

**Дубравин Ю. А.**

**Прикладная гидрогазодинамика.  
Метод термодинамической  
согласованности**

**2024**

Ю. А. Дубравин

**ПРИКЛАДНАЯ ГИДРОГАЗОДИНАМИКА.  
МЕТОД ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ  
СОГЛАСОВАННОСТИ**

Монография

Электронное текстовое издание

Санкт-Петербург  
Наукоемкие технологии  
2024

© Дубравин Ю. А., 2024  
ISBN 978-5-907804-69-2

УДК 532.542:536.76

ББК 22.253.3

Д797

Рецензенты:

*Сергей Николаевич Янин*, доктор физико-математических наук, профессор НОЦ

Б. П. Вейнберга, Томский политехнический университет;

*Александр Александрович Клецев*, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет

Д797 Дубравин Ю. А. Прикладная гидрогазодинамика. Метод термодинамической согласованности [Электронный ресурс]: монография. – СПб.: Научное издание технологий, 2024. – 214 с. – URL: <http://publishing.intelgr.com/archive/Prikladnaya-gidrogazodinamika.pdf>.

ISBN 978-5-907804-69-2

Приложение системы законов сохранения в интегральной форме к описанию течений газа в узлах каналов при квазиодномерной трактовке течений на границах узла приводит, в ряде случаев, к незамкнутой системе уравнений. Метод термодинамической согласованности, основанный на следствии первого и второго начал термодинамики применительно к термодинамической функции – коэффициент восстановления давления: решает проблему незамкнутости, гарантирует единственность решения при соблюдении всех законов сохранения и второго начала термодинамики, не требует привлечения гипотез извне. Методология применения проиллюстрирована решением ряда задач в аналитической форме.

Работа может быть полезна проектировщикам трубопроводных систем нефтегазовой и химической отраслей, работникам КБ авиа- и ракетостроительного профилей, студентам старших курсов ВУЗов и аспирантам.

---

Монография публикуется в авторской редакции.

УДК 532.542:536.76

ББК 22.253.3

ISBN 978-5-907804-69-2

© Дубравин Ю. А., 2024

Научное издание

**Дубравин Юрий Алексеевич**

Прикладная гидрогазодинамика.  
Метод термодинамической согласованности

Монография

Электронное текстовое издание

Подписано к использованию 26.08.2024.

Объем издания – 5,5 Мб.

Издательство «Наукоемкие технологии»

ООО «Корпорация «Интел Групп»

<http://publishing.intelgr.com>

E-mail: [publishing@intelgr.com](mailto:publishing@intelgr.com)

Тел.: (812) 945-50-63

Интернет-магазин издательства

<https://shop.intelgr.com/>

ISBN 978-5-907804-69-2



9 785907 804692 >

## Предисловие

Настоящая работа имеет целью предложить вариант корректной, с точки зрения второго начала термодинамики и всех законов сохранения, постановки задачи при квазиодномерном описании течений жидкостей и газов для участков каналов с локальными, конечными по величине воздействиями на поток. В числе воздействий: скачки площади поперечных сечений, излом оси канала, локальный подвод-отвод массы и тепла, разветвление и слияние потоков.

Простота квазиодномерной трактовки таких течений делает их привлекательными для решения задач инженерной практики, а «...при квазиодномерном рассмотрении течений в системах каналов указанная схематизация не только приемлема, но и просто необходима» (В. Г. Дулов и др. [53]). Лишним подтверждением тому является внимание, которое уделяется изучению таких течений в многочисленной учебной (например [1, 7, 87, 90]) и монографической [61, 68, 71] литературе.

Однако, в ряде случаев, квазиодномерная трактовка и теорема о среднем в приложении к законам сохранения в интегральной форме приводят к незамкнутой системе уравнений. Распространенными приемами решения проблемы незамкнутости являются привлечение экспериментальных данных или формулировка различных гипотез. Но, первые, как правило, носят частный характер, вторые – приводят к нарушению законов сохранения и (или) второго начала термодинамики. Примеры тех и других приводятся ниже.

Предлагаемая работа является обобщением и развитием общего метода построения замкнутых систем уравнений на основе законов сохранения в интегральной форме для течений в каналах с локальными конечными воздействиями на поток [36, 41, 43, Д7]. В основе способа лежит привлечение второго начала термодинамики и использование особенности термодинамической функции – коэффициента восстановления давления, который можно описать двояко: с помощью законов сохранения с одной стороны и первого и второго начал термодинамики – с другой. Сопоставление выводов этих двух подходов и приоритет выводам термодинамики явился источником необходимого числа дополнительных соотношений, замыкающих систему законов сохранения. Следует заметить, что основа метода – утверждение о независимости коэффициента восстановления давления от геометрических воздействий на поток – факт широко известный и никем неоспариваемый. Автору удалось при-

дать этому утверждению осязаемый математический облик, давший положительные результаты. Ниже, ради краткости, для ссылок на метод термодинамической согласованности будет употребляться аббревиатура «метод ТДС».

В качестве объектов приложения метода выступают.

- Течения в каналах со скачком площади (Глава 1). Здесь: наиболее полно изложена методология метода; приводится общая постановка и решение задачи; случаи несжимаемой и сжимаемой жидкости; экспериментальные исследования автора и другие источники; оценка роли и способы учета диссипативных потерь; постановка и решение задачи распада произвольного разрыва, отмечена возможность, в определенной степени, управления интенсивностью волн при РПР; дана оценка мифологии «теории удара».

- Задачи локального подвода - отвода массы в канал через произвольно ориентированные боковые патрубки (Главы 2, 3). Здесь представлены: общая постановка и решение задачи; случаи несжимаемой и сжимаемой жидкости; истечение со срывом струи через «короткий» и «длинный» патрубки (учет диссипативных потерь); гидродинамическая интерференция при истечении через несколько различных патрубков; влияние сжимаемости (числа Маха), местного сужения или расширения канала, других геометрических характеристик. Для всех математических моделей установлены условия и границы существования режимов истечения. Выявлен эффект подавления влияния угла отвода массы в «длинных» патрубках и установлена его граница. Установлена неизэнтропичность течений в канале в случае **подвода** массы, ее связь с расходом и углом вдува. Рассматриваются вопросы эффективной, с точки зрения минимизации диссипативных потерь, организации вдува массы в канал. Во всех перечисленных случаях сформулированы математические модели в аналитической форме, приведены результаты расчетов (графики), их анализ, сопоставление с имеющимися экспериментальными данными и сопоставление с подходами других авторов по затронутым вопросам.

Способы и выводы моделирования локального подвода-отвода массы в канал позволяют распространить их на распределенные по длине канала воздействия с соблюдением законов сохранения и второго начала термодинамики.

Наконец, полученные решения позволили сформулировать задачу о сопротивлении тел в ограниченном потоке (в канале) как совокупность сильных разрывов: в лобовой части – локальное сужение потока, в кормовой – локальное расширение. И то и другое может сопровождаться расходными воздействиями. Выявлено отсутствие влияния формы лобовой части короткого тела при отсутствии расходных воздействий.

В главе 4 рассмотрены вопросы раздачи и смещения потоков в веере каналов с изломом осей в случае сжимаемых и малосжимаемых сред. Аппарат: удобен для «сшивания» в узел любого числа пересекающихся под любыми углами потоков газа; предоставляет информацию о силах, действующих на конструкцию узла; позволяет распространить методы решения задач распада произвольного разрыва на веер каналов, оставаясь в рамках «классической» трактовки [Д10] следствий распада, не нарушая, при этом, законы сохранения и второе начало термодинамики.

Автор признателен своим соавторам и коллегам по НИУ «Пермский государственный университет» Никифорову Ю. И., Сергееву О. Б. и Ландик Л. В. за разработку программ для большинства математических моделей, представленных и упомянутых здесь.

«...даже в тех случаях, когда непрерывное решение существует, иногда есть смысл, вводить в рассмотрение движения с разрывами для упрощения и фактического разрешения задач...»

Л. И. Седов [93]

## Глава 1

### Течение в каналах со скачком площади сечения

#### 1.1. Система законов сохранения в интегральной форме

##### 1.1.1. Основные допущения и условия на границах

Законы сохранения массы, количества движения и полной энергии записываются для фиксированного объема  $V$  части канала, в пределах которого осуществляется воздействие на жидкость и устанавливаются новые гидродинамические параметры потока (рис. 1.1). Вся поверхность  $S$  объема  $V$  разбивается на ряд характерных участков

$$S = S^- + S^+ + \sigma, \quad (1.1)$$

в пределах каждого, из которых, считается возможным применение теоремы о среднем к интегралам по поверхности в законах сохранения. Вне границ объема  $V$  течение в канале описывается в квазиодномерном приближении [7, 68]: вводятся средние по сечению канала давление  $p$ , плотность  $\rho$ , температура  $T$ , средняя по расходу скорость  $v$ . При описании потоков количества движения и кинетической энергии через сечение канала вводятся коэффициенты осреднения Буссинеска -  $\alpha$  и Кориолиса -  $\beta$ . В дальнейшем коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  считаются близкими к единице, что соответствует развитым турбулентным течениям при больших числах Рейнольдса или идеальной жидкости.

Впредь также предполагается, что в законах сохранения можно пренебречь интегралами по объему за счет:

стационарности течения, незначительности массовых сил и объемного тепловыделения, или

предположения, что длина  $l$  в зоне перестройки течения от

начального состояния в сечении  $S^-$  до конечного сечения  $S^+$  значительно меньше характерного размера течения  $L$  ( $l/L \ll 1$ ); Последнее обстоятельство позволяет трактовать зону перестройки потока из одного состояния в другое как поверхность сильного разрыва и, следовательно, является основанием для отсутствия в математической модели интегралов по объему.

При записи интегралов по поверхности  $S$  используют граничные условия

$$v_n|_{S^-} = -v^-, \quad v_n|_{S^+} = v^+, \quad v_n|_{\sigma} = 0, \quad (1.2)$$

где  $\vec{n}$  вектор единичной нормали на внешних границах объема  $V$ .

