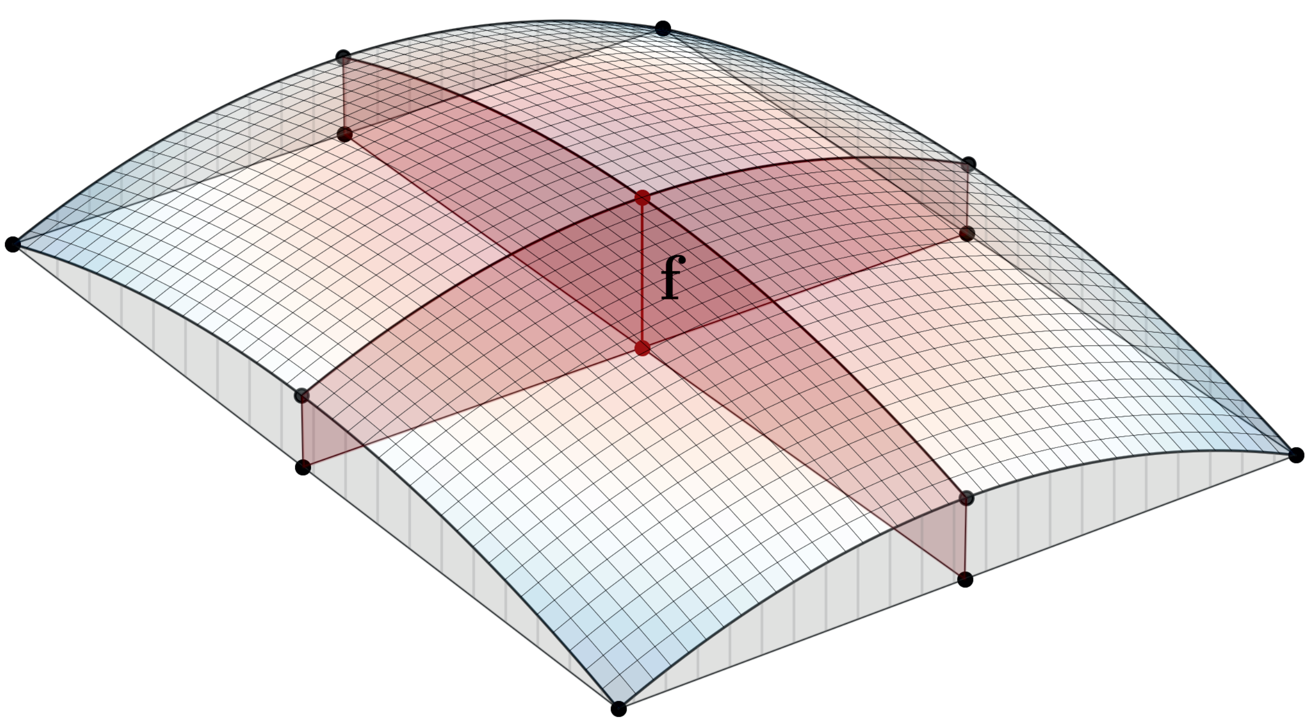
Ю. А. Колотовичев

Расчёт пологих оболочек на прямоугольном плане

Учебно-методическое пособие



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра строительной и теоретической механики

Ю.А. Колотовичев

Расчёт пологих оболочек на прямоугольном плане

Учебно-методическое пособие

Электронное издание
локального распространения

Санкт-Петербург
Наукоемкие технологии
2022

ISBN 978-5-6047846-9-3

УДК 624.04
ББК 38.112
К61

Рецензенты:
доцент, доктор технических наук В.В. Филатов
(МГСУ)
кандидат технических наук А.М. Шахраманьян
(ООО «СОДИС ЛАБ»)

К61 Колотовичев Ю. А. Расчёт пологих оболочек на прямоугольном плане [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие. – Электрон, текстовые дан. (37,4 Мб). – СПб.: Наукоемкие тех-нологии, 2022. – 43 с. – 1 электрон., опт. диск (CD-ROM).

ISBN 978-5-6047846-9-3

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по программе Специалитета по специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» специализации «Строительство высотных и большепролетных зданий и сооружений» и содержит необходимые сведения для изучения одноимённого раздела дисциплины «Теория расчета пластин и оболочек». Пособие может быть также полезно преподавателям при подготовке и проведении практических занятий.

В пособии приведены краткое изложение теоретических основ расчёта пологих оболочек, основные уравнения теории тонких пологих оболочек, расчетные формулы для определения напряженно-деформированного состояния методом Навье. Подробно рассмотрены вопросы приближения различных видов нагрузок частичными суммами тригонометрических рядов. Приведён пример расчёта пологой оболочки положительной Гауссовой кривизны на действие комплекса распределенных и сосредоточенных нагрузок.

Текстовое электронное издание

Минимальные системные требования:
– процессор: Intel x86, x64, AMD x86, x64 не менее 1 ГГц;
– оперативная память RAM ОЗУ: не менее 512 МБайт;
– свободное место на жестком диске (HDD): не менее 120 МБайт;
– операционная система: Windows XP и выше;
– Adobe Acrobat Reader;
– дисковод CD-ROM;
– мышь.

УДК 624.04
ББК 38.112

ISBN 978-5-6047846-9-3

Учебное издание

Колотовичев Юрий Александрович

Расчёт пологих оболочек на прямоугольном плане

Учебно-методическое пособие

Текстовое электронное издание

Издательство «Наукоемкие технологии»
ООО «Корпорация «Интел Групп»
https://publishing.intelgr.com
E-mail: publishing@intelgr.com
Тел.: +7 (812) 945-50-63

Подписано к использованию 29.03.2022
Объем издания – 37,4 Мб
Комплектация издания – 1 CD
Тираж 100 CD

ISBN 978-5-6047846-9-3

9 785604 784693

Содержание

Введение

Учебно-методическое пособие разрабатывалось в предположении о знании читателями базовых понятий строительной механики и теории упругости. Автор полагал, что студенты к моменту освоения методов расчёта пологих оболочек уже имеют представление о теории поверхностей и методах расчёта изгибаемых пластин. В том случае, если читатель предполагает использовать данное пособие в качестве своего первого источника знаний о тонкостенных пространственных конструкциях, рекомендуем ему вначале ознакомиться с материалами первых глав пособия [1] или главы X учебника [2].

Автор стремился адаптировать используемый математический аппарат под тот объем знаний, который обычно получают студенты технических вузов строительной направленности. Тем не менее для осознанного освоения предлагаемого материала рекомендуем освежить в памяти некоторые базовые вопросы приближения произвольных функций тригонометрическими рядами, которые особо хорошо изложены в учебнике [3].

Расчёт пологой оболочки, приведенный в главе 5, выполнен с помощью средств языка программирования Python 3, его специализированных библиотек NumPy, SciPy, Matplotlib и среды разработки Jupyter, которые являются мощным современным средством инженерного анализа, рекомендуемым к освоению студентами наряду с прикладными системами компьютерной алгебры такими, как Mathcad, MATLAB, Maple и т.п. Примеры исходного кода решения задачи можно загрузить с официальной страницы кафедры Строительной и Теоретической механики на сайте Московского Государственного Строительного Университета.

1. Основные понятия и определения

`Тонкими` называют оболочки, для которых отношение толщины h к минимальному радиусу кривизны поверхности составляет [1]:

$$\frac{1}{30} \div \frac{1}{1000}$$

`Пологой` называется оболочка, имеющая относительно небольшую стрелу подъема f над плоскостью своей проекции, размерами $a \times b$ (рис. 1). За числовой критерий пологости принято брать неравенство:

$$f \leq \frac{1}{5} \min(a, b)$$

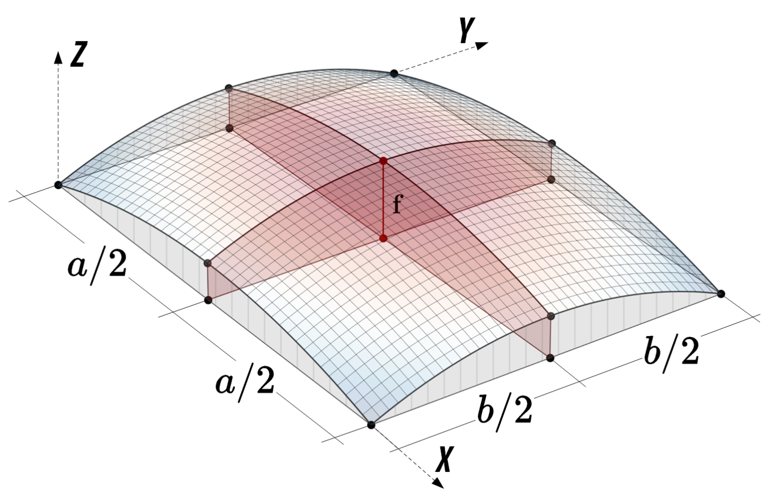


Рис. 1. Пологая оболочка на прямоугольном плане

Техническая теория тонких оболочек основывается на ряде гипотез Кирхгофа, являющихся обобщением гипотез технической теории изгиба балок (модели Эйлера-Бернулли) на тонкостенные пространственные конструкции [4]:

- `Гипотеза прямых нормалей`: прямолинейный элемент, перпендикулярный срединной поверхности до деформации, остается прямым и перпендикулярным деформированной срединной поверхности и не изменяет своей длины ($\varepsilon_z = 0$);

- `Гипотеза о «ненадавливании» слоёв`: нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с прочими напряжениями ($\sigma_z = 0$).

Отметим, что допущение о недеформируемости срединной поверхности, справедливое при исследовании изгиба пластин, принимать `нельзя`. В этом отношении оболочка так же отличается от плиты, как арка от балки [5]. Работа оболочек под нагрузкой обязательно сопровождается появлением мембранных усилий, действующих в срединной поверхности.

Теория пологих оболочек создана выдающимся советским учёным-механиком В.З. Власовым и основывается на двух гипотезах, дополняющих основные гипотезы технической теории тонких оболочек о прямых нормалях и отсутствии взаимодействия слоёв.

В.З. Власов
(1906-1958)

Геометрическая гипотеза: геометрия срединной поверхности оболочки приближенно отождествляется с геометрией плоскости её проекции.

Статическая гипотеза: в уравнениях равновесия можно пренебречь моментными членами, содержащими в виде коэффициентов выражения кривизн и их производные.

Геометрическая гипотеза позволяет считать, что коэффициенты Ляме (первой квадратичной формы поверхности) равны

$$A = B = 1, \tag{1}$$

а криволинейные координаты α и β равны прямолинейным декартовым координатам x и y соответственно:

$$\begin{aligned} \alpha &= x \\ \beta &= y \end{aligned} \tag{2}$$

Гауссову кривизну допустимо считать приближенно равной нулю:

$$K = k_1 k_2 \approx 0 \tag{3}$$

Статическая гипотеза даёт возможность пренебречь влиянием поперечных сил и перемещений в плоскости (x, y) в определяющих уравнениях (сохранятся только члены, содержащие перемещения по нормали к срединной поверхности w).

Далее в данном пособии мы будем использовать двухиндексовую систему обозначения (нотацию) компонент напряжений и внутренних усилий, а координатные направления вдоль линий главных кривизн k_1 и k_2 и в направлении нормали к срединной поверхности будем обозначать **1**, **2** и **3** соответственно. Первый индекс в обозначениях усилий и напряжений указывает на нормаль к площадке, второй – на направление напряжения или усилия.

Систему напряжений, действующих в поперечных сечениях тонкой оболочки (рис. 2, *а*), можно привести к статически эквивалентным внутренним усилиям, положительные направления которых приведены на рис. 2, *б*. Проекции интенсивности внешней нагрузки на координатные направления обозначим p_1, p_2 и p_3.

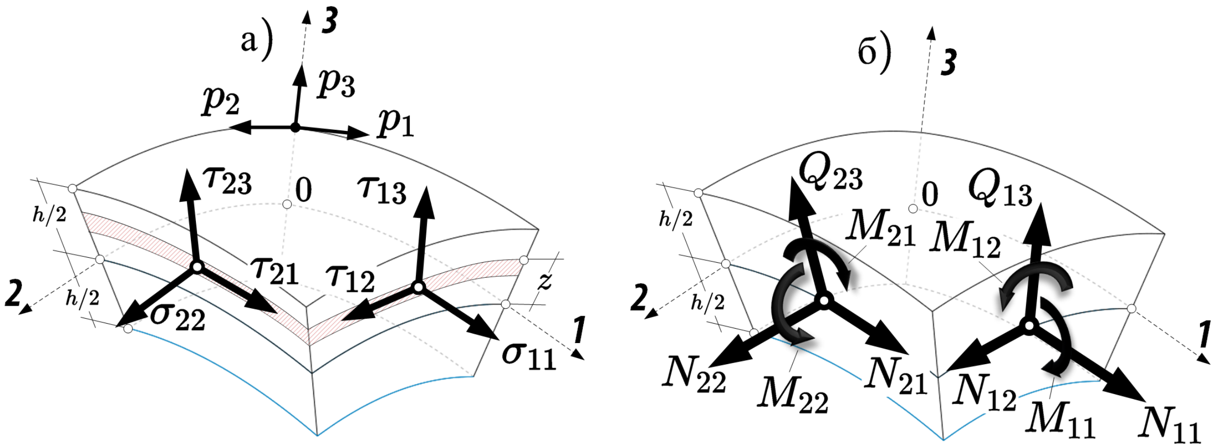


Рис. 2. Равновесие бесконечно малого элемента оболочки: а) – система напряжений; б) – внутренние усилия

Контрольные вопросы

1. При каких условиях оболочка считается тонкой?
2. Какие оболочки называют пологими?
3. Перечислите гипотезы, которые принимаются при расчёте тонких оболочек?
4. Какая из гипотез Кирхгофа не используется в теории тонких оболочек? Почему?
5. Какие дополнительные гипотезы вводятся при расчете пологих оболочек?
6. Покажите на элементе тонкой оболочки систему напряжений, возникающую под действием внешних нагрузок?
7. Изобразите на элементе тонкой оболочки внутренние усилия, которые учитываются при расчёте?

2. Основные уравнения теории пологих оболочек

Общие уравнения теории упругих оболочек получены в [1]. Упростим эти известные соотношения с помощью положений геометрической и статической гипотез. Во всех геометрических уравнениях и уравнениях равновесия выполним преобразования с учётом (1) и (2).

2.1. Уравнения равновесия

Проецируя внутренние и внешние силы на координатные направления, дополняя их моментными уравнениями, получим 5 уравнений относительно 8-и неизвестных усилий.

2.1.1. Проекции на координатные оси

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(BN_{11}\right) - N_{22}\frac{\partial B}{\partial a} + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(A^2N_{12}\right) + Q_{13}k_1AB + ABp_1 = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(AN_{22}\right) - N_{11}\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B^2N_{21}\right) + Q_{23}k_2AB + ABp_2 = 0 \tag{5}$$

$$-\left(k_1N_{11} + k_2N_{22}\right) + \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(BQ_{13}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(AQ_{23}\right)\right] + p_3 = 0 \tag{6}$$

Исключая из уравнений производные коэффициентов Ляме, а также используя следствие из геометрической гипотезы о малости проекции поперечных сил Q_{13} и Q_{23} на плоскость (x, y) получим:

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} + p_1 = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial N_{22}}{\partial y} + \frac{\partial N_{21}}{\partial x} + p_2 = 0 \tag{8}$$

$$-\left(k_1 N_{11} + k_2 N_{22}\right) + \frac{\partial Q_{13}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{23}}{\partial y} + p_3 = 0 \tag{9}$$

2.1.2. Моментные уравнения

Проводя аналогичные преобразования над моментными уравнениями

$$\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(B^2 M_{21}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(A M_{22}\right) - M_{11}\frac{\partial A}{\partial \beta} - Q_{23}AB = 0 \tag{10}$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(A^2 M_{12}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(B M_{11}\right) - M_{22}\frac{\partial B}{\partial \alpha} - Q_{13}AB = 0 \tag{11}$$

получим:

$$\frac{\partial M_{21}}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} = Q_{23} \tag{12}$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial y} + \frac{\partial M_{11}}{\partial x} = Q_{13} \tag{13}$$

2.2. Геометрические уравнения

Геометрические соотношения дополнят систему разрешающих уравнений ещё 6-ю выражениями относительно 6-и неизвестных деформаций ε_1, ε_2, γ, χ_1, χ_2, χ[1] и 3-х неизвестных перемещений срединной поверхности u, v, w.

2.2.1. Деформации срединной поверхности

Деформации срединной поверхности оболочки

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB}\cdot\frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_1} \tag{14}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{B}\cdot\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB}\cdot\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_2} \tag{15}$$

$$\gamma = \frac{B}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{B}\right) + \frac{A}{B}\cdot\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{A}\right), \tag{16}$$

[1] В соответствии с теорией тонких оболочек форма бесконечно малого элемента срединной поверхности с координатами $(\alpha, \beta, 0)$ полностью определяется величинами ε_1, ε_2 и γ – относительными удлинениями и сдвигом срединной поверхности. Но для определения деформации в слое z, эквидистантном срединной поверхности, этих трех величин недостаточно, так как объемный элемент оболочки может получить некоторые искривления. Эти искривления можно охарактеризовать изменениями кривизны элемента в координатных направлениях α и β, а также его «кручением».

Можно показать [6], что в соответствии с гипотезой прямой нормали компоненты перемещений для точек слоя, находящегося на расстоянии z от срединной поверхности, определятся равенствами: $u_z = u + z\cdot\varphi_\alpha$, $v_z = v + z\cdot\varphi_\beta$, $w_z = w$, где φ_α и φ_β – углы поворота нормали в нормальных сечениях, проходящих через линии α и β соответственно. Деформации в эквидистантных слоях принято определять, используя зависимости для деформации срединной поверхности, замещая значения u, v и w их величинами для эквидистантного слоя (гипотеза замещения), что в конечном итоге позволяет получить достаточно простые выражения для деформаций в слое z: $\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 + z\chi_1$, $\varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 + z\chi_2$ и $\gamma_z = \gamma + 2z\chi$.

Таким образом, изменение геометрии объемного элемента оболочки может быть полностью описано шестью параметрами деформации: ε_1, ε_2, γ, χ_1, χ_2 и χ.

учитывая очевидные тождества, связывающие главные кривизны с радиусами кривизн $k_1 = \dfrac{1}{R_1}$ и $k_2 = \dfrac{1}{R_2}$, приведем к виду:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w \tag{17}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w \tag{18}$$

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{19}$$

2.2.2. Изменения главных кривизн и кручение срединной поверхности

Пренебрегая членами, содержащими малые величины $\dfrac{u}{R_1}$ и $\dfrac{v}{R_2}$, геометрические соотношения для изгибных и крутильной деформаций

$$\chi_1 = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{R_1} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB} \left(\frac{v}{R_2} - \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \frac{\partial A}{\partial \beta} \tag{20}$$

$$\chi_2 = \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v}{R_2} - \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{AB} \left(\frac{u}{R_1} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \chi = \frac{1}{2} \Bigg[& \frac{B}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \left(\frac{v}{R_2} - \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \right) + \\ & + \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{A} \left(\frac{u}{R_1} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \right) \Bigg] \end{aligned} \tag{22}$$

упростим до следующих соотношений:

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{23}$$

$$\chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{24}$$

$$\chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{25}$$

2.3. Физические уравнения

Выражения, связывающие внутренние усилия с компонентами деформации, не упрощаются по сравнению с общими уравнениями технической теории оболочек и представляются в следующем виде:

2.3.1. Мембранные усилия

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 \right) = K \left(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 \right) \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{Eh} \left(N_{11} - \nu N_{22} \right) \tag{26}$$

$$N_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1 \right) = K \left(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1 \right) \quad \text{или} \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} \left(N_{22} - \nu N_{11} \right) \tag{27}$$

$$S = N_{12} = N_{21} = Gh\gamma = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \gamma \tag{28}$$

2.3.2. Изгибные усилия

$$M_{11} = D\left(\chi_1 + \nu\chi_2\right) = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(\chi_1 + \nu\chi_2\right) \tag{29}$$

$$M_{22} = D\left(\chi_2 + \nu\chi_1\right) = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(\chi_2 + \nu\chi_1\right) \tag{30}$$

$$M_{12} = M_{21} = D(1-\nu)\chi = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}(1-\nu)\chi \tag{31}$$

Величины $K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ и $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ в технической литературе принято называть цилиндрическими жесткостями на растяжение-сжатие и изгиб соответственно, а $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модулем сдвига.

