакуумов для двух моделей различны и могут быть найдены путем подстановки выражения (3.2) в соответствующие линеаризованные уравнения движения. Для ДМКГ1 получаем следующий результат

$$\omega^2 = 28a^2\phi^6_{\max j} + 30ab\phi^4_{\max j} + 20ac\phi^3_{\max j} + \\ + 6\left(b^2 + 2ad\right)\phi^2_{\max j} + 6bc\phi_{\max j} + c^2 + 2bd + \frac{4}{h^2}, \tag{3.4}$$

в то время как для ДМКГ2 следующий

$$\omega^2 = \frac{28}{25}a^2\phi^6_{\max j} + 2ab\phi^4_{\max j} + \frac{4}{5}ac\phi^3_{\max j} + \\ + 6\left(\frac{b^2}{9} + \frac{2}{5}ad\right)\phi^2_{\max j} + \frac{2}{3}bc\phi_{\max j} + \frac{2}{3}bd + \frac{4}{h^2}. \tag{3.5}$$

Вычисление спектра малоамплитудных колебаний цепочки, содержащей кинк, проводилось для числа частиц цепочки $N = 400$. Этого числа частиц было достаточно для рассмотренного нами диапазона параметра дискретности $0.2 \le h \le 1.0$, поскольку даже при наименьшем из рассмотренных значений, $h = 0.2$, ширина кинка была намного меньше длины цепочки. Спектр малоамплитудных колебаний вычислялся путем линеаризации уравнений движения атомов вблизи равновесного кинкового решения, подстановки в эти уравнения решения вида бегущей волны, и решения соответствующей задачи на собственные значения с помощью программы MATLAB. В качестве граничных условий использовались условия $\phi_0 = \phi_{\min 1}$, $\phi_{N-1} = \phi_{\min 2}$. В результате решения задачи на собственные значения определялись 398 собственных значений (по числу степеней свободы цепочки), большинство из которых заполняли фононные спектры вакуумов, но несколько собственных частот, соответствующих модам, локализованным на кинке, лежали ниже фононного спектра, то есть были меньше частоты, определенной выражением (3.3).

Частоты мод, локализованных на кинке, изображены на рис. 3.3 для различных значений параметра дискретизации решетки h (а) для ДМКГ1 и (б) для ДМКГ2.

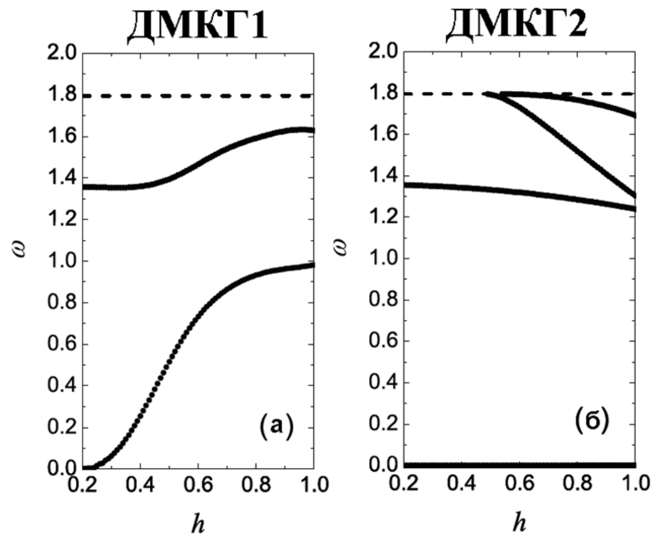


Рис. 3.3. Спектр малоамплитудных колебаний цепочки, содержащей кинк, для различных значений параметра дискретизации решетки h: (а) ДМКГ1, где кинк испытывает действие потенциала Пайерлса-Набарро, (б) ДМКГ2, где кинк свободен от потенциала Пайерлса-Набарро. Горизонтальная пунктирная линия показывает нижнюю границу фононного спектра вакуума

Пунктирная горизонтальная линия указывает нижнюю границу фононного спектра «мягкого» вакуума (3.3), которая совпадает для обеих моделей. Как уже отмечалось, обе модели имеют один и тот же континуальный предел и при малых значениях параметра дискретности ($h < 0.25$) их спектры близки. Главной отличительной особенностью модели без потенциала Пайерлса-Набарро (ДМКГ2) является наличие трансляционной моды с нулевой частотой для любого значения h . Модель с потенциалом Пайерлса-Набарро (ДМКГ1) имеет трансляционную моду лишь при малых h , когда она близка к континуальной модели. С ростом h частота этой моды растет и кинк теряет подвижность, оказываясь захваченным потенциалом Пайерлса-Набарро. Кроме трансляционной моды кинки в обеих моделях имеют локализованную колебательную моду, частота которой зависит от h , и при малых h равна примерно 1.35. В ДМКГ2, при $h \approx 0.5$, от нижней границы фононного спектра отщепляются частоты ещё двух колебательных мод, локализованных на кинке.

3.3 Ратчет (ratchet) кинка при отсутствии вязкости

Для изучения ратчета кинка в ДМКГ1 и ДМКГ2 добавим в правые части соответствующих уравнений движения гармоническую силу

$$F = A\cos(\Omega t + \varphi)\,, \tag{3.6}$$

с амплитудой A, частотой Ω и начальной фазой φ.

Используются следующие начальные условия: в системе имеется статический равновесный кинк, и при $t = 0$ начинает действовать периодическая сила (3.6).

В данном разделе исследуется ратчет при отсутствии в системе вязкого трения, а в следующем разделе рассматривается влияние вязкости. При отсутствии вязкости мы вынуждены ограничиться случаем, когда движущая сила имеет малую амплитуду ($A \le 0.04$) и частоту, лежащую вне фононного спектра (точнее, ниже фононного спектра). При несоблюдении этих условий будут активно возбуждаться фононные моды и изучение рачета кинка станет невозможным. Изучение ратчета в отсутствии вязкости позволяет непосредственно находить силу, действующую на кинк со стороны внешнего поля. Эта сила пропорциональна ускорению кинка, которое и измерялось в наших вычислениях.

На рис. 3.4 представлено влияние начальной фазы φ внешней силы (3.6) на динамику кинка для случая $h=0.6$, $A=0.4$, $\Omega=0.5$.

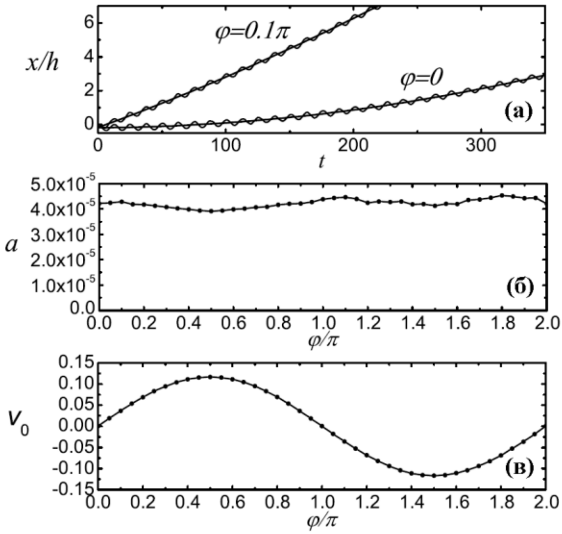


Рис. 3.4. (а) Траектории движение кинка в ДМКГ2 для двух значений начальной фазы, $\varphi=0$ и $\varphi=0.1\pi$ (осциллирующие кривые), а также их аппроксимация квадратичными параболами. (б) Ускорение кинка как функция начальной фазы φ внешней силы (3.6). (в) Начальная скорость кинка как функция φ. Параметры расчета: $h=0.6$, $A=0.4$, $\Omega=0.5$.

На панели (а) показаны примеры изменения во времени координаты кинка для $\varphi=0$ и $\varphi=\pi/10$ (осциллирующие линии) а также квадратичные параболы

$$x(t)=at^2+\upsilon_0 t+x_0, \tag{3.7}$$

построенные методом наименьших квадратов для аппроксимации этих траекторий. Смысл коэффициентов параболы известен, здесь a – ускорение, υ_0 и x_0 - начальные скорость и положение кинка. На панелях (б) и (в) даны a и υ_0 как функции φ. Видно, что если усреднить υ_0 по фазе, получится ноль, в то время как ускорение a практически не зависит от φ и отлично от нуля. В дальнейшем, при измерении ускорения, всегда будем полагать $\varphi = 0$.

Возможность аппроксимации траектории кинка в ДМКГ2 квадратичной параболой свидетельствует о его равноускоренном движении. Такой характер движения наблюдается, по крайней мере, до значения скорости $\upsilon_0 \approx 0.4$. При больших скоростях движения наблюдается торможение кинка за счет излучения энергии в виде малоамплитудных волновых пакетов (так называемая радиационная потеря энергии).

На рис. 3.5 представлено то же, что и на рис. 3.4, но для кинка в ДМКГ1, где он испытывает действие потенциала Пайерлса-Набарро. Как видно из сравнения рисунков, результат в этом случае оказывается совершенно иным. Траектории кинка, представленные на панели (а), оказываются хаотичными и их аппроксимация квадратичными параболами не имеет смысла. Тем не менее, на панелях (б) и (в) мы приводим значения a и υ_0 как функции φ чтобы показать их нерегулярное поведение. Таким образом, мы заключаем, что потенциал Пайерлса-Набарро оказывает весьма заметное влияние на динамику кинка в нашей постановке численного эксперимента. В отличие от ДМКГ2, где потенциал Пайерлса-Набарро отсутствует, в ДМКГ1 движение кинка не является равноускоренным, по крайней мере для рассмотренных значений параметров. Это утверждение делается нами на основании результатов, полученных при весьма умеренном значении параметра дискретности $h = 0.6$, а с ростом этого параметра влияние потенциала Пайерлса-Набарро будет быстро возрастать.

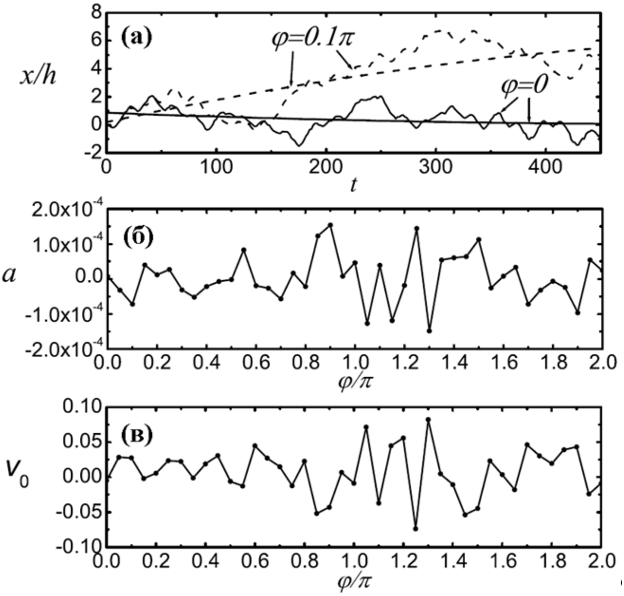


Рис. 3.5. То же, что и на рис. 3.4, но для кинка в ДМКГ1, где он испытывает действие потенциала Пайерлса-Набарро

Вернемся теперь к ДМКГ2 и изучим влияние параметров A, Ω и h на равноускоренное движение кинка при действии периодической силы (3.6).

На рис. 3.6 представлено ускорение кинка как функция частоты движущей силы при различных значениях параметра A для $h = 0.6$. Вертикальными сплошными линиями показаны собственные частоты колебательных мод кинка, а вертикальная пунктирная линия показывает нижнюю границу спектра «мягкого» вакуума.

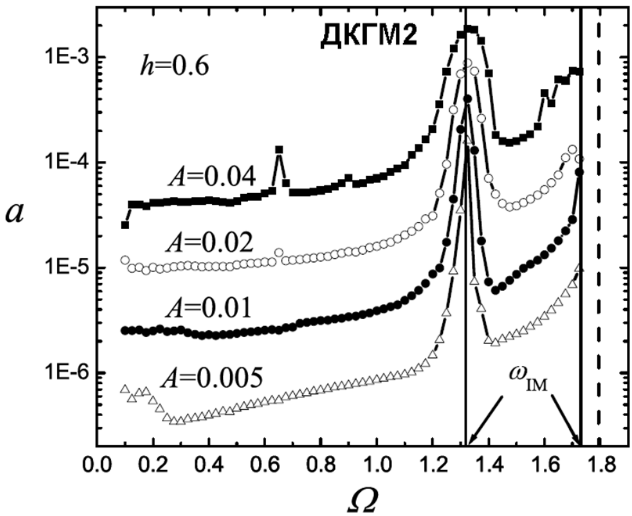


Рис. 3.6. Ускорение кинка в ДМКГ2 как функция частоты вынуждающей силы при различных значениях её амплитуды A и при значении параметра дискретности $h = 0.6$. Вертикальными сплошными линиями показаны собственные частоты колебательных мод кинка, а вертикальная пунктирная линия показывает нижнюю границу спектра «мягкого» вакуума

На рисунке видно, что ускорение возрастает на один и даже два порядка, когда частота вынуждающей силы Ω приближается к значению частоты колебательной моды кинка $\omega_{IM} = 1.32$ при рассматриваемом h (см. рис. 3.3 (б)). Этот результат хорошо согласуется с результатами более ранних работ [1, 19, 25-27] где также отмечалось резонансное возрастание дрейфовой скорости кинка, с тем отличием, что в упомянутых работах в уравнение движения вводился член, описывающий вязкость. Также видно, что ускорение увеличивается при приближении частоты движущей силы к другой частоте колебательной моды кинка $\omega_{IM} = 1.73$. Однако это увеличение может быть объяснено приближением частоты Ω к границе фононного спектра $\omega_1 = 1.795$. Также результаты, показанные на рисунке 3.6, свидетельствуют о том, что ускорение a пропорционально квадрату амплитуды A . Действительно, увеличение амплитуды периодической силы в два раза приводит к возрастанию ускорения кинка в четыре раза. Отметим наличие еще одного небольшого пика на частоте $\omega \approx 0.65$, равной половине частоты $\omega_{IM} = 1.32$, заметного на кривых для $A = 0.02$ и $A = 0.04$.

В заключении данного раздела рассмотрим влияние параметра дискретности h на зависимость ускорения кинка от частоты вынуждающей силы при её амплитуде равной $A = 0.04$. Результаты представлены на рис. 3.7. Как и раньше, вертикальными сплошными линиями показаны собственные частоты колебательных мод кинка, а вертикальная пунктирная линия показывает нижнюю границу спектра «мягкого» вакуума.

Для $\Omega < 1.2$, то есть в нерезонансной области частот, результаты для разных h близки друг к другу. Различия наблюдаются в области частот вынуждающей силы, близких к частотам колебательных мод, локализованных на кинке, т.е. для $\Omega > 1.2$. Имеются небольшие пики, расположенные на частоте равной половине частот главных резонансных пиков. Отметим, что на панели (в) отсутствуют данные для $\Omega > 1.3$. В этой области частот при $h = 0.9$ на динамику кинка оказывают дополнительные собственные колебательные моды кинка, что приводит к его движению отличному от равноускоренного.