### 1.1.2. Система уравнений

При перечисленных допущениях законы сохранения принимают вид

$$\begin{aligned} \int_S \rho v_n ds &= 0, & \int_S (\rho v_n \vec{v} + p \vec{n} - \vec{\tau}_n^*) ds &= 0, \\ \int_S \left\{ \rho v_n (u + v^2/2) + p \vec{n} \cdot \vec{v} - \vec{\tau}_n^* \cdot \vec{v} + q_n^* \right\} ds &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

а после применения теоремы о среднем [85] к интегралам по характерным участкам поверхности (1.1) приобретают форму алгебраических уравнений:

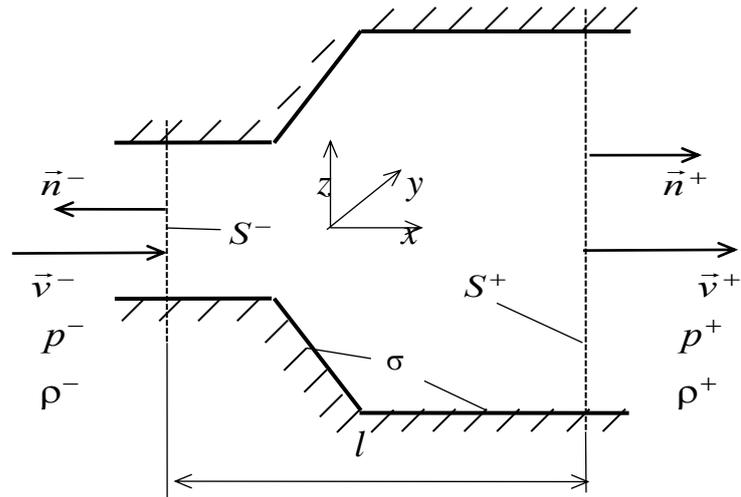


Рис. 1.1. Схема участка канала с локальным изменением площади поперечного сечения

$$S\rho v^+ = S\rho v^-, \quad S\rho vH^+ - S\rho vH^- + \int_S (q_n^* - \vec{\tau}_n^* \cdot \vec{v}) ds = 0,$$

$$\alpha S\rho v\vec{v} + Sp\vec{n}^+ - \alpha S\rho v\vec{v} - Sp\vec{n}^- + p_\sigma \int_\sigma \vec{n} ds - \int_S \vec{\tau}_n^* ds = 0.$$

Здесь  $\vec{\tau}_n^*, \vec{q}_n^*$  – векторы напряжений и теплового потока (включая эффекты вязкости и турбулентности);  $p_\sigma$  – среднее давление на боковой поверхности канала  $\sigma$ ;  $H$  – полное теплосодержание,  $H = \beta v^2/2 + p/\rho + u$ ;  $u$  – внутренняя энергия. Для сил трения и притока тепла извне вводятся безразмерные характеристики

$$\Delta_\tau = -\int_S \tau_{nx}^* ds / G^- v^-, \quad \Delta_Q = -\int_S (q_n^* - \vec{\tau}_n^* \cdot \vec{v}) ds / (Ga^2)^-, \quad (1.4)$$

где  $G^- = (S\rho v)^-$ ,  $a$  – скорость звука. С учетом введенных обозначений и  $\int_\sigma \vec{n} ds = -(S^+ - S^-) \cdot \vec{i}$  законы сохранения записываются в виде

$$(S\rho vH)^+ - (S\rho vH)^- - \Delta_Q (Ga^2)^- = 0$$

$$(S\rho v)^+ = (S\rho v)^-, \quad (\alpha S\rho v^2 + Sp)^+ - (\alpha S\rho v^2 + Sp)^- - (S^+ - S^-) p_\sigma + \Delta_\tau (S\rho v^2)^- = 0, \quad (1.5)$$

Законы сохранения (1.5) дополняются уравнениями состояния

$$p = \rho RT, \quad u = p / \rho(\gamma - 1), \quad (1.6)$$

где  $R = C_p - C_v$ ,  $\gamma = C_p / C_v$ ,  $C_p$  и  $C_v$  – удельные теплоемкости газа при постоянных давлении и объеме.

Уравнения (1.5) и (1.6) удобно представить в виде отношений гидродинамических параметров до и после воздействий на поток. При этом взамен известного давления  $p_\sigma$  вводится другая неизвестная величина –  $\phi_p$  – весовой коэффициент среднего давления, распределяющий  $p_\sigma$  между начальным  $p^-$  и конечным  $p^+$  давлениями в зоне перестройки

$$p_\sigma = \phi_p p^+ + (1 - \phi_p) p^-, \quad (1.7)$$

а для описания изменения сечения канала вводится безразмерная характеристика  $\Delta_S = 1 - S^-/S^+$ . Величины  $\Delta_S, \Delta_\tau, \Delta_Q$  назовем воздействиями: геометрическим, сил трения и тепловым соответственно. Уравнения (1.5) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} (S\rho v)^+ &= (S\rho v)^-, \quad H^+ = H^- + \Delta_{\varrho}(a^-)^2, \\ (\alpha S\rho v^2 + \sigma p)^+ &= (\alpha S\rho v^2 + \sigma p)^- - \Delta_{\tau}(S\rho v^2)^-, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $\sigma^- = \sigma^+$ ,  $\sigma^+ = S^+(1 - \varphi_p \Delta_S)$ .

Законы сохранения (1.8) совместно с уравнениями состояния (1.6) описывают реакцию газа на локальные, конечные по величине воздействия:  $\Delta_S, \Delta_{\tau}, \Delta_{\varrho}$ .

Названные уравнения легко сводятся к квадратному [95]

$$v^{+2} - av^+ + b = 0$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} a &= J_x^- / G^- \left( \alpha^+ - \frac{\beta^+}{2} \cdot \frac{\sigma^+}{S^+} \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right), \\ b &= (H^- + \Delta_{\varrho}(a^-)^2) / \left( \alpha^+ \cdot \frac{S^+}{\sigma^+} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} - \frac{\beta^+}{2} \right), \end{aligned}$$

где  $J_x^-$  – правая часть уравнения движения (1.8),  $G^- = (S\rho v)^-$ . Сомножителям в этих коэффициентах удобно придать форму, которую они приобретают при отсутствии каких-либо воздействий

$$\left( \alpha^+ - \frac{\beta^+}{2} \cdot \frac{\sigma^+}{S^+} \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^{-1} = \frac{2n_1}{n_1 + 1}, \quad \alpha^+ \cdot \frac{S^+}{\sigma^+} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} - \frac{\beta^+}{2} = \frac{n_2 + 1}{2(n_2 - 1)}.$$

Значения  $n_1$  и  $n_2$ , найденные из этих условий совпадают при  $\alpha^+ = \beta^+ = 1$ .

Считая впредь поле скоростей в сечении  $S^+$  однородным, имеем

$$n = \left( 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{\sigma^+}{S^+} \right)^{-1} = \frac{\gamma}{1 + (\gamma - 1)\varphi_p \Delta_S}, \quad (1.9)$$

после чего законы сохранения и уравнения состояния дают искомые связи гидродинамических параметров

$$\begin{aligned} \frac{v^+}{v^-} &= \frac{K \pm vN}{(n+1)M^{-2}}, & \frac{\rho^+}{\rho^-} &= \frac{(1 - \Delta_S)(n+1)M^{-2}}{K \pm vN}, \\ \frac{p^+}{p^-} &= \frac{K \mp vnN}{I \cdot (n+1)}, & \frac{T^+}{T^-} &= \frac{(K \mp vnN)(K \pm vN)}{(1 - \Delta_S) \cdot I \cdot (n+1)M^{-2}}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$M^{+2} = (1 - \Delta_S)I \frac{K \pm vN}{K \mp vnN}, \quad \frac{p_{\sigma}}{p^-} = 1 + \varphi_p \left( \frac{p^+}{p^-} - 1 \right).$$

$$\text{Здесь: } M = v/a, \quad M^{-2} = (M^-)^2, \quad I = n\sigma^-/\gamma S^- = \frac{n-1}{(\gamma-1)(1-\Delta_S)}, \quad (1.11)$$

$$v = \text{sign}(M^- - 1), \quad K = I + nM^{-2}(\alpha^- - \Delta_\tau), \quad a^2 = \gamma p / \rho,$$

$$N = \left\{ K^2 - 2 \frac{n^2 - 1}{\gamma - 1} \cdot M^{-2} \left( C_1 + \beta^- \cdot \frac{\gamma - 1}{2} M^{-2} \right) \right\}^{1/2}, \quad C_1 = 1 + (\gamma - 1)\Delta_Q.$$

Соотношения (1.10) при отсутствии каких-либо воздействий  $\Delta_S = \Delta_Q = \Delta_\tau = 0$  и выборе верхнего знака приводят к тривиальному результату, а с нижним знаком – к известным соотношениям Гюгонио-Рэнкина на скачке уплотнения. При наличии воздействий реакция газа различна в области до- и сверхзвуковых течений [1], в связи с чем, в решение вводится функция  $v$ . Соотношения (1.10) содержат неизвестную функцию  $\varphi_p$ , относительно которой можно лишь утверждать, что она является функцией всех воздействий

$$\varphi_p(X, \Delta_S), \quad X = \{x_i\} = \{\Delta_\tau, \Delta_Q\} \quad (1.12)$$

и может изменяться в широких пределах в зависимости от воздействий, что видно из определения  $\varphi_p$  (1.7)

$$\varphi_p = \frac{p_\sigma - p^-}{p^+ - p^-}.$$

В частности, если комбинация воздействий такова, что  $p^+ = p^-$ , то возможные значения  $\varphi_p$  в окрестности этого состояния лежат в интервале  $-\infty < \varphi_p < +\infty$ .

Итак, законы сохранения в интегральной форме (в виде соотношений (1.10)) содержат бесконечное множество решений. При этом, для любого гидродинамического параметра  $\psi$  общая структура решения имеет вид

$$\psi^+ / \psi^- = f[X, \Delta_S, \varphi_p(X, \Delta_S)]. \quad (1.13)$$

### 1.1.3. Замечание о роли теоремы о среднем в незамкнутости

#### системы законов сохранения

Следует заметить, что законы сохранения в интегральной форме (1.3), откуда и получены их варианты в формах (1.5) или (1.10), безусловно, являются потенциально замкнутыми, так как их вариант в дифференциальной форме вместе с уравнениями состояния приводит к замкнутой системе уравнений. Потеря свойства замкнутости уравнениями (1.5) является прямым следствием

обработки законов сохранения (1.3) с помощью теоремы о среднем и составляет суть проблемы незамкнутости законов сохранения в интегральной форме в гидродинамике внутренних течений. Вернуть свойство замкнутости и единственности решения системе уравнений (1.5, 1.6) можно, формулировкой достоверного дополнительного условия в виде соотношения между гидродинамическими параметрами состояния или эксперимента

#### 1.1.4. Краткий обзор существующих приемов построения замкнутой системы уравнений

В практике решения задач о течении жидкостей и газов в каналах со скачком площади сечения сложились три подхода, в своем большинстве, ориентированных на три группы приложений: определение гидравлических потерь в каналах со скачком площади, теорию отрывных внутренних течений и задачи о распаде произвольного разрыва.

Формулировка, по видимому, первой гипотезы принадлежит Борда (1766 г.) [78, 104] и имеет возраст, соизмеримый с возрастом теоретической гидродинамики. В задаче Борда определялись гидравлические потери в канале с внезапным расширением при течении несжимаемой жидкости. При этом, без каких-либо экспериментальных оснований (ни тогда, ни сейчас), в математической модели предполагалось

$$p_{\sigma} = p^{-}$$

и не учитывались силы трения. Удачный итог – определение диссипативных потерь без учета сил трения (нонсенс !) – привел к тиражированию гипотезы Борда вплоть до наших дней и обобщению ее Нуссельтом (1940 г.) [7, 68] на дозвуковые течения сжимаемой жидкости [78, 108, 111]. Задача Борда по определению гидравлических потерь является примером удачного сочетания двух ошибок: гипотезы Борда и не учет сил трения, которые компенсируют друг друга, и не могут использоваться одна без другой с иными целями, в иных приложениях для достижения положительных результатов.

Буземанн [78, 112] еще в 1931 г. указал на необходимость учитывать необратимые процессы, происходящие в зонах смешения при срыве потока с кромок внезапно расширяющегося канала. С течением времени эта точка зрения стала преобладающей и инициировала ряд экспериментальных работ для нужд теории отрывных течений в расширяющихся каналах. В их числе: работы Коровина Е.П. [62, 63] – для дозвуковых скоростей; Уик [114], Глотов Г.Ф., Мороз Э.К. [9], Давидсон В.С. и др. [17] – для звуковых скоростей. Экспериментальные данные для сверхзвуковых скоростей [6, 10, 85] характеризуют

ются значительным разбросом и трудно поддаются систематизации, возможно, из-за противоречивых целей и реализации эксперимента: замер давления на поверхности, не совпадающей с плоскостью среза сверхзвукового сопла.