Шесть физических уравнений замыкают полную систему уравнений теории пологих оболочек, состоящую из 17-и дифференциальных уравнений относительно 17-и неизвестных параметров напряженно-деформированного состояния. Решение указанной системы в общем виде представляет большую вычислительную сложность.

Контрольные вопросы

1. Какие соотношения составляют систему уравнений теории упругих оболочек?
2. Опишите алгоритм упрощения уравнений теории упругих оболочек применительно к пологим оболочкам?
3. Сколько неизвестных параметров напряженно-деформированного состояния содержится в полной системе уравнений теории пологих оболочек? Приведите их перечень?
4. Какими параметрами описывается изменение геометрии объемного элемента оболочки?
5. Какова цель введения параметров деформации χ_1, χ_2 и χ?

3. Система разрешающих уравнений пологих оболочек

3.1. Вывод основных уравнений

Система уравнений, приведенная в параграфе 2, может быть путём преобразований приведена к системе двух совместных уравнений относительно двух неизвестных функций напряжений $\varphi(x,y)$ и прогиба $w(x,y)$.

Вспомогательная функция напряжений $\varphi(x,y)$ вводится аналогично функции Эри в плоской задаче теории упругости [7]. Компоненты мембранных усилий выразятся через неё следующим образом:

$$N_{11} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \tag{32}$$

$$N_{22} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \tag{33}$$

$$S = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \tag{34}$$

Если положить, что на оболочку действует только нормальная составляющая внешней нагрузки p_3 (собственный вес, снеговая нагрузка и т.п.), а касательные компоненты

$$p_1 = p_2 = 0, \tag{35}$$

то мембранные усилия в форме (32) – (34) тождественно удовлетворяют первым двум уравнениям равновесия (7) – (8).

Представим выражения для изгибных усилий в виде зависимостей от функции прогиба, подставив в (29) – (31) упрощенные геометрические уравнения (23) – (25):

$$M_{11} = -\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{36}$$

$$M_{22} = -\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{37}$$

$$M_{12} = M_{21} = -\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{38}$$

Преобразуем моментные уравнения (12) и (13) с помощью (36) – (38):

$$Q_{13} = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w \tag{39}$$

$$Q_{23} = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w, \tag{40}$$

где дифференциальный оператор

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Третье уравнение равновесия (9) при подстановке в него результатов (39) – (40) обращается в уравнение относительно функций напряжений и прогиба:

$$D\nabla^2\nabla^2 w + \frac{\partial}{\partial x}\left(k_2\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_1\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = p_3 \tag{41}$$

Введем вспомогательный дифференциальный оператор

$$\nabla_k^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_2\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_1\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{42}$$

или, в том случае, если главные кривизны k_1 и k_2 не зависят от координат:

$$\nabla_k^2 = k_1\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{43}$$

С учётом (42) – (43) уравнение (41) преобразуется к виду

$$D\nabla^2\nabla^2 w + \nabla_k^2\varphi = p_3 \tag{44}$$

Полученное уравнение (44) можно рассматривать в качестве первого основного разрешающего уравнения теории пологих оболочек. По своему физическому смыслу это выражение является условием равновесия оболочки в направлении нормали к срединной поверхности, т.е. «статическим» уравнением.

Поработаем над геометрическими уравнениями, продифференцируем (17) и (18) дважды по y и x соответственно, затем сложим результаты:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + k_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + k_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{45}$$

Найдем смешанную производную от компоненты деформации γ по x и y, используя уравнение (19):

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}. \tag{46}$$

Сравнивая (67) и (68), заменим в (67) сумму производных третьего порядка от касательных перемещений на производную второго порядка от угловой деформации:

$$\underline{\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y}} + k_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{47}$$

Получившееся уравнение имеет весьма любопытную структуру [1]. Подчёркнутая часть совпадает с уравнением неразрывности деформации Сен-Венана плоской задачи теории упругости. Два последних члена появляются в уравнении в связи с начальной кривизной оболочки и её неизбежным изгибом.

Заменим в (47) деформации внутренними усилиями с помощью физических уравнений (26) – (28), а затем выразим внутренние усилия через функцию напряжений в форме (32) – (34):

$$\frac{1}{Eh}\nabla^2\nabla^2\varphi - \nabla_k^2 w = 0. \tag{48}$$

Уравнение (48) – второе основное разрешающее уравнение теории пологих оболочек. По своему физическому смыслу это выражение является условием неразрывности деформаций срединной поверхности, т.е. «геометрическим» уравнением.

Таким образом задача изгиба пологой оболочки под действием нагрузки, приложенной по нормали, сводится к решению системы двух дифференциальных уравнений 4-го порядка относительно двух неизвестных функций – напряжения φ и прогиба w:

$$\begin{cases} D\nabla^4 w + \nabla_k^2\varphi = p_3 \\ \frac{1}{Eh}\nabla^4\varphi - \nabla_k^2 w = 0, \end{cases} \tag{49}$$

где дифференциальный оператор в декартовых координатах раскрывается, как

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \tag{50}$$

Решив систему (49) и определив φ и w, можно вычислить все компоненты внутренних усилий: мембранные – используя уравнения (32) – (34) и изгибные – используя уравнения (36) – (38) и (39) – (40).

Интересно показать, что в предельном случае при $k_1 = k_2 = 0$, т. е. в случае вырождения пологой оболочки в пластину, система (49) распадается на два знакомых независимых уравнения:

$$\nabla^4 w = \frac{p_3}{D}, \tag{51}$$

и

$$\nabla^4\varphi = 0. \tag{52}$$

Уравнение (51) представляет собой уравнение Софи-Жермен – Лагранжа, описывающее процесс изгиба пластины, уравнение (52) является бигармоническим уравнением Максвелла – Эри задачи о плоском напряженном состоянии пластины, а система (49) теории пологих оболочек «соединяет» воедино две задачи, позволяя учесть взаимное влияние мембранных и изгибающих систем сил.

3.2. Граничные условия

Выразив одну из неизвестных функций через вторую из одного уравнения системы (49), и подставив результат в оставшееся уравнение, можно получить дифференциальное уравнение 8-порядка. Решение полученного уравнения должно удовлетворять граничным условиям, которые должны быть сформулированы для каждой кромки оболочки.

Рассмотрим прямоугольную в плане $a \times b$ пологую оболочку (см. рис. 1), кромки которой совпадают с координатными линиями x и y, которые в свою очередь являются линиями главных кривизн. В этом случае координаты кромок определяются простыми выражениями $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

Число граничных условий вдоль каждого координатного направления должно совпадать с порядком дифференциального уравнения, поэтому на каждой кромке необходимо сформулировать по 4 ограничения на функции φ и w.

Для случая свободного опирания оболочки на абсолютно жесткие в своей плоскости торцевые диафрагмы, жесткостью которых из плоскости можно пренебречь, граничные условия для каждой из четырех кромок примут вид:

$$\begin{cases} v = w = M_{11} = N_{11} = 0|_{x=0} \\ v = w = M_{11} = N_{11} = 0|_{x=a} \\ u = w = M_{22} = N_{22} = 0|_{y=0} \\ u = w = M_{22} = N_{22} = 0|_{y=b} \end{cases} \tag{53}$$

Для жестко защемлённых кромок оболочки будем иметь:

$$\begin{cases} u = v = w = \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0|_{x=0} \\ u = v = w = \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0|_{x=a} \\ u = v = w = \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0|_{y=0} \\ u = v = w = \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0|_{y=b} \end{cases} \tag{54}$$

Граничные условия для шарнирного (цилиндрического) опирания краёв оболочки можно сформулировать в виде:

$$\begin{cases} u = v = w = M_{11} = 0|_{x=0} \\ u = v = w = M_{11} = 0|_{x=a} \\ u = v = w = M_{22} = 0|_{y=0} \\ u = v = w = M_{22} = 0|_{y=b} \end{cases} \tag{55}$$

3.3. Напряжения в сечениях оболочки. Проверки прочности

Для расчёта оболочек по первой группе предельных состояний наибольший интерес, как правило, представляют нормальные напряжения σ_{11}, σ_{22} и касательное напряжение τ_{12}, распределение которых по высоте произвольного сечения оболочки можно найти по формулам [6]:

$$\sigma_{11}(x,y,z) = \frac{12 \cdot M_{11}(x,y)}{h^3} \cdot z + \frac{N_{11}(x,y)}{h} \tag{56}$$

$$\sigma_{22}(x,y,z) = \frac{12 \cdot M_{22}(x,y)}{h^3} \cdot z + \frac{N_{22}(x,y)}{h} \tag{57}$$

$$\tau_{12}(x,y,z) = \frac{12 \cdot M_{12}(x,y)}{h^3} \cdot z + \frac{N_{12}(x,y)}{h}, \tag{58}$$

где $z \in \left[\frac{-h}{2}, \frac{h}{2}\right]$ – координата точки в направлении нормали к срединной поверхности.

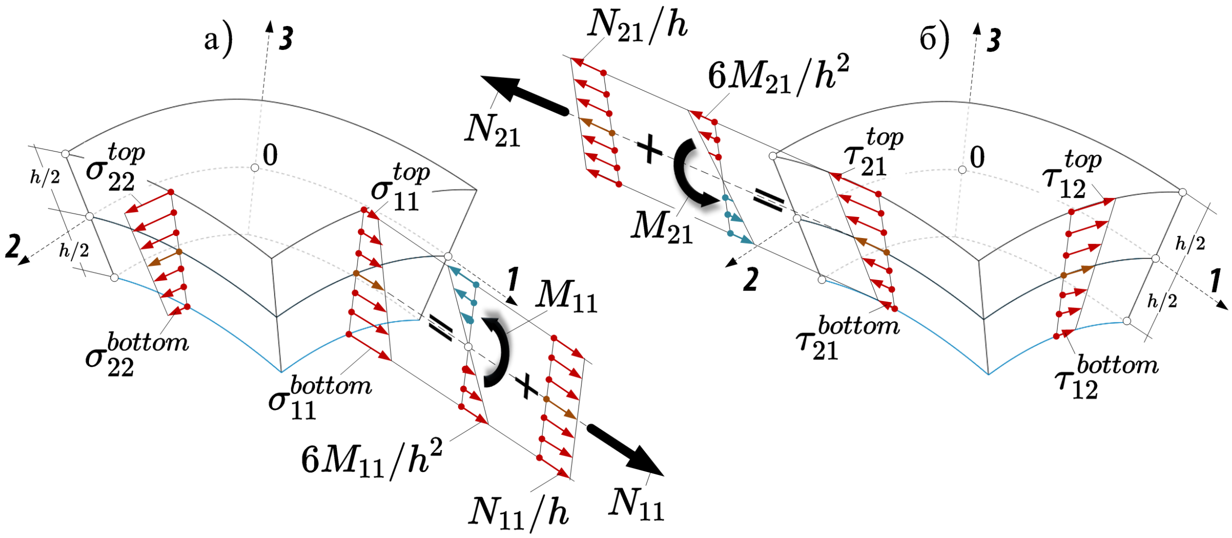


Рис. 3. Распределение по высоте сечения оболочки: а) – нормальных напряжений σ_{11} и σ_{22}; б) – касательных напряжений τ_{12} и τ_{21}

Напряжения τ_{13}, τ_{23} и σ_{33} при изгибе обычно значительно меньше напряжений (56)–(58) и мало влияют на оценку прочности оболочки [8].

Анализируя структуру формул (56)–(58) можно заметить, что, в отличие от изгибаемых пластин [7], распределение напряжений по высоте сечения в оболочке несимметрично относительно срединной поверхности (см. рис. 3), поэтому проверку прочности необходимо производить для точек, расположенных как на нижней так и на верхней поверхностях, при $z = \pm\frac{h}{2}$, где компоненты тензора напряжений принимают свои наибольшие или наименьшие значения. Условимся обозначать экстремальные значения напряжений верхними индексами `top` и `bottom` – для верхней и нижней поверхностей соответственно.

Если не учитывать напряжения σ_{33}, то напряженное состояние вблизи внешних поверхностей оболочки можно считать двухосным, поэтому главные напряжения $\sigma_{1,3}$ и угол ориентации главных площадок α можно вычислить по формулам [9]:

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^2 + 4\tau_{12}^2} \tag{59}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \tag{60}$$

Поскольку напряжения σ_{11}, σ_{22} и τ_{12} могут иметь в опасных точках одинаковый порядок, то для оценки прочности оболочки нужно использовать соответствующую теорию прочности. Вопросы применимости той или иной теории выходят за рамки настоящего пособия из-за своей обширности. Отметим лишь, что допустимость применения теорий прочности сильно связана с физическими свойствами материала оболочки. Более детально о моделях разрушения читатель может узнать из специализированной литературы [9, 10]. В тех примерах, которые будут рассмотрены нами далее, для оценки прочности оболочки будут применены две теории: так называемая гипотеза наибольших нормальных напряжений (первая теория) и энергетическая теория прочности (четвертая теория), основные положения которых могут быть записаны в виде условий прочности по методу предельных состояний:

- Для первой теории прочности

$$\sigma_{1,3} \leq R\gamma_c \tag{61}$$

- Для четвертой теории прочности

$$\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\tau_{12}^2} \leq R\gamma_c \tag{62}$$

где $\sigma_{1,3}$ – главные напряжения, R – величина, характеризующая расчётное сопротивление материала, а γ_c – коэффициент условий работы.

Левая часть неравенства (62) часто (особенно в зарубежной литературе, например в [11]) называется эквивалентным напряжением по (фон) Мизесу (Von Mises) σ_{mises}. Напряжение по Мизесу характеризует удельную потенциальную энергию формоизменения и часто рассматривается, как критерий перехода материала в стадию пластического деформирования в случае многоосного напряженного состояния. Напряжение σ_{mises} является очень важной характеристикой для оценки прочности пластичных материалов (например, конструкционной стали) и может быть легко получено в подавляющем большинстве коммерческих программных комплексов, реализующих метод конечных элементов.

Контрольные вопросы

1. Приведите разрешающую систему уравнений теории пологих оболочек?
2. Какой физический смысл имеют уравнения разрешающей системы теории пологих оболочек?
3. Какие задачи обобщает система дифференциальных уравнений пологих оболочек?
4. На какие уравнения распадается разрешающая система уравнений пологой оболочки, если главные кривизны положить равными нулю?
5. Сформулируйте граничные условия при опирании оболочки на торцевые диафрагмы?
6. Запишите граничные условия при жестком и шарнирном закреплениях краёв оболочки?
7. Каким образом определяются нормальные и касательные напряжения в сечениях оболочки?
8. Изобразите характер распределения нормальных и касательных напряжений по высоте сечения оболочки?
9. Как осуществить проверку прочности оболочки по первой теории прочности?
10. Как осуществить проверку прочности оболочки по четвертой (энергетической) теории прочности?
11. В чём заключается особенность проверок прочности оболочек по сравнению с пластинами?

4. Решение системы уравнений пологой оболочки с помощью двойных тригонометрических рядов

4.1. Основные положения метода

Ж. Фурье (1768-1830)

Идея о том, что любая периодическая функция может быть представлена в виде ряда гармонически связанных синусов и косинусов была предложена французским математиком бароном Жан-Батистом Жозефом Фурье. Легко показать, что разложение в бесконечный ряд по тригонометрическим функциям справедливо также для любых непериодических функций, определенных на произвольном интервале (просто разложенная функция будет периодически повторяться за пределами рассматриваемого интервала). Это гениальное изобретение благодаря развитию компьютерной техники получило огромное число практических приложений и легло в основу множества современных технологий таких, как сжатие мультимедиа, беспроводная передача данных, спектральный анализ, машинное обучение и т.д. Тригонометрические ряды используются в инженерных науках, медицине, химии, при исследованиях космического пространства и множестве смежных областей знаний, превратившись в зрелый универсальный математический инструмент для решения широкого класса задач.

Тригонометрические ряды позволяют получить элегантное решение ряда краевых задач в теории пластин и оболочек. В литературе методы применения разложений в тригонометрические ряды часто ассоциируются с именем французского инженера-механика Клода-Луи Навье, который в 1820 году получил решение для прогиба и напряжений прямоугольной шарнирно-опёртой пластины.

К.-Л. Навье
(1785-1836)

Применим основные идеи метода Навье к решению системы уравнений (49). Представим неизвестные функции напряжений φ и прогиба w в виде разложения в ряды по гармонически связанным синусам:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{63}$$

$$\varphi(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{64}$$

Представления (63) – (64) должны в обязательном порядке удовлетворять граничным условиям. К сожалению, это справедливо для ограниченного числа случаев опирания кромок оболочки, что ограничивает возможности метода Навье для анализа напряженно-деформированного состояния оболочек.

Рассмотрим случай свободного опирания кромок оболочки. Легко можно показать, что функции напряжений и прогиба в форме (63) – (64) удовлетворяют граничным условиям (53).

Следующим шагом представим внешнюю нагрузку в аналогичном виде:

$$p_3(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{65}$$

где коэффициент разложения можно определить

$$p_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b p_3(x,y)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dxdy \tag{66}$$

Вычислим тринадцать частных производных функций φ и w, представленных в виде (63) – (64), которые входят в состав дифференциальных операторов ∇^2, ∇^4, ∇_k^2 и выражений для определения внутренних усилий:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \cdot A_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{67}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \cdot A_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{68}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cdot A_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{69}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cdot A_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{70}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cdot A_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{71}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cdot B_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{72}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cdot B_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{73}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right) \cdot A_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{74}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 \cdot A_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{75}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^3 \cdot A_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{76}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cdot A_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{77}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right) \cdot A_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{78}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right) \cdot B_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{79}$$

Подставим выражения (67) – (73) в оба уравнения системы (49), приравняем между собой коэффициенты при одинаковых произведениях тригонометрических функций, получим:

$$\begin{cases} D \cdot A_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2 - B_{mn}\left(k_1 \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k_2 \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right) = p_{mn} \\ \frac{1}{Eh} \cdot B_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2 + A_{mn}\left(k_1 \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k_2 \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right) = 0 \end{cases} \tag{80}$$

Введем вспомогательные переменные

$$\alpha_{mn} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{81}$$

$$\beta_{mn} = k_1 \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k_2 \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \tag{82}$$

Выполняя в (80) замену с учетом (81) и (82), после элементарных преобразований получим для неизвестных коэффициентов разложений в ряды искомых функций:

$$A_{mn} = \frac{\alpha_{mn}^2 \cdot p_{mn}}{D \cdot \alpha_{mn}^4 + E \cdot h \cdot \beta_{mn}^2} \tag{83}$$

$$B_{mn} = \frac{-E \cdot h \cdot \beta_{mn} \cdot p_{mn}}{D \cdot \alpha_{mn}^4 + E \cdot h \cdot \beta_{mn}^2} \tag{84}$$

4.2. Приближение нагрузок частичными суммами тригонометрических рядов

Параметр разложения в тригонометрический ряд p_{mn} несложно получить для ряда простых нагрузок, взяв интеграл (66). Удержав в (65) конечное число членов ряда, исследуем приближение самых распространенных типов статической внешней нагрузки на оболочки в виде (85). Будем удерживать k членов ряда в обоих координатных направлениях.

$$p_3(x,y) \approx \sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k} p_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{85}$$

Для равномерно распределенной нагрузки $p_3(x,y) = const = p_3$

$$p_{mn} = \frac{4 \cdot p_3}{ab} \int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b} dy = \frac{16 \cdot p_3}{\pi^2 mn}, \tag{86}$$

где $m, n = 1, 3, 5, \ldots$

Характер приближения равномерно распределенной нагрузки частичными суммами ряда (85) вдоль координатной линии $y = b/2$ при различных значениях k показан на рисунке 4. Суммирование осуществляется по нечетным членам ряда. Можно заметить достаточно быструю сходимость частичных сумм к точному значению нагрузки q_3 на всей области определения $(0; a)$ за исключением окрестностей краевых точек, где наблюдаются заметные осцилляции.