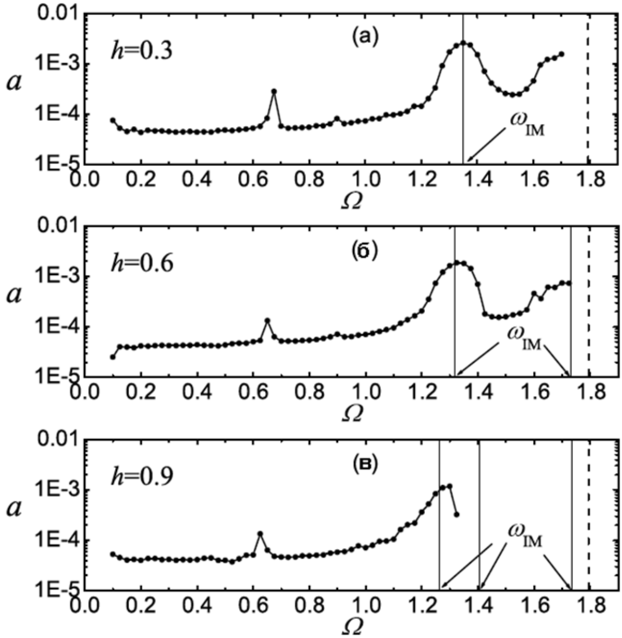


Рис. 3.7. Ускорение кинка в ДМКГ2 как функция частоты вынуждающей силы при различных значениях параметра дискретности h, указанных на соответствующих панелях. Амплитуда вынуждающей силы во всех случаях равна $A = 0.04$. Вертикальными сплошными линиями показаны собственные частоты колебательных мод кинка, а вертикальная пунктирная линия показывает нижнюю границу спектра «мягкого» вакуума

Особо отметим, что столь слабое влияние параметра дискретности h на ускорения кинка, в том числе, и в режиме сильной дискретности, $h = 0.9$, можно считать неожиданным. Хорошо известно, что в дискретных системах, как правило, динамика волн солитонного типа очень сильно зависит от этого параметра. Объяснением полученного результата является отсутствие потенциала Пайерлса-Набарро в ДМКГ2 при любом h. Именно этот факт обеспечивает уникальные транспортные свойства данной дискретной модели.

3.4 Ратчет кинка при наличии вязкости в ДМКГ2

Изучим влияние вязкости на ратчет кинка в ДМКГ2, для чего, кроме вынуждающей силы (3.6), добавим в уравнение движения модели член, описывающий вязкое трение. Таким образом, рассматриваемое уравнение движения имеет вид

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_n + \gamma\dot{\phi}_n = &-\hat{v}\left(h,\phi_{n-1},\phi_n\right)\frac{\partial}{\partial\phi_n}\hat{v}\left(h,\phi_{n-1},\phi_n\right) - \\ &-\hat{v}\left(h,\phi_n,\phi_{n+1}\right)\frac{\partial}{\partial\phi_n}\hat{v}\left(h,\phi_n,\phi_{n+1}\right) + A\cos(\Omega t),\end{aligned} \tag{3.8}$$

где функция $\hat{v}(\phi_{n-1},\phi_n)$ определена выражением (2.28), γ - коэффициент вязкости, а последний член в правой части – вынуждающая сила, определенная ранее соотношением (3.6) с нулевой фазой φ.

Уравнение (3.8) интегрировалось численно методом Рунге-Кутта четвертого порядка при следующих начальных условиях: в цепочке из N частиц имеется равновесный кинк, и в нулевой момент времени начинает действовать периодическая вынуждающая сила. Число частиц в расчетах выбиралось так, чтобы за время измерения скорости дрейфа кинка в режиме его установившегося движения, он не успевал дойти до границы расчетной области. Обычно бралось $N = 800$. Нами исследовались небольшие значения амплитуды A вынуждающей силы по аналогии со случаем отсутствия вязкости, рассмотренном в разделе 3.3. При этом естественно рассматривать относительно небольшие значения γ.

Динамика кинка в рассмотренных условиях была следующей. После начала действия вынуждающей силы наблюдался переходный процесс за которым следовало установившееся движение кинка с некоторой дрейфовой скоростью. Продолжительность переходного процесса уменьшалась с ростом коэффициента вязкости γ.

На рис. 3.8 (а) показаны две траектории кинка $x(t)$ для двух значений коэффициента вязкости, $\gamma = 0.1$ (жирная линия) и $\gamma = 0.2$ (тонкая линия). Видно, что кривые $x(t)$ осциллируют с частотой вынуждающей силы, которая была выбрана равной $\Omega = 1.35$, и в установившемся режиме движения устанавливаются постоянные дрейфовые скорости кинка. В данных расчетах мы полагали $A = 0.08$ и $h = 0.4$. Скорость дрейфа кинка, которую обозначим через $\langle V_k \rangle$, измерялась на отрезке времени $300 \le t \le 1000$ в режиме установившегося движения. Заметим, что для двух примеров, показанных на рис. 3.8 (а), дрейфовые скорости кинков оказываются разного знака. Ратчет без учета вязкости всегда приводил к положительному ускорению кинка, так что изменение направления эффективной движущей силы, действующей на кинк, связано именно с наличием в системе вязкости.

Влияние коэффициента вязкости γ на скорость дрейфа кинка $\langle V_k \rangle$ показано на рис. 3.8 (б) для трех различных значений амплитуд вынуждающей силы A. Здесь использовалось $\Omega = 1.35$ и $h = 0.4$. Можно видеть, что для всех трех значений амплитуд, $\langle V_k \rangle$ положительно для малых γ и становится отрицательным при достаточно больших значениях γ. При этом, с ростом γ, отрицательное значение дрейфовой скорости сначала растет по абсолютной величине, а затем начинает уменьшаться, приближаясь к нулю. Смена знака дрейфовой скорости происходит при значении γ^*, которое растет с ростом амплитуды вынуждающей силы A. Значение γ при котором наблюдается максимальная отрицательная скорость также растет с ростом A.

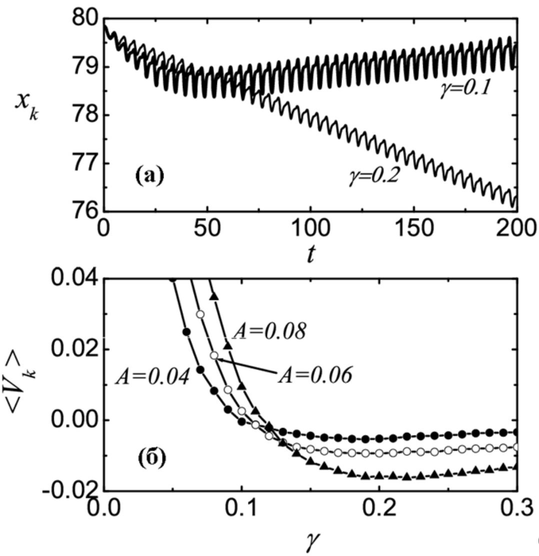


Рис. 3.8. (а) Траектории кинка $x(t)$ для двух значений коэффициента вязкости, $\gamma = 0.1$ (жирная линия) и $\gamma = 0.2$ (тонкая линия) для частоты вынуждающей силы равной $\Omega = 1.35$ и $A = 0.08$, $h = 0.4$. (б) Влияние коэффициента вязкости γ на скорость дрейфа кинка $\langle V_k \rangle$ для трех различных значений амплитуд вынуждающей силы A. Здесь использовалось $\Omega = 1.35$ и $h = 0.4$.

Изучим влияние параметров вынуждающей силы A, Ω и параметра дискретности h на дрейфовую скорость кинка $\langle V_k \rangle$.

Результаты, представленные на рис. 3.9, были получены при $h = 0.6$ и $A = 0.04$. Здесь показано как скорость дрейфа кинка $\langle V_k \rangle$ зависит от частоты вынуждающей силы Ω при различных значениях коэффициента вязкости γ, указанных для каждой кривой.

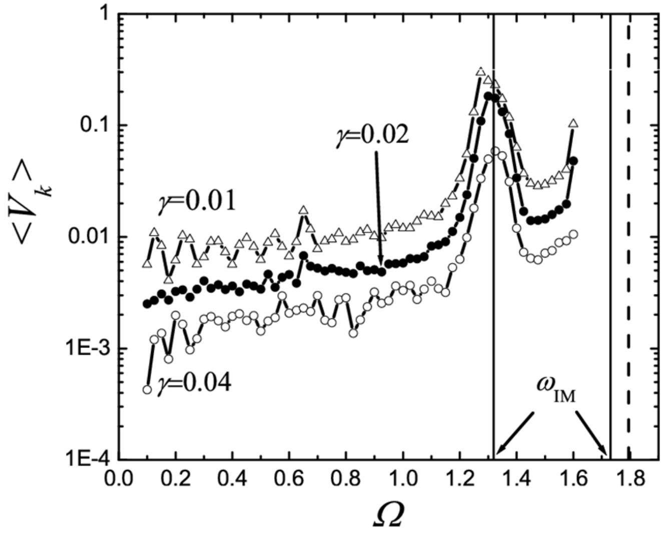


Рис. 3.9. Скорость дрейфа кинка $\langle V_k \rangle$ в зависимости от частоты вынуждающей силы Ω при различных значениях коэффициента вязкости γ, указанных для каждой кривой. Вертикальные сплошные линии показывают частоты собственных колебательных мод кинка, а пунктирная линия обозначает частоту нижней границы фононного спектра «мягкого» вакуума. Результаты получены при $h = 0.6$ и $A = 0.04$

Вертикальные сплошные линии показывают частоты собственных колебательных мод кинка, а пунктирная линия обозначает частоту нижней границы фононного спектра «мягкого» вакуума. Хорошо видно, что скорость дрейфа кинка возрастает на один и даже два порядка при приближении частоты вынуждающей силы Ω к собственной частоте колебаний кинка $\omega_{IM} = 1.32$. Как и в случае без учета вязкости, резонансное увеличение скорости дрейфа наблюдается и при приближении частоты движущей силы к другой частоте колебательной моды кинка $\omega_{IM} = 1.73$, но, как и раньше, это увеличение можно связать с приближением частоты Ω к границе фононного спектра $\omega_1 = 1.795$. Кроме того, из рис. 3.9 видно, что $\langle V_k \rangle$ уменьшается с ростом γ. Поскольку в рассмотренном случае γ относительно мало, $\langle V_k \rangle$ положительно.

Влияние параметра дискретности h на дрейфовую скорость кинка $\langle V_k \rangle$ как функцию частоты вынуждающей силы Ω показано на рис. 3.10. Здесь мы полагаем $A = 0.08$ и рассматриваем случай относительно большой вязкости, $\gamma = 0.16$. При таком значении коэффициента вязкости, во всех трех случаях, представленных на рис. 3.10, $\langle V_k \rangle$ оказывается отрицательной практически во всем исследованном диапазоне частоты вынуждающей силы Ω. Как и ранее, вертикальные сплошные линии показывают частоты собственных колебательных мод кинка, а пунктирная линия обозначает частоту нижней границы фононного спектра «мягкого» вакуума.

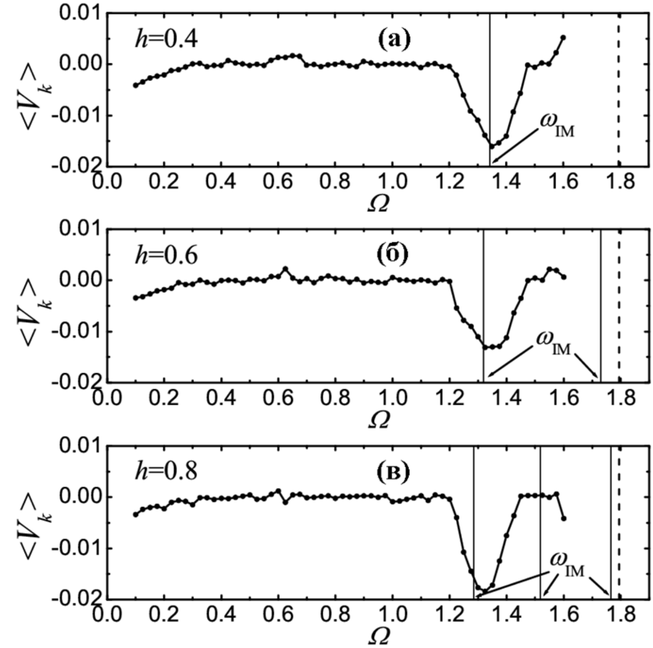


Рис. 3.10. Влияние параметра дискретности h на дрейфовую скорость кинка $\langle V_k \rangle$ как функцию частоты вынуждающей силы Ω. Вертикальные сплошные линии показывают частоты собственных колебательных мод кинка, а пунктирная линия обозначает частоту нижней границы фононного спектра «мягкого» вакуума. Расчет проводился для $A = 0.08$ и относительно большой вязкости, $\gamma = 0.16$, при (а) $h = 0.4$, (б) $h = 0.6$ и (в) $h = 0.8$

Прежде всего отметим значительный рост абсолютного значения скорости дрейфа кинка $\langle V_k \rangle$ при приближении частоты вынуждающей силы Ω к собственной частоте колебаний кинка $\omega_{IM} = 1.32$. Таким образом, резонансное ускорение ратчета наблюдается и для отрицательных значений скорости кинка. Максимальные отрицательные значения скорости равны -0.16, -0.13 и -0.18 для $h=0.4$, $h=0.6$ и $h=0.8$, соответственно. Столь незначительное влияние параметра дискретности h, в широком диапазоне его изменения, на дрейфовую скорость кинка $\langle V_k \rangle$ можно объяснить фактом отсутствия потенциала Пайерлса-Набарро в ДМКГ2. Отметим, что отсутствие численных данных для $\Omega > 1.6$ объясняется тем, что в этой области частот вынуждающей силы происходит сильное возбуждение «мягкого» вакуума из-за близости к его нижней частоте фононного спектра.

Выводы

В данной главе показано, что свойства кинковых решений в ДМКГ1 и ДМКГ2 сильно отличаются, что можно объяснить наличием потенциала Пайерлса-Набарро в ДМКГ1 и его отсутствием в ДМКГ2.

Прежде всего, ДМКГ1 поддерживает лишь два равновесных кинковых решения, одно из них устойчиво и соответствует минимуму потенциала Пайерлса-Набарро, а другое неустойчиво, так как отвечает максимуму этого потенциала.

В отношении колебательных мод, локализованных на кинках, главной отличительной особенностью модели без потенциала Пайерлса-Набарро (ДМКГ2) является наличие трансляционной (голдстоновской) моды с нулевой частотой для любого значения параметра дискретности h. Модель с потенциалом Пайерлса-Набарро (ДМКГ1) имеет трансляционную моду лишь при малых h, когда она близка к континуальной модели. С ростом h частота этой моды растет и кинк теряет подвижность, оказываясь захваченным потенциалом Пайерлса-Набарро.

Наличие трансляционной моды у кинка в ДМКГ2 при любом h, с физической точки зрения, свидетельствует о повышенных транспортных свойствах этой дискретной модели. В самом деле, кинки в ДМКГ2 не захвачены потенциалом Пайерлса-Набарро и, следовательно, они могут быть ускорены сколь угодно малым внешним полем. В отличие от ДМКГ2, для того, чтобы привести кинк в движение в ДМКГ1, необходимо приложить силу, превышающую некоторое критическое значение, определяемое глубиной и формой потенциала Пайерлса-Набарро.