Подобные же процессы характерны и для другого научного направления – задач распада произвольного разрыва на скачках площади сечения канала [53]. Здесь первые работы, использующие модель идеальной жидкости в соотношениях для связи параметров по обе стороны от скачка площади [70, 107], сменились работами, учитывающими диссипативные потери при течении реальной жидкости [83, 84, 110]. Для тех и других характерно исключение из числа связей на скачке площади неизвестного давления на уступе канала  $p_\sigma$  вместе с самим уравнением движения и замены его в первом случае адиабатой Пуассона, а во втором – законом сохранения механической энергии потока, содержащем гидравлические потери. При этом эффекты течения реальной жидкости учитываются все же не полностью: в уравнении для полной энергии не учитывается работа сил трения  $\vec{\tau}_n^* \cdot \vec{v}$  (см. (1.4, 1.5)). Кроме того, такой подход, позволяя решать задачи о распаде разрыва на скачке площади или сшивании участков одномерных течений, не позволяет определить давление на уступе канала с учетом гидравлических потерь.

Из цикла работ этого направления наибольший интерес, с точки зрения настоящего исследования, представляют работы Дулова В.Г. [51, 52] и Яушева И.К. [109]. В них использовались непосредственно соотношения (1.5), причем в первых - для  $p_\sigma$  использовались экспериментальные значения, а в последней -  $p_\sigma$  варьировалось для выяснения возможных конфигураций волн при распаде разрыва и отмечалась связь величины давления на уступе  $p_\sigma$  с величиной скачка энтропии. И, наконец, во фрагментах исследований Дулова В.Г., опубликованных в [7], впервые, непосредственно, из второго начала термодинамики (условие не отрицательности скачка энтропии) определялись гидродинамические параметры за скачком площади для случая изэнтропического течения. Таким образом, обе эти работы, косвенно, указывают на возможную роль второго начала термодинамики как инструмента для решения проблемы незамкнутости, но не указывают технологию отбора единственного решения из множества допускаемых законами сохранения, в общем случае неизэнтропических течений.

## 1.2. Первое и второе начала термодинамики и их следствия

### 1.2.1. Начала термодинамики для зоны перестройки

#### потока в канале

В гидродинамике известна термодинамическая функция, называемая коэффициентом восстановления давления –  $\sigma_p = p_0^+ / p_0^-$  ( $p_0$  – давление торможения потока), характеризующая изменение запаса механической энергии потока в результате каких-либо воздействий [96]. Эта функция может быть описана двояко: на основе законов сохранения (1.5) (или (1.10)) и с помощью двух первых начал термодинамики. Последнее обстоятельство может быть источником дополнительных ограничений (связей), накладываемых на соотношения (1.10) для обоснованного выбора единственного решения, подобно тому, как второе начало термодинамики используется в альтернативе «скачок уплотнения – скачок разрежения».

Вводя понятие некоего ”начального” состояния ( $\rho_H, p_H, s_H(\rho_H, p_H)$ ), из которого газ переходит в состояния в сечениях  $S^-$  и  $S^+$ , можно записать теплосодержание в уравнении энергии (1.5) в виде [95]

$$H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p_H^{1/\gamma}}{\rho_H} \cdot p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \exp\left(\frac{s - s_H}{c_p}\right),$$

где  $s$  – удельная энтропия. Выбрав состояние среды в сечении  $S^-$  в качестве ”начального”, получаем для уравнения энергии (1.5)

$$\sigma_p = p_0^+ / p_0^- = \left[1 + (\gamma - 1) \cdot \tau \cdot (M^-) \cdot \Delta_Q\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \exp\left(\frac{s^- - s^+}{R}\right). \quad (1.14)$$

Разность энтропий описывается вторым началом термодинамики [95]

$$s^+ - s^- = \frac{1}{G^-} \left[ \int_s \frac{\vec{q}_n^*}{T} ds + \int_V \left( \frac{D}{T} + \kappa \left( \frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \frac{\nabla \cdot (P \cdot \vec{v} - \vec{Q})}{T} \right) dV \right], \quad (1.15)$$

где, при записи интеграла по объему, общий тензор напряжений  $\tau^*$  и общий вектор теплового  $\vec{q}^*$  потока представлены суммой молекулярной и турбулентной составляющих

$$\tau^* = \tau + P, \quad \vec{q}^* = \vec{q} + \vec{Q},$$

$D$  – диссипативная функция для молекулярной составляющей сил трения,  $\kappa$  – молекулярная теплопроводность среды.

В целом, интеграл по поверхности в (1.15) описывает приток тепла извне через границу  $S$  объема, а интеграл по объему – диссипативные эффекты в объеме  $V$ , обусловленные наличием сил трения и тепловых потоков молекулярной и турбулентной природы. Все перечисленные здесь физические эффекты, изменяющие энтропию в зоне перестройки течения, ранее, в законах сохранения (1.5), были представлены величинами  $\Delta_Q$  и  $\Delta_\tau$ , поэтому можно утверждать, что разность энтропий газа на входе и на выходе объема  $V$  есть некоторая функция независимых аргументов  $\Delta_Q$  и  $\Delta_\tau$

$$s^+ - s^- = f(\Delta_Q, \Delta_\tau) = f(X) . \quad (1.16)$$

В рамках используемого здесь интегрального подхода вид этой функции не может быть определен и соотношение (1.16) носит чисто качественный характер.

Относительно утверждения (1.16) существенными являются следующие замечания.

Любые изменения состояния потока, вызванные любыми воздействиями, сопровождаются диссипативными эффектами ( $\Delta_\tau \neq 0$ ). Отсюда и из интеграла по объему в (1.15), описывающего диссипативные эффекты, следует возможность толкования  $\Delta_\tau$  как функции

$$\Delta_\tau = \Delta_\tau(\Delta_S, \Delta_Q, k_i) . \quad (1.17)$$

В числе параметров  $k_i$  могут быть параметры в начальном сечении  $S^-$  (число Маха  $M^-$ , интенсивность турбулентности), особенности конструкции канала между сечениями  $S^-$  и  $S^+$  (наличие камер, сеток, выступов и т.п.). За счет параметров  $k_i$ , при фиксированных  $\Delta_S$  и  $\Delta_Q$ , величина  $\Delta_\tau$  может меняться в широких пределах.

Очевидно также, что любые  $\Delta_S$ ,  $\Delta_Q$  и  $k_i$  не изменят нулевой величины  $\Delta_\tau$ , если не учитываются физические эффекты молекулярной и турбулентной вязкости – (модель идеальной жидкости) – в зоне перестройки потока.

Близкие по смыслу рассуждения могут быть повторены для связи  $\Delta_Q$  с  $\Delta_S$ ,  $k_i$ ,  $\Delta_\tau$ .

**\*) Отсюда следует возможность и целесообразность рассмотрения величин  $\Delta_\tau$  и  $\Delta_Q$  как комплексных и независимых друг от друга аргументов в функциональной зависимости 1.16).**

Необходимо отметить также невозможность трактовки (1.15) в виде

$$s^+ - s^- = f(\Delta_S, \Delta_Q, \Delta_\tau) , \quad (1.18)$$

так как в этом случае адиабатические ( $\Delta_Q = 0$ ) течения идеальной жидкости ( $\Delta_\tau = 0$ ) в канале переменного сечения сопровождались бы изменением запаса механической энергии потока ( $\sigma_p \neq 1$ ), что противоречит известным результатам [96].

**\*\*)** *Итогом совместного анализа первого и второго начал термодинамики (1.14, 1.15) является утверждение о существовании функции  $\sigma_p$  независимых аргументов  $\Delta_Q, \Delta_\tau$*

$$\sigma_p^{(1)} = f_1(X), \quad (1.19)$$

которая носит качественный характер, так как вид функции  $f_1$  неизвестен. Утверждение (1.19) можно перефразировать в виде:

**\*\*\*)** *Термодинамическая функция – коэффициент восстановления давления  $\sigma_p$  не зависит явно от геометрического воздействия  $\Delta_S$ , рассматриваемого как независимый аргумент в функциональной зависимости. Подобная зависимость может проявляться лишь неявным образом, например, при учете диссипативных эффектов (1.17), возникающих в зонах смешения при различного рода локальных воздействиях на поток.*

Воздействия  $\Delta_S, \Delta_Q, \Delta_\tau$ , впредь, рассматриваются как независимые аргументы в функциональных зависимостях.

### 1.2.2. Формулировки дополнительного условия

Соотношения (1.10), следующие из трех законов сохранения гидродинамики, тоже позволяют построить отношение  $p_0^+ / p_0^-$  как известную функцию воздействий и весового коэффициента среднего давления  $\varphi_p$

$$\sigma_p^{(2)} = \frac{p_0^+}{p_0^-} = \frac{p_0^+}{p^+} \frac{p^+}{p^-} \frac{p^-}{p_0^-} = \frac{\pi(M^-)}{\pi(M^+)} \cdot \frac{p^+}{p^-},$$

где  $\pi(M)$  – газодинамическая функция давления

$$\sigma_p^{(2)} = \pi(M^-) \cdot \frac{K \mp \nu n N}{(n+1) \cdot I} \cdot \left( 1 + \frac{n-1}{2} \frac{K \pm \nu N}{K \mp \nu n N} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (1.20)$$

Вследствие (1.13)

$$\sigma_p^{(2)} = f_2(X, \Delta_S, \varphi_p(X, \Delta_S)). \quad (1.21)$$

Формально, зависимость  $\sigma_p^{(2)}$  от перечисленных в (1.13) аргументов неоднозначна, как и соотношения (1.10), из которых она получена. Но, в соотношениях (1.19) и (1.20) описана одна и та же термодинамическая функция, что позволяет записать для функций  $\sigma_p^{(1)}$  и  $\sigma_p^{(2)}$  условие

$$\sigma_p^{(1)} = \sigma_p^{(2)} \quad \text{или} \quad d\sigma_p^{(1)} - d\sigma_p^{(2)} = 0. \quad (1.22)$$

Равенства (1.22), выводы 1-го и 2-го начал термодинамики (1.19) и следствие трех законов сохранения (1.21) позволяют теперь сформулировать способ выбора единственного решения трех законов сохранения гидродинамики, удовлетворяющее также второму началу термодинамики. Для этого необходимо выбрать функцию  $\varphi_p$  в (1.21) таким образом, чтобы исключить в функции  $\sigma_p^{(2)}$  влияние геометрического воздействия  $\Delta_S$ . Одна из возможных реализаций этой цели основана на втором из соотношений (1.22), где полные дифференциалы заменяются суммой частных дифференциалов

$$\left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_i} - \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_p} \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i} \right) \right] dx_i + \left[ - \left( \frac{\partial f_2}{\partial \Delta_S} + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_p} \frac{\partial \varphi_p}{\partial \Delta_S} \right) \right] d\Delta_S = 0.$$

В силу независимости воздействий  $\Delta_Q$ ,  $\Delta_\tau$  и  $\Delta_S$  отсюда вытекает

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} - \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_p} \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_i} \right) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \Delta_S} + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_p} \frac{\partial \varphi_p}{\partial \Delta_S} = 0, \quad (1.23)$$

где вследствие (1.19) принято  $\partial f_1 / \partial \Delta_S = 0$ .

Эти соотношения обеспечивают выполнение условий (1.22), причем последнее из них

$$\frac{\partial \varphi_p}{\partial \Delta_S} = - \frac{\partial f_2}{\partial \Delta_S} \left( \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_p} \right)^{-1} = F(\Delta_S, \varphi_p, X) \quad (1.24)$$

обеспечивает независимость функции  $\sigma_p^{(2)}$  от геометрического воздействия  $\Delta_S$  как от независимой переменной.