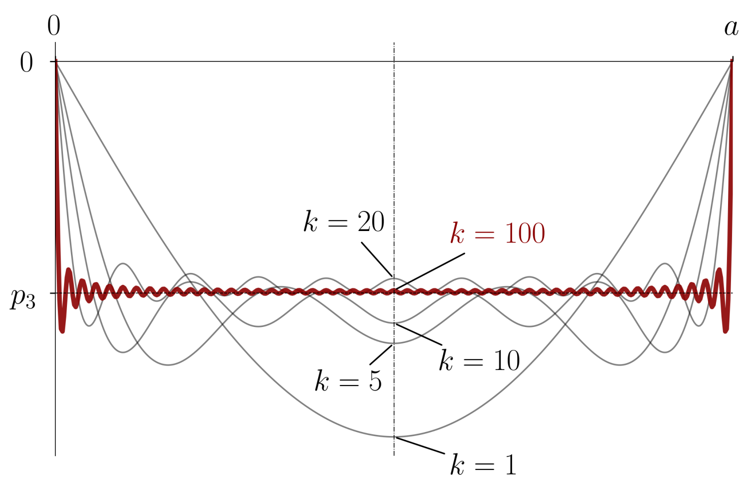


Рис. 4. Характер приближения равномерно распределенной нагрузки тригонометрическим рядом вдоль сечения $y = b/2$

Такое поведение вызвано скачкообразным изменением до нуля значения нагрузки на краях оболочки. Это явление – ряд разрывной функции не сходится к разлагаемой функции в окрестностях разрыва – носит название `эффекта Гиббса`[2][3] и не исчезает при увеличении количества удерживаемых членов ряда. Можно показать [12], что проходя через точку разрыва, сумма бесконечного ряда делает скачок на 17.9% больший, чем скачок разлагаемой функции. Существенного влияния на результат расчёта пластин и оболочек эффект Гиббса не оказывает, вызывая незначительные искажения параметров напряженно-деформированного состояния в местах скачкообразного изменения нагрузок.

Для частичной нагрузки (прямоугольного штампа) – равномерно распределенной по площади прямоугольника со сторонами $c \times d$ и центром в точке с координатами (α, β)

[2]Явление названо по имени американского физика Джозайа Уилларда Гиббса (1839–1903), одного из основоположников статистической механики. В 1898 году им была опубликована маленькая заметка [13] о том, что ряд Фурье не всегда представляет разлагаемую функцию с заданной точностью. На самом деле открытие этого эффекта было сделано английским учёным Г. Уилбрагамом за 50 лет до Гиббса [14].

$$p_{mn} = \frac{4 \cdot p_3}{ab} \int_{\alpha - c/2}^{\alpha + c/2} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_{\beta - d/2}^{\beta + d/2} \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \\ = \frac{16 \cdot p_3}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b} \sin \frac{m\pi c}{2a} \sin \frac{n\pi d}{2b} \tag{87}$$

В случае симметрии области нагружения относительно осей $x = a/2$ и $y = b/2$ суммирование необходимо производить по нечетным членам ряда $m, n = 1, 3, 5, \ldots$. Наличие только одной оси симметрии приводит к необходимости применения смешанного правила суммирования, когда один из индексов принимает нечетные значения, а второй – все целые положительные числа. При произвольном расположении нагрузки индексы оба суммирования должны принимать значения всех целых положительных чисел.

Рассмотрение приближения прямоугольного штампа частичными суммами тригонометрического ряда (85) в сечении $y = \beta$, проходящем через ось симметрии области нагружения (рис. 5), позволяет установить некоторое ухудшение сходимости по сравнению с приближением постоянной нагрузки (рис. 4). Эффект Гиббса проявляется на всех четырех границах области нагружения.

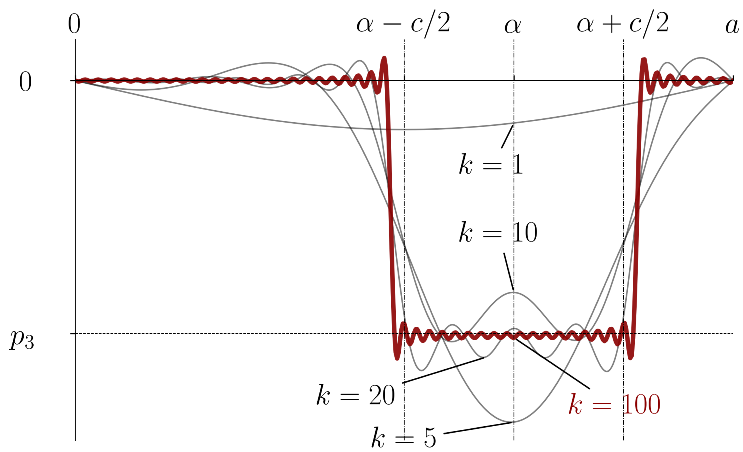


Рис. 5. Характер приближения нагрузки-штампа тригонометрическим рядом вдоль сечения $y = \beta$

Для сосредоточенной силы, приложенной в точке с координатами (x_p, y_p), перейдя к пределу выражения (87) при стремлении размеров c и d к нулю и сохраняя значение силы $P = p_3 cd \implies p_3 = \frac{P}{cd}$, получим

$$p_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi x_p}{a} \sin \frac{n\pi y_p}{b} \tag{88}$$

Предельный переход от распределенной нагрузки к сосредоточенной вызывает появление особенности (особой точки или сингулярности), которая выражается в расхождении ряда (85) в точке приложения силы (рис. 6, *а*). С увеличением количества удерживаемых членов ряда величина нагрузки неограниченно возрастает (рис. 6, *б*). Вне области приложения силы ряд осциллирует в окрестности нуля.

Такое поведение в местах действия сосредоточенных сил (или моментов) часто встречается в задачах теории упругости и объясняется тем фактом, что любая реальная нагрузка (а не математическая абстракция) имеет конечную, отличную от нуля, площадь приложения. Тем не менее сингулярности, как правило, не являются препятствием для корректного определения параметров напряженно-деформированного состояния вне своей окрестности, хотя и заметно ухудшают скорость сходимости задачи (приводят к необходимости удерживать больше членов ряда в частичных суммах).

Любая силовая нагрузка на оболочку может быть представлена в виде ряда (85). Нагрузку, которая может быть разложена на сумму более простых нагрузок, оказывается удобным представить в виде суммы подобных рядов с различными коэффициентами разложения p_{mn}. В том случае, если характер

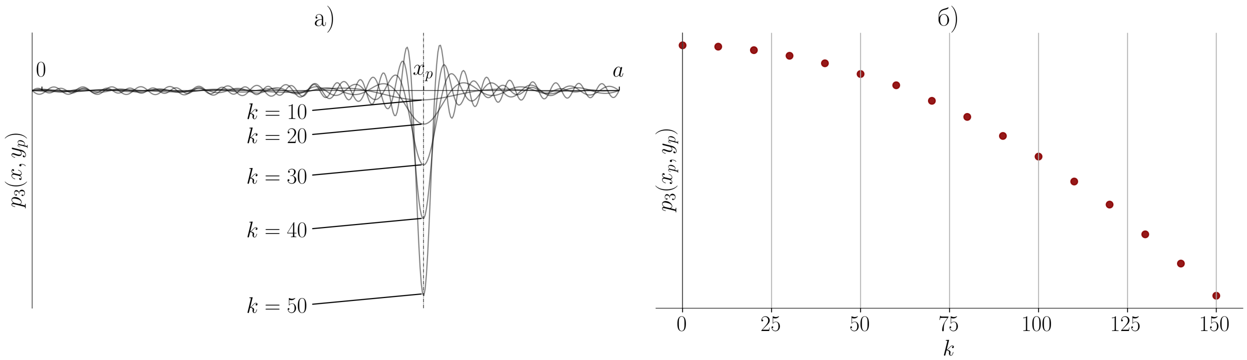


Рис. 6. Характер приближения сосредоточенной силы тригонометрическим рядом: а) – вдоль сечения $y = y_p$; б) – в точке приложения силы $(x_p; y_p)$

нагружения не позволяет вычислить интеграл (66) аналитически, его можно взять численно, например с помощью квадратурных формул Ньютона-Котеса (методов трапеций, Симпсона, Ромберга или их многочисленных вариаций) [15].

Таким образом, метод Навье для расчёта пологих оболочек не накладывает практически никаких ограничений на характер внешней нагрузки.

Контрольные вопросы

1. В чём состоит основная идея метода Навье применительно к решению системы уравнений пологих оболочек?
2. Каковы границы применимости метода Навье для расчёта пологих оболочек?
3. Как осуществляется приближение равномерно распределенной нагрузки частичной суммой тригонометрического ряда?
4. Как осуществляется приближение нагрузки в виде прямоугольного штампа частичной суммой тригонометрического ряда?
5. Как осуществляется приближение сосредоточенной нагрузки частичной суммой тригонометрического ряда?
6. Какое явление называется сингулярностью в задачах теории упругости?
7. Что такое эффект Гиббса? Как он влияет на решение задачи изгиба пологой оболочки методом Навье?

5. Пример расчёта пологой оболочки

5.1. Постановка задачи

Произведём расчёт пологого покрытия постоянной толщины h, с главными кривизнами k_1 и k_2, выполненного из линейно-упругого материала с модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ методом Навье на действие собственного веса и вертикальной полезной нагрузки. Расчётное сопротивление изотропного материала оболочки примем равным $R_u = 5$МПа, коэффициент условий работы $\gamma_c = 1$.

Покрытие имеет форму эллиптического параболоида, заданного аналитическим выражением

$$z(x, y) = -\frac{k_1}{2} \cdot x^2 - \frac{k_2}{2} \cdot y^2. \tag{89}$$

Оболочка перекрывает прямоугольную область размером $a \times b$ в плане, свободно опирается на её контур и воспринимает:

- нагрузку q_{dead} от собственного веса конструкции;
- равномерно-распределенную на области $c \times d$ нагрузку интенсивностью q_{live} с координатами центра области $(\alpha; \beta)$;
- сосредоточенную силу P, приложенную в точке с координатами $(x_p; y_p)$.

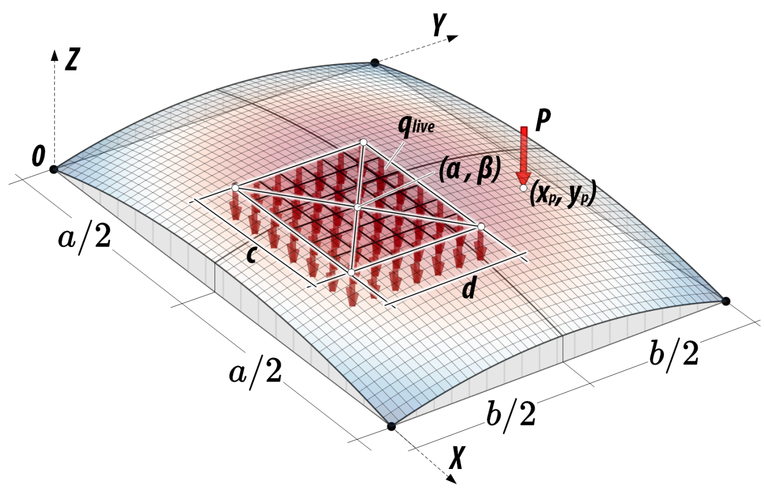


Рис. 7. Расчётная схема пологой оболочки

Расчётная схема оболочки представлена на рисунке 7. Основные числовые значения параметров задачи сведены в таблицы 1-2:

Таблица 1. Геометрические и физические параметры оболочки

a, м	b, м	h, мм	E, ГПа	ν	ρ, кг/м^3	k_1, м$^{-1}$	k_2, м$^{-1}$
6	4	100	30	0.16	2500	0.1	0.2

Таблица 2. Параметры полезной нагрузки

q_{live}, кПа	α, м	β, м	c, м	d, м	P, кН	x_p, м	y_p, м
50	4	1	2	1.5	100	4	3

Некоторые характерные результаты решения задачи методом Навье будем сравнивать с результатами, полученными численным методом конечных элементов (МКЭ). Компьютерные модели оболочки создавались в двух различных программных комплексах: FEMAP 2021.2 и ЛИРА-САПР 2016 R5. Обе модели состояли из 2400 оболочечных четырехугольных конечных элементов общего вида (тип Plate в ПК FEMAP и тип 44 в ПК ЛИРА-САПР).

5.2. Решение

Анализ напряженно-деформированного состояния оболочки методом Навье удобнее всего начинать с исследования качества приближения внешней нагрузки частичными суммами тригонометрических рядов. Необходимо убедиться, что частичная сумма действительно сходится к точному значению функции внешней нагрузки на всей области её приложения. Проверяется корректность определения коэффициентов p_{mn}, правила суммирования (по нечетным или всем целым положительным индексам), координат точек или областей приложения нагрузки. На этом этапе целесообразно произвести предварительную оценку верхнего предела суммирования, необходимого для аппроксимации нагрузки с приемлемой точностью.

Для анализа результатов приближения функций двух переменных вида $z = f(x, y)$ бесконечными рядами удобно пользоваться таким способом визуализации данных, как изополе (или «тепловая карта»), при котором каждое индивидуальное значение функции в каждой точке $(x; y)$ области определения изображается цветом согласно специальной цветовой схеме (палитре). Сечения изополей вдоль произвольных направлений могут быть представлены в виде привычных графиков в декартовой системе координат.

Определим точное значение нагрузки от собственного веса оболочки:

$$q_{dead}(x, y) = -\rho \cdot g \cdot h = -2.452 \text{ кПа} \tag{90}$$

и визуализируем её приближение p_1 частичной суммой ряда (85) с учётом (86) на рис. 8.

$$\begin{aligned} q_1(m, n) &= \frac{16 \cdot q_{dead}}{\pi^2 mn} \\ p_1(x, y) &\approx \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{k} q_1(m, n) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \tag{91}$$

где $m, n = 1, 3, 5, \ldots$

Изополе на рис. 8, *б* наглядно показывает, что на всей площади проекции оболочки за исключением контурных областей (из-за эффекта Гиббса) частичная сумма ряда (85) уже при $k = 20$ слабо отличима от точного значения нагрузки.

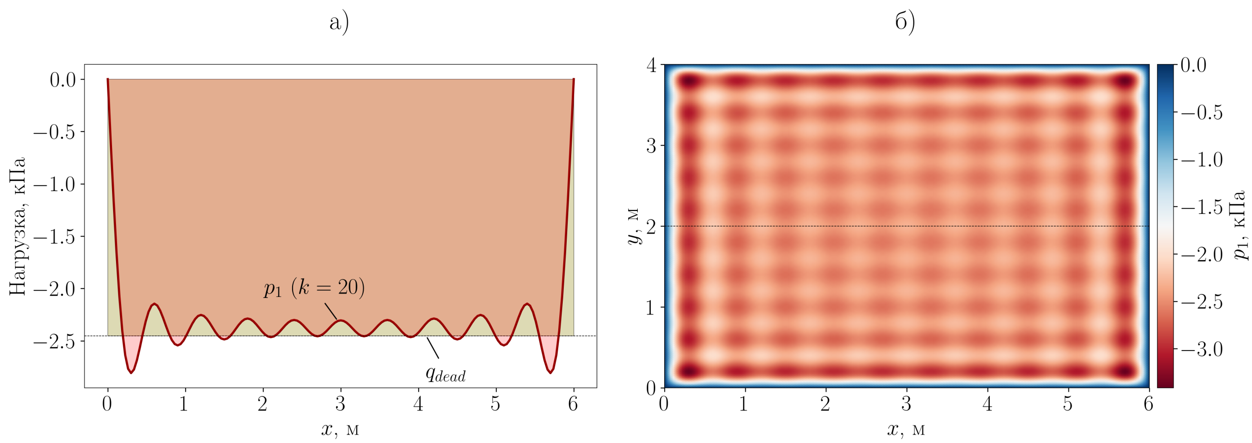


Рис. 8. Характер приближения нагрузки $q_{dead}(x, y)$ от собственного веса тригонометрическим рядом: а) – вдоль сечения $y = 2$ м; б) – изополе ($k = 20$)

Удобную для практического применения интегральную оценку точности приближения нагрузки тригонометрическим рядом даёт сравнение равнодействующих. Точное значение равнодействующей R_{dead} собственного веса определим, как произведение интенсивности нагрузки на площадь проекции оболочки:

$$R_{dead} = q_{dead} \cdot a \cdot b = -58.84 \text{ кН} \tag{92}$$

Равнодействующая R^*_{dead} собственного веса, представленного в виде тригонометрического ряда, может быть получена путем численного интегрирования частичной суммы (91) по площади проекции оболочки. Применение метода трапеций [15] (на сетке 160×160) при $k = 20$ даёт результат:

$$R^*_{dead} = \int_0^a \int_0^b p_1(x, y) dx dy = -58.45 \text{ кН} \tag{93}$$

Относительная погрешность определения равнодействующей в рассматриваемом случае составит

$$\varepsilon_{dead} = \frac{|R^*_{dead} - R_{dead}|}{min(|R^*_{dead}|, |R_{dead}|)} \cdot 100\% \approx 4.2\%, \tag{94}$$

Таким образом, результат действия на оболочку равномерно распределенной нагрузки, разложенной в ряд, слабо отличается от действия её точного значения.