Хорошо известно, что подвижные кинковые решения во многих приложениях ответственны за перенос вещества, энергии, импульса, электрического заряда, информации и др. Именно поэтому мы говорим о повышенных транспортных свойствах ДМКГ2 по сравнению с ДМКГ1.

Наглядное подтверждение улучшенных транспортных свойств ДМКГ2 мы получили изучая ратчет кинка под действием гармонической вынуждающей силы. Было показано, что для кинка в ДМКГ2 без учета вязкости, под действием гармонической внешней силы кинк движется равноускоренно до тех пор, пока его скорость не становится слишком большой и становятся заметными потери на излучение. Оказалось, что ускорение кинка слабо зависит от параметра дискретности h, тогда как в традиционных дискретных моделях с потенциалом Пайерлса-Набарро влияние h на динамику волн солитонного типа весьма существенно. При приближении частоты внешней силы к частоте собственной колебательной моды, локализованной на кинке, происходит рост ускорения кинка на два порядка.

При учете вязкости при изучении ратчета кинка в ДМКГ2 было установлено, что дрейфовая скорость кинка меняется с положительной на отрицательную если значение коэффициента вязкости γ оказывается больше некоторого значения γ^*. При этом, с ростом γ, отрицательное значение дрейфовой скорости сначала растет по абсолютной величине, а затем начинает уменьшаться, приближаясь к нулю. Смена знака дрейфовой скорости происходит при значении γ^*, которое растет с ростом амплитуды вынуждающей силы A. Значение γ при котором наблюдается максимальная отрицательная скорость также растет с ростом A. Резонансное увеличение дрейфовой скорости кинка при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте колебаний кинка наблюдается и для отрицательных значений скорости дрейфа, то есть в режиме значительной вязкости.

Глава 4
Обобщенное дискретное нелинейное уравнение Шредингера свободное от потенциала Пайерлса-Набарро

В разделе 4.1 данной главы, для полноты изложения, описывается известный метод дискретизации НУШ, приводящий к моделям свободным от потенциала Пайерлса-Набарро, следуя работам [62-68]. В разделе 4.2 рассматривается частный случай кубической нелинейности. В последующих разделах описаны оригинальные результаты для дискретного НУШ с кубической нелинейностью, полученные основываясь на ином подходе и обобщающие известные результаты, описанные в разделе 4.2. Подход состоит в рассмотрении достаточно общего дискретного НУШ с кубической нелинейностью и в поиске условий на коэффициенты этого уравнения, когда оно допускает точные стационарные и точные движущиеся решения. Дискретные модели, допускающие трансляционно-инвариантные стационарные решения, является, по определению, моделями без потенциала Пайерлса-Набарро.

4.1 Известные дискретизации НУШ свободные от потенциала Пайерлса-Набарро

Ставится задача дискретизации обобщенного НУШ вида

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + G'\left(|\psi|^2\right)\psi = 0\,, \tag{4.1}$$

где i - это мнимая единица, $\psi(x,t)$ - комплексная функция пространственной и временной координат, и $G'(\xi)=dG/d\xi$. Вводится решетка $x_n=nh$ с шагом h, где $n=0,\pm1,\pm2,\dots$. Для сокращения записи введем обозначения

$$\psi(x_{n-1})=\psi_-,\quad \psi(x_n)=\psi_n,\quad \psi(x_{n+1})=\psi_+ . \tag{4.2}$$

Разыскиваются дискретизации уравнения (4.1) вида

$$i\dot{\psi}_n+\left(\psi_-,\psi_-^*,\psi_n,\psi_n^*,\psi_+,\psi_+^*\right)=0, \tag{4.3}$$

так, чтобы подстановка

$$\psi_n(t)=f_n e^{i\omega t} \tag{4.4}$$

в уравнение (4.3) давала трехточечную разностную задачу

$$-\omega f_n+R\left(f_-,f_n,f_+\right)=0, \tag{4.5}$$

порядок которой может быть понижен на единицу, то есть (4.5) может быть сведено к двухточечной проблеме $u\left(f_-,f_n,C\right)=0$, где C это константа интегрирования. Возможность сведения трехточечной задачи (4.5) к двухточечной будет означать, что стационарная проблема является точно решаемой. Как и в случае уравнения Клейн-Гордона, это будет означать трансляционную инвариантность дискретной модели и отсутствие потенциала Пайерлса-Набарро.

Такие дискретизации будут построены на основании ДПИ подхода, и будет показано, что некоторые подклассы из широкого класса полученных моделей сохраняют норму

$$N=\sum_n|\psi_n|^2, \tag{4.6}$$

(то есть $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t=0$) или модифицированную норму

$$\tilde{N}=\frac{1}{2}\sum_n\left(\psi_n\psi_+^*+\psi_n^*\psi_+\right), \tag{4.7}$$

или классический импульс

$$P = i\sum_n \left(\psi_n\psi_+^* - \psi_n^*\psi_+\right). \tag{4.8}$$

Подстановка

$$\psi(x,t) = f(x)e^{i\omega t} \tag{4.9}$$

в выражение (4.1) сводит его к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$D(x) \equiv f'' - 2\omega f + 2f\,G'\left(f^2\right) = 0, \tag{4.10}$$

имеющему первый интеграл

$$u(x) \equiv \left(f'\right)^2 - 2\omega f^2 + 2G\left(f^2\right) + C = 0. \tag{4.11}$$

Рассмотрим ДПИ, то есть дискретный аналог (4.11) вида

$$u\left(f_-, f_n\right) \equiv \frac{1}{h^2}\left(f_n - f_-\right)^2 - 2\omega f_- f_n + 2G\left(f_-, f_n\right) + C = 0, \tag{4.12}$$

где предполагается, что в континуальном пределе $G\left(f_-, f_n\right)$ переходит в $G\left(f^2\right)$. Дискретизируя левую часть тождества $(1/2)du/df = D(x)$, получим дискретный аналог уравнения (4.10)

$$D_1\left(f_-, f_n, f_+\right) \equiv \frac{u\left(f_n, f_+\right) - u\left(f_-, f_n\right)}{f_+ - f_-} = 0. \tag{4.13}$$

Очевидно, что решения трехточечной задачи (4.13) могут быть найдены из двухточечной (4.12). Как уже отмечалось, сингулярность в (4.13) пропадает если $u\left(f_n, f_+\right)$ полиномиальная функция и, кроме того,

$$u\left(f_n, f_+\right) = u\left(f_n, f_-\right), \tag{4.14}$$

и мы будем рассматривать только такой случай. Итак, $G(\xi)$ будет взята в полиномиальной форме, то есть в виде разложения

$$G\left(|\psi|^2\right)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k|\psi|^{2k}\ , \qquad (4.15)$$

с вещественными коэффициентами a_k . Наиболее общая полиномиальная двухточечная дискретизация уравнения (4.15), имеющая симметрию $G\left(f_n,f_+\right)=G\left(f_n,f_-\right)$ имеет вид

$$G\left(f_-,f_n\right)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kQ_{2k}\left(f_-,f_n\right), \qquad (4.16)$$

где $Q_{2k}\left(f_-,f_n\right)$ включает только члены порядка $2k$:

$$Q_{2k}\left(f_-,f_n\right)=\frac{\sum_{i=0}^{k}q_{i,k}\left(f_-^i f_n^{2k-i}+f_-^{2k-i}f_n^i\right)}{2\sum_{i=0}^{k}q_{i,k}}, \qquad (4.17)$$

с параметрами $q_{i,k}$ удовлетворяющими $\sum_{i=0}^{k}q_{i,k}\neq 0$. Подставляя ДПИ (4.12) в (4.13), учитывая при этом (4.16), получим

$$-\omega f_n+\frac{1}{2h^2}\left(f_--2f_n+f_+\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_kS_{2k-1}\left(f_-,f_n,f_+\right)}{\sum_{i=0}^{k}q_{i,k}}=0, \qquad (4.18)$$

где функция

$$\begin{aligned}S_{2k-1}\left(f_-,f_n,f_+\right)&=q_{0,k}\sum_{m=0}^{2k-1}f_-^m f_+^{2k-1-m}+\\&+\sum_{i=1}^{k}q_{i,k}\left(f_n^i\sum_{m=0}^{2k-1-i}f_-^m f_+^{2k-1-i-m}+f_n^{2k-i}\sum_{m=0}^{i-1}f_-^m f_+^{i-1-m}\right)\end{aligned} \qquad (4.19)$$

включает только члены порядка $2k-1$.

Теперь можно выписать дискретизацию уравнения (4.1) свободную от потенциала Пайерлса-Набарро в форме

$$i\dot{\psi}_n+\frac{1}{2h^2}\left(\psi_--2\psi_n+\psi_+\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_kS_{2k-1}\left(\psi_-,\psi_n,\psi_+\right)}{\sum_{i=0}^{k}q_{i,k}}=0\ , \qquad (4.20)$$

где $S_{2k-1}\left(\psi_-,\psi_n,\psi_+\right)$ это любая функция, которая при подстановке в нее (4.4) сводится к $S_{2k-1}\left(f_-,f_n,f_+\right)e^{i\omega t}$ с

$S_{2k-1}(f_-, f_n, f_+)$ заданной выражением (4.19). В самом деле, (4.20) обладает свойством трансляционной инвариантности потому, что соответствующая трехточечная стационарная проблема (4.18), (4.19) имеет своим первым интегралом двухточечную задачу (4.12), (4.16), и (4.17).

Остается только указать функцию $S_{2k-1}(\psi_-,\psi_n,\psi_+)$, удовлетворяющую описанному выше условию. Как видно из (4.19), члены функции $S_{2k-1}(f_-, f_n, f_+)$ имеют вид $f_-^k f_n^l f_+^m$ с нечетным $k+l+m$ и $k,l,m \geq 0$. Члены с $k>0,\ l>0,\ m>0$ могут быть представлены следующими членами функции $S_{2k-1}(\psi_-,\psi_n,\psi_+)$,

$$
\begin{aligned}
f_-^k f_n^l f_+^m \to \psi_- &\left|\psi_-^{k-1}\psi_n^l\psi_+^m\right|,\\
\psi_n &\left|\psi_-^k\psi_n^{l-1}\psi_+^m\right|,\\
\psi_+ &\left|\psi_-^k\psi_n^l\psi_+^{m-1}\right|,
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

соответственно. Для $k>0,\ l>1$ можно предложить, например, $f_-^k f_n^l f_+^m \to \psi_-^*\psi_n^2\left|\psi_-^{k-1}\psi_n^{l-2}\psi_+^m\right|$, а для $k>1,\ l>2$, например, $f_-^k f_n^l f_+^m \to \left(\psi_-^2\right)^*\psi_n^3\left|\psi_-^{k-2}\psi_n^{l-3}\psi_+^m\right|$, и так далее. Видно, что с ростом порядка члена, число вариантов его представления быстро возрастает.

Опишем некоторые подклассы полученного широкого класса дискретизаций НУШ свободных от потенциала Пайерлса-Набарро.

Дискретизации, сохраняющие норму (4.6), это

$$
i\dot{\psi}_n + \frac{1}{2h^2}\left(\psi_- - 2\psi_n + \psi_+\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k S_{2k-1}(\psi_-,\psi_n,\psi_+)}{\sum_{i=1}^{k} q_{i,k}} = 0\,, \tag{4.22}
$$

где

$$S_{2k-1}\left(\psi_-,\psi_n,\psi_+\right)=\psi_n\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{k}q_{i,k}\left(\left|\psi_n^{i-1}\right|\sum_{m=0}^{2k-1-i}\left|\psi_-^m\psi_+^{2k-1-i-m}\right|+\left|\psi_n^{2k-1-i}\right|\sum_{m=0}^{i-1}\left|\psi_-^m\psi_+^{i-1-m}\right|\right). \qquad (4.23)$$

Стационарные решения этой модели могут быть найдены из двухточечной задачи (4.12) с функцией $G\left(f_-,f_n\right)$ определенной выражением (4.16), где

$$Q_{2k}\left(f_-,f_n\right)=\frac{\sum_{i=1}^{k}q_{i,k}\left(f_-^i f_n^{2k-i}+f_-^{2k-i}f_n^i\right)}{2\sum_{i=1}^{k}q_{i,k}}, \qquad (4.24)$$

то есть, по сравнению с (4.17), просто опущен член с $i=0$. Можно предложить и другие модели, сохраняющие норму (4.6), один такой пример будет дан ниже.

Дискретизации, сохраняющие модифицированную норму (4.7) и импульс (4.8), это

$$i\dot{\psi}_n+\frac{1}{2h^2}\left(\psi_--2\psi_n+\psi_+\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k S_{2k-1}\left(\psi_-,\psi_n,\psi_+\right)}{\sum_{i=0}^{\lfloor k/2\rfloor}q_{2i,k}}=0, \qquad (4.25)$$

где $\lfloor k/2\rfloor$ это наибольшее целое не превышающее $k/2$ и

$$S_{2k-1}\left(\psi_-,\psi_n,\psi_+\right)=\left(\psi_-+\psi_+\right)\Bigg\{q_{0,k}\sum_{m=0}^{k-1}\left|\psi_-^{2m}\psi_+^{2(k-1-m)}\right|+$$
$$+\sum_{i=1}^{\lfloor k/2\rfloor}q_{2i,k}\left(\left|\psi_n^{2i}\right|\sum_{m=0}^{k-1-i}\left|\psi_-^{2m}\psi_+^{2(k-1-i-m)}\right|+\left|\psi_n^{2(k-i)}\right|\sum_{m=0}^{i-1}\left|\psi_-^{2m}\psi_+^{2(i-1-m)}\right|\right)\Bigg\}. \qquad (4.26)$$

Стационарные решения этой модели могут быть найдены из двухточечной задачи (4.12) с функцией $G\left(f_-,f_n\right)$ определенной выражением (4.16), где

$$Q_{2k}\left(f_-,f_n\right)=\frac{\sum_{i=0}^{\lfloor k/2\rfloor}q_{2i,k}\left(f_-^{2i}f_n^{2k-2i}+f_-^{2k-2i}f_n^{2i}\right)}{2\sum_{i=0}^{\lfloor k/2\rfloor}q_{2i,k}}. \qquad (4.27)$$

4.2 Конкретизация на случай кубической нелинейности

Рассмотрим НУШ (4.1) с нелинейностью вида $G'\left(|\psi|^2\right)=|\psi|^2$, то есть случай кубической (в нелинейной оптике - Керровской) нелинейности:

$$i\psi_t+\frac{1}{2}\psi_{xx}+|\psi|^2\psi=0. \tag{4.28}$$

Тогда имеем $G\left(|\psi|^2\right)=|\psi|^4/2$, то есть в (4.16) $a_2=1/2$ и $a_k=0$ для $k\neq 2$. Уравнения (4.18) и (4.19) сводятся к виду

$$-\omega f_n+\frac{1}{2h^2}\left(f_- -2f_n+f_+\right)+\frac{S_3\left(f_-,f_n,f_+\right)}{4(\alpha+\beta+\gamma)}=0, \tag{4.29}$$

с функцией

$$\begin{gathered}S_3\left(f_-,f_n,f_+\right)=\alpha\left(f_+^3+f_-f_+^2+f_-^2f_++f_-^3\right)+\\+\beta\left(f_+^2+f_-f_++f_-^2+f_n^2\right)f_n+2\gamma\left(f_++f_-\right)f_n^2,\end{gathered} \tag{4.30}$$

где мы переобозначили коэффициенты следующим образом $\alpha=q_{0,2}$, $\beta=q_{1,2}$ и $\gamma=q_{2,2}$. Решения трехточечной задачи (4.29) находятся из двухточечной задачи

$$\begin{gathered}\frac{1}{h^2}\left(f_n-f_-\right)^2-2\omega f_-f_n+\\+\frac{\alpha\left(f_-^4+f_n^4\right)+\beta\left(f_nf_-^3+f_-f_n^3\right)+2\gamma f_-^2f_n^2}{2(\alpha+\beta+\gamma)}+C=0.\end{gathered} \tag{4.31}$$

Вытекающая отсюда дискретизация уравнения (4.28) свободная от потенциала Пайерлса-Набарро записывается как

$$i\dot{\psi}_n+\frac{1}{2h^2}\left(\psi_- -2\psi_n+\psi_+\right)+\frac{S_3\left(\psi_-,\psi_n,\psi_+\right)}{4(\alpha+\beta+\gamma)}=0, \tag{4.32}$$

где $S_3(\psi_-,\psi_n,\psi_+)$ это любая функция, которая при подстановке в нее (4.4) сводится к $S_3(f_-,f_n,f_+)e^{i\omega t}$ с $S_3(f_-,f_n,f_+)$ заданной выражением (4.30).