Таким образом, уравнение (1.24) является тем необходимым дополнительным условием, которое совместно с (1.10) описывает реакцию газа в канале на локальные конечные по величине воздействия  $\Delta_S$ ,  $\Delta_Q$ ,  $\Delta_\tau$ , образуя при этом замкнутую систему уравнений.

Уравнение (1.24) можно рассматривать как обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение с параметрами  $X$ . Что же касается первой

группы уравнений (1.23), то интегрирование их имеет конечной целью установление вида зависимости  $\sigma_p$  от  $X = \{x_i\}$ , что лишено смысла, так как вид этой зависимости вполне определен соотношением (1.20).

Заметим, что все сказанное выше: и утверждение о независимости  $\sigma_p^{(2)}$  от геометрического воздействия  $\Delta_s$  и механизм реализации – могут быть выражены соотношением

$$\partial\sigma_p^{(2)} / \partial\Delta_s = 0, \quad \Delta_s \in [1, -\infty). \quad (1.24_1)$$

Реализацию изложенной схемы построения замкнутой системы уравнений на основе законов сохранения в интегральной форме и выводов 2-го начала термодинамики рассмотрим поочередно на примерах несжимаемой ( $M \ll 1$ ) и сжимаемой жидкостей.

### 1.3. Модель несжимаемой жидкости

#### 1.3.1. Линеаризованный вариант законов сохранения

Пусть на границах зоны перестройки течения числа Маха удовлетворяют неравенствам  $M^- \ll 1$ ,  $M^+ \ll 1$ . Раскладывая в ряд по степеням числа Маха функции, содержащиеся в (1.10) и (1.20), и сохраняя в них члены со степенями  $M$  не выше второй, получим линеаризованный (относительно  $M^2$ ) вариант этих соотношений. В частности:

$$N \approx K - (n+1)(1-\Delta_s)C_1M^{-2}; \quad \rho^+/\rho^- \approx 1/C_1;$$

и так как  $C_1 = 1 + (\gamma - 1)\Delta_Q$ , а в определение  $\Delta_Q$  входит квадрат скорости звука  $a^2$  (1.4) – величины относительно большой в условиях  $M \ll 1$ , то  $C_1 \approx 1$ . В этих условиях можно рассматривать два варианта соотношений (1.10) и (1.20): модель малосжимаемой жидкости, где плотность может незначительно изменяться за счет подвода тепла извне и модель несжимаемой жидкости  $(\rho^+/\rho^-) = 1$ , где следует принять  $\Delta_Q = 0$ . Нет принципиальных или технических трудностей для реализации того или иного варианта, однако для последующего сравнения результатов исследования с известными теоретическими и экспериментальными результатами целесообразно рассмотреть случай несжимаемой жидкости. В итоге имеем

$$\frac{v^+}{v^-} = 1 - \Delta_s, \quad \frac{p^+}{p^-} = 1 + \frac{(1-\Delta_s)(\Delta_s + \delta)}{(1-\varphi_p\Delta_s) \cdot Eu^-} \approx \frac{T^+}{T^-}, \quad (1.25)$$

$$\frac{p_\sigma}{p^-} = 1 + \varphi_p \frac{(1 - \Delta_S)(\Delta_S + \delta)}{(1 - \varphi_p \Delta_S) \cdot Eu^-}, \quad \delta = \alpha^- - 1 - \Delta_\tau, \quad Eu^- = (p / \rho v^2)^-.$$

$$\sigma_p^{(2)} = \frac{2Eu^-}{1 + 2Eu^-} \cdot \frac{1}{(n+1) \cdot I} \left( K + nN + \frac{\gamma}{2} \frac{n-1}{\gamma-1} (K - N) \right). \quad (1.26)$$

Здесь  $Eu$  - число Эйлера.

Условие (1.24) применительно к (1.26) приводит к дифференциальному уравнению

$$\Delta_S(1 - \Delta_S)(\Delta_S + \delta) \frac{d\varphi_p}{d\Delta_S} = (1 - \varphi_p)(\Delta_S + \delta) - \varphi_p \Delta_S(1 - \Delta_S)(1 - \varphi_p \Delta_S), \quad (1.27)$$

которое подстановкой  $u = 1/(1 - \varphi_p \Delta_S)$  сводится к линейному неоднородному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами вида

$$u' + P(\Delta_S) \cdot u = Q(\Delta_S),$$

решение последнего хорошо известно и дает

$$\varphi_p = \left( \Delta_S^2 - 2\delta(1 - \Delta_S) + 2f \right) / \left( \Delta_S^2(2 - \Delta_S) + 2\Delta_S f \right).$$

Для определения функции  $f$  параметра  $\delta$  можно воспользоваться соотношением (1.9) для  $n$  или (1.11) для  $I$ , связанных с  $\varphi_p$ , значения которых в точке  $\Delta_S = 0$  известны:

$$n = \gamma, \quad I = 1. \quad (1.28)$$

Любое из них дает  $f = \delta$  и приводит, в конечном счете, к однозначным результатам для  $\varphi_p$ ,  $\sigma_p$  (на основе (1.26)) и гидродинамическим параметрам:

$$\varphi_p = \frac{\Delta_S + 2\delta}{\Delta_S(2 - \Delta_S) + 2\delta}, \quad \sigma_p = \frac{1 + 2Eu^- + 2\delta}{1 + 2Eu^-}, \quad (1.29)$$

$$\frac{v^+}{v^-} = (1 - \Delta_S), \quad \frac{p^+}{p^-} = 1 + \frac{\Delta_S(2 - \Delta_S) + 2\delta}{2Eu^-}, \quad \frac{p_\sigma}{p^-} = 1 + \frac{\Delta_S + 2\delta}{2Eu^-}.$$

Следует отметить возможность появления особых точек второго рода для функции  $\varphi_p$  при  $\Delta_S \neq 0$ , когда комбинация воздействий такова, что  $p^+ / p^- = 1$  ( $\Delta_S(2 - \Delta_S) + 2\delta = 0$ ).

### 1.3.2. Альтернативные методы определения $\varphi_p(\Delta_S, X)$

Основаны на прямом использовании утверждения \*\*\*) в п. 1.2.1. о

независимости коэффициента восстановления давления  $\sigma_p$  от геометрического воздействия.

Действительно, исключая из (1.26)  $\Delta_S$  и величины, от нее зависящие ( $\varphi_p(\Delta_S, X)$ ), приходим сразу к соотношению для  $\sigma_p = f_1(X)$  в (1.29). Теперь  $\varphi_p(\Delta_S, X)$  можно найти, решая алгебраическое уравнение

$$f_2(\Delta_S, X, \varphi_p(\Delta_S, X)) - f_1(X) = 0, \quad (1.30)$$

где в качестве  $f_2$  выступает правая часть уравнения (1.26).

Еще один способ состоит в разнесении в уравнении (1.26) величин, зависящих явно от  $\Delta_S$  и независящих от него, в разные части равенства

$$\begin{aligned} \sigma_p(1 + 2Eu^-) - 2Eu^- - 2\delta - 1 = \\ = \Delta_S \left\{ \varphi_p[\sigma_p(1 + 2Eu^-) - 2Eu^- - (1 - \Delta_S)^2] - 2\delta - \Delta_S \right\}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

которое выполняется при любых значениях  $\Delta_S$ , в том числе и при  $\Delta_S = 0$ . Отсюда следует равенство нулю левой части, а в силу произвольности  $\Delta_S$ , и равенство нулю выражений в фигурных скобках и, как следствие, соотношения (1.29) для  $\sigma_p$  и  $\varphi_p$ .

**\*\*)** *Любой из этих двух способов дает значения  $\varphi_p$ , совпадающие с частным интегралом дифференциального уравнения (1.27) с учетом граничного условия (1.28).*

### 1.3.3. О связи гидравлических потерь с воздействиями

Используя общепринятое для несжимаемой жидкости понятие гидравлических потерь [108]  $p_0^+ - p_0^- = \zeta \cdot \rho v^{-2} / 2$  можно установить связь коэффициента гидравлических потерь  $\zeta$  и коэффициента восстановления давления  $\sigma_p$

$$\zeta = (1 + 2Eu^-)(1 - \sigma_p), \quad (1.32)$$

что с учетом (1.29) дает связь гидравлических потерь с воздействиями

$$\zeta = -2\delta = 2(1 - \alpha^-) + 2\Delta_\tau. \quad (1.33)$$

Последнее соотношение открывает возможность использования богатого экспериментального материала гидравлики по гидравлическим потерям для определения  $\Delta_\tau$  и учета реальных свойств жидкости при течениях в каналах с

изменением площади поперечного сечения. Оно также называет причины гидравлических потерь: неоднородность начального ( в сечении  $S^-$  ) поля скоростей  $-\alpha^-$  и воздействия сил трения  $-\Delta_\tau$ .

Помимо возможности использования экспериментальных данных гидравлики при построении математических моделей прикладной гидрогазодинамики соотношение (1.33) (или (1.32)) неявно требуют ответа на вопрос: каким образом поверхностный фактор  $\Delta_\tau$ , представляет объемный, по существу, диссипативные потери  $\zeta$ . Действительно, величина  $\Delta_\tau$  вводится как интеграл по поверхности выделенного объема жидкости от проекции вектора силы трения (1.4), тогда как гидравлические потери являются скалярной величиной, описывают изменение запаса механической энергии потока и носит объемный характер. Между тем, в уравнении (1.33) эти факторы отождествляются: силы трения по поверхности выделенного объема с диссипативными эффектами внутри объема. Формальным доказательством возможности такой трактовки могла бы стать замена в исходной системе уравнений (1.5) уравнения движения, содержащего  $\Delta_\tau$ , теоремой об изменении кинетической энергии, содержащей диссипативную функцию  $D$ , и получение на этой основе результатов, совпадающих с изложенными выше.