Рассмотрим результат $p_2(x, y)$ приближения полезной нагрузки q_{live} частичной суммой ряда (85) с учётом (87), равномерно распределенной на прямоугольной области (см. рис. 9).

$$\begin{aligned} q_2(m,n) &= \frac{16 \cdot q_{live}}{\pi^2 mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi\alpha}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi\beta}{b}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi c}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi d}{2b}\right) \\ p_2(x,y) &\approx \sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k} q_2(m,n) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \tag{95}$$

где $m, n = 1, 2, 3, \ldots$

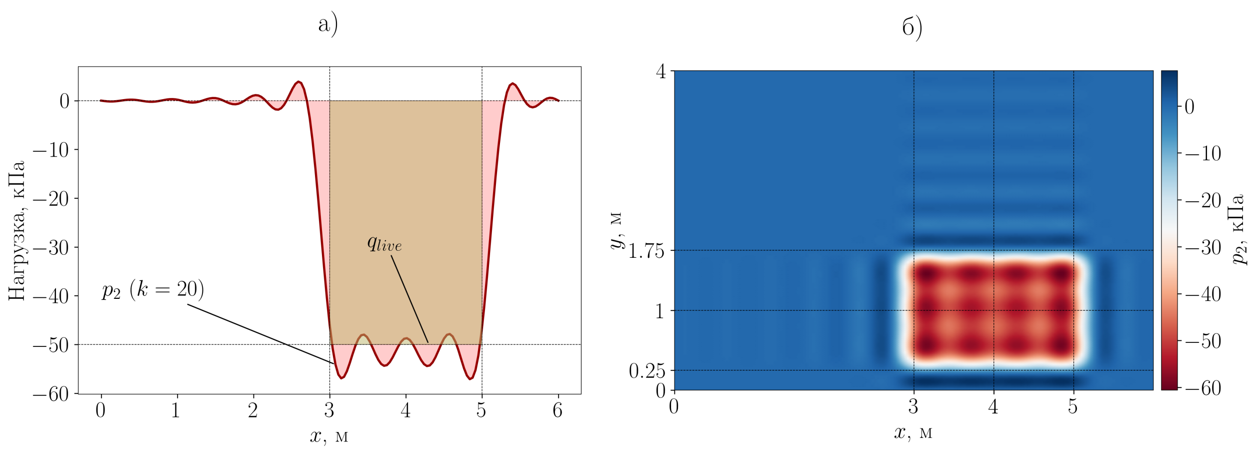


Рис. 9. Характер приближения полезной нагрузки $q_{live}(x, y)$ тригонометрическим рядом: а) – вдоль сечения $y = \beta = 1$ м; б) – изополе $(k = 20)$

Наибольшие отличия точного значения нагрузки от приближенного наблюдаются (см. рис. 9, *а*) на границах области загружения, в окрестностях скачкообразного изменения интенсивности. Проведя несложный численный эксперимент с изменением верхнего предела суммирования, можно увидеть, что в целом ряд (95) сходится медленнее, чем (91). Другими словами, расчет оболочки на действие разрывных нагрузок потребует удержания большего количества членов в частичных суммах тригонометрических рядов.

Аппроксимируем сосредоточенную силу P, приложенную в точке $(x_p; y_p)$, частичной суммой ряда (85) с учётом (88). Визуализируем результат $p_3(x, y)$ приближения на рис. 10.

$$\begin{aligned} q_3(m,n) &= \frac{4P}{ab} \sin\frac{m\pi x_p}{a} \sin\frac{n\pi y_p}{b} \\ p_3(x,y) &\approx \sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k} q_3(m,n) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \tag{96}$$

где $m, n = 1, 2, 3, \ldots$

Как было показано при выводе соотношения (88), сосредоточенная сила может быть представлена в виде нагрузки, равномерно распределенной на бесконечно малой области. С увеличением верхнего предела суммирования ряда (96) абсолютное значение интенсивности приближенного значения нагрузки $p_3(x, y)$ в окрестности точки приложения силы (x_p, y_p) стремится к бесконечности, одновременно наблюдается вырождение области нагружения в точку. При этом интегральная равнодействующая приближенной нагрузки достаточно быстро достигает и сохраняет значения близкие к точной величине

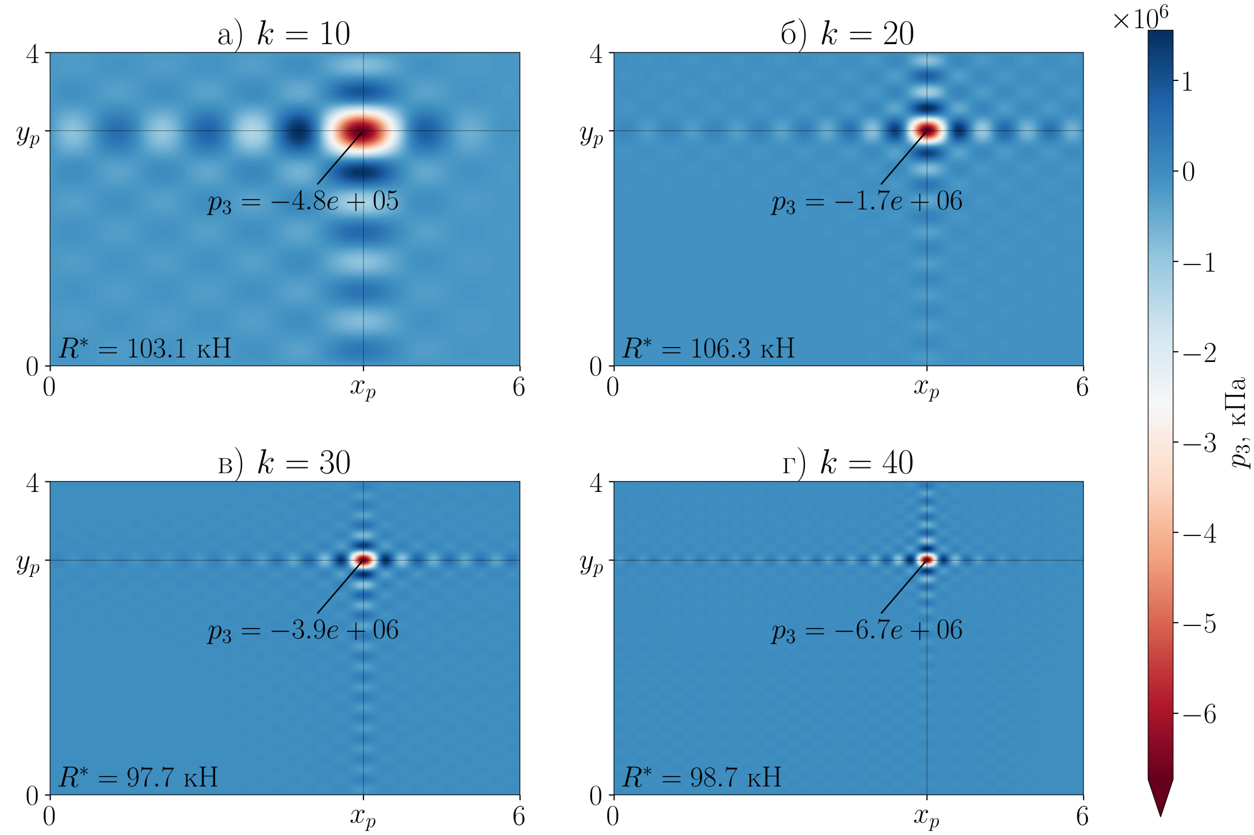


Рис. 10. Характер приближения сосредоточенной силы P тригонометрическим рядом $p_3(x, y)$ при различных верхних пределах суммирования k

силы P:

$$R^* = \int_0^a \int_0^b p_3(x, y) dx dy \approx -100\text{кН} \tag{97}$$

Численные эксперименты с вариацией предела суммирования k ряда (96) показывают, что минимально необходимое количество удерживаемых членов определяется прежде всего из условия адекватности получающейся области загружения решаемой задаче. Другими словами, область, по которой «размазывается» аппроксимированная сосредоточенная сила, должна быть сравнима с реальной областью приложения сосредоточенной нагрузки к поверхности оболочки.

Убедившись в адекватном с инженерной точки зрения приближении внешней нагрузки частичными суммами, определим функции прогиба и напряжений в виде (63) и (64). Обе упомянутые функции согласно принципу независимости действия сил могут быть представлены в виде суммы трех составляющих, соответствующих отдельным нагрузкам, действующим на оболочку. Разложение функций на отдельные компоненты удобно для программирования решения и анализа результатов расчёта.

$$\begin{aligned} w(x, y) &= w_1(x, y) + w_2(x, y) + w_3(x, y) \\ \varphi(x, y) &= \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) \end{aligned} \tag{98}$$

где w_1, φ_1 – вклад в функции прогибов и напряжений от действия собственного веса, w_2, φ_2 – от действия равномерно-распределенной нагрузки, а w_3, φ_3 – от действия сосредоточенной силы.

Значения интенсивности полной внешней нагрузки на оболочку вычисляются тривиальным образом:

$$p(x, y) = p_1(x, y) + p_2(x, y) + p_3(x, y) \tag{99}$$

Коэффициенты разложения функций прогибов и напряжений с учётом введенных вспомогательных переменных (81) – (82) и соотношений (83) – (84) могут быть получены:

- от действия собственного веса:

$$
\begin{aligned}
A_1(m,n) &= \frac{\alpha_{mn}^2 \cdot q_1(m,n)}{D \cdot \alpha_{mn}^4 + E \cdot h \cdot \beta_{mn}^2} \\
B_1(m,n) &= \frac{-E \cdot h \cdot \beta_{mn} \cdot q_1(m,n)}{D \cdot \alpha_{mn}^4 + E \cdot h \cdot \beta_{mn}^2}
\end{aligned}
\tag{100}
$$

- от действия равномерно-распределенной нагрузки:

$$
\begin{aligned}
A_2(m,n) &= \frac{\alpha_{mn}^2 \cdot q_2(m,n)}{D \cdot \alpha_{mn}^4 + E \cdot h \cdot \beta_{mn}^2} \\
B_2(m,n) &= \frac{-E \cdot h \cdot \beta_{mn} \cdot q_2(m,n)}{D \cdot \alpha_{mn}^4 + E \cdot h \cdot \beta_{mn}^2}
\end{aligned}
\tag{101}
$$

- от действия сосредоточенной силы:

$$
\begin{aligned}
A_3(m,n) &= \frac{\alpha_{mn}^2 \cdot q_3(m,n)}{D \cdot \alpha_{mn}^4 + E \cdot h \cdot \beta_{mn}^2} \\
B_3(m,n) &= \frac{-E \cdot h \cdot \beta_{mn} \cdot q_3(m,n)}{D \cdot \alpha_{mn}^4 + E \cdot h \cdot \beta_{mn}^2}
\end{aligned}
\tag{102}
$$

Соответствующие составляющие функций прогиба и напряжений представим в следующем виде:

- от действия собственного веса:

$$
\begin{aligned}
w_1(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_1(m,n) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
\varphi_1(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_1(m,n) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)
\end{aligned}
\tag{103}
$$

  где $m, n = 1, 3, 5, \ldots$

- от действия равномерно-распределенной нагрузки:

$$
\begin{aligned}
w_2(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_2(m,n) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
\varphi_2(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_2(m,n) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)
\end{aligned}
\tag{104}
$$

  где $m, n = 1, 2, 3, \ldots$

- от действия сосредоточенной силы:

$$
\begin{aligned}
w_3(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_3(m,n) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
\varphi_3(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_3(m,n) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)
\end{aligned}
\tag{105}
$$

  где $m, n = 1, 2, 3, \ldots$

Определенное неудобство при разработке программы расчёта выражений (98) в некоторых системах компьютерной алгебры вызывают различные правила суммирования членов рядов (103) и (104) – (105). Поэтому, в (103) лучше выполнить замену переменных суммирования m и n на выражения $2m-1$ и $2n-1$. Это позволит производить учёт только нечетных членов ряда автоматически даже в том случае, когда индексы суммирования принимают значения всех целых положительных чисел:

$$
\begin{aligned}
w_1(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_1(2m-1,2n-1)\cdot\sin\left(\frac{(2m-1)\cdot\pi\cdot x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{(2n-1)\cdot\pi\cdot y}{b}\right)\\
\varphi_1(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_1(2m-1,2n-1)\cdot\sin\left(\frac{(2m-1)\cdot\pi\cdot x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{(2n-1)\cdot\pi\cdot y}{b}\right)
\end{aligned}
\tag{106}
$$

где $m, n = 1, 2, 3, \ldots$

Исследуем сходимость рядов (98) для определения достаточного верхнего предела суммирования. Выберем 7 контрольных точек (см. рис. 11) на поверхности оболочки и рассмотрим, как в этих точках будут изменяться значения функций w и φ при последовательном увеличении k. Выбор точек не случаен: в точках $1, 4 \ldots 7$ функции нагрузки терпят разрывы, что, как было показано ранее, существенно отражается на точности приближения внешних воздействий тригонометрическими рядами, а точки 2 и 3 соответствуют центрам оболочки и области приложения равномерно распределенной полезной нагрузки соответственно, где отсутствуют какие-либо факторы, снижающие точность аппроксимации.

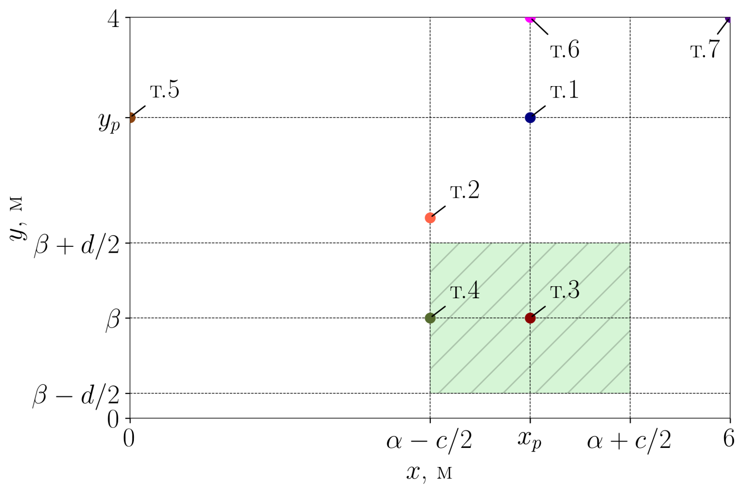


Рис. 11. Расположение контрольных точек для оценки сходимости тригонометрических рядов w и φ

На левой части рисунка 12 видно, что значения прогиба во всех анализируемых точках достаточно быстро стабилизируются около своих конечных значений. Тем не менее скорость сходимости различна: прогиб в точке приложения сосредоточенной силы (т.1) выходит на горизонтальный участок только при $k > 15$, тогда как в остальных точках уже при $k > 5$ не наблюдается существенных различий в результатах расчета частичных сумм. Рассмотрение рисунка 12, *б* показывает, что удержание более пяти членов ряда для функции напряжений практически не приводит к уточнению расчёта во всех семи контрольных точках оболочки.

Для количественной оценки сходимости частичных сумм тригонометрических рядов удобно ввести функции сходимости:

$$
\begin{aligned}
w_{conv}(x,y,k) &= \frac{w\,(x,y,k+1) - w\,(x,y,k)}{w\,(x,y,k)}\cdot 100\%\\
\varphi_{conv}(x,y,k) &= \frac{\varphi\,(x,y,k+1) - \varphi\,(x,y,k)}{\varphi\,(x,y,k)}\cdot 100\%,
\end{aligned}
\tag{107}
$$

которые позволяют определить относительную разницу (в процентном выражении) между двумя частичными суммами рядов для w и φ, последовательно вычисленными при удержании k и $k+1$ членов в каждом координатном направлении.

Введенные функции сходимости могут быть использованы для автоматизации определения предела суммирования k при разработке вычислительных алгоритмов и их практической реализации. Графики функций сходимости в контрольных точках представлены на рисунке 13. Сходимость функции прогиба во всех рассматриваемых точках укладывается в 5-процентный коридор при $k > 13$, а функции напряжений – при $k > 8$. Другими словами, учёт каждого последующего члена ряда в частичной сумме

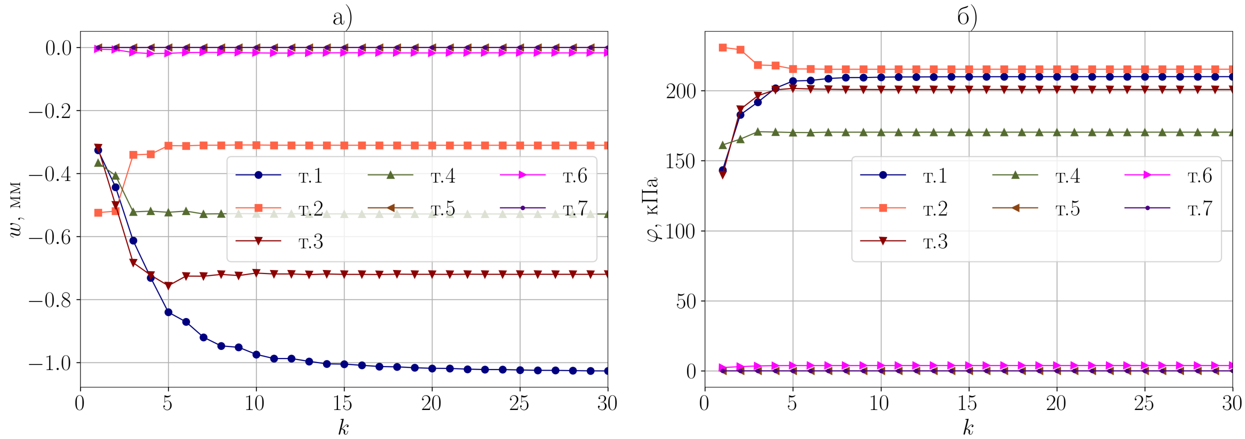


Рис. 12. Графики зависимостей $w(k)$ и $\varphi(k)$ в контрольных точках

будет изменять результат расчета менее, чем на 5%, что является достаточной причиной для остановки процесса суммирования.

Необходимо отметить, что функции сходимости в виде (107) не всегда применимы для остановки итерационного процесса расчёта частичных сумм. На практике достаточно часто возникают ситуации, когда с увеличением предела суммирования частичная сумма осциллирует около некоторого среднего значения, что приводит к такому же осциллирующему поведению функции сходимости. В таких случаях целесообразно применять более сложные критерии оценки сходимости бесконечных рядов, например в виде:

$$
\begin{aligned}
f_{conv}(x, y, k) &= \frac{f\,(x, y, k+1) - WMA\,(x, y, k)}{WMA\,(x, y, k)} \cdot 100\% \\
WMA(x, y, k) &= \frac{\sum_{i=k-\tau}^{k} f(x, y, i) \times r_i}{\sum_{i=k-\tau}^{k} r_i},
\end{aligned}
\tag{108}
$$

где $f(x, y, k)$ – параметр НДС, анализируемый на сходимость, $WMA(x, y, k)$ – взвешенное скользящее среднее (weighted moving average) [16], τ – ширина окна осреднения, а r – весовая функция, которая обычно выбирается в виде линейно или экспоненциально убывающей последовательности коэффициентов.

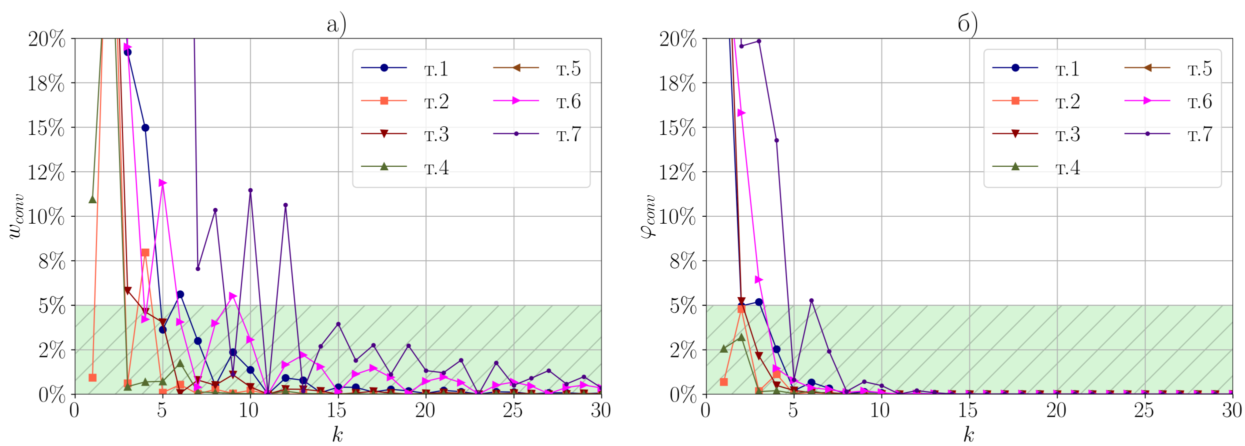


Рис. 13. Графики функций сходимости $w_{conv}(k)$ и $\varphi_{conv}(k)$ в контрольных точках

Итого, проведя анализ сходимости тригонометрических рядов w и φ и задавшись степенью сходимости $w_{conv} < 5\%$ окончательно принимаем для расчёта прогиба оболочки $k > 15$.