Дискретизация, сохраняющая норму (4.6), из общего случая (4.22) сводится к

$$i\dot{\psi}_n+\frac{1}{2h^2}\left(\psi_- -2\psi_n+\psi_+\right)+\frac{\psi_n}{4(\beta+\gamma)}\times$$
$$\times\left[\beta\left(\left|\psi_-\right|^2+\left|\psi_-\psi_+\right|+\left|\psi_+\right|^2+\left|\psi_n\right|^2\right)+2\gamma\left(\left|\psi_-\psi_n\right|+\left|\psi_n\psi_+\right|\right)\right]=0. \tag{4.33}$$

Двухточечная задача для отыскания стационарных решений модели (4.33) это задача (4.31) с $\alpha=0$.

Аналогично, из (4.25) получаем для нашего случая дискретизации, сохраняющие модифицированную норму (4.7) и импульс (4.8):

$$i\dot{\psi}_n+\frac{1}{2h^2}\left(\psi_- -2\psi_n+\psi_+\right)+$$
$$+\frac{\psi_-+\psi_+}{4(\alpha+\gamma)}\left[\alpha\left(\left|\psi_-\right|^2+\left|\psi_+\right|^2\right)+2\gamma\left|\psi_n\right|^2\right]=0. \tag{4.34}$$

Амплитуды стационарных решений модели (4.34) находятся из (4.31) при $\beta=0$.

Заметим, что положив $\alpha=0$ в (4.34), мы получим знаменитую полностью интегрируемую цепочку Абловица-Ладика.

Уравнения (4.33), (4.34), разумеется, не исчерпывают список возможных ТИ дискретизаций уравнения (4.28). Например, последний член в правой части (4.30) может быть использован для построения следующей ТИ модели

$$i\dot{\psi}_n+\frac{1}{2h^2}\left(\psi_- -2\psi_n+\psi_+\right)+$$
$$+\frac{\delta}{2}\left(\psi_-+\psi_+\right)\left|\psi_n\right|^2+\frac{1-\delta}{2}\left(\psi_-^*+\psi_+^*\right)\psi_n^2=0, \tag{4.35}$$

где δ это свободный параметр. При $\delta = 1/2$ модель (4.35) сохраняет норму (4.6). Амплитуды стационарных решений модели (4.35) находятся из (4.31) при $\alpha = \beta = 0$.

4.3 Обобщенное дискретное НУШ с кубической нелинейностью

В данном разделе рассматривается обобщенное НУШ с кубической нелинейностью достаточно общего вида,

$$i\dot{\psi}_n = -\varepsilon\left(\psi_- - 2\psi_n + \psi_+\right) - f\left(\psi_-, \psi_n, \psi_+\right), \tag{4.36}$$

где

$$\begin{aligned}
&f\left(\psi_-, \psi_n, \psi_+\right) = \alpha_1 |\psi_n|^2 \psi_n + \alpha_2 |\psi_n|^2 \left(\psi_- + \psi_+\right) + \\
&+\alpha_3 \psi_n^2 \left(\psi_-^* + \psi_+^*\right) + \alpha_4 \psi_n \left(|\psi_-|^2 + |\psi_+|^2\right) + \\
&+\alpha_5 \psi_n \left(\psi_- \psi_+^* + \psi_+ \psi_-^*\right) + \alpha_6 \psi_n^* \left(\psi_-^2 + \psi_+^2\right) + \\
&+\alpha_7 \psi_- \psi_n^* \psi_+ + \alpha_8 \left(|\psi_+|^2 \psi_+ + |\psi_-|^2 \psi_-\right) + \\
&+\alpha_9 \left(\psi_-^* \psi_+^2 + \psi_+^* \psi_-^2\right) + \alpha_{10} \left(|\psi_+|^2 \psi_- + |\psi_-|^2 \psi_+\right) + \\
&+\alpha_{11} \psi_n \left(|\psi_- \psi_n| + |\psi_n \psi_+|\right) + \alpha_{12} \left(\psi_+ |\psi_n \psi_+| + \psi_- |\psi_- \psi_n|\right) + \\
&+\alpha_{13} \left(\psi_+ |\psi_- \psi_n| + \psi_- |\psi_n \psi_+|\right) + \alpha_{14} \left(\psi_+ |\psi_- \psi_+| + \psi_- |\psi_- \psi_+|\right),
\end{aligned} \tag{4.37}$$

с вещественными коэффициентами α_i удовлетворяющими условию континуального перехода

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \alpha_7 + 2(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_8 + \\
&\quad + \alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14}) = \pm 2,
\end{aligned} \tag{4.38}$$

где верхний (нижний) знак соответствует фокусирующей (дефокусирующей) нелинейности. Отметим, что функция f, заданная выражением (4.37), была выбрана симметричной по отношению к перестановке $\psi_- \leftrightarrow \psi_+$.

Как уже отмечалось, представленная выше модель обобщает многие из вариантов ДНУШ, рассматривавшихся ранее в литературе.

4.3.1 Законы сохранения

Несложно показать прямой подстановкой в выражение $dN/dt=0$, что ДНУШ (4.36), (4.37) с произвольными $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_{11},\alpha_{12}$, при выполнении условий $\alpha_2=\alpha_3+\alpha_8$ и $\alpha_7=\alpha_9=\alpha_{10}=\alpha_{13}=\alpha_{14}=0$, сохраняет норму

$$N=\sum_n \psi_n\psi_n^* . \tag{4.39}$$

С другой стороны, если α_2,α_{14} произвольны, при $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_6$, $\alpha_5=\alpha_6$, $\alpha_7=\alpha_4+\alpha_5$, $\alpha_{10}=\alpha_8+\alpha_9$, $\alpha_{12}=\alpha_{13}$ и $\alpha_3=\alpha_{11}=0$, рассматриваемая модель сохраняет модифицированную норму

$$N_1=\frac{1}{2}\sum_n\left(\psi_n\psi_+^*+\psi_n^*\psi_+\right). \tag{4.40}$$

Кроме этого, если только α_7 отлично от нуля при всех остальных $\alpha_i=0$, то сохраняется другой вид модифицированной нормы

$$N_2=\frac{1}{2}\sum_n\left(\psi_n\psi_{n+2}^*+\psi_n^*\psi_{n+2}\right). \tag{4.41}$$

Далее, для произвольных α_2 и α_3, при $\alpha_1=\alpha_4+\alpha_6$, $\alpha_5=\alpha_6$, $\alpha_4=\alpha_5+\alpha_7$, $\alpha_8=\alpha_9+\alpha_{10}$ и $\alpha_{11}=\alpha_{12}=\alpha_{13}=\alpha_{14}=0$, модель сохраняет импульс определенный оператором

$$P_1=i\sum_n\left(\psi_n\psi_+^*-\psi_n^*\psi_+\right). \tag{4.42}$$

Если же только α_5 и α_7 произвольны и отличны от нуля, а все остальные $\alpha_i=0$, то сохраняется импульс определенный оператором

$$P_2 = i\sum_n \left(\psi_n\psi_{n+2}^* - \psi_n^*\psi_{n+2}\right). \qquad (4.43)$$

Для произвольных α_1, α_4 и α_6, при $\alpha_2 = 2\alpha_3 = 2\alpha_8$ и при $\alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_9 = \alpha_{10} = \alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = 0$, модель (4.36), (4.37) может быть получена из Гамильтониана

$$\begin{aligned} H = \sum_n \Big\{ &|\psi_n - \psi_+|^2 - \frac{\alpha_1}{2}|\psi_n|^4 - \frac{\alpha_6}{2}\left[\left(\psi_n^*\right)^2\psi_+^2 + \left(\psi_+^*\right)^2\psi_n^2\right] - \\ &-\alpha_4|\psi_n|^2|\psi_+|^2 - \frac{\alpha_1}{2}\left(|\psi_n|^2 + |\psi_+|^2\right)\left(\psi_+^*\psi_n + \psi_n^*\psi_+\right)\Big\}, \end{aligned} \qquad (4.44)$$

с использованием уравнения движения

$$i\dot{\psi}_n = \left[\psi_n, H\right], \qquad (4.45)$$

где скобки Пуассона определены следующим образом

$$\left[U,V\right] = \sum_n \left(\frac{dU}{d\psi_n}\frac{dV}{d\psi_n^*} - \frac{dU}{d\psi_n^*}\frac{dV}{d\psi_n}\right). \qquad (4.46)$$

Таким образом, данная модель сохраняет энергию H.

Наконец, если определить скобки Пуассона нестандартным образом,

$$\begin{aligned} \left[U,V\right]_1 = \sum_n \left(\frac{dU}{d\psi_n}\frac{dV}{d\psi_n^*} - \frac{dU}{d\psi_n^*}\frac{dV}{d\psi_n}\right)\Big[&1 + \left(\alpha_2 - \alpha_3\right)|\psi_n|^2 + \\ +\alpha_8\left(|\psi_-|^2 + |\psi_+|^2\right) + \alpha_7\psi_n\left(\psi_-^* - \psi_+^*\right) + &\alpha_7\psi_n^*\left(\psi_- + \psi_+\right)\Big], \end{aligned} \qquad (4.47)$$

то уравнение движения (4.36), (4.37) может быть получено из гамильтониана

$$H_1 = \sum_n \left(|\psi_n - \psi_+|^2 - \beta|\psi_n|^2\right), \qquad (4.48)$$

и уравнения движения

$$i\dot{\psi}_n = \left[\psi_n, H_1\right]_1 \qquad (4.49)$$

при условии, что $\alpha_7 = 2\alpha_5 = 2\alpha_6$, $\alpha_8 = \alpha_9 = \alpha_{10}$, $\alpha_3 = (\beta - 2)\alpha_5$, $\alpha_4 = (\beta-2)\alpha_8 + \alpha_5$, $\alpha_1 = (\beta-2)(\alpha_2 - \alpha_3)$ и

$\alpha_{11}=\alpha_{12}=\alpha_{13}=\alpha_{14}=0$. Таким образом, данная модель сохраняет энергию H_1.

По полученным результатам можно сделать ряд заключений:

1. В случае когда только α_2 отлично от нуля, а все остальные $\alpha_i=0$, имеем полностью интегрируемую модель Абловица-Ладика, которая, как известно, имеет бесконечно много сохраняющихся величин, в число которых, например, входят N_1, P_1 и H_1 при $\beta=2$, но не входят N, N_2, P_2 и H .

2. В случае классической дискретизации НУШ, то есть когда только $\alpha_1 \neq 0$, сохраняются N и H .

3. Модель где только $\alpha_7 \neq 0$ сохраняет N_2 и P_2.

4. N и P_1 сохраняются для модели у которой только α_2 и α_3 отличны от нуля, причем $\alpha_2=\alpha_3$.

5. N_1 и P_1 сохраняются в случае когда α_2 произвольно и $\alpha_1=\alpha_4=\alpha_7$, $\alpha_8=\alpha_{10}$ при всех остальных $\alpha_i=0$.

6. Модель, сохраняющая H , также сохраняет и N .

7. Модель, сохраняющая H_1 , также сохраняет и N_1 когда $\beta=2$ и $\alpha_8=\alpha_9=\alpha_{10}=0$.

4.3.2 Двухточечные отображения для нахождения стационарных решений

При помощи подстановки $\psi_n(t)=F_n \exp(-i\omega t)$ в ДНУШ, определенный выражениями (4.36) и (4.37), приходим к следующему разностному уравнению второго порядка

$$\begin{gathered}\varepsilon\Big[F_- -(2-\omega/\varepsilon)F_n+F_+\Big]+\alpha_1 F_n^3+\gamma_1 F_n^2(F_-+F_+)+ \\ +\gamma_2 F_n\left(F_-^2+F_+^2\right)+\gamma_3 F_- F_n F_+ +\alpha_8\left(F_-^3+F_+^3\right)+ \\ +\gamma_4 F_- F_+(F_-+F_+)=0,\end{gathered} \tag{4.50}$$

где для краткости записи введены следующие обозначения:

$$\gamma_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_{11}, \qquad \gamma_2 = \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{12},$$
$$\gamma_3 = 2\alpha_5 + \alpha_7 + 2\alpha_{13}, \qquad \gamma_4 = \alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{14}. \tag{4.51}$$

В частном случае

$$\alpha_8 = \gamma_4, \quad \alpha_1 = \gamma_2 = \gamma_3, \quad 2\alpha_1 + \gamma_1 + 2\alpha_8 = 1, \tag{4.52}$$

первый интеграл уравнения (4.50) сводится к двухточечному отображению

$$U(F_-, F_n, K) \equiv \varepsilon\left[\left(F_-^2 + F_n^2\right) - (2 - \omega/\varepsilon)F_- F_n\right] +$$
$$+\alpha_1\left(F_-^2 + F_n^2\right)F_- F_n + \gamma_1 F_-^2 F_n^2 + \alpha_8\left(F_-^4 + F_n^4\right) + K = 0, \tag{4.53}$$

где K - константа интегрирования. Этот факт следует из возможности представления трехточечного разностного уравнения (4.50) в терминах двухточечной функции $U(F_-, F_n, K)$, определенной выражением (4.53), в виде

$$\frac{U(F_n, F_+, K) - U(F_-, F_n, K)}{F_+ - F_-} = 0. \tag{4.54}$$

Теперь очевидно, что если выполнено $U(F_-, F_n, K) = 0$, то выполнено и (4.50).