При сделанных выше допущениях (п. 1.1.1.) теорема об изменении кинетической энергии может быть записана в виде [95]

$$\int_S \left( \rho v_n \frac{v^2}{2} + p v_n - \vec{\tau}_n \cdot \vec{v} \right) ds + \int_V (D - p \nabla \cdot \vec{v}) dV = 0.$$

Для сокращения выкладок рассмотрен случай несжимаемой жидкости с однородным полем скоростей в сечениях  $S^-$  и  $S^+$ , и вслед за [96] пренебрегается работой сил трения в сечениях  $S^-$  и  $S^+$ . Теперь

$$\left( S \rho v \frac{v^2}{2} \right)^+ + (p v S)^+ = \left( S \rho v \frac{v^2}{2} \right)^- + (p v S)^- - \int_V D dV.$$

Дальнейшие действия связаны с преобразованием этого уравнения к виду, подобному уравнению движения в (1.5)

$$\begin{aligned} (S \rho v^2)^+ + (\sigma p)^+ &= (S \rho v^2)^- + (\sigma p)^- - 2(S \rho v^2)^- \frac{v^-}{v^{+-}} \Delta_D + p^+ (\sigma^+ - S^+) - \\ &- p^+ S^+ - p^- \left( \sigma^- - S^- \frac{v^-}{v^+} \right) + p^- S^- \frac{v^-}{v^+} - (S \rho v^2)^- \left( 1 - \frac{v^-}{v^+} \right), \end{aligned} \quad (1.34)$$

где

$$\Delta_D = \int_V D dV / (S\rho v^3)^- . \quad (1.35)$$

Используя уравнение неразрывности, определения геометрического воздействия  $\Delta_S$ ,  $\sigma^+$  и  $\sigma^-$  в (1.8), группу членов в (1.34) можно привести к виду

$$\begin{aligned} p^+(\sigma^+ - S^+) - p^+ S^+ - p^-\left(\sigma^- - S^- \frac{v^-}{v^+}\right) + p^- S^- \frac{v^-}{v^+} - (S\rho v^2)^-\left(1 - \frac{v^-}{v^+}\right) = \\ = -p_\sigma \Delta_S S^+ - p^-\left(\frac{p^-}{p^+} - 1\right) + p^- \Delta_S S^+ + (\rho v^2)^- \cdot \Delta_S S^+ . \end{aligned}$$

Теорема об изменении кинетической энергии (1.34) является прямым следствием уравнения движения в (1.5) и не может привести к каким-либо новым результатам. Это утверждение дает основание использовать для отношений давлений  $p_\sigma/p^-$  и  $p^+/p^-$  соотношения (1.29). Тогда правая часть последнего равенства примет вид

$$\Delta_\tau \cdot \frac{1 + \Delta_S}{1 - \Delta_S} (S\rho v^2)^- ,$$

а уравнение (1.34) приводится к виду

$$(S\rho v^2)^+ + \sigma^+ p^+ = (S\rho v^2)^- + \sigma^- p^- - \frac{(S\rho v^2)^-}{1 - \Delta_S} \cdot [2\Delta_D - \Delta_\tau(1 + \Delta_S)] . \quad (1.36)$$

Требование эквивалентности (1.36) и уравнения движения (1.5) приводит к связи

$$\frac{2\Delta_D - \Delta_\tau(1 + \Delta_S)}{1 - \Delta_S} = \Delta_\tau ,$$

откуда следует

$$\Delta_D = \Delta_\tau \quad (1.37)$$

и тождественность объемных и поверхностных факторов в форме (1.4) и (1.35), представляющих силы трения в зоне перестройки параметров потока между сечениями  $S^-$  и  $S^+$ .

## 1.4. Модель сжимаемой жидкости

### 1.4.1. Дополнительное условие в дифференциальной форме;

#### особые точки

Дополнительное условие (1.24) для сжимаемой жидкости приводит к уравнению Риккати, не имеющего аналитического решения. Численное решение изначально предполагает задание начального условия для  $\varphi_p$ . Однако, значение  $\varphi_p$ , в какой-либо точке области  $1 \geq \Delta_S > -\infty$ , заранее неизвестно, что затрудняет формулировку задачи Коши в терминах  $\varphi_p - \Delta_S$ . В этих условиях удобно переформулировать соотношение (1.24) для величины  $n$ , связанной с  $\varphi_p$  соотношением (1.9) и принимающей в точке  $\Delta_S = 0$  значение  $n = \gamma$  (при любых конечных значениях  $\varphi_p$ , на что позволяет надеяться соотношение для  $\varphi_p$  в (1.29)). Опуская тривиальные выкладки, связанные с дифференцированием соотношения (1.20) по  $\Delta_S$  для реализации условия (1.24), приходим к уравнению для  $n$

$$a \frac{dn}{d\Delta_S} = -b, \quad \Delta_S = 0: \quad n = \gamma, \quad (1.38)$$

где

$$a = [(n - \gamma)(K \mp vnN) \pm v(n^2 - 1)N] \cdot [(\gamma - 1)(1 - \Delta_S)(K \mp vnN) - (n^2 - 1)],$$

$$b = \frac{n(n^2 - 1)}{1 - \Delta_S} \left\{ \pm v(\gamma - 1)^2(1 - \Delta_S)N(K \mp vnN) - \right.$$

$$\left. - (n - 1)[(n - \gamma)(K \mp vnN) \pm v(n^2 - 1)N] \right\}. \quad (1.39)$$

Нелинейное уравнение (1.38), будучи приведенным к каноническому виду, в точке  $\Delta_S = 0$  имеет особенность типа  $(dn/d\Delta_S)_{\Delta_S=0} = 0/0$ . Устранение этой особенности связано с необходимостью разложения в ряды коэффициентов (1.39) по степеням малых величин  $\delta\Delta_S$  и  $\delta n = n - \gamma$  в окрестности точки  $\Delta_S = 0, n = \gamma$ . Сохраняя линейные члены разложения и используя обозначения, имеем:

$$K_0 = 1 + \gamma M^{-2} (\alpha^- - \Delta_\tau), \quad \Psi = K_0 \mp v\gamma N_0 - (\gamma + 1),$$

$$N_0 = \left\{ K_0^2 - 2(\gamma + 1)M^{-2} \left( C_1 + \beta^- (\gamma - 1)M^{-2} / 2 \right) \right\}^{1/2}.$$

$$\begin{aligned}
a_0 = & \pm v(\gamma - 1)(\gamma^2 - 1)N_0\Psi \pm v\delta\Delta_S(\gamma - 1)(\gamma^2 - 1)\{K_0\Psi / N_0 - \\
& - N_0[\Psi + (\gamma - 1) \pm v(\gamma K_0 \mp vN_0) / N_0]\} + \delta n \cdot (\gamma - 1)\{\Psi[\Psi + \gamma + 1 \pm \\
& \pm v2\gamma N_0 \pm v[(\gamma + 1)K_0 - (K_0^2 - \gamma^2 N_0^2)] \pm v(\gamma + 1)N_0\{-2\gamma + \\
& + (\gamma - 1)[(\Psi + \gamma + 1) / \gamma \mp v(\gamma K_0 \mp vN_0) / \gamma(\gamma - 1)N_0 \pm \\
& \pm v(K_0^2 - \gamma^2 N_0^2) / (\gamma^2 - 1)^2 N_0]\}\}, \\
b_0 = & \pm v\gamma(\gamma^2 - 1)(\gamma - 1)^2 N_0\Psi \pm v\delta\Delta_S\gamma(\gamma^2 - 1)(\gamma - 1)^2 \{K_0\Psi / N_0 \mp \\
& \mp v\gamma(K_0 \pm vN_0)\} \pm v\delta n(\gamma - 1)^2 \{\Psi[(3\gamma^2 - 1)N_0 + [(\gamma + 1)K_0 - \\
& - (K_0^2 - \gamma^2 N_0^2)] / N_0] + \gamma(\gamma^2 - 1)N_0[-2\gamma / (\gamma + 1) + (\Psi + \gamma + 1) / \gamma \mp \\
& \mp v(\gamma K_0 \mp vN_0) / \gamma(\gamma - 1)N_0 \pm \gamma(K_0^2 - \gamma^2 N_0^2) / (\gamma^2 - 1)N_0] - \\
& - \gamma(\gamma + 1)[(\gamma + 1)N_0 \pm v(\Psi + \gamma + 1)]\}.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Величина  $(K_0 \mp v\gamma N_0) / (\gamma + 1)$  определяет отношение давлений  $(p^+ / p^-)_0$  при  $\Delta_S = 0$  (см. (1.10)). Тогда функция  $\Psi \neq 0$  при наличии каких-либо воздействий  $\Delta_Q$  или (и)  $\Delta_\tau$  и  $\Psi = 0$  при отсутствии любых воздействий. В первом случае ( $\Psi \neq 0$ ) в (1.40) можно пренебречь величинами с малыми сомножителями  $\delta\Delta_S$  и  $\delta n$ , тогда  $b_0/a_0 = -\gamma(\gamma - 1)$ . Во втором случае  $\Psi = 0$  ( $\Delta_\tau = \Delta_Q = 0$  – идеальная жидкость ( $\alpha^- = 1$ ), адиабатические процессы), откуда  $\mp vN_0 = 1 - M^{-2}$ . В итоге уравнение (1.38) приводится к виду

$$\delta\Delta_S (dn/d\Delta_S)_0 = -\gamma(\gamma - 1)\delta\Delta_S - \delta n,$$

откуда  $(dn/d\Delta_S)_0 = -\gamma(\gamma - 1) / 2$ .

Однако, в рамках этого случая, когда  $|N_0| = |1 - M^{-2}|$ , ситуация  $M^- = 1$  тоже является особой. При этом вновь возникает необходимость разложения в ряды коэффициентов (1.39) по степеням величин  $\delta\Delta_S$ ,  $\delta n$ ,  $\delta M^- = 1 - M^-$ , что приводит к новому значению производной  $(dn/d\Delta_S)_0 = -2\gamma(\gamma - 1) / 3$ . В последнем случае одним из промежуточных результатов является выражение

$$N_0 \approx \sqrt{2(\gamma + 1)\delta\Delta_S} ,$$

откуда следует, что при  $M^- = 1$  возможны только те решения, которые отвечают течению в расширяющемся канале ( $\delta\Delta_S \geq 0$ , т. е. в направлении течения поток становится сверхзвуковым). Это известный результат, однако ранее [66 ч. 2] его удалось доказать на основе пространственного описания течения в канале переменного сечения.

Рассмотренные случаи обобщены в записи:

$$\begin{aligned} (dn/d\Delta_S)_0 &= -C_0 , \\ C_0 &= \begin{cases} \gamma(\gamma - 1) : & |\Delta_S| \leq \varepsilon_\Delta, \Psi \neq 0; \\ \gamma(\gamma - 1)/2 : & |\Delta_S| \leq \varepsilon_\Delta, \Psi = 0, |M^- - 1| > \varepsilon_M; \\ 2\gamma(\gamma - 1)/3 : & 0 \leq \Delta_S \leq \varepsilon_\Delta, \Psi = 0, |M^- - 1| \leq \varepsilon_M . \end{cases} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Интегрирование (1.41) в окрестности  $\Delta_S = 0$  и сравнение с (1.9) дает значение  $\varphi_p$  в окрестности  $\Delta_S = 0$

$$\varphi_p = \frac{C_0}{(\gamma - 1)[\gamma - C_0\Delta_S]} ,$$

или

$$\varphi_p = \left\{ 1/(1 - (\gamma - 1)\Delta_S), \quad 1/(2 - (\gamma - 1)\Delta_S), \quad 2/(3 - 2(\gamma - 1)\Delta_S) \right\}, \quad (1.42)$$

где очередность записи значений  $\varphi_p$  соответствует очередности случаев, описанных в (1.41). Вне окрестности  $\Delta_S = 0$   $\varphi_p$  определяется из (1.9)

$$\varphi_p = \frac{\gamma - n}{(\gamma - 1)n\Delta_S} \quad (1.43)$$

по значениям  $n$ , найденным из решения дифференциального уравнения (1.38).

Для функции  $n$ , как и для  $\varphi_p$ , возможно появление особых точек второго рода, не совпадающих друг с другом. Последнее очевидно из (1.9), где обращение в нуль знаменателя дает конечные значения для функции  $\varphi_p$  при  $\Delta_S \neq 0$ . Отсюда вытекает способ преодоления особых точек при численном решении, заключающийся в переходе от интегрирования уравнения для  $n$  к уравнению для  $\varphi_p$  с помощью (1.9). Для последующих приложений полезно отметить, что в каналах постоянного сечения  $\Delta_S = 0$  как для сжимаемой (1.42), так и для несжимаемой жидкости при наличии воздействий ( $\Delta_\tau \neq 0, \Delta_Q \neq 0$ )

$$\varphi_p = 1, \quad (1.44)$$

а при их отсутствии ( $\Delta_\tau = 0, \Delta_Q = 0$ )

$$\varphi_p = 1/2; \quad (1.45)$$

исключение составляют трансзвуковые течения при отсутствии воздействий (см. (1.42)).