На этом же этапе расчёта можно задаться и необходимым пределом суммирования для функции напряжений φ, но определение φ почти никогда не является самоцелью. Компоненты мембранных усилий согласно (32) – (34) имеют дифференциальные связи с функцией напряжений, а дифференцирование частичных сумм на практике сильно влияет на сходимость получаемых рядов для производных. Поэтому вопрос сходимости рядов для внутренних усилий, которые вычисляются на основе полученных в виде (98) функций прогиба и напряжений, всегда требует дополнительного анализа.

Проведем расчёт прогиба от каждой нагрузки по первым формулам (106), (104), (105) и определим суммарный прогиб, используя (98). Результат расчета при пределе суммирования $k = 40$ показан на рисунке 15: а) – от собственного веса $p_1(x, y)$; б) – от равномерно распределенной нагрузки $p_2(x, y)$; в) – от сосредоточенной силы $p_3(x, y)$; г) – от суммарного загружения $p(x, y)$. Синими и красными маркерами отмечены положения точек с минимальными и максимальными перемещениями соответственно, значения экстремальных перемещений указаны внутри стрелок. Деформированная форма оболочки от действия суммарного загружения представлена на рисунке 14, *а*. На рисунке 14, *б-в* для сравнения показаны результаты расчета прогибов оболочки с применением МКЭ. По результатам расчёта методом Навье, максимальный прогиб оболочки, полученный в точке приложения сосредоточенной силы, составляет 1.02 мм, а методом конечных элементов – 1.07 ÷ 1.13 мм.

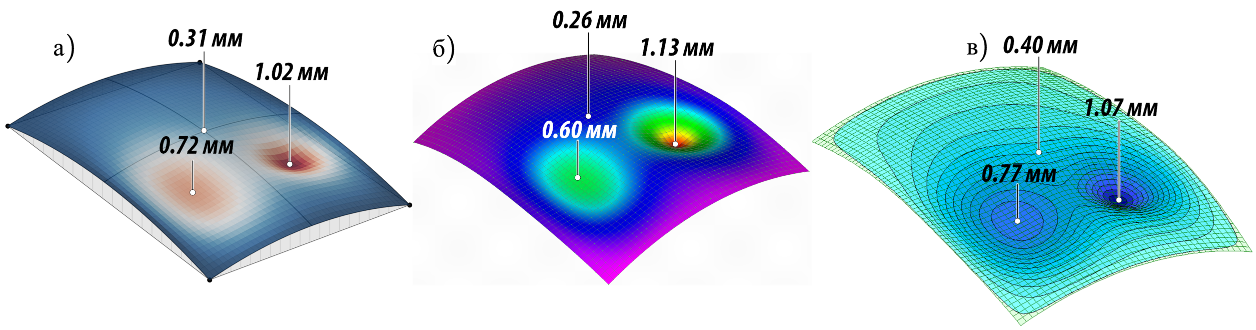


Рис. 14. Деформированная форма оболочки (перемещения увеличены в 500 раз) от действия суммарного загружения $p(x, y)$, полученная: а) – методом Навье; б) – методом конечных элементов в ПК FEMAP; в) – методом конечных элементов в ПК ЛИРА-САПР

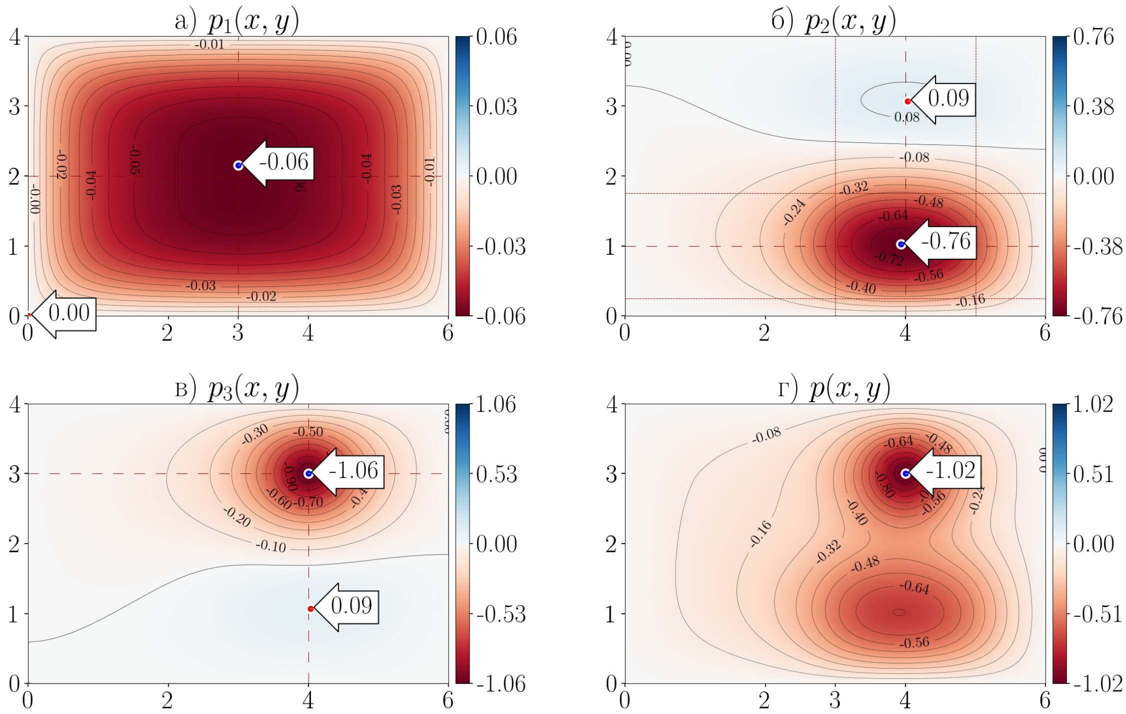


Рис. 15. Прогиб оболочки, мм

Для определения мембранных внутренних усилий в оболочке по формулам (32) – (34) и изгибных усилий по формулам (36) – (38) и (39) – (40) необходимо использовать ранее полученные производные функций φ и w (70) – (79). Производные представляются аналогично (98) в виде суммы производных функций (104), (105) и (106). В качестве примера, приведем полный перечень выкладок (109) для определения изгибающего момента M_{11} от рассматриваемого сочетания нагрузок.

$$
\begin{aligned}
&M_{11} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\
&\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2}\\
&\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2m-1)\cdot\pi}{a}\right)^2\cdot A_1(2m-1,2n-1)\times\\
&\qquad\times\sin\left(\frac{(2m-1)\cdot\pi x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{(2n-1)\cdot\pi y}{b}\right)\\
&\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\cdot A_2(m,n)\cdot\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\\
&\frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\cdot A_3(m,n)\cdot\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\\
&\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)\cdot\pi}{b}\right)^2\cdot A_1(2m-1,2n-1)\times\\
&\qquad\times\sin\left(\frac{(2m-1)\cdot\pi x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{(2n-1)\cdot\pi y}{b}\right)\\
&\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\cdot A_2(m,n)\cdot\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\\
&\frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\cdot A_3(m,n)\cdot\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\\
&\qquad\text{где } m,n = 1,2,3,\ldots
\end{aligned}
\tag{109}
$$

Определение остальных компонентов усилий производится аналогичным образом. На практике, при программировании решения задачи в прикладных компьютерных системах удобным оказывается сразу задать 10 функций-производных (70) – (79), а затем вычислять внутренние усилия, как их линейные комбинации.

Скорость сходимости тригонометрических рядов для внутренних усилий отличается от скорости сходимости рядов (63) и (64). Покажем характерные особенности их поведения на примере изгибающего момента M_{11} и поперечной силы Q_{13}. На рисунках 16 – 17 приведены значения указанных внутренних усилий в контрольных точках (см. рис. 11), полученные при последовательном увеличении верхнего предела суммирования k. На правые части (б) рисунков отдельно выведены результаты исследования сходимости в особой точке №1, которая соответствует месту приложения сосредоточенной силы P и, как было указано ранее, является точкой сингулярности.

Анализ сходимости рядов для изгибающего момента в контрольных точках 2–7 (рис. 16, *а*) не выявляет вычислительных проблем – при $25 < k < 50$ внутренние усилия уверенно стабилизируются около своих финальных значений. В точке сингулярности (рис. 16, *б*) поведение частичной суммы ряда отличается: во-первых, стабилизация решения достигается гораздо позднее, при $k > 75$; во-вторых, абсолютное значение изгибающего момента на целый порядок превышает моменты в остальных контрольных точках (позже мы увидим, что эта «концентрация» усилия компактно расположена вокруг точки приложения сосредоточенной силы и быстро убывает по мере удаления от неё).

Рисунок 17 демонстрирует качественно иные результаты, на левой его части отчётливо видно отсутствие сходимости решения в ряде контрольных точек. Только в точках 2, 4, 7, приблизительно при $k > 50$, можно заметить некоторую стабилизацию результатов. В остальных точках наблюдаются сильные пульсации и осцилляции, которые не позволяют говорить о сходимости частичных сумм для поперечной силы. В точке сингулярности (рис. 17, *б*) ряд Q_{13} оказывается расходящимся, решение с помощью метода Навье вовсе получить не удаётся. Как уже отмечалось ранее, в качестве контрольных использованы самые неблагоприятные точки рассматриваемой оболочки (места скачкообразного изменения нагрузок), в большинстве других точек решение в тригонометрических рядах для поперечных сил оказывается сходящимся.

Рассмотрение рисунков 16 и 17 показывает, что в целом сходимость рядов для поперечной силы заметно хуже сходимости рядов, аппроксимирующих изгибающий момент. Это подтверждает известное правило – с увеличением кратности дифференцирования частичных сумм скорость их сходимости падает. Действительно, изгибающий момент M_{11} получен, как линейная комбинация вторых производных ряда (63), а поперечная сила Q_{13} – как комбинация третьих производных того же ряда, поэтому для равноточного определения поперечных сил в методе Навье приходится удерживать большее количество членов рядов. Таким образом, для расчёта внутренних усилий в оболочке при наличии разрывных (особенно, сосредоточенных) нагрузок целесообразно устанавливать верхний предел суммирования в диапазоне $k > 40$. При практических решениях задач прочности значения внутренних усилий, полученные в сингулярных точках, обычно исключаются из рассмотрения или осредняются по локальной области возникновения сингулярности.

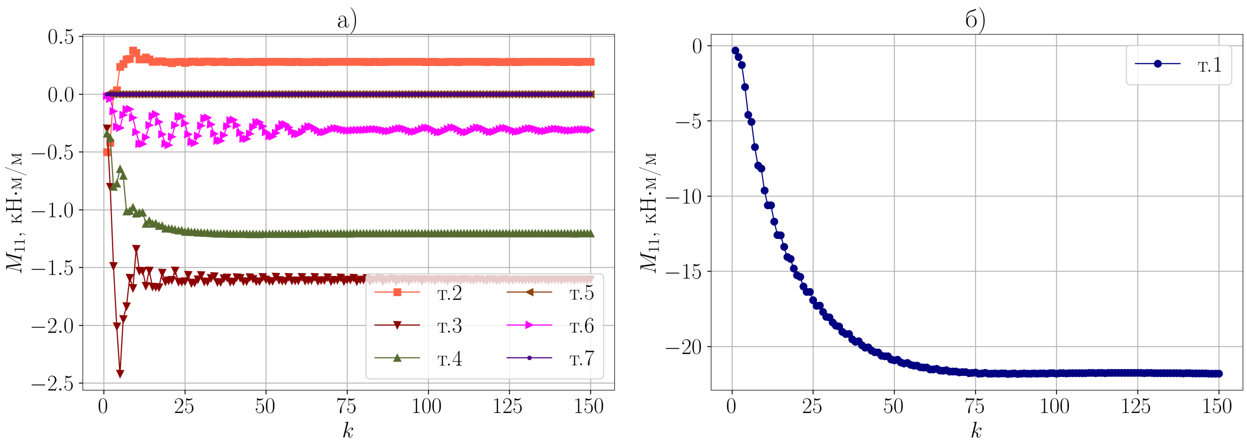


Рис. 16. Графики зависимостей изгибающего момента M_{11} от предела суммирования k: а) – в точках 2-7; б) – в точке 1

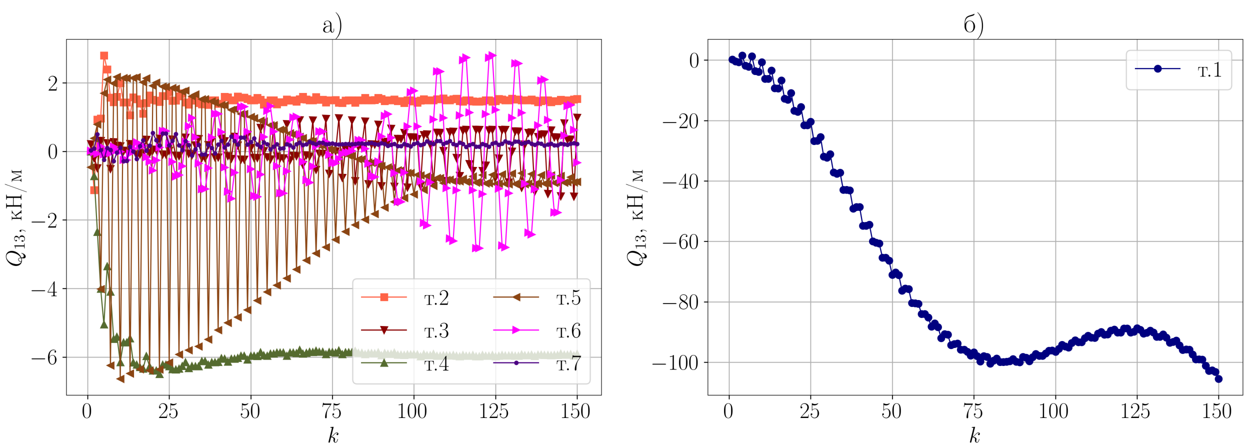


Рис. 17. Графики зависимостей поперечной силы Q_{13} от предела суммирования k: а) – в точках 2-7; б) – в точке 1

Результаты расчёта внутренних усилий от отдельных загружений и суммарного действия всех нагрузок при $k = 40$ представлены на рисунках 18–25.