С другой стороны, если только γ_1 и γ_3 отличны от нуля, в то время как $\alpha_1 = \alpha_8 = \gamma_2 = \gamma_4 = 0$, то двухточечное отображение имеет вид

$$W(F_-, F_n, K) \equiv F_-^2 + F_n^2 - \frac{Y F_-^2 F_n^2}{2 - \omega/\varepsilon} - 2Z F_- F_n - \frac{KY}{2 - \omega/\varepsilon} = 0, \tag{4.55}$$

где K - константа интегрирования и

$$Z = \frac{(2 - \omega/\varepsilon)^2 - K\gamma_3^2}{2(2 - \omega/\varepsilon) + 2K\gamma_1\gamma_3}, \qquad Y = 2\gamma_1 Z + \gamma_3. \tag{4.56}$$

В данном случае трехточечное разностное уравнение (4.50) может быть представлено в терминах двухточечной функции $W(F_-,F_n,K)$, определенной выражением (4.55), следующим образом:

$$\frac{2-\omega/\varepsilon}{2Z(F_+-F_-)}\left\{W(F_n,F_+,K)-W(F_-,F_n,K)\right. \\ \left.+\frac{\gamma_3}{2-\omega/\varepsilon}\left[F_+^2W(F_-,F_n,K)-F_-^2W(F_n,F_+,K)\right]\right\}=0. \qquad (4.57)$$

Такое представление делает очевидным, что если выполнено $W(F_-,F_n,K)=0$, то выполнено и (4.50).

Важность двухточечных отображений состоит в том, что они позволяют получать точные решения соответствующих трехточечных уравнений итерационно, начиная с любого допустимого начального значения F_n или F_-. На каждом шаге итерации решается квадратное алгебраическое уравнение. Поскольку в качестве начального значения отображения может быть взято любое значение, лежащее в области допустимых значений, получаемые равновесные стационарные решения могут располагаться произвольно относительно решетки, а следовательно, такие решения соответствующих частных видов ДНУШ (4.36), (4.37) свободны от потенциала Пайерлса-Набарро.

Покажем, что некоторые точные стационарные решения ДНУШ (4.36), (4.37) могут быть найдены из факторизованных двухточечных отображений или из редуцированного трехточечного уравнения. В первом случае получаемые решения оказываются трансляционно-инвариантными, а во втором – не трансляционно-инвариантными.

Например, легко убедиться непосредственной подстановкой, что уравнение (4.50) имеет четырехпериодическое решение

$$F_n=(\ldots a,b,-a,-b,\ldots), \qquad (4.58)$$

если выполнены условия

$$2\gamma_2 = \alpha_1 + \gamma_3, \qquad \left(a^2 + b^2\right)\alpha_1 = 2\varepsilon - \omega . \tag{4.59}$$

Параметр a в данном решении может изменяться непрерывно в некотором диапазоне, что приводит к непрерывному сдвигу решения относительно решетки, означая трансляционную инвариантность данного решения. Теперь заметим, что в случае

$$\alpha_8 = \gamma_1 = \gamma_4 = 0,\ \alpha_1 = \gamma_2 = \gamma_3,\ 2\alpha_1 = 1,\ K = 2\left(\omega - 2\varepsilon\right), \tag{4.60}$$

отображение (4.53) может быть факторизовано следующим образом

$$\frac{1}{2}\left(2\varepsilon + F_- F_n\right)\left(\frac{2\omega}{\varepsilon} - 4 + F_-^2 + F_n^2\right) = 0 . \tag{4.61}$$

Отметим, что второй множитель в (4.61) дает четырехпериодическое решение (4.58) при условии (4.59).

Следующий пример касается модели, имеющей Гамильтониан (4.44). Для данных значений параметров модели уравнение (4.50) приобретает вид

$$\begin{gathered}\varepsilon\left[F_- - \left(2 - \omega/\varepsilon\right)F_n + F_+\right] + \alpha_1 F_n^3 + \gamma_1 F_n^2\left(F_- + F_+\right) \\ + \gamma_2 F_n\left(F_-^2 + F_+^2\right) + \frac{\gamma_1}{3}\left(F_-^3 + F_+^3\right) = 0.\end{gathered} \tag{4.62}$$

Заметим, что если выполнено двухточечное уравнение

$$F_-^2 + \frac{4\gamma_1}{3\alpha_1} F_- F_n + F_n^2 = B , \tag{4.63}$$

то (4.62) можно переписать в виде линейного трехточечного разностного уравнения

$$\left(B\gamma_1 + 3\varepsilon\right)\left(F_+ - F_-\right) + 3\left(\omega - 2\varepsilon + B\alpha_1\right)F_n = 0 , \tag{4.64}$$

если

$$\gamma_2 = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{4\gamma_1^2}{9\alpha_1}, \qquad B = \frac{\omega - 2\varepsilon - \dfrac{4\gamma_1\varepsilon}{3\alpha_1}}{\dfrac{4\gamma_1^2}{9\alpha_1} - \alpha_1}. \tag{4.65}$$

Теперь несложно показать, что модель (4.44), имеющая Гамильтониан, допускает решение

$$\psi_n = A\exp[-i(\omega t + \delta)]\sin[\beta(n + \delta_1)], \tag{4.66}$$

с произвольными δ и δ_1, при условии

$$\cos\beta = -\frac{2\gamma_1}{3\alpha_1}. \tag{4.67}$$

Решение (4.66) также может быть найдено итерационно из двухточечного отображения (4.63), при этом (4.64) также будет удовлетворено. В этом несложно убедиться непосредственной подстановкой.

4.3.3 Движущиеся точные решения

ДНУШ (4.36), (4.37) допускает точные движущиеся решения в форме эллиптических функций Якоби, sn, cn, dn и их комбинаций при условии, что

$$\alpha_1 = \alpha_8 = 0. \tag{4.68}$$

В пределе $m=1$, где $0 \le m \le 1$ - модуль эллиптических функций Якоби, получаем решения в терминах гиперболических функций. Например, оба решения, cn и dn в пределе $m=1$ дают решение, описывающее светлый солитон

$$\psi_n = A\exp[-i(\omega t - kn + \delta)]\mathrm{sech}[\beta(n - vt + \delta_1)], \tag{4.69}$$

при условии, что выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &v\beta = 2\varepsilon s_1 S, && \omega = 2\varepsilon(1 - c_1 C), \\ &2\xi_6 C + \xi_5 = 0, && \left[S^2 + (\alpha_3 - \alpha_2)A^2\right]s_1 = 0, \\ &2\xi_2 C + \xi_4 = 0, && A^2(\xi_1 C - \xi_2 + \xi_3/2) = \varepsilon S^2 C c_1. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Здесь δ и δ_1 - произвольные постоянные, A, ω, k, β и v обозначают амплитуду, частоту, волновое число, обратную ширину и скорость солитонного решения, соответственно, и для краткости записи, здесь и далее, использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&S=\sinh(\beta), \qquad C=\cosh(\beta), \qquad T=\tanh(\beta),\\
&s_1=\sin(k), \qquad s_2=\sin(2k), \qquad s_3=\sin(3k),\\
&c_1=\cos(k), \qquad c_2=\cos(2k), \qquad c_3=\cos(3k),\\
&\xi_1=\left(\alpha_2+\alpha_3\right)c_1+\alpha_{11}, \qquad \xi_2=\alpha_4+\alpha_6 c_2+\alpha_{12}c_1,\\
&\xi_3=2\alpha_5 c_2+\alpha_7+2\alpha_{13}c_1, \qquad \xi_4=\alpha_9 c_3+\left(\alpha_{10}+\alpha_{14}\right)c_1,\\
&\xi_5=\alpha_9 s_3-\alpha_{10}s_1+\alpha_{14}s_1, \qquad \xi_6=\alpha_6 s_2+\alpha_{12}s_1.
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Из первого условия в (4.70) следует, что скорость солитона обращается в нуль при $k=0$ или $k=\pi$. В первом случае получаем незигзагообразный солитон, а во втором – зигзагообразный. Так, стационарный незигзагообразный солитон дается выражением

$$\psi_n=A\exp[-i\left(\omega t+\delta\right)]\operatorname{sech}[\beta\left(n+\delta_1\right)], \tag{4.72}$$

параметры которого удовлетворяют условиям $2\gamma_2 C+\gamma_4=0$, $A^2\left(\gamma_1 C-\gamma_2+\gamma_3/2\right)=\varepsilon S^2 C$, $\omega=2\varepsilon\left(1-C\right)$.

Решение, sn в пределе $m=1$ дает решение, описывающее темный солитон

$$\psi_n=A\exp[-i\left(\omega t-kn+\delta\right)]\tanh[\beta\left(n-vt+\delta_1\right)], \tag{4.73}$$

при условии, что выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&v\beta=2\varepsilon s_1 T+\frac{4A^2\xi_6 T^3}{1+T^2}, \quad \frac{\omega-2\varepsilon}{A^2}=\frac{2\xi_1}{S^2}-\frac{2\xi_2}{T^2}+\frac{\xi_3}{T^2},\\
&2\xi_6+\xi_5\left(1+T^2\right)=0, \qquad \frac{\varepsilon s_1}{A^2}=-\frac{\left(\alpha_2-\alpha_3\right)s_1}{T^2}-\frac{2\xi_6 T^2}{1+T^2},\\
&2\xi_2+\xi_4\left(1+T^2\right)=0, \qquad \frac{\varepsilon c_1}{A^2}=-\frac{\xi_1}{T^2}-\frac{\xi_2\left(1+2T^2-T^4\right)}{T^2\left(1+T^2\right)}-\frac{\xi_3\left(1+T^2\right)}{2T^2}.
\end{aligned} \tag{4.74}$$

В частном случае $k=0$ получаем незигзагообразный темный солитон

$$\psi_n = A\exp[-i(\omega t+\delta)]\tanh[\beta(n+\delta_1)], \qquad (4.75)$$

с параметрами, удовлетворяющими соотношениям

$$2\gamma_2+\gamma_4\left(1+T^2\right)=0,$$

$$(\omega-2\varepsilon)/A^2 = 2\gamma_1/S^2-(2\gamma_2-\gamma_3)/T^2, \qquad (4.76)$$

$$\varepsilon/A^2 = -\gamma_1/T^2-\gamma_3\left(1+T^2\right)/\left(2T^2\right)+\gamma_2\left(1+2T^2-T^4\right)/\left[T^2\left(1+T^2\right)\right].$$

В отличие от движущихся решений в форме эллиптических функций Якоби, движущиеся тригонометрические решения существуют для ДНУШ (4.36), (4.37) даже если $\alpha_1=\alpha_8\neq 0$. В частности, движущееся синусоидальной решение

$$\psi_n = A\exp[-i(\omega t-kn+\delta)]\sin[\beta(n-vt+\delta_1)], \qquad (4.77)$$

существует при условии, что

$$v\beta = -2\varepsilon\sin(\beta)s_1-2A^2\sin^3(\beta)(\alpha_8 s_1-\xi_5),$$

$$(\alpha_2-\alpha_3)s_1+2\xi_6\cos(\beta)+\xi_5-\alpha_8 s_1\left[4\sin^2(\beta)s_1-3\right]=0,$$

$$\begin{aligned}&\alpha_1+2(\xi_1+\xi_4)\cos(\beta)+\xi_3+\\&\quad+2\xi_2\cos(2\beta)+2\alpha_8 c_1\cos(\beta)\left[1-4\sin^2(\beta)\right]=0,\end{aligned} \qquad (4.78)$$

$$\begin{aligned}&\omega-2\varepsilon+2\varepsilon c_1\cos(\beta)=A^2\sin^2(\beta)\times\\&\quad\times\left[-2\xi_2+\xi_3-6\alpha_8 c_1\cos(\beta)+2\xi_4\cos(\beta)\right].\end{aligned}$$

Необходимо отметить, что в пределе $m=0$ эллиптические функции Якоби, как известно, переходят в тригонометрические, в частности, sn(x, m) переходит в sin(x). Однако решение (4.77) не может быть получено из решения sn предельным переходом, поскольку при $m=0$ амплитуда решения sn обращается в ноль. Таким образом, решение (4.77) является особым.

4.3.4 Точные короткопериодические и апериодические решения

Точные короткопериодические решения будут описаны для уравнения (4.50) с $\varepsilon = 1$, которое, переобозначив коэффициенты, запишем в виде

$$\begin{gathered}F_{-} - (2-\omega)F_n + F_{+} + b_1 F_n^3 + \frac{b_2}{2} F_n^2 (F_{-} + F_{+}) + \\ + \frac{b_3}{2} F_n (F_{-}^2 + F_{+}^2) + b_4 F_{-} F_n F_{+} + \frac{b_5}{2} F_{-} F_{+} (F_{-} + F_{+}) + \\ + \frac{b_6}{2}(F_{-}^3 + F_{+}^3) = 0,\end{gathered} \tag{4.79}$$

так, что условие континуального перехода теперь примет вид

$$\sum_{i=1}^{6} b_i = \pm 2 . \tag{4.80}$$

Для построения короткопериодических решений полезно обратить внимание на некоторые симметрии уравнения (4.79). В частности, отметим, что это уравнение инвариантно относительно замены $F_{-} \to F_{+}$ и $F_{+} \to F_{-}$. Далее, уравнение также инвариантно относительно смены знака искомой функции $F_{-}, F_n, F_{+} \to -F_{-}, -F_n, -F_{+}$. Как следствие этих двух симметрий, если (F_{-}, F_n, F_{+}) удовлетворяют уравнению (4.79) при некоторых условиях, то $(-F_{-}, -F_n, -F_{+})$, (F_{+}, F_n, F_{-}) и $(-F_{+}, -F_n, -F_{-})$ также удовлетворяют этому уравнению при тех же условиях.

Ниже приводятся целый ряд короткопериодических и апериодических решений уравнения (4.79) с коэффициентами, удовлетворяющими условию континуального перехода (4.80). Сначала будут описаны решения для общего случая, а затем будут конкретизированы решения для некоторых популярных ДНУШ, таких, например, как классический ДНУШ, полностью интегрируемая модель Абловица-Ладика и модель Салерно.

При получении представленных ниже решений использовались следующие вполне очевидные результаты:

1. Если $F_- = F_n = F_+ = a$, то

$$a^2 = \mp\frac{\omega}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{6} b_i = \pm 2. \tag{4.81}$$

2. Если $F_- = F_n = -F_+ = a$, то

$$2 - \omega = a^2\left(b_1 + b_3 - b_4\right). \tag{4.82}$$

3. Если $F_- = -F_n = F_+ = a$, то

$$4 - \omega = a^2\left(b_1 - b_2 + b_3 + b_4 - b_5 - b_6\right). \tag{4.83}$$

4. Если $F_- = F_n = a$ и $F_+ = 0$, то

$$2(1-\omega) = a^2\left(2b_1 + b_2 + b_3 + b_6\right). \tag{4.84}$$

5. Если $F_- = F_+ = a$ и $F_n = 0$, то

$$-2 = a^2\left(b_5 + b_6\right). \tag{4.85}$$

6. Если $F_- = -F_n = a$ и $F_+ = 0$, то

$$2(3-\omega) = a^2\left(2b_1 - b_2 + b_3 - b_6\right). \tag{4.86}$$

7. Если $F_- = a$ и $F_n = F_+ = 0$, то

$$-2 = a^2 b_6. \tag{4.87}$$

8. Если $F_n = a$ и $F_- = F_+ = 0$, то

$$2 - \omega = a^2 b_1. \tag{4.88}$$

Опишем теперь ряд периодических решений, начиная с периода равного двум и переходя затем к решениям со всё более длинным периодом, вплоть до периода шесть.

Решения с периодом 2.

Решение вида $F_n = (\ldots, a, -a, \ldots)$ существует при условии

$$4-\omega=a^2\left(b_1-b_2+b_3+b_4-b_5-b_6\right). \qquad (4.89)$$

В частном случае $\omega=4$ имеем решение для любого вещественного a при условии, что выполнено $b_1+b_3+b_4=b_2+b_5+b_6=\pm 1$.