#### 1.4.2. Альтернативные методы определения $\varphi_p(\Delta_S, X)$

Для сжимаемой жидкости, как и для несжимаемой, существует возможность определения частного интеграла уравнения (1.24) по схеме, описываемой уравнением (1.30)

$$f_2(\Delta_S, X, \varphi(\Delta_S, X)) - f_1(X) = 0, \quad (1.46)$$

где в качестве  $f_2$  выступает правая часть уравнения (1.20), а в качестве  $f_1(X)$  – соотношение, следующее из (1.20) после исключения из него всех величин, зависящих от геометрического воздействия явно:  $\Delta_S, \varphi_p(\Delta_S, X)$

$$\sigma_p = f_1(X) = \pi(M^-) \frac{K_0 \mp v\gamma N_0}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{K_0 \pm vN_0}{K_0 \mp v\gamma N_0} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad (1.47)$$

где  $K_0 = 1 + \gamma M^{-2} (\alpha^- - \Delta_\tau)$ ,

$$N_0 = \left\{ K_0^2 - 2(\gamma + 1) M^{-2} (C_1 + \beta^- \frac{\gamma - 1}{2} M^{-2}) \right\}^{1/2}.$$

В частном случае адиабатических процессов ( $\Delta_Q = 0$ ) для идеальной жидкости ( $\Delta_\tau = 0, \alpha^- = \beta^- = 1$ )  $\sigma_p = 1$ . В этом случае взамен решения трансцендентного уравнения (1.46) выражение для  $\varphi_p(\Delta_S)$  может быть получено в явном виде. При названных условиях  $p^+/p^- = \pi(M^+)/\pi(M^-)$ , тогда по известной геометрии канала и изэнтропическим соотношениям определяется отношение  $p^+/p^-$ , а соответствующее уравнение в (1.10) может быть использовано для определения  $\varphi_p$  или связанной с ней величины  $I$  (уравнения (1.11) и (1.9))

$$\varphi_p = \frac{1 - (1 - \Delta_S)I}{\Delta_S [1 + (\gamma - 1)(1 - \Delta_S)I]}; \quad (1.48)$$

$$I = -b/a + (b^2/a^2 + c/a)^{1/2}, \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned}
 a &= (\gamma - 1)(1 - \Delta_S)[r^2 - 1 - 2(\gamma - 1)(1 - \Delta_S)\Delta_S M^{-2}], \\
 b &= (r - 1)[r - (\gamma - 1)(1 - \Delta_S)M^{-2}] - 2(\gamma - 1)(1 - \Delta_S)\Delta_S M^{-2}, \\
 c &= 2(r - 1 + \Delta_S)M^{-2}, \quad r = \pi(M^+)/\pi(M^-), \quad q(M^+) = (1 - \Delta_S)q(M^-),
 \end{aligned}$$

где  $q(M)$  – газодинамическая функция, значение которой определяется отношением площадей поперечных сечений канала: критического и текущего.

В области малых чисел Маха  $M^- \ll 1$  (разложение в ряд функций в (1.49) по числам Маха и сохранение степеней  $M$  не выше второй) соотношения (1.48, 1.49) дают

$$\varphi_p = 1/(2 - \Delta_S),$$

что в сопоставимых условиях ( $\delta = 0$ ) совпадает с (1.29) (см. также (1.50)).

### 1.4.3. Замкнутая система уравнений для течения в канале со скачком площади

Замкнутая система уравнений для течения в канале со скачком площади включает в себя уравнения (1.10) и дополнительное условие о независимости термодинамической функции  $\sigma_p$  явно от геометрического воздействия  $\Delta_S$  в одном из вариантов: (1.38, 1.39) или эквивалентного ему (1.46, 1.47). В частных случаях возможны упрощения дополнительного условия к виду (1.44), (1.45) или (1.48). Полученное решение удовлетворяет законам сохранения массы, количества движения и энергии, а также второму началу термодинамики.

## 1.5. Тестирование полученных решений

### 1.5.1. Несжимаемая жидкость; эксперимент автора

Для идеальной жидкости ( $\zeta = -2\delta = 0$ , где  $\delta = \alpha^- - 1 - \Delta_\tau$ ) уравнение (1.29) для отношения давлений  $p^+/p^-$  является, как и следовало ожидать, комбинацией интеграла Бернулли и уравнения неразрывности. При всей очевидности этого результата существенным является то, что он является следствием дополнительного (к трем законам сохранения) условия, полученного на основе 2-го начала термодинамики. Для этого случая  $\sigma_p = 1$ , а

$$\varphi_p = 1/(2 - \Delta_S) \tag{1.50}$$

Для течения реальной жидкости в канале с внезапным расширением площади сечения ( $\Delta_S > 0$ ) опытные данные по гидравлическим потерям удовлетворительно описываются выражением [58, 99]

$$\zeta_3 = \Delta_S^2, \quad (1.51)$$

что определяет величину  $\delta$  (или  $\Delta_\tau$ ) (1.33) в уравнениях (1.29):  $2\delta = -\Delta_S^2$  и приводит к соотношениям

$$\varphi_p = \frac{1}{2} = \frac{p^+ + p^-}{2p^-}, \quad \sigma_p = 1 - \frac{\Delta_S^2}{1 + 2Eu^-}, \quad (1.52)$$

$$\frac{v^+}{v^-} = 1 - \Delta_S, \quad \frac{p^+}{p^-} = 1 + \frac{\Delta_S(1 - \Delta_S)}{Eu^-}, \quad \frac{p_\sigma}{p^-} = 1 + \frac{\Delta_S(1 - \Delta_S)}{2Eu^-}.$$

Полученный результат, в части касающейся величины среднего давления на уступе, не согласуется с известной гипотезой Борда  $p_\sigma = p^-$  ( $\varphi_p = 0$ ). Совпадение имеет место лишь в двух предельных случаях (Рис. 1.2):  $\Delta_S = 0$  (нет скачка площади),  $\Delta_S = 1$  (бесконечное расширение канала), – бессодержательных с позиции возможности экспериментальной проверки результатов решения (1.52). К сожалению, в современной литературе нет прямых сведений о величинах давлений на кольцевом уступе при течении несжимаемой жидкости, есть лишь многочисленные, например [2, 71, 100, Д15], перекрестные утверждения о хорошем совпадении гипотезы Борда с экспериментом, часто, при этом, имея в виду гидравлические потери (1.51). В связи с изложенным, автором было выполнено прямое экспериментальное исследование распределения давления в канале со скачком площади. Схема, конструкция экспериментальной установки и методика проведения эксперимента и обработки опытных данных изложены ниже. Здесь же приведены итоговые результаты. Опыт проводился при условиях:

$$\gamma = 1.4, \quad M^- \leq 0.1, \quad \Delta_S = 0.77; \quad Re = (0.8 \div 4) \cdot 10^5.$$

измерительная аппаратура обеспечивала погрешность измерений, не превышающую 0.1 Па (или 0.01 мм вод. ст.). Опытное значение  $\varphi_p = (p_\sigma - p^-)/(p^+ - p^-)$  составляет

$$\varphi_p = 0.470(1 \pm 0.049) \quad (1.53)$$

с доверительной вероятностью большей 0.95 и с удовлетворительной погрешностью подтвердило значение  $\varphi_p = 1/2$  в (1.52).

С позиций излагаемого здесь подхода два течения с одинаковыми

начальными условиями, при одинаковых  $\Delta_S$ , отличаются только гидравлическими потерями, поэтому удобно представить (1.29) с учетом (1.33) в виде

$$\varphi_p = \frac{\Delta_S - \zeta}{\Delta_S(2 - \Delta_S) - \zeta}, \quad \sigma_p = 1 - \frac{\zeta}{1 + 2Eu^-},$$

$$\frac{v^+}{v^-} = 1 - \Delta_S, \quad \frac{p^+}{p^-} = 1 + \frac{\Delta_S(2 - \Delta_S) - \zeta}{2Eu^-}, \quad \frac{p_\sigma}{p^-} = 1 + \frac{\Delta_S - \zeta}{2Eu^-}. \quad (1.54)$$

Для течений в каналах с внезапным сужением площади канала аппроксимации экспериментальных данных различных авторов менее согласованы [2, 56, 60] и характеризуются большим разбросом в сравнении со случаем расширения. Ниже сравниваются две наиболее распространенные эмпирические формулы Альтшуля [2] и [58] (Рис. 1.3).

$$[58]: \quad \zeta = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{S^+}{S^-} \right) = -\frac{\Delta_S}{1 - \Delta_S}, \quad \varphi_p = \frac{3 - 2\Delta_S}{5 - 6\Delta_S + 2\Delta_S^2};$$

$$[2]: \quad \zeta = \left( \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right)^2, \quad \varepsilon = 0.57 + \frac{0.043(1 - \Delta_S)}{0.1 - 1.1\Delta_S}. \quad (1.55)$$

Очевидно также, что значения коэффициентов гидравлических потерь в (1.54) могут соответствовать течениям в каналах с непрерывно изменяющимся поперечным сечением. В этом случае решения (1.54) выступают в качестве интегралов одномерных течений с распределенными воздействиями, суммарный эффект которых определяется величинами  $\zeta$  и  $\Delta_S$ .

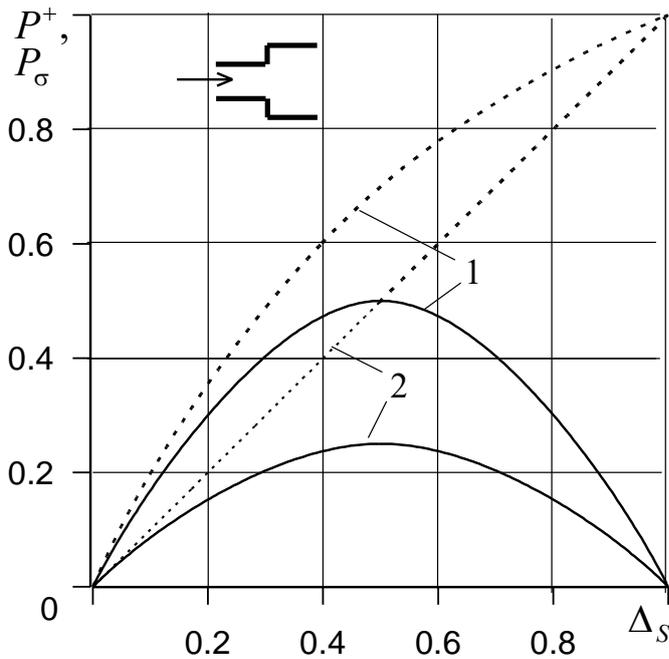


Рис. 1.2 Течение в расширяющемся канале:

..... — идеальная жидкость;  
 ———— — реальная жидкость;

$$1 - P_\sigma = \left( \frac{p_\sigma}{p^-} - 1 \right) Eu^-;$$

$$2 - P^+ = \left( \frac{p^+}{p^-} - 1 \right) Eu^-$$

На рис. 1.2, в качестве примера, приведены результаты расчета течения несжимаемой жидкости в канале с внезапным расширением для моделей идеальной (штриховые

линии – расчет по (1.54) при  $\zeta = 0$ ) и реальной (сплошные линии – расчет по (1.52)) жидкостей.