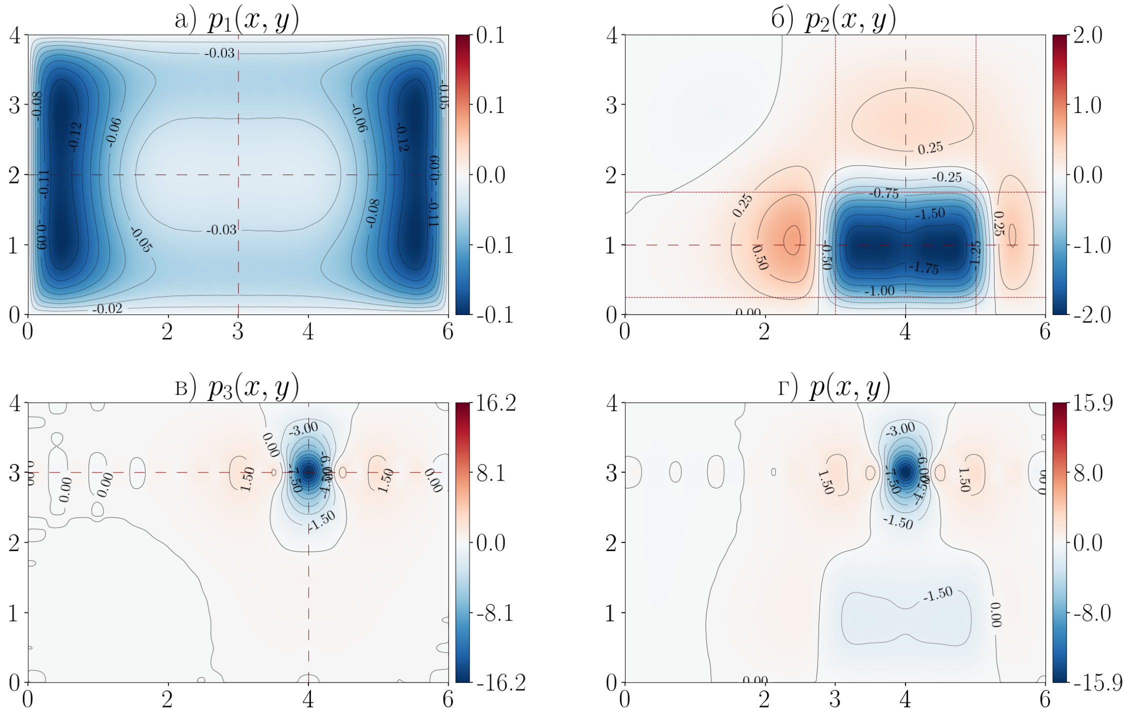


Рис. 18. Изгибающий момент M_{11}, (кН · м)/м

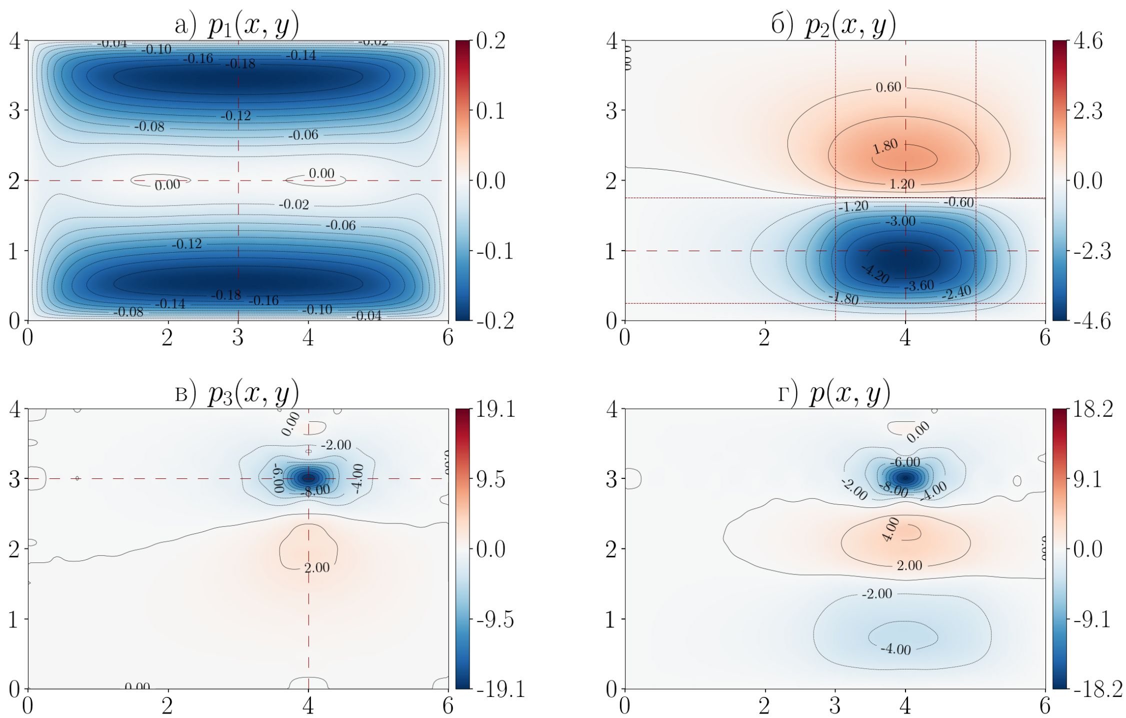


Рис. 19. Изгибающий момент M_{22}, (кН · м)/м

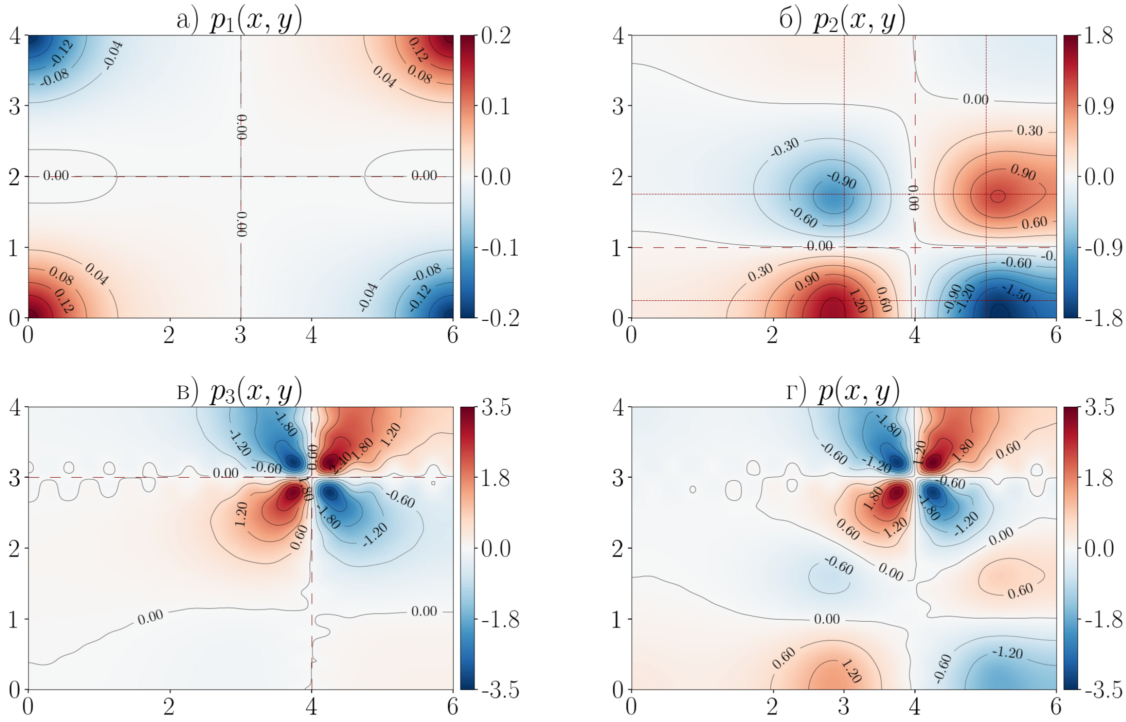


Рис. 20. Крутящий момент M_{12}, (кН · м)/м

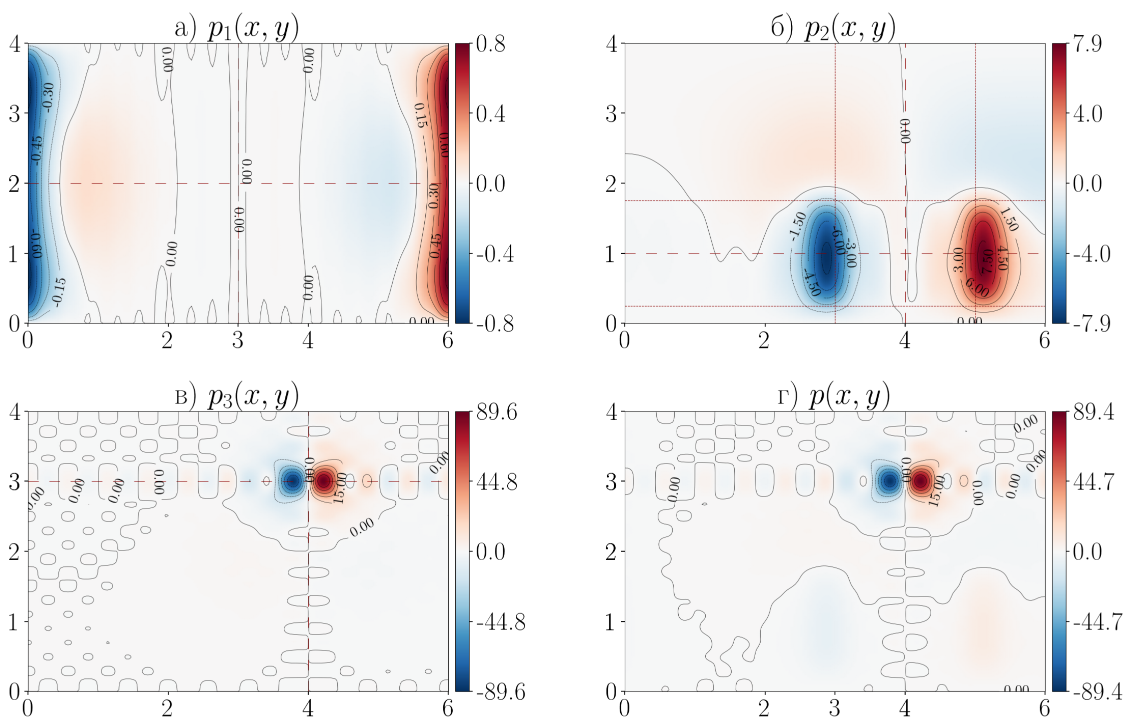


Рис. 21. Поперечная сила Q_{13}, кН/м

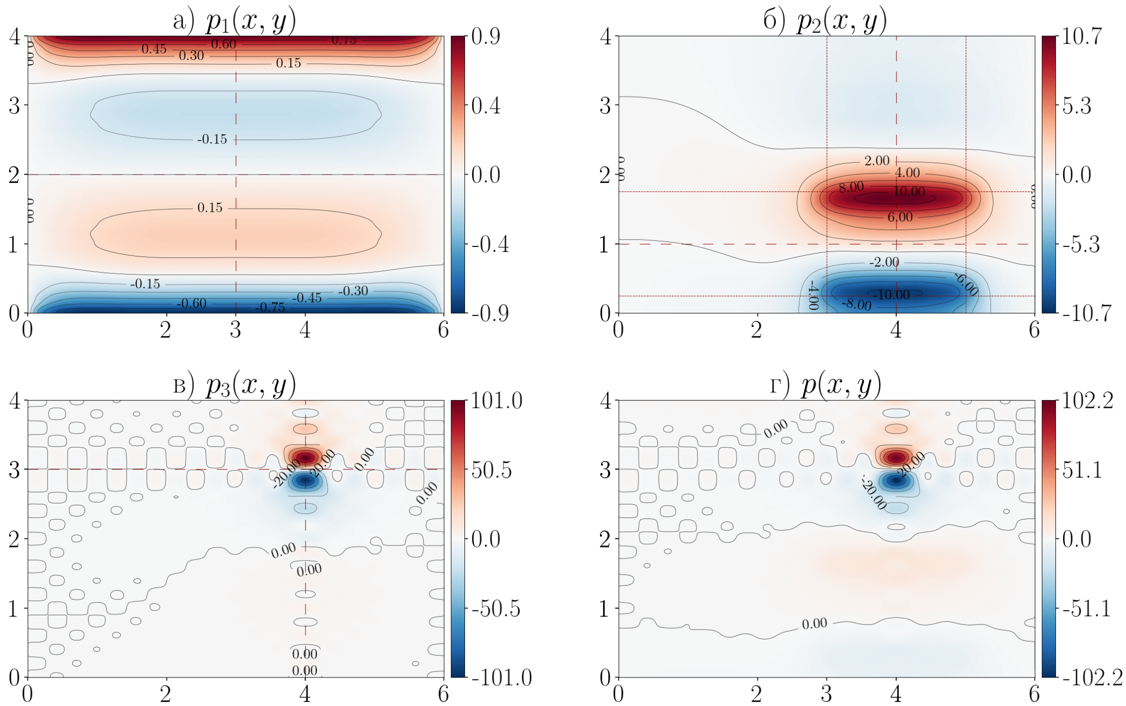


Рис. 22. Поперечная сила Q_{23}, кН/м

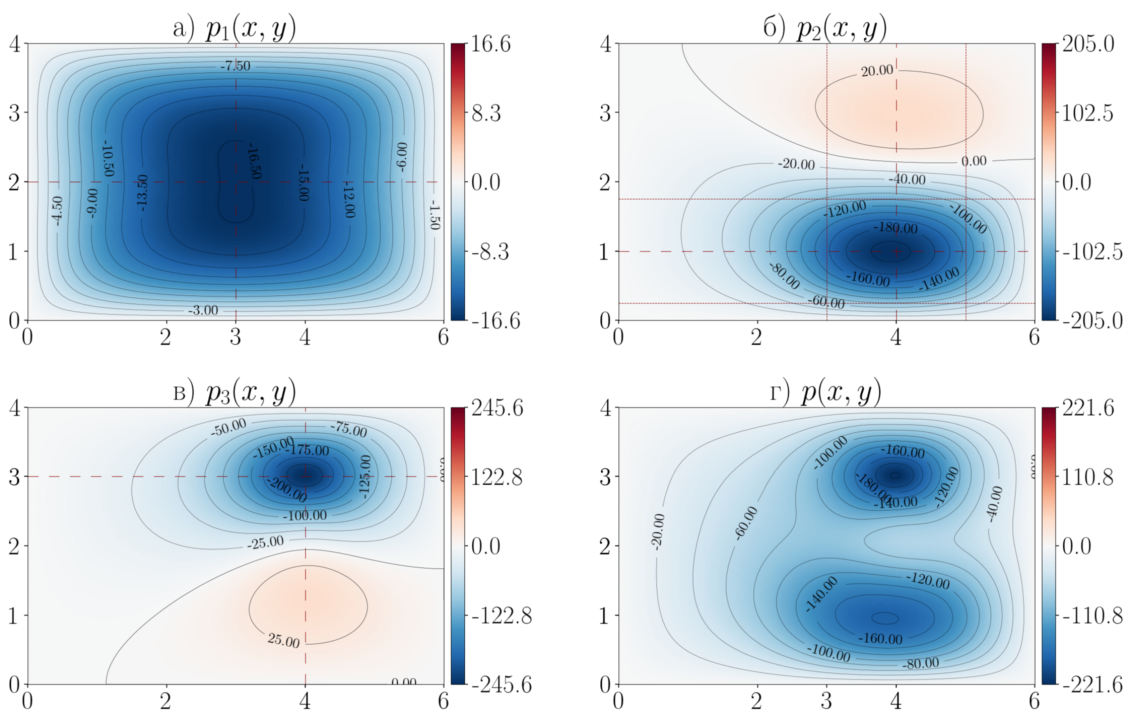


Рис. 23. Продольная сила N_{11}, кН/м

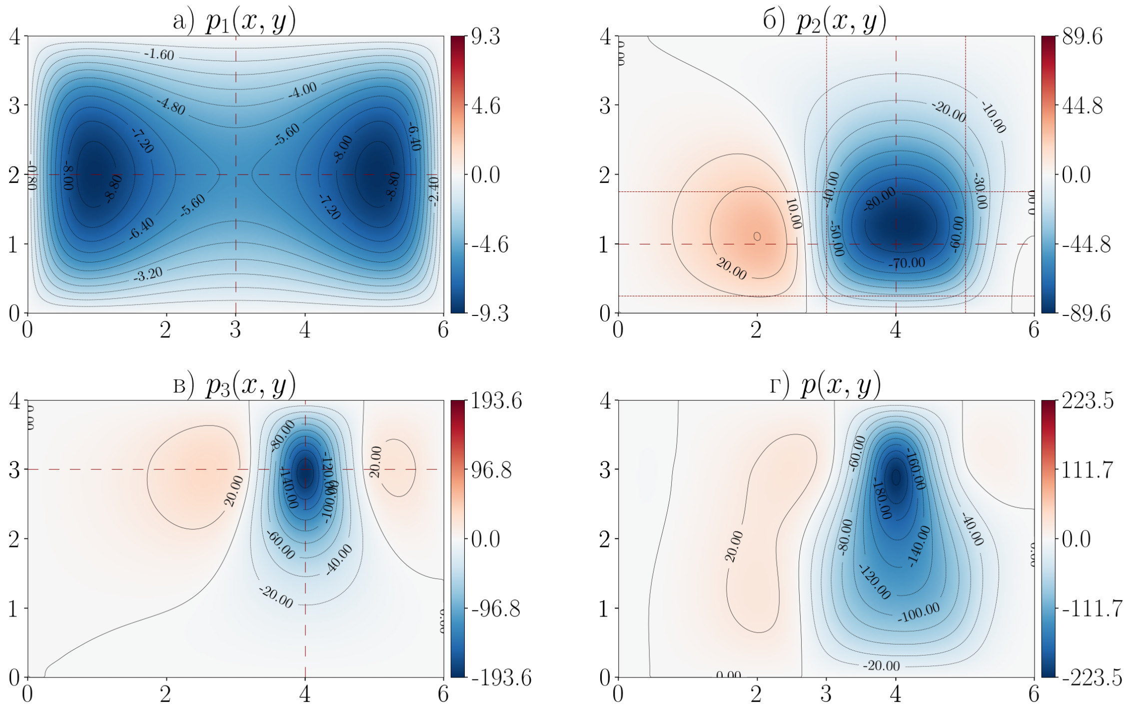


Рис. 24. Продольная сила N_{22}, кН/м

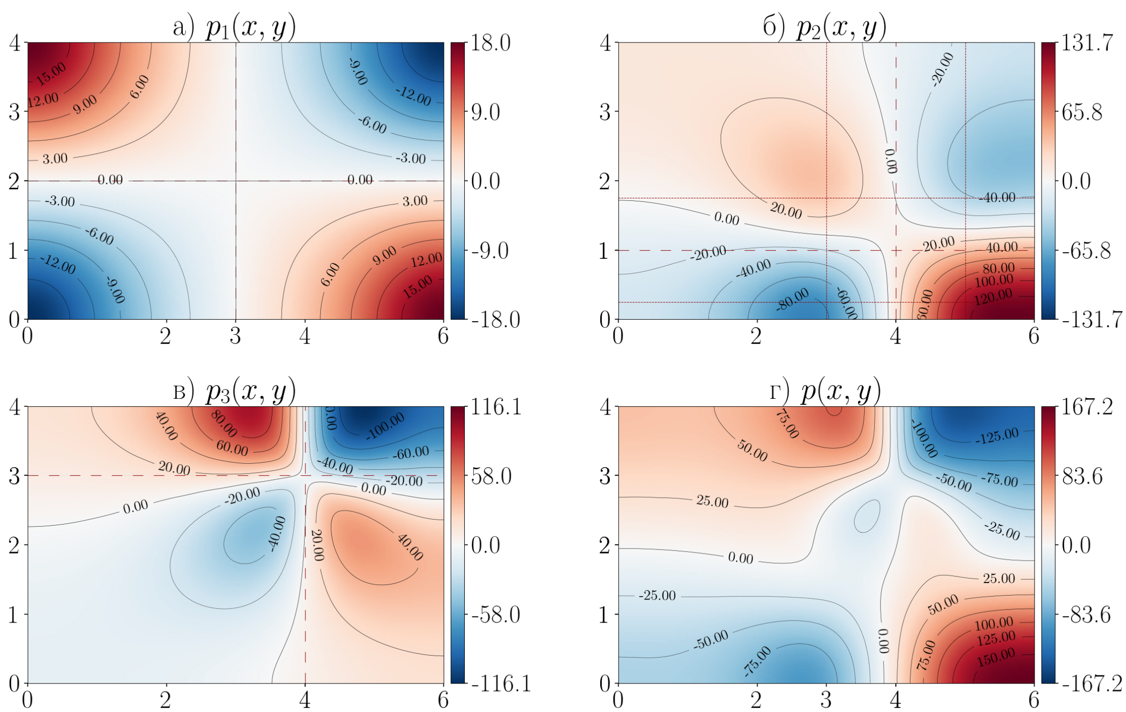


Рис. 25. Сдвигающая сила N_{12}, кН/м

Определив компоненты внутренних усилий, рассчитаем напряжения, действующие на нижней и верхней поверхностях оболочки, по формулам (56)–(58). Результаты расчёта напряжений показаны на рисунках 26 – 31.