Решение вида $F_n=(\ldots,a,0,\ldots)$ существует если

$$2-\omega=a^2 b_1,\ -2=a^2\left(b_5+b_6\right). \qquad (4.90)$$

Решение вида $F_n=(\ldots,a,1/a,\ldots)$ существует для любого вещественного a если

$$b_1=b_5+b_6=0,\ b_2=4,\ \omega=-2,\ -2=\left(b_3+b_4\right). \qquad (4.91)$$

Решения с периодом 3.

Решение вида $F_n=(\ldots,a,-a,0,\ldots)$ существует при условии

$$6-2\omega=a^2\left(2b_1-b_2+b_3-b_6\right). \qquad (4.92)$$

В частном случае $\omega=3$ имеем решение для любого вещественного a при условии, что выполнено $2b_1+b_3=b_2+b_6$.

Решение вида $F_n=(\ldots,a,a,-a,\ldots)$ существует при условии

$$2-\omega=a^2\left(b_1+b_3-b_4\right),\ 4-\omega=a^2\left(b_1-b_2+b_3+b_4-b_5-b_6\right). \qquad (4.93)$$

Решение вида $F_n=(\ldots,a,a,0,\ldots)$ существует при условии

$$-2=a^2\left(b_5+b_6\right),\ 2-2\omega=a^2\left(2b_1+b_2+b_3+b_6\right). \qquad (4.94)$$

Решения с периодом 4.

Решение вида $F_n=(\ldots,a,a,a,0,\ldots)$ существует если

$$\frac{\omega}{2}=a^2,\ 2-2\omega=a^2\left(2b_1+b_2+b_3+b_6\right),\ -2=a^2\left(b_5+b_6\right). \qquad (4.95)$$

Решение вида $F_n=(\ldots,a,a,a,-a,\ldots)$ существует если

$$\frac{\omega}{2}=a^2\,,\;2-\omega=a^2\left(b_1+b_3-b_4\right),$$

$$4-\omega=a^2\left(b_1-b_2+b_3+b_4-b_5-b_6\right). \qquad (4.96)$$

Решение вида $F_n=(\ldots,a,b,-a,-b,\ldots)$ при $a^2\neq b^2$ существует если

$$2-\omega=\left(a^2+b^2\right)b_1\,,\;b_3=b_1+b_4\,,\;b_1\neq 0\,. \qquad (4.97)$$

Это решение имеет один свободный параметр. В частном случае $b_3=b_4$, $b_1=0$ и $\omega=2$ решение имеет два свободных параметра, поскольку a и b могут быть произвольными вещественными числами.

Решение вида $F_n=(\ldots,a,a,-a,-a,\ldots)$ существует если

$$2-\omega=a^2\left(b_1+b_3-b_4\right), \qquad (4.98)$$

В частном случае $\omega=2$ имеем решение для любого вещественного a при условии, что выполнено $b_1+b_3=b_4$.

Решение вида $F_n=(\ldots,a,0,-a,0,\ldots)$ существует если

$$2-\omega=a^2b_1, \qquad (4.99)$$

В частном случае $\omega=2$ имеем решение для любого вещественного a при условии, что выполнено $b_1=0$.

Решение вида $F_n=(\ldots,a,0,-a,a,\ldots)$ существует если

$$2-\omega=a^2\left(b_1+b_3-b_4\right),\;2-2\omega=a^2\left(2b_1+b_2+b_3+b_6\right),$$

$$6-2\omega=a^2\left(2b_1-b_2+b_3-b_6\right) \qquad (4.100)$$

Отсюда видно, что данное решение существует при $b_3=2b_4$.

Решения с периодом 5.

Решение вида $F_n=(\ldots,a,a,a,-a,-a,\ldots)$ существует если

$$a^2=\frac{\omega}{2},\ 2-\omega=a^2\left(b_1+b_3-b_4\right). \tag{4.101}$$

Решение вида $F_n=\left(\ldots,0,a,0,a,a,\ldots\right)$ существует если

$$-2=a^2\left(b_5+b_6\right),\ 2-\omega=a^2 b_1,$$

$$2-2\omega=a^2\left(2b_1+b_2+b_3+b_6\right). \tag{4.102}$$

Решение вида $F_n=\left(\ldots,a,-a,a,-a,0,\ldots\right)$ существует если

$$4-\omega=a^2\left(b_1-b_2+b_3+b_4-b_5-b_6\right),$$

$$6-2\omega=a^2\left(2b_1-b_2+b_3-b_6\right). \tag{4.103}$$

Решение вида $F_n=\left(\ldots,a,0,a,0,-a,\ldots\right)$ существует если

$$-2=a^2\left(b_5+b_6\right),\ 2-\omega=a^2 b_1,$$

$$6-2\omega=a^2\left(2b_1-b_2+b_3-b_6\right). \tag{4.104}$$

Решение вида $F_n=\left(\ldots,a,a,-a,-a,0,\ldots\right)$ существует если

$$2-\omega=a^2\left(b_1+b_3-b_4\right),\ 2-2\omega=a^2\left(2b_1+b_2+b_3+b_6\right). \tag{4.105}$$

Решение вида $F_n=\left(\ldots,a,a,0,-a,0,\ldots\right)$ существует если

$$2-\omega=a^2 b_1,\ 2-2\omega=a^2\left(2b_1+b_2+b_3+b_6\right). \tag{4.106}$$

Решения с периодом 6.

Решение вида $F_n=\left(\ldots,a,a,0,-a,-a,0,\ldots\right)$ существует если

$$2-2\omega=a^2\left(2b_1+b_2+b_3+b_6\right). \tag{4.107}$$

В частном случае $\omega=1$ имеем решение для любого вещественного a при условии, что выполнено $2b_1+b_2+b_3+b_6=0$.

Решение вида $F_n=\left(\ldots,a,-a,0,-a,a,0,\ldots\right)$ существует если

$$-2=a^2\left(b_5+b_6\right),\ 6-2\omega=a^2\left(2b_1-b_2+b_3-b_6\right). \quad (4.108)$$

Решение вида $F_n=\left(\ldots,a,a,a,0,-a,-a,\ldots\right)$ существует если

$$a^2=\frac{\omega}{2},\ 2-2\omega=a^2\left(2b_1+b_2+b_3+b_6\right),$$
$$2-\omega=a^2\left(b_1+b_3-b_4\right). \quad (4.109)$$

Решение вида $F_n=\left(\ldots,a,a,0,-a,0,a,\ldots\right)$ существует если

$$a^2=\frac{\omega}{2},\ 2-2\omega=a^2\left(2b_1+b_2+b_3+b_6\right),\ 2-\omega=a^2b_1. \quad (4.110)$$

Решение вида $F_n=\left(\ldots,a,-a,a,a,-a,0,\ldots\right)$ существует если

$$\begin{aligned}&6-2\omega=a^2\left(2b_1-b_2+b_3-b_6\right), 2-\omega=a^2\left(b_1+b_3-b_4\right),\\&4-\omega=a^2\left(b_1-b_2+b_3+b_4-b_5-b_6\right).\end{aligned} \quad (4.111)$$

Решение вида $F_n=\left(\ldots,a,a,0,a,-a,0,\ldots\right)$ существует если

$$\begin{aligned}&2-2\omega=a^2\left(2b_1+b_2+b_3+b_6\right),\\&6-2\omega=a^2\left(2b_1-b_2+b_3-b_6\right),\ -2=a^2\left(b_5+b_6\right).\end{aligned} \quad (4.112)$$

Решение вида $F_n=\left(\ldots,a,0,a,0,a,a,\ldots\right)$ существует если

$$\begin{aligned}&a^2=-\frac{\omega}{2}, && 2-\omega=a^2\left(b_1+b_3-b_4\right),\\&2-\omega=a^2b_1, && -2=a^2\left(b_5+b_6\right).\end{aligned} \quad (4.113)$$

Решение вида $F_n=\left(\ldots,a,-a,a,a,0,a,\ldots\right)$ существует если

$$\begin{aligned}&4-\omega=a^2\left(b_1-b_2+b_3+b_4-b_5-b_6\right), && 2-\omega=a^2\left(b_1+b_3-b_4\right),\\&2-2\omega=a^2\left(2b_1+b_2+b_3+b_6\right), && 2=a^2\left(b_5+b_6\right).\end{aligned} \quad (4.114)$$

Примеры апериодических решений.

Несложно показать, что если выполнено условие (4.90), то решение периода два, $F_n=\left(\ldots,a,0,\ldots\right)$, может быть обобщено путем введения $"-a,0"$ после любого $"0"$, что приведет к апериодическому решению.

Аналогично, если выполнено условие (4.93), то уравнение (4.79) имеет апериодическое решение где $"a"$ и $"-a"$ размещены произвольным образом при ограничении, что не более двух $"a"$ или $"-a"$ расположены по соседству.

Если выполнено условие (4.95), то уравнение (4.79) имеет апериодическое решение где $"a"$ и $"0"$ расположены произвольно с ограничением, что по крайней мере два $"a"$ расположены по соседству и нет двух $"0"$ расположенных друг к другу ближе чем через два элемента.

4.3.5 Вопросы устойчивости некоторых решений обобщенного дискретного НУШ с кубической нелинейностью

Движущиеся точные решения уравнения (4.36), (4.37), описанные в подразделе 4.3.3, при нулевой скорости движения превращаются в стационарные решения, свободные от потенциала Пайерлса-Набарро, или, иными словами, в трансляционно-инвариантные решения, поскольку они содержат произвольный сдвиг вдоль пространственной координаты и могут быть размещены произвольно относительно решетки. Спектр малоамплитудных колебаний для уравнений линеаризованных в окрестности любого трансляционно-инвариантного решения содержит две пары нулевых частот, одна пара отвечает возможности произвольного сдвига фазы, а другая – трансляционной симметрии. Стационарные решения можно привести в медленное движение с использованием собственной моды, соответствующей трансляционной симметрии (Голдстоновской моды). В этом случае скорость движения будет пропорциональна амплитуде данной моды. Точность такого решения тем выше, чем меньше его амплитуда, то есть, чем меньше его скорость и в пределе обращения скорости в ноль становится точным. Можно взглянуть на трансляционно-инвариантные решения и с другой точки зрения, сказав, что ввиду отсутствия барьера Пайерлса-Набарро, они могут быть ускорены сколь угодно слабым внешним полем.

Исследуем численно подвижность и устойчивость движения светлых и темных солитонов при малых, а также при не слишком малых значениях скорости их движения. Сразу следует заметить, что свойства светлых и темных солитонов в дискретных моделях с нелинейными слагаемыми, включающими взаимодействие между соседними узлами, могут существенно отличаться от их свойств в классической дискретной модели, где нелинейная часть зависит только от ψ_n.

На рис. 4.1. приводится пример движущегося светлого солитона (4.69) в ДНУШ с $\alpha_2 = \alpha_3 = 1/2$, при остальных $\alpha_i = 0$.

Известно, что темный солитон (4.73) в модели с α_2 и α_3 отличными от нуля, при остальных $\alpha_i = 0$, не существует в континуальном пределе, в отличии от классической дискретной модели. С другой стороны, как известно, в классическом ДНУШ устойчивы только сильно локализованные темные солитоны, локализованные на узле решетки, а те, что локализованы посередине между двумя узлами неустойчивы ни при каких значениях параметра дискретности. В отличие от этого, темный солитон в модели где только α_2 и α_3 отличны от нуля, темные солитоны устойчивы, подвижны и не разрушаются даже при взаимных столкновениях, как это проиллюстрировано на рис. 4.2.

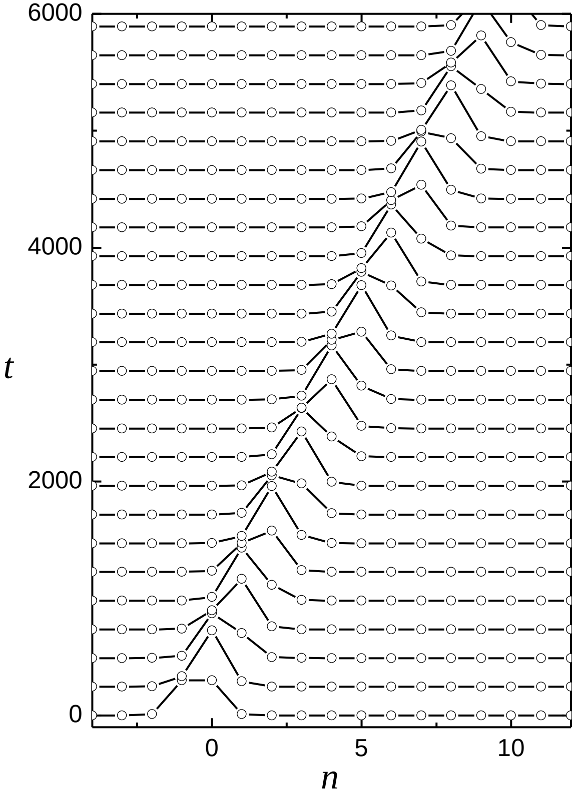


Рис. 4.1. Пространственно-временная эволюция $\left|\psi_n(t)\right|^2$ при движении светлого солитона (4.69) в ДНУШ с $\alpha_2 = \alpha_3 = 1/2$, при остальных $\alpha_i = 0$

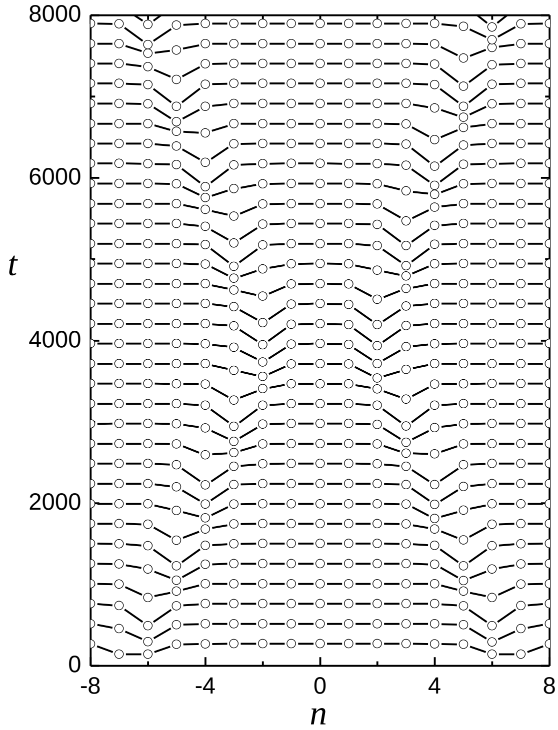


Рис. 4.2. Пространственно-временная эволюция $\left|\psi_n(t)\right|^2$ при столкновении двух темных солитонов (4.73) в ДНУШ с $\alpha_2 = \alpha_3 = 1/2$, при остальных $\alpha_i = 0$

Сосредоточимся теперь на свойствах движущегося светлого солитона (4.69) для случая $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = 0$. Параметры солитона, как отмечалось в подразделе 4.3.3, должны удовлетворять соотношениям (4.70).