Значения  $\varphi_p$  для рассмотренных выше случаев приведены на Рис. 1.3, откуда видно, что значения  $\varphi_p$ , рассчитанные с привлечением экспериментальных данных по гидравлическим потерям для несжимаемой жидкости, в значительном диапазоне изменения  $\Delta_S$  группируются в окрестности  $\varphi_p = 1/2$ . Для области  $\Delta_S > 0$  этот вывод подтвержден экспериментом автора.

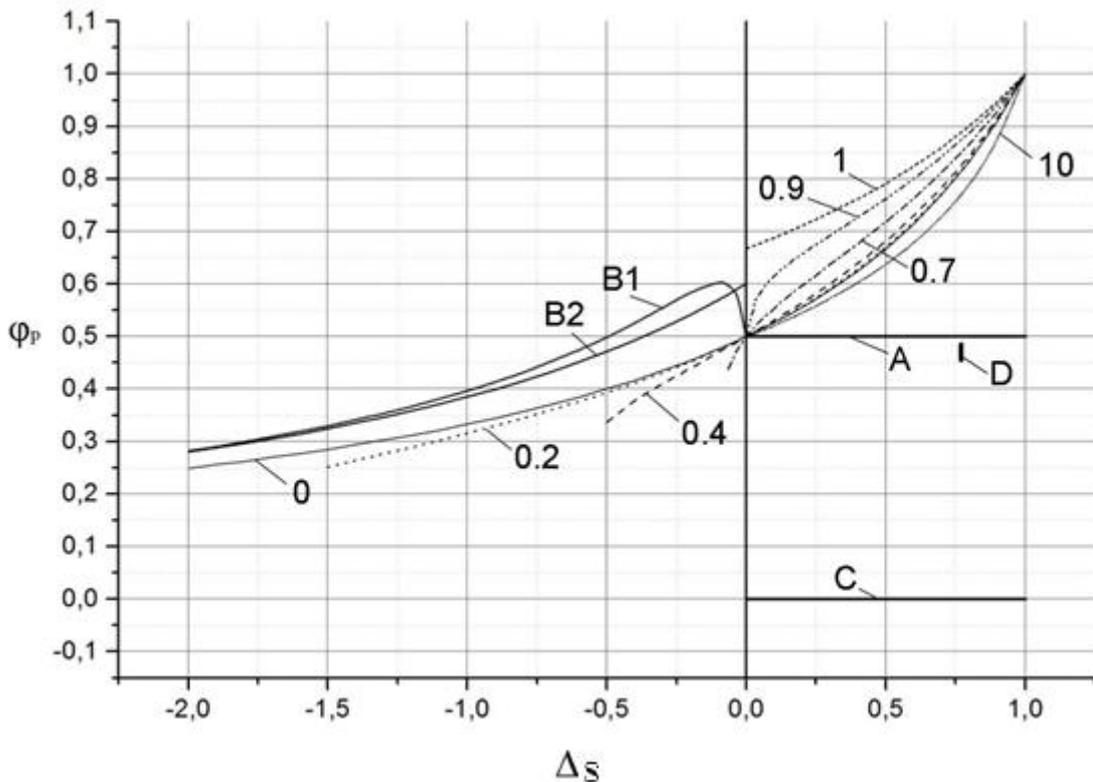


Рис. 1.3 Весовой коэффициент среднего давления на уступе канала: Цифры соответствуют значениям чисел Маха  $M^-$ , для которых рассчитаны значения  $\varphi_p$  по модели идеальной жидкости (формулы (1.48, 1.49)). Кривые соответствуют: А – формула (1.52); В<sub>1</sub> – на основе [2], В<sub>2</sub> – [58] – по формулам (1.54, 1.55); С – гипотеза Борда ( $\varphi_p = 0$ ); D – эксперимент (1.53).

Заметим, что при втекании несжимаемой жидкости в канал из безграничного пространства ( $\Delta_S \rightarrow -\infty$ ) все три кривые: В<sub>1</sub>, В<sub>2</sub> и М=0 – сливаются ( $\varphi_p \rightarrow 0$ ,  $p_\sigma = p^-$ ). Очевидно, что при  $M^- < 1$  данные экспериментов по

величинам  $\varphi_p$  в окрестности  $\Delta_S = 0$  должны приближаться к значениям  $\varphi_p = 1/2$ . Это обстоятельство заставляет сомневаться в возможности экстраполяции экспериментальных данных [2, 58], в терминах величин  $\varphi_p$ , на малые отрицательные значения величин  $\Delta_S$ . Вне этой области «экспериментальные» значения величин  $\varphi_p$  близки к модели идеальной несжимаемой жидкости, в отличие от течений в расширяющихся каналах.

Ниже излагаются детали эксперимента автора по определению среднего давления на кольцевом уступе расширяющегося канала.

Целью экспериментального исследования являлось прямое измерение распределения давления на уступе расширяющегося канала, а также давлений в начале ( $S^-$ ) и в конце зоны смещения ( $S^+$ ) для проверки теоретического значения  $\varphi_p = 1/2$  (см.(1.52)).

Общая схема экспериментальной установки изображена на Рис. 1.4 и включала в себя: дозвуковую аэродинамическую трубу замкнутого типа с открытой рабочей частью – 1 и специальную часть – 2. Специальная часть включает в себя: канал со скачком площади сечения – 2, рама для установки канала – 3, переходная часть для направления потока в канал, выравнивание его и уменьшения гидравлических потерь – 4, заглушка – 5.

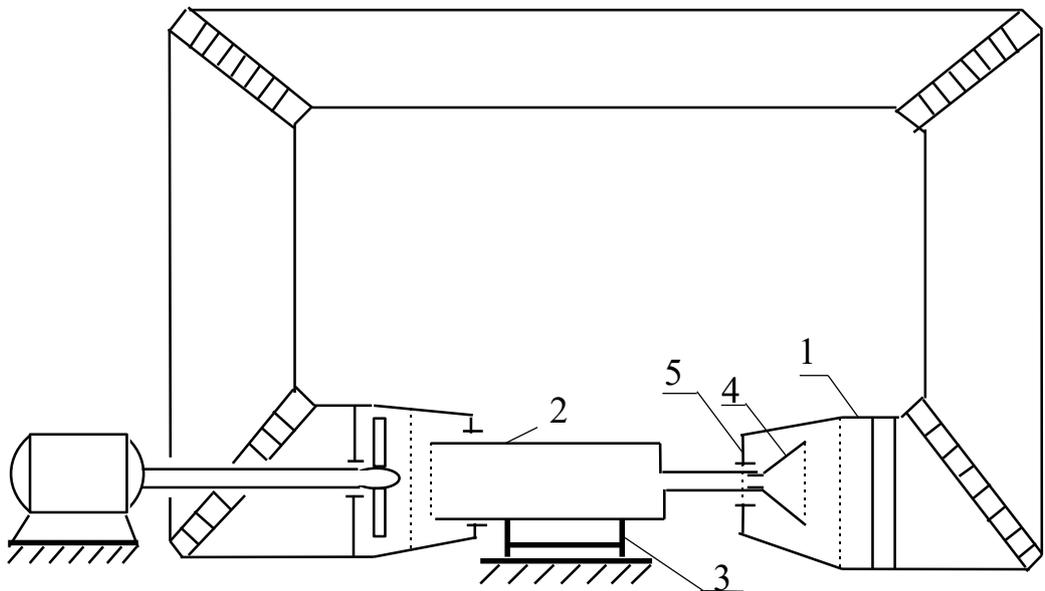


Рис. 1.4 Общая схема экспериментальной установки

Основные характеристики трубы:

– размеры выходного сечения сопла –  $600 \times 900$  мм<sup>2</sup>;

- длина рабочей части – 1000 мм, может быть увеличена до 1600 мм за счет демонтажа части диффузора;
- скорость потока в незагроможденной рабочей части до – 70 м/с;
- интенсивность турбулентности потока в незагроможденной рабочей части – 1.6 %.

На рис. 1.5 схема канала со скачком площади совмещена со схемой замера давлений в канале. Канал состоит из двух цилиндров разных диаметров, свернутых из листового железа, и уступа, соединенных пайкой. Размеры цилиндров:

$$\begin{array}{ll} \text{большого} & - \quad D = 310 \text{ мм} \quad L/D = 5.7 \quad \text{и} \\ \text{малого} & - \quad d = 150 \text{ мм} \quad l/d = 2 \quad - \end{array}$$

должны были обеспечить практическую завершенность процесса смешения в зоне перестройки потока, размещение трубок Пито-Прандтля и сеток для выравнивания потока после переходной части. Для завершения процессов смешения необходимо, по сведениям [57, 59],  $L/D \approx 7 \div 10$  при втекании жидкости из камеры в трубу с острыми кромками, а при  $0 < \Delta_S \leq 0.85$   $L/D$  составляет примерно 5.5 [106]; близкое значение ( $L/D \approx 5$ ) рекомендуется в [15] для измерения статического давления после локальных воздействий на поток. Точки отбора статического давления на уступе канала разнесены по радиусу и углам для удобства монтажа и обслуживания.

Общее число точек замера давления на уступе канала равно 10, что обеспечивало удовлетворительную точность при последующем численном интегрировании с целью определения среднего давления  $p_\sigma$ . Параметры потока в узкой части канала (сечение  $S^-$ ) измерялись тремя насадками Пито-Прандтля,

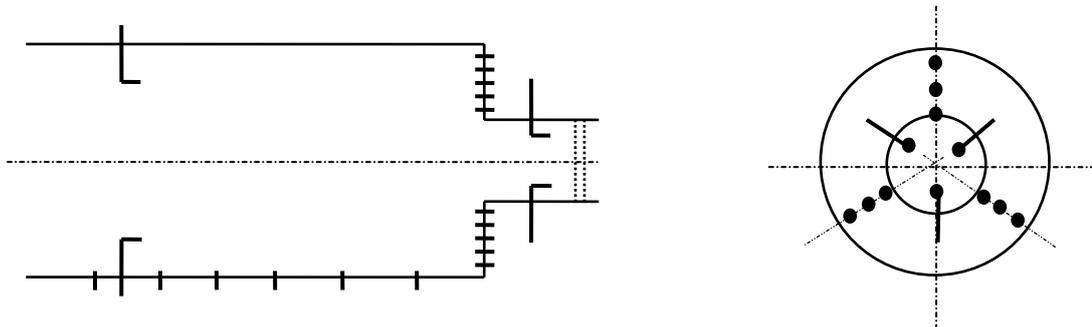


Рис. 1.5 Схема замера давлений в канале

++ – места измерения статического давления;

Γ – трубки Пито-Прандтля для измерения полного и статического давлений.

имевшими степень свободы в радиальном направлении и разнесенными под углами в  $120^0$ , что позволяло измерять распределение статического давления и скорости в сечении канала и судить об однородности потока в канале. Таким же образом было организовано измерение давления и скоростей в конце зоны перестройки течения (сечение  $S^+$ ). Положение сечения  $S^+$  определялось по стабилизации показаний датчиков статического давления, расположенных на одной из образующих широкой части канала. Входные отверстия датчиков давлений и их окрестности тщательно обрабатывались и шлифовались, взаимное расположение отверстий и размеры отверстий для приема давлений выбирались в соответствии с рекомендациями [12, 13, 14, 75] и составляли:  $d = 0.5$  мм,  $l/d = 5$  ( $d$  и  $l$  – диаметр и глубина отверстий). Стык узкой части канала с поперечной перегородкой тщательно выравнивался, следы пайки зашлифовывались для создания острой кромки (под углом  $90^0$ ) и однородных условий схода потока с кромки по периметру канала. Трубки отвода давлений насадок Пито-Прандтля размещались в общем кожухе с поперечным сечением в виде симметричного крылового профиля для минимизации возмущения потока в сечении  $S^-$ .