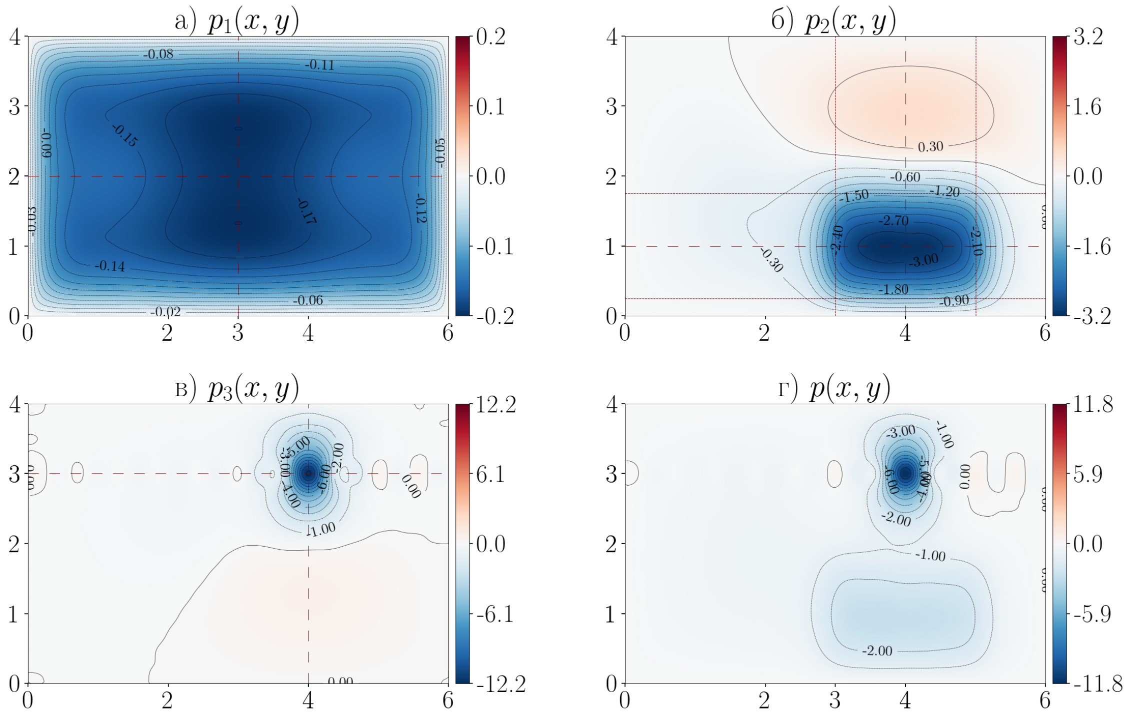


Рис. 26. Нормальные напряжения на верхней поверхности оболочки σ_{11}^{top}, МПа

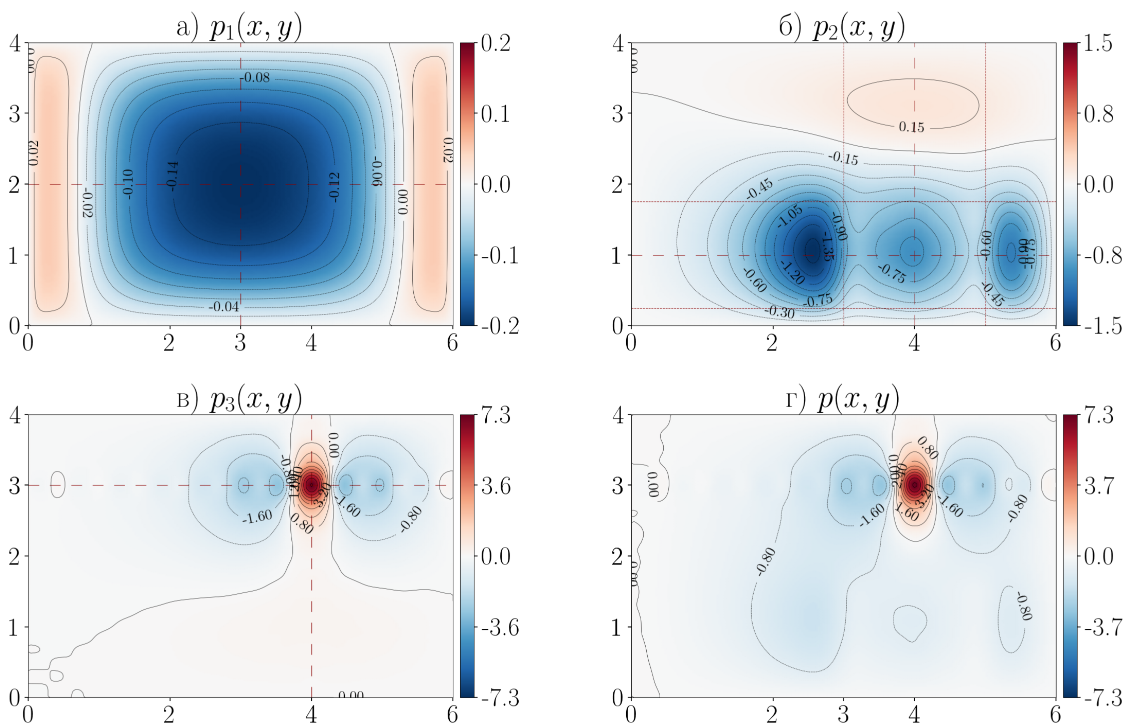


Рис. 27. Нормальные напряжения на нижней поверхности оболочки σ_{11}^{bottom}, МПа

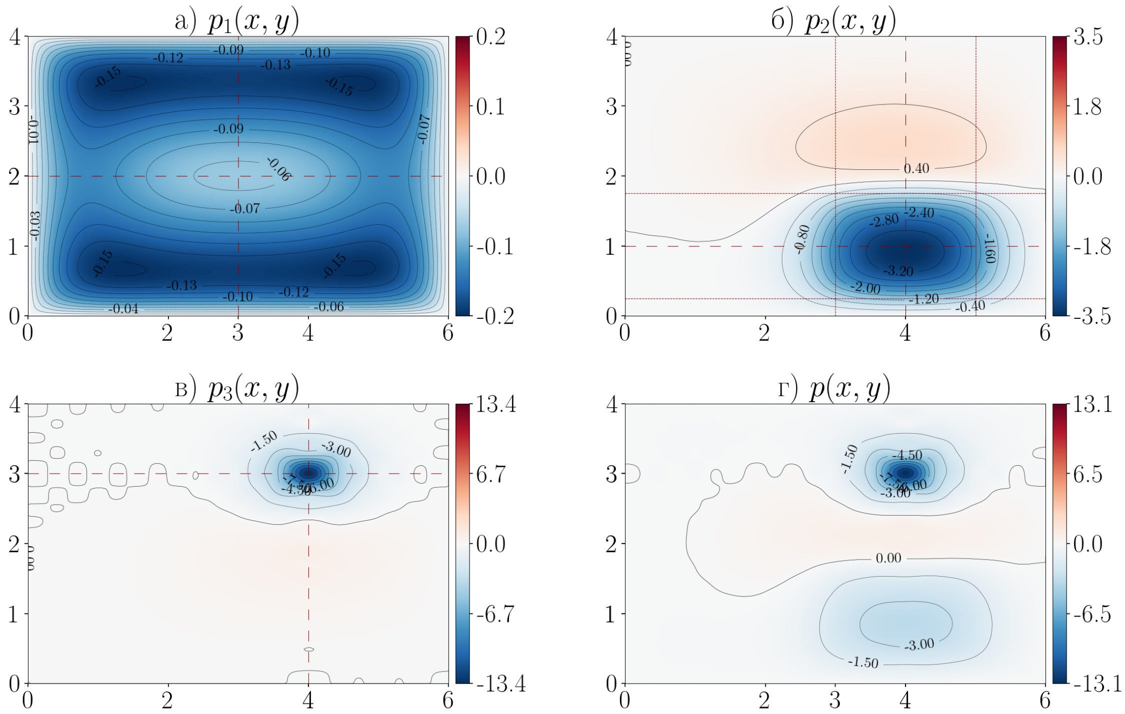


Рис. 28. Нормальные напряжения на верхней поверхности оболочки σ_{22}^{top}, МПа

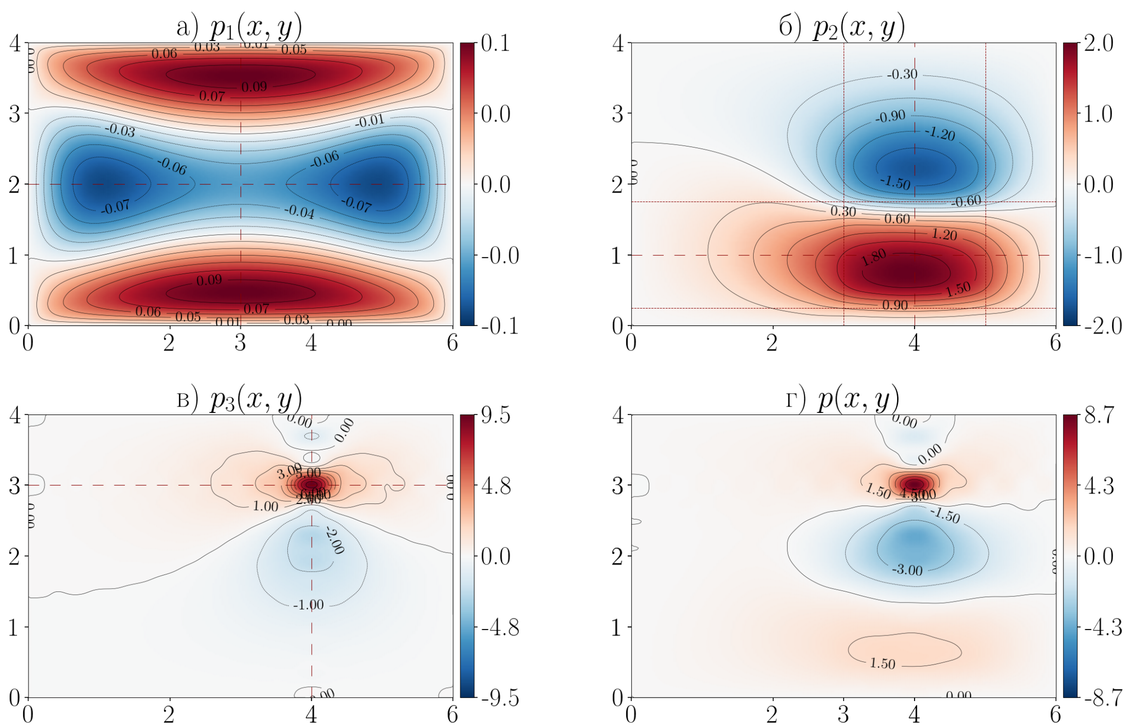


Рис. 29. Нормальные напряжения на нижней поверхности оболочки σ_{22}^{bottom}, МПа

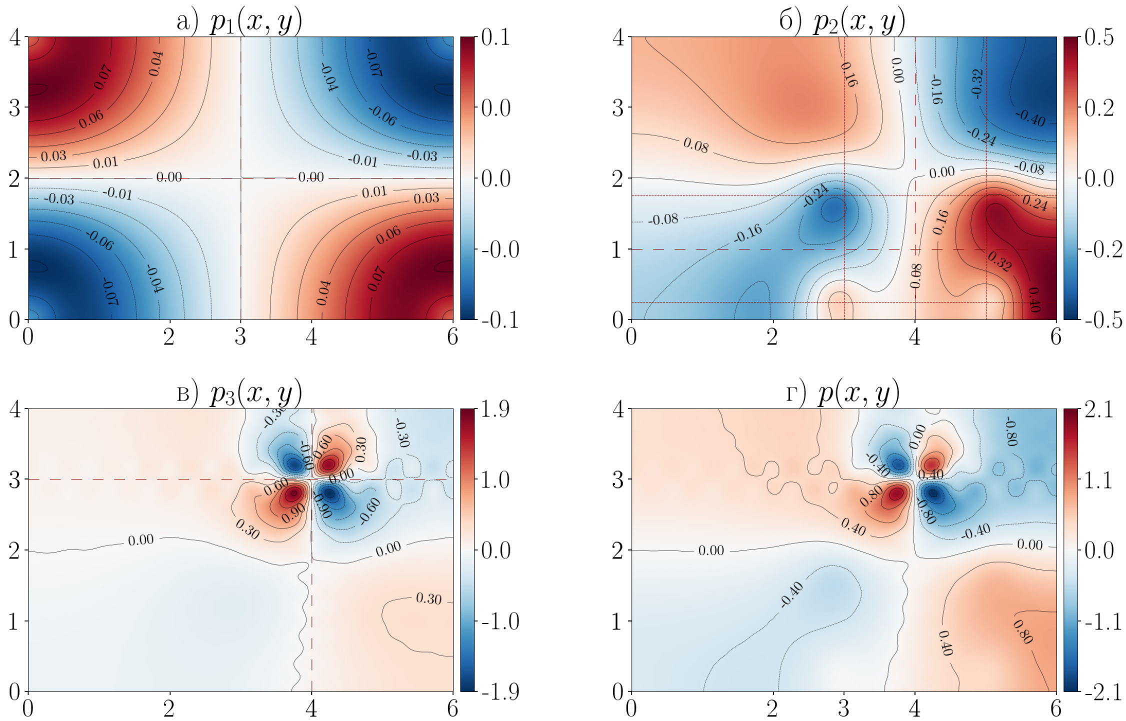


Рис. 30. Касательные напряжения на верхней поверхности оболочки τ_{12}^{top}, МПа

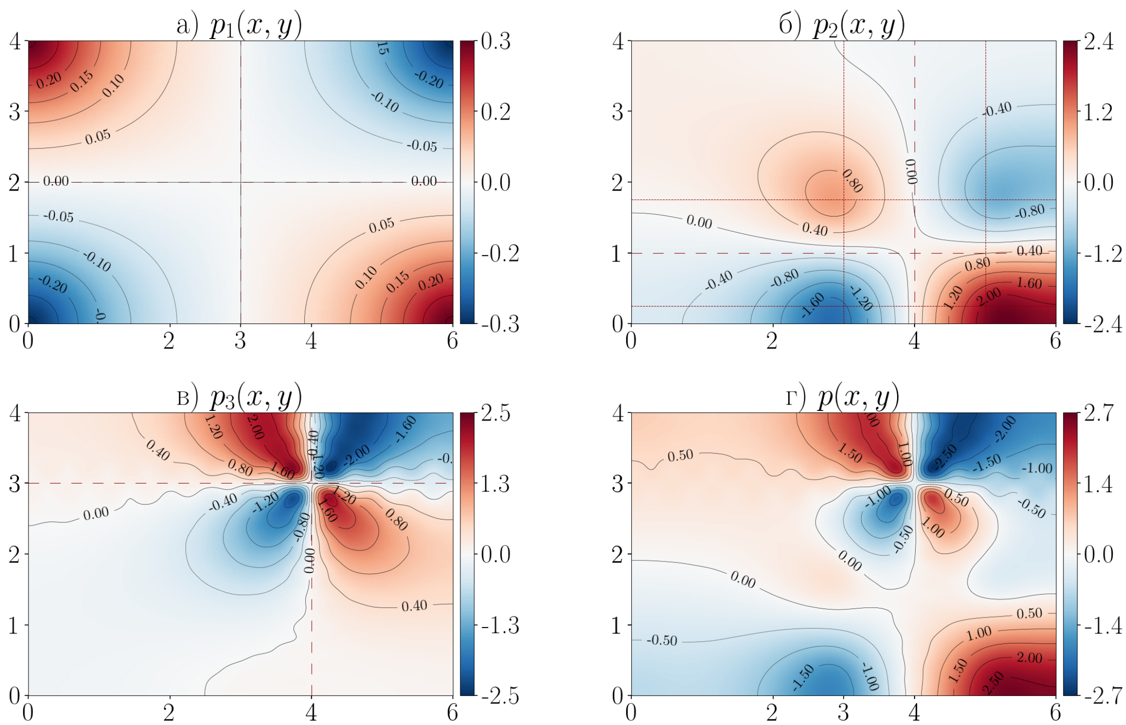


Рис. 31. Касательные напряжения на нижней поверхности оболочки τ_{12}^{bottom}, МПа

5.3. Проверки по предельным состояниям

Произведем проверку по первому предельному состоянию, используя условие (61) первой теории прочности. Результаты расчёта главных напряжений при $k = 40$ (см. уравнение (59)) на верхней и нижней гранях оболочки показаны на рисунках 32 – 35.