Из (4.70) следует, что светлый солитон (4.69) существует, например, когда только α_3, α_5 и α_7 отличны от нуля. В этом частном случае условия (4.70) сводятся к

$$\alpha_3 = \frac{1-2\alpha_5 s_1^2}{1-2c_1 C},\ \alpha_7 = 2\left(1-\alpha_3-\alpha_5\right),$$
$$A^2 = \frac{c_1 S^2 C}{1+\alpha_3\left(c_1 C-1\right)-2\alpha_5 s_1^2}. \tag{4.115}$$

Количество ограничений таково, что один из параметров модели, для определенности α_5, может быть выбран произвольно и, при этом, параметры k и β могут свободно изменяться в определенных пределах. Оказывается, что в данном случае незигзагообразный стационарный солитон ($k=0$) существует, а зигзагообразный ($k=\pi$) не существует.

С другой стороны, в случае когда только α_2, α_3 и α_5 отличны от нуля, условия (4.70) сводятся к

$$\alpha_3 = -\frac{\alpha_5 c_2}{2c_1 C},\quad \alpha_2 = 1-\alpha_3-\alpha_5,$$
$$A^2 = \frac{c_1 S^2 C}{\left(\alpha_2+\alpha_3\right)c_1 C+\alpha_5 c_2}. \tag{4.116}$$

В данном случае существуют как незигзагообразный стационарный солитон ($k=0$), так и зигзагообразный ($k=\pi$).

В обоих случаях, когда условия (4.115) и (4.116) выполнены, численно было найдено, что стационарные светлые солитоны устойчивы, поскольку спектры малоамплитудных колебаний цепочки, включающей солитон, содержат только мнимые частоты.

Устойчивость движущихся солитонов в обоих случаях проверялась численно путем численного интегрирования соответствующих уравнений движения с начальными условиями, определяемыми точными решениями. При этом рассматривалась эволюция скорости солитонов с течением времени при $\varepsilon=1$. Для солитонов с амплитудами $A\sim 1$ и скоростями $\upsilon\sim 0.1$, для различных значений параметров модели $|\alpha_i|\sim 1$, было найдено, что солитон сохраняет свою скорость с большой точностью. Два примера таких расчетов, один для незигзагообразного солитона и другой для зигзагообразного, приведены на рис. 4.3 и 4.4, соответственно. На этих рисунках панель (a) показывает форму солитона в момент времени $t=0$, а панель (b) – скорость солитона как функцию времени для двух различных значений шага интегрирования, $\tau=5\times10^{-3}$ (сплошная линия) и $\tau=2.5\times10^{-3}$ (пунктир) с использованием схемы интегрирования с точностью $O(\tau^4)$. Можно видеть, что скорость солитона медленно растет с течением времени ввиду накопления ошибок при интегрировании уравнений движения. С уменьшением шага интегрирования точность интегрирования возрастает и скорость изменения скорости солитона уменьшается.

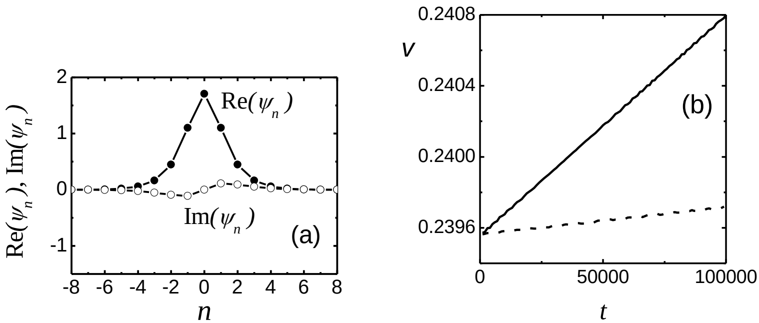


Рис. 4.3. (a) Профиль движущегося солитона (4.69) с параметрами (4.115) в момент $t=0$ при $\alpha_3=-0.473034$, $\alpha_5=1$, $\alpha_7=0.946068$, $\beta=1$, $k=0.102102$. (b) Скорость солитона как функция времени для двух различных значений шага интегрирования, $\tau=5\times10^{-3}$ (сплошная линия) и $\tau=2.5\times10^{-3}$ (пунктир)

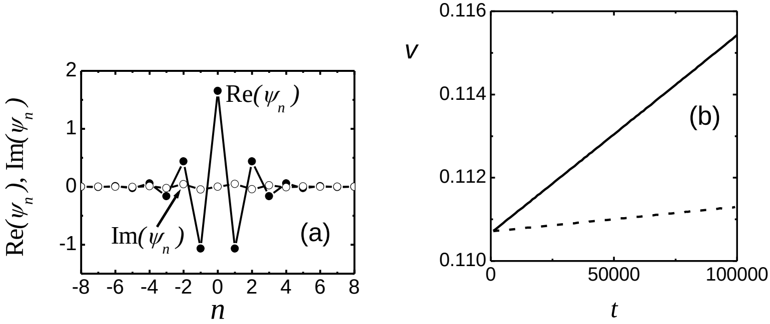


Рис. 4.4. (a) Профиль движущегося солитона (4.69) с параметрами (4.116) в момент $t=0$ при $\alpha_2=0.603116$, $\alpha_3=0.0968843$, $\alpha_5=0.3$, $\beta=1$, $k=3.09447$. (b) Скорость солитона как функция времени для двух различных значений шага интегрирования, $\tau=5\times10^{-3}$ (сплошная линия) и $\tau=2.5\times10^{-3}$ (пунктир)

Аналогичным образом было показано, что и для темных солитонов существуют области параметров модели и параметров солитонов, где их движение устойчиво.

Выводы

В четвертой главе, в подразделе 4.3.3, был успешно применен метод идентификации особых дискретизаций НУШ с кубической нелинейностью, допускающих точные трансляционно-инвариантные стационарные решения, а, следовательно, дискретизаций без потенциала Пайерлса-Набарро. Метод прост, он основан на прямой подстановке в дискретное уравнение движения выражений, определяющих движущиеся решения в форме эллиптических функций Якоби и в нахождении условий на коэффициенты уравнения и на параметры решения, обращающие уравнение движения в тождество. Таким образом были получены решения вида sn, cn и dn, которые, в пределе $m \to 1$ свелись к решениям описывающим движущиеся светлый и темный солитоны, для которых в подразделе 4.3.5 было показано, что они могут быть устойчивы в некоторых интервалах параметров.

Кроме того, для рассмотренного обобщенного ДНУШ (4.36) был найден ряд законов сохранения (подраздел 4.3.1) и случаи когда стационарное уравнение интегрируемо (подраздел 4.3.2), то есть, может быть сведено к двухточечному нелинейному отображению.

Заключение

В монографии теоретически и с использованием численных методов исследованы волны солитонного типа в дискретных моделях Клейн-Гордона и в дискретном нелинейном уравнении Шредингера, которые допускают статические (стационарные) решения, свободные от потенциала Пайерлса-Набарро.

Перечислим основные результаты и выводы.

1. Построены две дискретные модели Клейн-Гордона (ДМКГ1 и ДМКГ2) с асимметричным потенциалом. Модель ДМКГ1 является классической дискретизацией в то время как ДМКГ2 получена по методу дискретизированного первого интеграла [7]. Для статической задачи модели ДМКГ2 может быть получен первый интеграл, имеющий вид двухточечного нелинейного отображения. Статические кинковые решения могут быть найдены из этого отображения для любого допустимого начального значения. Этот факт говорит об отсутствии потенциала Пайерлса-Набарро в такой модели, поскольку равновесный кинк может быть размещен произвольно относительно решетки.

2. Показано, что свойства кинковых решений в ДМКГ1 и ДМКГ2 сильно отличаются, что можно объяснить наличием потенциала Пайерлса-Набарро в ДМКГ1 и его отсутствием в ДМКГ2. Кинк в ДМКГ2 имеет трансляционную моду с нулевой частотой для любого значения параметра дискретности. ДМКГ1 имеет такую моду лишь при малых h. Наличие трансляционной моды у кинка в ДМКГ2 при любом h свидетельствует о повышенных

транспортных свойствах этой дискретной модели. Кинки в ДМКГ2 не захвачены потенциалом Пайерлса-Набарро и, следовательно, они могут быть ускорены сколь угодно малым внешним полем.

3. При изучении ратчета кинка в ДМКГ2 под действием гармонической вынуждающей силы было показано, что при отсутствии вязкости, под действием гармонической внешней силы кинк движется равноускоренно. Ускорение кинка слабо зависит от параметра дискретности h. При приближении частоты внешней силы к частоте собственной колебательной моды, локализованной на кинке, ускорение кинка увеличивается на два порядка. При изучении ратчета кинка в ДМКГ2 с учетом вязкости было установлено, что дрейфовая скорость кинка меняется с положительной на отрицательную при коэффициенте вязкости выше некоторого значения.

4. Для обобщенного дискретного нелинейного уравнения Шредингера (ДНУШ) с кубической нелинейностью получены законы сохранения нормы, импульса и энергии; показаны случаи, когда задача отыскания стационарных решений интегрируема; выписаны точные движущиеся решения в виде светлого и темного солитонов и показано, что существуют области параметров, где солитоны устойчивы; получен ряд точных короткопериодических и апериодических решений.

Приложение А
Программа нахождения корней алгебраического уравнения четвертой степени для Borland C++Builder

Ниже приводится программа на алгоритмическом языке C++ для нахождения корней алгебраического уравнения четвертой степени, записанного в виде $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$. Входными параметрами процедуры являются коэффициенты уравнения, а выходными его корни.

```
void Quartic(double a, double b, double c, double d,
double e){
   int XX=600, YY=100;
   double x, y, z, p, q, r, y1, z1, delta1, delta2;
   b = b/a; c = c/a; d = d/a; e = e/a;
   a = 1.0;
   y = d/c; z = e/c;
   x = 1.0;

   for(int i=1; i<=10000; i++){
      y1 = (d-z*(b-y))/(c-z-y*(b-y));
      z1 = e/(c-z-y*(b-y));
      y = y1;
      z = z1;
   }// for i

   // Make the roots more precise with the Newton-
Raphson method
   for (int k=0; k<10000; k++){
      double z2, z3, z4, z5, z6;
      z2=z*z;
      z3=z*z2;
```

```
      z4=z*z3;
      z5=z*z4;
      z6=z*z5;
      double F, FP;
      F=z6-c*z5+(b*d-e)*z4+(2.0*c*e-d*d-
b*b*e)*z3+e*(b*d-e)*z2-c*e*e*z+e*e*e;
      FP=6.0*z5-5.0*c*z4+4.0*(b*d-e)*z3+3.0*(2.0*c*e-
d*d-b*b*e)*z2+2.0*e*(b*d-e)*z-c*e*e;
      z1=z-(F)/(FP);
      z=z1;
   }
   y=z*(d-b*z)/(e-z*z);

   Form1->Canvas->TextOut(5+XX, 130, "y = ");
   Form1->Canvas->TextOut(55+XX, 130, y);
   Form1->Canvas->TextOut(195+XX, 130, "z = ");
   Form1->Canvas->TextOut(245+XX, 130, z);

   p = 1.0;
   q = b-y;
   r = (c-z)-y*(b-y);

   delta1 = q*q - 4*p*r;
   delta2 = y*y - 4*x*z;
   DEL1=delta1;
   DEL2=delta2;

   Form1->Canvas->TextOut(5+XX, 1, "delta1 = ");
   Form1->Canvas->TextOut(55+XX, 1, delta1);
   Form1->Canvas->TextOut(195+XX, 1, "delta2 = ");
   Form1->Canvas->TextOut(245+XX, 1, delta2);

   if(delta1<0){
      Form1->Canvas->TextOut(5+XX, 15, "Roots R1 and
R2 are complex");

      double rp, ip;

      delta1 = -delta1;
      rp = -q/(2*p);
      ip = (sqrt(delta1))/(2*p);
```

```
      Form1->Canvas->TextOut(5+XX, 30, rp);
      Form1->Canvas->TextOut(125+XX, 30, "+i");
      Form1->Canvas->TextOut(145+XX, 30, ip);
      Form1->Canvas->TextOut(5+XX, 45, rp);
      Form1->Canvas->TextOut(125+XX, 45, "-i");
      Form1->Canvas->TextOut(145+XX, 45, ip);
      delta1 = -delta1;
   }
   if(delta2<0){
      Form1->Canvas->TextOut(5+XX, 60, "Roots R3 and
R4 are complex");

      double rp, ip;

      delta2 = -delta2;
      rp = -y/(2*x);
      ip = (sqrt(delta2))/(2*x);
      Form1->Canvas->TextOut(5+XX, 75, rp);
      Form1->Canvas->TextOut(125+XX, 75, "+i");
      Form1->Canvas->TextOut(145+XX, 75, ip);
      Form1->Canvas->TextOut(5+XX, 90, rp);
      Form1->Canvas->TextOut(125+XX, 90, "-i");
      Form1->Canvas->TextOut(145+XX, 90, ip);
      delta2 = -delta2;
   }
   if(delta1>=0){
      Form1->Canvas->TextOut(5+XX, 15, "Roots R1 and
R2 are real");
      float r1, r2;

      r1 = (-q+sqrt(delta1))/(2*p);
      r2 = (-q-sqrt(delta1))/(2*p);

      Form1->Canvas->TextOut(5+XX, 30, r1);
      Form1->Canvas->TextOut(5+XX, 45, r2);
      R1=r1;
      R2=r2;
   }
   if(delta2>=0){
      Form1->Canvas->TextOut(5+XX, 60, "Roots R3 and
R4 are real");
```

```
        float r1, r2;

        r1 = (-y+sqrt(delta2))/(2*x);
        r2 = (-y-sqrt(delta2))/(2*x);

        Form1->Canvas->TextOut(5+XX, 75, r1);
        Form1->Canvas->TextOut(5+XX, 90, r2);
        R3=r1;
        R4=r2;
    }
}
```

Приложение Б
Тождества для эллиптических функций Якоби

Выпишем ряд полезных тождеств для эллиптических функций Якоби, опубликованных, впервые полученные Авинашем Кхаре и использовавшиеся в работах [66-68], которые облегчают построение точных решений некоторых дискретных уравнений с кубической нелинейностью.

$$\begin{aligned}&\mathrm{dn}^2(x,m)\left[\mathrm{dn}(x+a,m)+\mathrm{dn}(x-a,m)\right]=\\&=-\mathrm{cs}^2(a,m)\left[\mathrm{dn}(x+a,m)+\mathrm{dn}(x-a,m)\right]+\\&+2\mathrm{ns}(a,m)\mathrm{ds}(a,m)\mathrm{dn}(a,m),\end{aligned} \qquad (\text{П.1})$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{dn}(x,m)\mathrm{dn}(x+a,m)\mathrm{dn}(x-a,m)=\\&=-\mathrm{cs}(a,m)\mathrm{cs}(2a,m)\left[\mathrm{dn}(x+a,m)+\mathrm{dn}(x-a,m)\right]+\\&+\mathrm{cs}^2(a,m)\mathrm{dn}(x,m),\end{aligned} \qquad (\text{П.2})$$

$$\begin{aligned}&m\mathrm{cn}^2(x,m)\left[\mathrm{cn}(x+a,m)+\mathrm{cn}(x-a,m)\right]\\&=-\mathrm{ds}^2(a,m)\left[\mathrm{cn}(x+a,m)+\mathrm{cn}(x-a,m)\right]+\\&+2\mathrm{ns}(a,m)\mathrm{cs}(a,m)\mathrm{cn}(a,m),\end{aligned} \qquad (\text{П.3})$$

$$\begin{aligned}&m\mathrm{cn}(x,m)\mathrm{cn}(x+a,m)\mathrm{cn}(x-a,m)\\&=-\mathrm{ds}(a,m)\mathrm{ds}(2a,m)\left[\mathrm{cn}(x+a,m)+\mathrm{cn}(x-a,m)\right]+\\&+\mathrm{ds}^2(a,m)\mathrm{cn}(x,m).\end{aligned} \qquad (\text{П.4})$$

Список литературы

1. Flach S., Willis C. R. Discrete breathers // Phys. Rep. – 1998.–V.295. – P.181-264.

2. Hennig D., Tsironis G. Wave transmission in nonlinear lattices // Phys. Rep. –1999. – V.307. – P. 333-432.

3. Kevrekidis P.G., Rasmussen K.O., Bishop A.R. Pattern forming dynamical instabilities of Bose-Einstein condensates // Int. J. Mod. Phys. B. – 2001. – V.15. – P. 2833-2862.