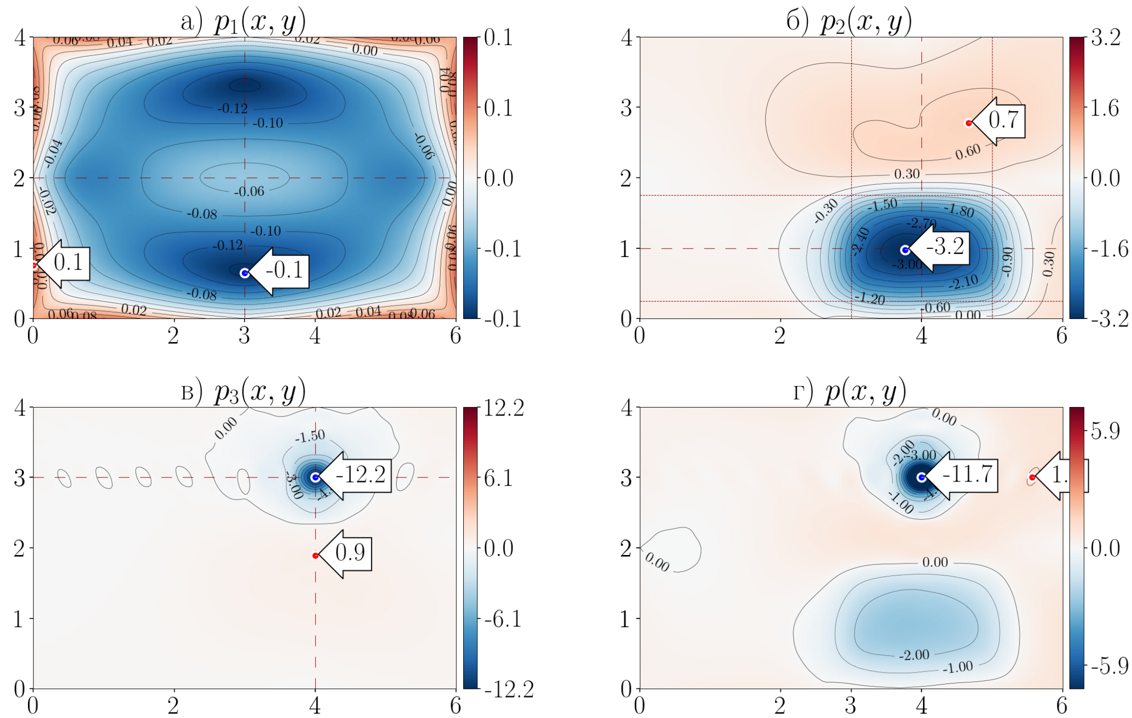


Рис. 32. Главные напряжения на верхней поверхности оболочки σ_1^{top}, МПа

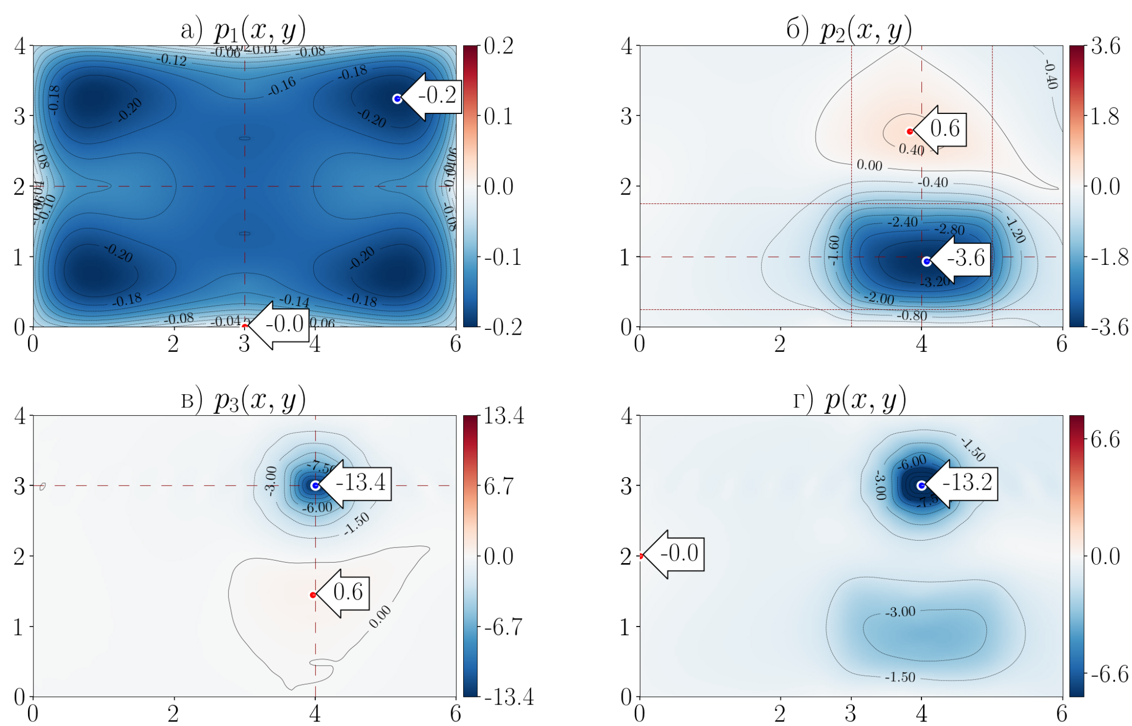


Рис. 33. Главные напряжения на верхней поверхности оболочки σ_3^{top}, МПа

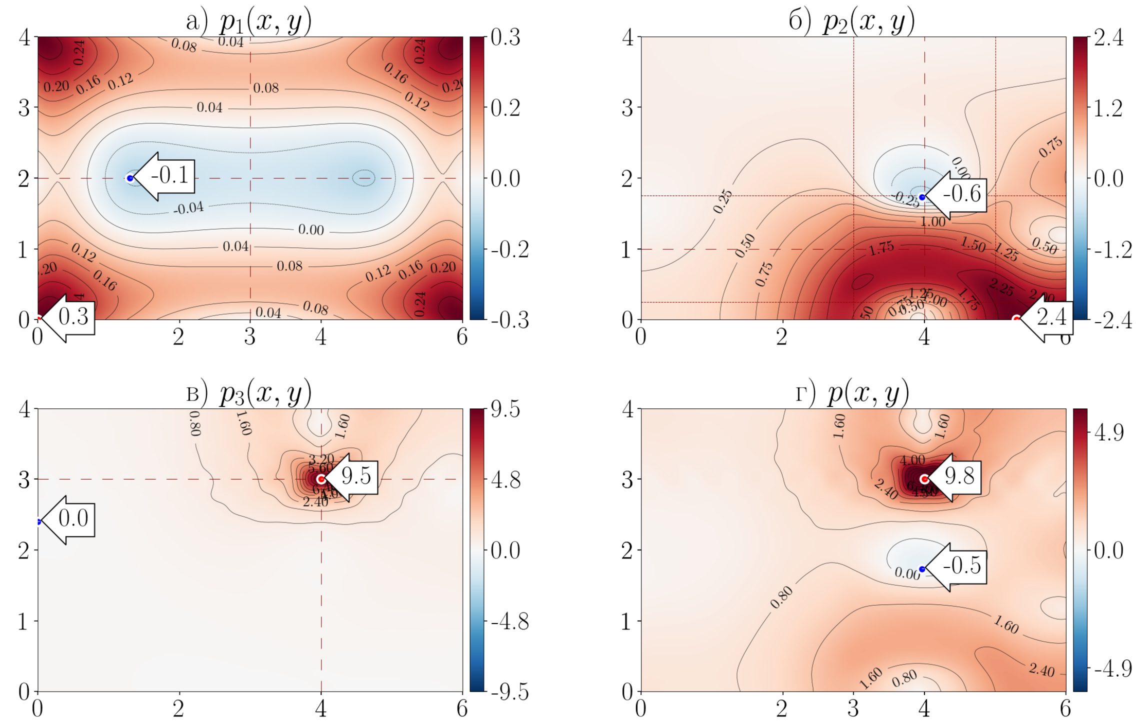


Рис. 34. Главные напряжения на нижней поверхности оболочки σ_1^{bottom}, МПа

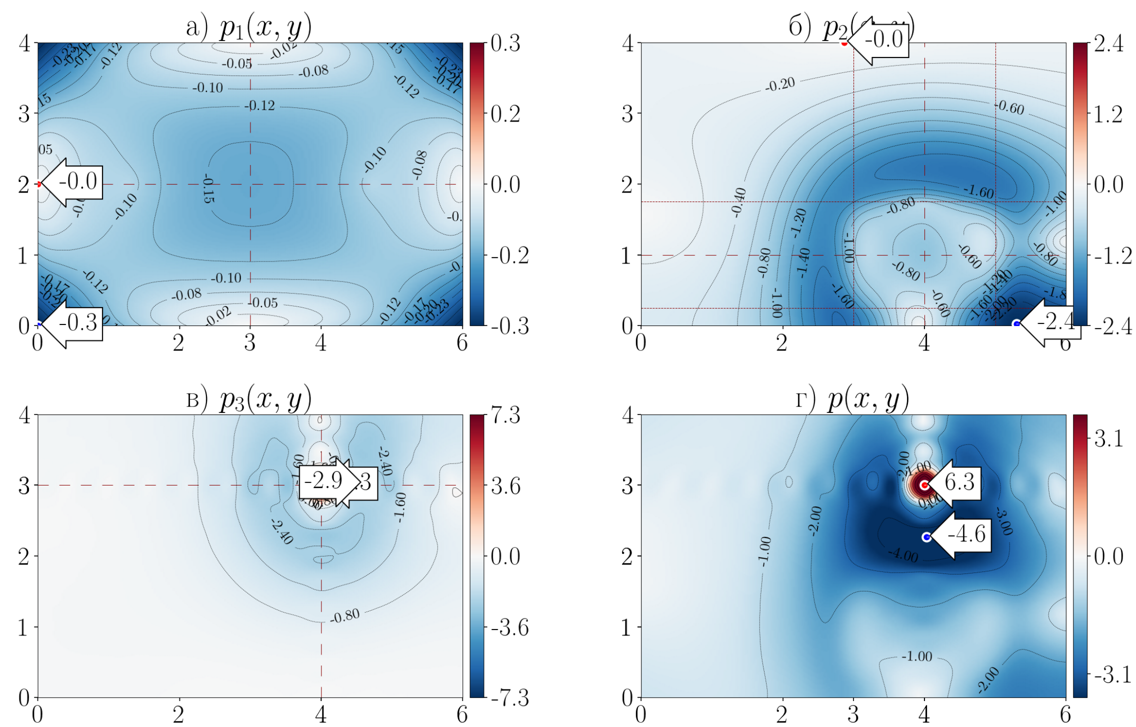


Рис. 35. Главные напряжения на нижней поверхности оболочки σ_3^{bottom}, МПа

Максимальное и минимальное главные напряжения в оболочке от суммарного загружения равны соответственно $\sigma_{1,3}^{max} = 13,5$ МПа и $\sigma_{1,3}^{min} = -17,0$ МПа. Считая, что материал оболочки одинаково работает как на растяжение, так и на сжатие, получим:

$$|+13,5| \text{ МПа} > R_u \gamma_c = 5 \cdot 1 = 5 \text{ МПа}$$

$$|-17,0| \text{ МПа} > R_u \gamma_c = 5 \cdot 1 = 5 \text{ МПа}$$

Максимальные по абсолютной величине растягивающее и сжимающее напряжения значительно превышают расчётное сопротивление материала, условие прочности по теории максимальных нормальных напряжений **не** выполняется.

Для проверки по четвертой теории прочности произведем расчёт эквивалентных напряжений по Мизесу на верхней и нижней поверхностях оболочки. Результаты при $k = 40$ представлены на рисунках 36 и 37. В отличие от изополей главных напряжений, на рисунках показаны положения точек только с максимальными напряжениями, потому что напряжения Мизеса всегда положительны, о чём нетрудно догадаться, рассмотрев вид левой части неравенства (62).

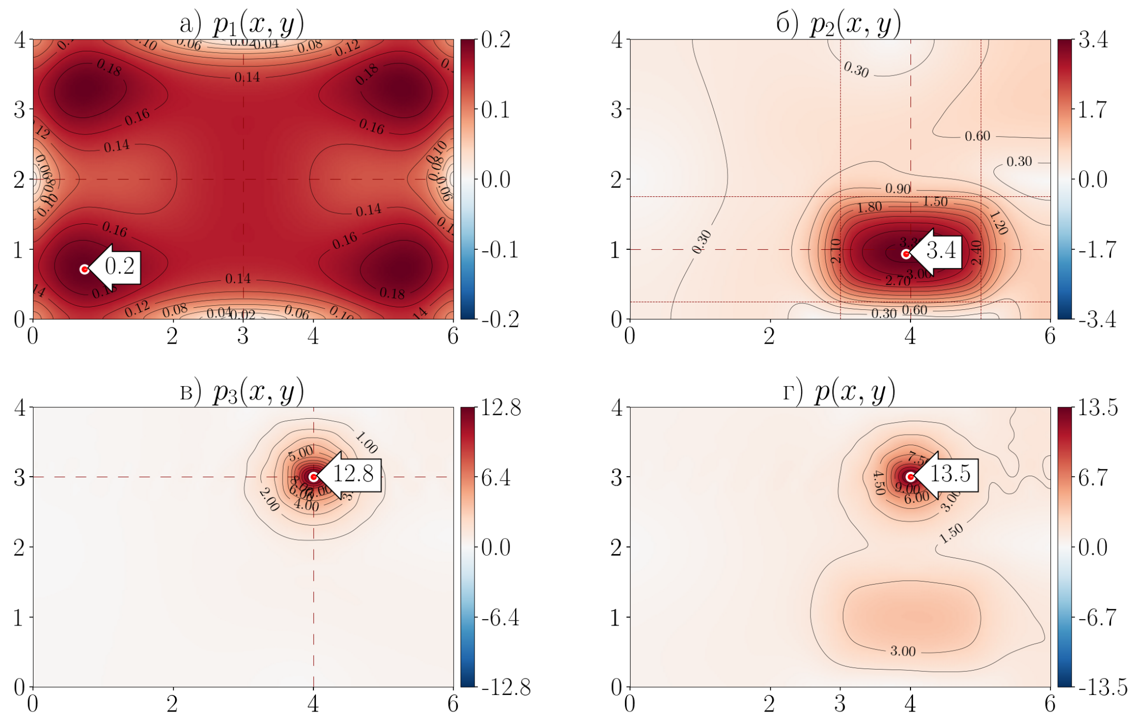


Рис. 36. Эквивалентные напряжения по фон Мизесу на верхней поверхности оболочки σ^{top}_{mises}, МПа

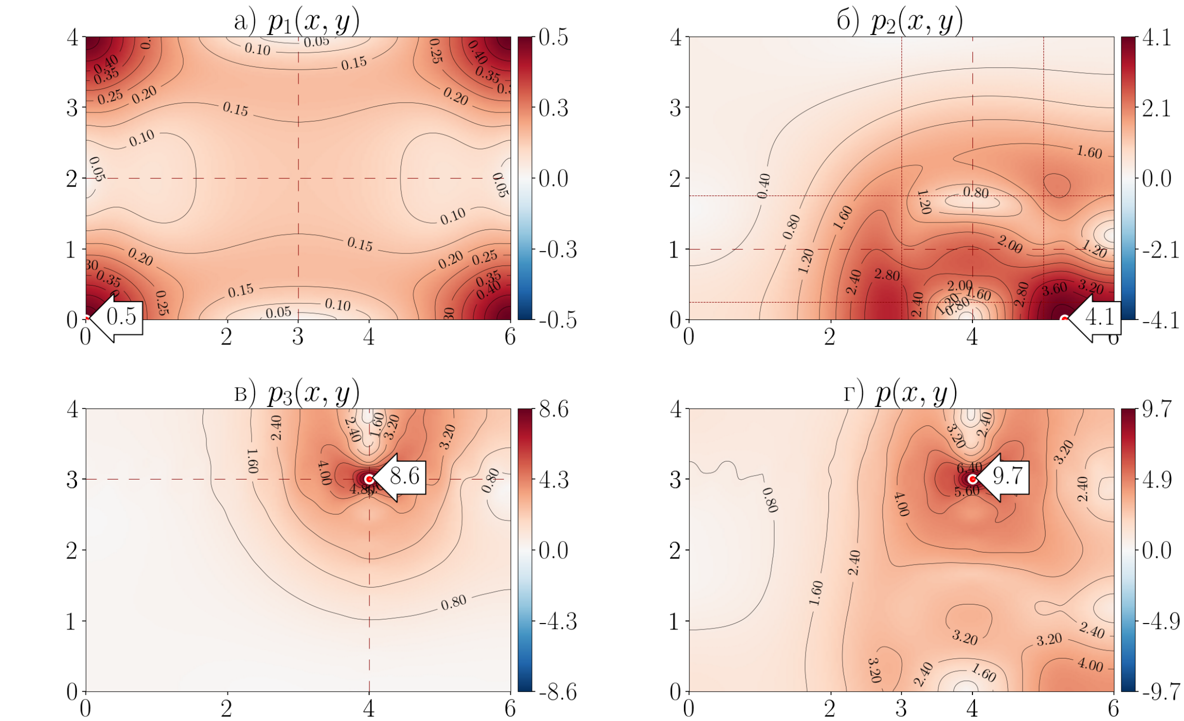


Рис. 37. Эквивалентные напряжения по фон Мизесу на нижней поверхности оболочки σ_{mises}^{bottom}, МПа

Максимальное эквивалентное напряжение в оболочке от суммарного загружения равно $\sigma_{mises}^{max} = 17,2$ МПа. Проверяя условие прочности (62), получим:

$$17,2 \text{ МПа} > R_u \gamma_c = 5 \cdot 1 = 5 \text{ МПа}$$

Максимальное эквивалентное напряжение значительно превышает расчётное сопротивление материала, условие прочности по энергетической теории прочности **не** выполняется.

Проверку по второй группе предельных состояний проведем исходя из результатов расчёта прогиба оболочки, показанных на рисунке 15. Максимальный прогиб от суммарного нагружения составил $w_{max} = 1,0$ мм. Предельно допустимый прогиб определим согласно СП 20.13330.2016 «Нагрузки и воздействия»:

$$w_u = \frac{min(a,b)}{200} = 20 \text{ мм}$$

$$w_{max} = 1 \text{ мм} < w_u = 20 \text{ мм}$$

Максимальный расчётный прогиб значительно меньше предельно допустимого. Проверка на жесткость удовлетворяется.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основные этапы решения задачи изгиба пологой оболочки методом Навье?

2. Как оценить точность приближения нагрузок частичными суммами тригонометрических рядов?

3. Как установить верхние пределы суммирования при определении параметров НДС методом разложения в двойные тригонометрические ряды?

6. Заключение

Метод двойных тригонометрических рядов (метод Навье) – эффективный аналитический метод решения задачи изгиба тонких пологих оболочек. Реализация метода с помощью современных систем компьютерной алгебры (Mathcad, MATLAB, Maple, Mathematica и др.) или прикладных языков программирования (Python, R, Julia) сравнительно просто позволяет получить решение системы дифференциальных уравнений (49) и наглядно визуализировать результаты.

В целом метод Навье позволяет рассчитывать свободно опертые оболочки на действие произвольных нагрузок, но, как мы смогли убедиться на собственном опыте, приложение к оболочке сосредоточенных нагрузок может сильно ухудшить скорость сходимости частичных сумм рядов для некоторых внутренних усилий и напряжений, получаемых многократным дифференцированием рядов для функции прогиба. Вторым серьезным ограничением метода является возможность рассчитывать только оболочки самой простой геометрии (на прямоугольном плане), условия опирания которых соответствуют выражениям (53). Если первый недостаток нивелируется возможностями современной вычислительной техники, то последний – сильно бьет по позициям метода, заставляя инженеров прибегать к помощи альтернативных методик. Тем не менее, метод Навье оказывается крайне полезен в инженерной практике, поскольку позволяет получить точное *эталонное* решение задачи, с которым можно сравнивать результаты, полученные численными методами, в частности – методом конечных элементов (МКЭ), и, следовательно, оценивать качество подготовки компьютерных моделей оболочечных конструкций.

В заключение, на рисунке 38 приведём эквивалентные напряжения в оболочке, полученные с применением МКЭ. Напряжения по Мизесу явяются интегральным параметром напряженно-деформированного состояния конструкции, учитывающим влияние всех значимых компонент тензора напряжений, поэтому они крайне удобны для сравнения результатов расчета альтернативными методами. Из сравнения рисунков 38, *а, в* с 36, *г* и 38, *б, г* с 37, *г* видно, что результаты качественно и количественно сопоставимы во всех точках, кроме области сингулярности (точки приложения внешней сосредоточенной нагрузки), где разница в напряжениях достигает десятков процентов.

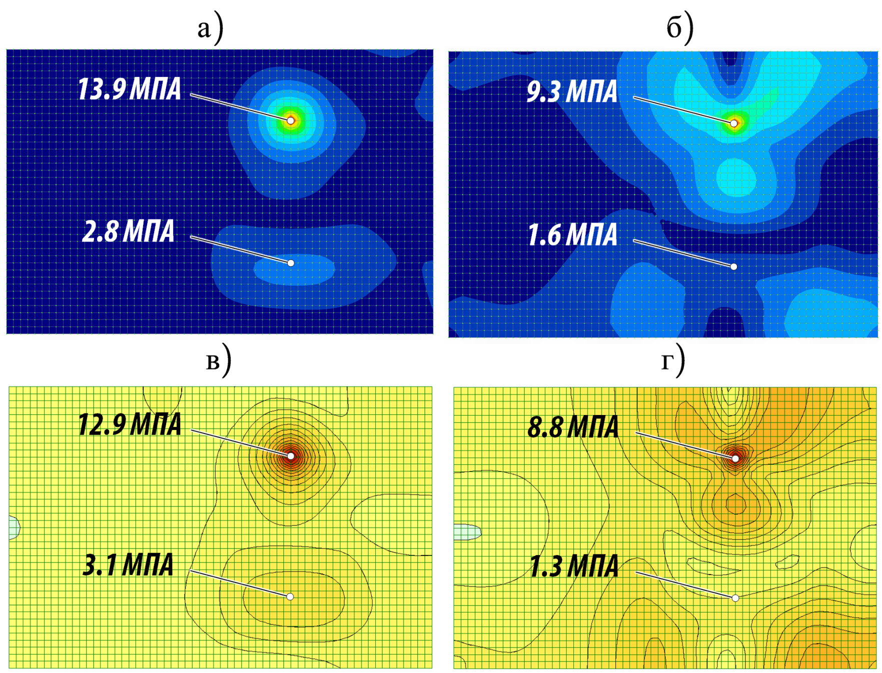


Рис. 38. Эквивалентные напряжения по фон Мизесу σ_{mises}, Па, от суммарного загружения, полученные методом конечных элементов: а) – на верхней поверхности оболочки в ПК FEMAP; б) – на нижней поверхности оболочки в ПК FEMAP; в) – на верхней поверхности оболочки в ПК ЛИРА-САПР; г) – на нижней поверхности оболочки в ПК ЛИРА-САПР

Библиографический список

[1] Колкунов Н. В. Основы расчёта упругих оболочек. М.: Высш. школа, 1972. 296 с.

[2] В.И. Самуль. Основы теории упругости и пластичности: Учеб. пособие для студентов вузов.–2 изд., перераб. Москва: Высшая школа, 1982. 264 с.

[3] Эдвардс Ч. Г., Пенни Д. Э. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. 3-е издание. Москва: ООО И.Д. Вильямс, 2008. 1104 с.

[4] А.П. Филин. Элементы теории оболочек. Ленинград: Стройиздат, 1975. 256 с.

[5] Лукашевич А. А. Теория расчёта пластин и оболочек. СПб.: СПбГАСУ, 2017. 131 с.

[6] Биргер И. А. Стержни. Пластины. Оболочки. Москва: Физматлит, 1992. 392 с.

[7] Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г. С. Варданян, В. И. Андреев, Н. М. Атаров [и др.]. М.: Издательство АСВ, 1995. 576 с.

[8] Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Москва: Наука, 1976. 512 с.

[9] Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов: учебное пособие. Москва: Наука, 1986. 560 с.

[10] Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Москва: Высшая школа, 1961. 538 с.

[11] Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950. 342 с.

[12] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III. М.: Наука, 1966.

[13] Gibbs J. Willard. Fourier's Series // Nature. 1898. Т. 59, № 1522. с. 200.

[14] Willbraham H. On a certain periodic function // Cambrige and Dublin Math. Journ. 1848. Т. 3. С. 198–201.

[15] Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. Москва: Наука, 1966. 664 с.

[16] А. Грешилов А., А. Стакун В., А. Стакун А. Математические методы построения прогнозов. Москва: Радио и связь, 1997. 112 с.