4. Mena-Contla A., Serkin V.N., Belyaeva T.L., Peña-Moreno R., Agüero M.A., Hernandez-Tenorio C., and others, ‘Extreme Nonlinear Waves in External Gravitational-like Potentials: Possible Applications for the Optical Soliton Supercontinuum Generation and the Ocean Coast Line Protection’ Optik. 2018. – V. 161. – P. 187–195.

5. Christodoulides D.N., Lederer F., Silberberg Y. Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices // Nature. – 2003. – V.424. – P. 817-823.

6. Braun O.M., Kivshar Yu.S. The Frenkel-Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications. – Berlin: Springer, 2004. – 472 p.

7. Incommensurate Phases in Dielectrics: Part 1, Fundamentals, Eds. R. Blinc and A.P. Levanyuk, V.14.1, Amsterdam: North-Holland, 1986. – 417 p.

8. Фридель Ж. Дислокации. – М: Мир, 1967. – 440 с.

9. Хирт Д., Лоте И. Теория дислокаций. – М: Атомиздат, 1972. – 600 с.

10. Хирт Д. Дислокации / В кн.: Физическое металловедение. Т. 3. Физико-механические свойства

металлов и сплавов / Под ред. Р. Кана. – М.: Мир, 1987. – С. 74-111.

11. Noskova N. I., Mulyukov R. R. Physical fundamentals of formation and stabilization of nanostructures in metals and multiphase alloys under severe plastic deformation / In: Severe Plastic Deformation: Towards Bulk Production of Nanostructured Materials / Ed. Burhanettin. – New York: Nova Publishers. – 2006. – P. 23-36.

12. Koneva N.A. Internal long-range stress fields in ultrafine grained materials / In: Severe Plastic Deformation: Towards Bulk Production of Nanostructured Materials / Ed. Burhanettin. – New York: Nova Publishers. – 2006. – P. 249-274.

13. Kozlov E.V. Structure and resistance to deformation of UFG metals and alloys / In: Severe Plastic Deformation: Towards Bulk Production of Nanostructured Materials / Ed. Burhanettin. – New York: Nova Publishers. – 2006. – P. 295-332.

14. Кайбышев О.А., Валиев Р.З. Границы зерен и свойства металлов. – М: Металлургия, 1987. – 216 с.

15. Дударев Е.Ф. Микропластическая деформация и предел текучести поликристаллов. - Томск: изд. ТГУ, 1988. – 256 с.

16. Гуткин М.Ю., Овидько И.А. Предел текучести и пластическая деформация нанокристаллических материалов // Успехи механики. – 2003. – №1. – С. 68-125.

17. Кирсанов В.В., Суворов А.Л., Трушин Ю.В. Процессы радиационного дефектообразования в металлах. М.: Энергоатомиздат, 1985. – 272 с.

18. Валиев Р.З., Корзников А.В., Мулюков Р.Р. Структура и свойства металлических материалов с субмикрокристаллической структурой // ФММ. – 1992. – №4. – С. 70-86.

19. Орлов А.Н., Перевезенцев В.Н., Рыбин В.В. Границы зерен в металлах. – М.: Металлургия, 1980. – 156 с.

20. Мак Лин Д. Механические свойства металлов. – М.: Металлургия, 1965. – 432 с.

21. Глейтер Г., Чалмерс Б. Большеугловые границы зерен. – М.: Металлургиздат, 1975. – 375 с.

22. Бокштейн Б.С., Копецкий Ч.В., Швиндлерман Л.С. Термодинамика и кинетика границ зерен в металлах. – М.: Металлургия, 1986. – 224 с.

23. Копецкий Ч.В., Орлов А.Н., Фионова Л.К. Границы зерен в чистых материалах. – М.: Наука, 1987. – 160 с.

24. Конева Н.А., Козлов Э.В. Природа субструктурного упрочнения // Изв. вузов. Физика. – 1982. – №8. – С. 3-14.

25. Смирнов А.А. Молекулярно-кинетическая теория металлов. – М.: Наука, 1966. – 488 с.

26. Козлов Э.В., Старостенков М.Д., Попов Л.Е. Применение потенциалов парного взаимодействия в теории атомного дальнего порядка / В кн.: Строение, свойства и применение металлов. – М.: Наука, 1974. – С. 35-39.

27. Конева Н.А., Козлов Э.В. Физическая природа стадийности пластической деформации // Изв. вузов. Физика. – 1990. – №2. – С. 89-106.

28. Rojas-Rojas, Santiago, Uta Naether, Aldo Delgado, and Rodrigo A. Vicencio, 'Nonlinear Localized Modes in Dipolar Bose–Einstein Condensates in Two-Dimensional Optical Lattices', Physics Letters A. 2016. – Vol. – 380. – № 39. – P. 3185–3191.

29. Dawson S.P., Keizer J., Pearson J.E. Fire-diffuse-fire model of dynamics of intracellular calcium waves // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. – 1999. – V. 96. – p. 6060-6063.

30. Ustinov A.V., Doderer T., Vernik I.V., Pedersen N.F., Huebener R.P., Oboznov V.A. Experiments with solitons in annular Josephson junctions // Physica D. – 1993 V.68. – p. 41-44.

31. Peyrard M., Bishop A.R. Statistical mechanics of a nonlinear model for DNA denaturation // Phys. Rev. Lett. –

1989. – V. 62. – p. 2755-2758.

32. Laplante J.P., Erneux T. Propagation failure in arrays of coupled bistable chemical reactors // J. Phys. Chem. – 1992. – V. 96. – p. 4931-4934.

33.Габов С.А. Введение в теорию нелинейных волн. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 177 с.

34. Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. Solitons and Nonlinear Wave Equations. – London: Academic Press, 1982. – 640 p.

35. Infeld E., Rowlands G. Nonlinear Waves, Solitons and Chaos. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 423 p.

36.Toda M. Theory of nonlinear lattices. Berlin: Springer-Verlag, 1981, 203 p.

37. Ablowitz M. J., Ladik J. F. Nonlinear differential–difference equations // J. Math. Phys. – 1975. – V. 16. – 598-603.

38. Ablowitz M. J., Ladik J. F. Nonlinear differential–difference equations and Fourier analysis // J. Math. Phys. – 1976. – V. 17. – 1011-1018.

39. Orfanidis S. J. Sine-Gordon equation and nonlinear sigma model on a lattice // Phys. Rev. D. – 1978. – V. 18. – P. 3828-3832.

40. Encyclopedia of nonlinear science / Edited by A. Scott. – New York: Routledge, 2005. – 1053 P.

41. Campbell D.K., Rosenau P., Zaslavsky G.M. Introduction: The Fermi-Pasta-Ulam problem – The first fifty years // Chaos, Vol. 15, No. 1. (2005) P. 015101-015104

42. Sievers A. J., Takeno S. Intrinsic localized modes in anharmonic crystals //Phys. Rev. Lett. 61, (1988) P. 970-973.

43. Dauxois T., Khomeriki R., Piazza F., Ruffo S., The Anti-FPU problem // Chaos 15, 2005. P. 015110 -01520.

44. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой: Нелокальная теория упругости. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 1975. - 416 с.

45. Maugin G.A. On the Structure of the Theory of Polar Elasticity // Phil.Trans.Roy.Soc.Lond. A. – 1998. – V.356. – P. 1367-1395.

46. Васильев А.А. Континуальное моделирование двухрядной конечной дискретной системы с учетом краевых эффектов // Вестник МГУ, Сер. 1 Математика и механика. – 1996. – № 5. – С. 66-68.

47. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М: Наука, 1973, 416с.

48. Bender C. M., Tovbis A. Continuum limit of lattice approximation schemes // J. Math. Phys. – 1997. – V. 38. – P. 3700-3717.

49. Quispel G.R.W., Roberts J.A.G., Thompson C.J. Integrable mappings and soliton equations II // Physica D. – 1989. –V. 34. –P. 183-192.

50. Speight J.M., Ward R.S. Kink dynamics in a novel discrete sine-Gordon system // Nonlinearity. – 1994. – V. 7. – P. 475-484.

51. Speight J.M. A discrete phi4 system without a Peierls-Nabarro potential // Nonlinearity. – 1997. – V. 10. –P. 1615-1625.

52. Speight J.M. Topological discrete kinks // Nonlinearity. – 1999. – V. 12. – P. 1373-1387.

53. Kevrekidis P.G. On a class of discretizations of Hamiltonian nonlinear partial differential equations // Physica D. – 2003. – V. 183. – P. 68-86.

54. Dmitriev S.V., Kevrekidis P.G., Yoshikawa N. Discrete Klein-Gordon models with static kinks free of the Peierls-Nabarro potential // J. Phys. A: Math. Gen. – 2005. – V. 38. – P. 7617-7627.

55. Barashenkov I.V., Oxtoby O.F., Pelinovsky D.E. Translationally invariant discrete kinks from one-dimensional maps // Phys. Rev. E. – 2005. – V. 72. – P. 35602R-4.

56. Cooper F., Khare A., Mihaila B., Saxena A. Exact

solitary wave solutions for a discrete lambda-phi4 field theory in 1+1 dimensions // Phys. Rev. E. – 2005. – V. 72. – P. 36605-36615.

57. Dmitriev S.V., Kevrekidis P.G., Yoshikawa N. Standard nearest neighbor discretizations of Klein–Gordon models cannot preserve both energy and linear momentum // J. Phys. A: Math. Gen. – 2006. – V.39. – P. 7217-7226.

58. Dmitriev S.V., Kevrekidis P.G., Yoshikawa N., Frantzeskakis D.J. Exact static solutions for discrete φ^4 models free of the Peierls–Nabarro barrier: Discretized first–integral approach // Phys. Rev. E.–2006.–V.74.– P. 046609-046623.

59. Dmitriev S.V., Kevrekidis P.G., Khare A., Saxena A. Exact static solutions to a translationally invariant discrete φ^4 model // J. Phys. A: Math. Theor. – 2007.–V.40. – P. 6267-6286.

60. Roy I., Dmitriev S.V., Kevrekidis P.G., Saxena A. Comparative study of different discretizations of the φ^4 model // Phys. Rev. E. – 2007. – V.76. – P. 026601-026615.

61. Speight J.M., Zolotaryuk Y. Kinks in dipole chains // Nonlinearity. – 2006. – V. 19. – P. 1365-1382.

62. Dmitriev S.V., Kevrekidis P.G., Sukhorukov A.A., Yoshikawa N., Takeno S. Discrete nonlinear Schrödinger equations free of the Peierls–Nabarro potential // Phys. Lett. A. – 2006. – V.356. – P. 324-332.

63. Pelinovsky D.E. Translationally invariant nonlinear Schrödinger lattices // Nonlinearity. – 2006.–V.19. – P. 2695-2716.

64. Dmitriev S.V., Kevrekidis P.G., Yoshikawa N., Frantzeskakis D.J. Exact stationary solutions for the translationally invariant discrete nonlinear Schrödinger equations // J. Phys. A: Math. Theor. – 2007. – V.40. – 1727-1746.

65. Kevrekidis P.G., Dmitriev S.V., Sukhorukov A.A. On a class of spatial discretizations of equations of the nonlinear Schrödinger type // Mathematics and Computers in Simulation. –

2007. – V.74. – P. 343-351.

66. Khare A., Dmitriev S.V., Saxena A., Exact moving and stationary solutions of a generalized discrete nonlinear Schrödinger equation // J. Phys. A: Math. Theor. – 2007. – V.40. – P. 11301-11317.

67. Khare A., Rasmussen K., Samuelsen M.R., Saxena A. J. Exact solutions of the saturable discrete nonlinear Schrödinger equation // Phys. A. – 2005. – V.38. – P. 807-814.

68. Khare A., Rasmussen K., Salerno M., Samuelsen M.R., Saxena A. Discrete nonlinear Schrödinger equations with arbitrarily high-order nonlinearities // Phys. Rev. E.– 2006.– V.74.– P. 016607-016617.

69. Bogomol'nyi E.B. The stability of classical solutions // J. Nucl. Phys. – 1976. – V. 24. – P. 449-455.

70. Kivshar Yu.S., Malomed B.A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems // Rev. Mod. Phys. – 1989. –V. 61. – P. 763-915.

71. Besley J. A., Miller P. D., Akhmediev N. N. Soliton interactions in perturbed nonlinear Schrodinger equations // Phys. Rev. E. – 2000. – V. 61. – P. 7121-7133.

72. Panoiu N.-C., Mihalache D., Mazilu D., Crasovan L.-C., Mel'nikov I. V., Lederer F. Soliton dynamics of symmetry-endowed two-soliton solutions of the nonlinear Schrodinger equation // Chaos. – 2000. – V. 10. – P. 625-640.

73. Ostrovskaya E. A., Kivshar Yu. S., Skryabin D.V., Firth W.J. Stability of Multihump Optical Solitons // Phys. Rev. Lett. – 1999. – V. 83. – P. 296-299.

74. Etrich C., Peschel U., Lederer F., Malomed B. Collision of solitary waves in media with a second-order nonlinearity // Phys. Rev. A. – 1995. – V. 52. – P. R3444-R3447.

75. Braun O.M., Kivshar Yu.S., Peyrard M. Kink's internal modes in the Frenkel-Kontorova model // Phys. Rev. E. – 1997. – V. 56. – P. 6050-6064.

76. Kivshar Yu.S., Pelinovsky D.E., Cretegny T., Peyrard M. Internal modes of solitary waves // Phys. Rev. Lett. – 1998. – V. 80. – P. 5032-5035.

77. Kevrekidis P.G., Jones C.K.R.T. Bifurcation of internal solitary wave modes from the essential spectrum // Phys. Rev. E. – 2000. – V. 61. – P. 3114-3121.

Научное издание

Бебихов Юрий Владимирович
Корзникова Елена Александровна
Четвериков Александр Петрович
Дмитриев Сергей Владимирович

Волны солитонного типа в нелинейных решетках без потенциала Пайерлса-Набарро

Монография

Издательство «Наукоемкие технологии»
ООО «Корпорация «Интел Групп»
http://publishing.intelgr.com
E-mail: publishing@intelgr.com
Тел.: (812) 945-50-63

Подписано в печать 29.11.2018.
Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Объем 6,69 печ.л. Тираж 500 экз.

Монография публикуется в авторской редакции