Вход потока воздуха в канал из аэродинамической трубы осуществлялся через переходник 4 (Рис. 1.4), состоящий из конического и цилиндрического участков и ряда сеток для выравнивания потока.

Сопло аэродинамической трубы частично перекрывалось заглушкой 5 для направления всего потока воздуха в цилиндрический канал. Таким же образом герметизировалось сочленение выходной части широкого канала и диффузора аэротрубы для ликвидации возможных обратных течений и неоднородности поля скоростей в сечении  $S^+$ .

Перечисленные меры позволили реализовать в сечениях  $S^-$  и  $S^+$  поток с удовлетворительными характеристиками неоднородности поля скоростей

$$\alpha^- \approx 1.06 \div 1.07, \alpha^+ \approx 1.04 \div 1.055 .$$

Значение коэффициента неоднородности поля скоростей в сечении  $S^+$  является косвенным подтверждением практической завершенности процессов перестройки параметров потока в зоне смешения и установления, типичных для развитого турбулентного течения в каналах, величин  $\alpha$  [8].

Для измерения давлений использовались микроманометры МКВ-250 с ценой деления  $10^{-2}$  мм вод. ст.

Трубки Пито-Прандтля тарировались с помощью контрольной трубки. На фотографиях представлены: канал (фото 1.1) и трубки Пито-Прандтля (фото 1.2). Для обеспечения достоверности эксперимента продувка канала

осуществлялась на 6-ти режимах с разными скоростями в сечении  $S^-$ . На каждом режиме: промерялись поля давления торможения и статического давления в сечениях  $S^-$  и  $S^+$ ; статические давления на боковой поверхности канала измерялись в точках по схеме на Рис. 1.5. Измерялись температура и давление окружающей среды для определения плотности воздуха. При продувке канала числа Рейнольдса лежали в интервале

$$Re = (0.8 \div 4) \cdot 10^5 .$$



Фото 1.1

Результаты математической обработки эксперимента для весового коэффициента среднего давления на уступе канала  $\varphi_p$ , выполненные в соответствии с [18], обобщены в формуле (1.53).

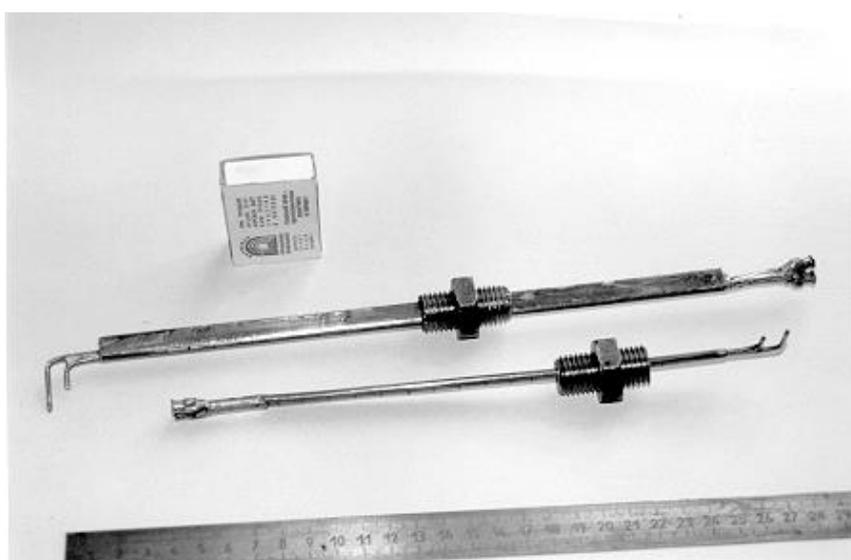


Фото 1.2

### 1.5.2. Сжимаемая жидкость; некоторые выводы

Экспериментальные данные по гидравлическим потерям в несжимаемой жидкости могут быть использованы при расчете сжимаемых течений в каналах со скачком площади вплоть до чисел Маха  $M = 0.7 \div 0.8$  [91, 103]. Это обстоятельство позволяет учесть диссипативные потери в зоне смешения дозвукового потока при срыве с кромок внезапно расширяющегося канала. На Рис. 1.6 сопоставляются экспериментальные данные Коровина [62, 63] с расчетами по соотношениям (1.10, 1.46, 1.33, 1.51) – для течения реальной жидкости и в двух вариантах для модели идеальной жидкости: по соотношениям (1.10, 1.46, 1.47) – в одном случае и с использованием уравнений неразрывности, энергии и адиабаты Пуассона – в другом. В связи с Рис. 1.6 важно отметить не только хорошее совпадение опытных данных и расчетных для реальной жидкости, но и совпадение двух способов расчета для идеальной жидкости: способа автора [41] и способа, использованного в работах [70, 107].

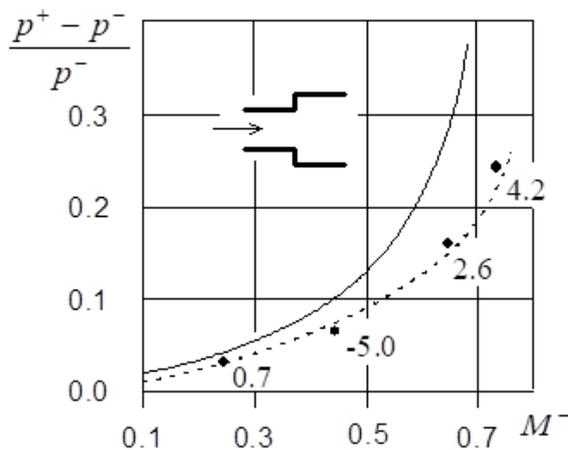


Рис. 1.6 Течение в расширяющемся канале.

— идеальная жидкость;  
 ..... реальная жидкость;  
 \* \* \* \* \* опытные данные  
 Коровина Е.П. [63];

Цифры – отклонение опытных данных от расчетных в процентах.

На Рис. 1.7 сопоставляются опытные данные [114] с расчетами по теории отрывных течений Корста [64] и автора для модели идеальной жидкости ((1.10, 1.48, 1.49),  $\nu = +1$ ) в адиабатическом процессе ( $\Delta_\tau = \Delta_Q = 0$ ). Сравнение позволяет утверждать, что среднее давление на уступе, рассчитанное с использованием интегральных соотношений (1.48) по модели идеальной жидкости, вполне адекватно отражает реальность и в этой части конкурирует с теорией отрывных течений.

И, наконец, экспериментальные данные по сверхзвуковым течениям слабо коррелируют друг с другом [6, 10, 55], что не позволяет делать на их основе какие-либо однозначные выводы. Возможными причинами разнобоя,

Рис. 1.7 Истечение звукового потока  $M^- = 1$  в расширяющийся канал.

- — расчет Корста [64],  
 - - - - - расчет автора [Д4, 41],  
 \* \* \* \* \* — опыт Уика [114].

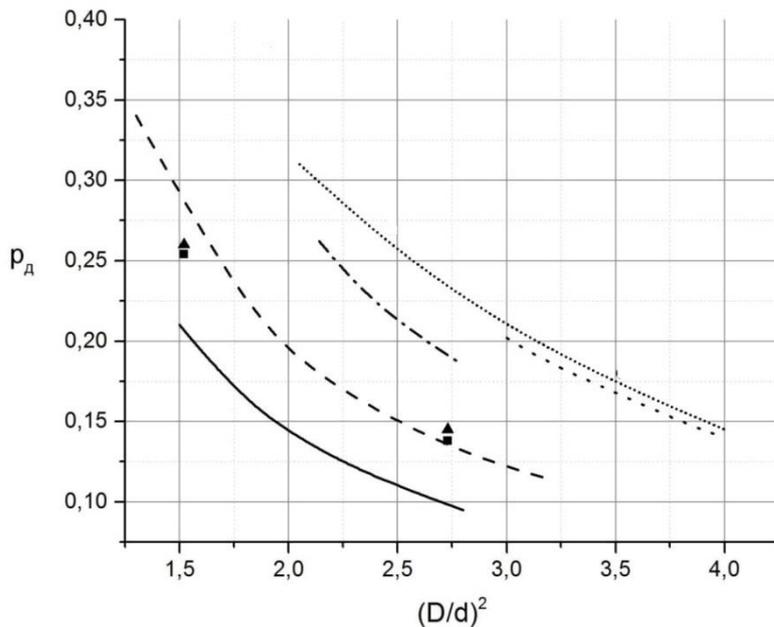
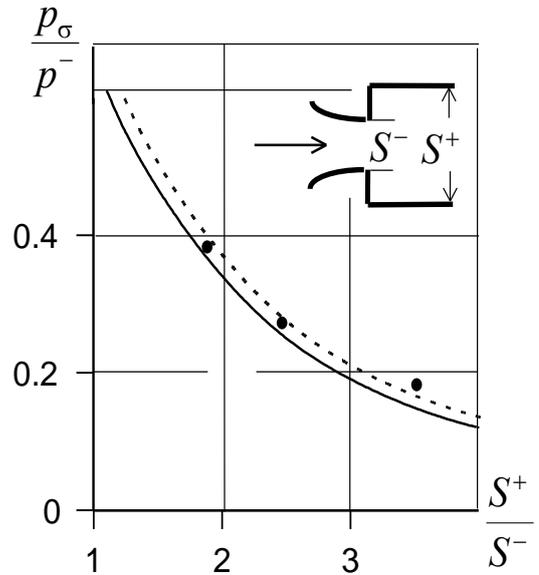


Рис. 1.8 Сводка экспериментальных данных среднего давления на скачке площади.

Здесь:  $P_d = p_\sigma / p^-$ ; ■ — Пензин  $M=1$  [85]; ▲ —  $M=1.5$  [85];

— —  $M=2.5$  [85]; - - - - -  $M=1$  [9]; - · - · -  $M=1$  [85];

..... —  $M=2.2$  [17]; ..... —  $M=2.05$  [85].

по мнению автора [85], могут быть: повышенная влажность воздуха - рабочей среды, дефекты сборки экспериментальной установки — негерметичность, из за которых завышаются значения давления  $p_\sigma$  на уступе расширяющегося канала. Действительно, тщательно подготовленный эксперимент

[85] при сопоставимых условиях ( $M^-$ ,  $\Delta_S$ ) дал существенно меньшие значения давления на уступе канала (Рис. 1.8.). (Несколько более поздний, не менее тщательно проведенный эксперимент А. И. Овчинникова [ЦАГИ, Уч. Записки, т. XV, 1985, № 5], в основном подтвердил выводы [85], возможно, не закрыв проблему окончательно).

***Приведенный обзор и тестирование позволяют заключить:***

- При сопоставимых допущениях: идеальная жидкость ( $\Delta_\tau = 0$ ), адиабатический процесс ( $\Delta_Q = 0$ ) – законы сохранения в интегральной форме и дополнительное условие дают абсолютно идентичные результаты в сравнении с известными теоретическими соотношениями: интегралами дифференциальных уравнений Бернулли и адиабатой Пуассона,
- При использовании экспериментальных данных по гидравлическим потерям полученные здесь решения позволяют получать хорошее согласование расчетных и экспериментальных данных не только в конце зоны смешения, но и по величине давления на уступе канала.
- Полезно иметь в виду, что это согласование относится к дозвуковым тормозящимся потокам (см. Рис. 1.6). А информация на Рис. 1.3 для области  $\Delta_S > 0$  дополнительно, на примере величины  $\varphi_p$ , утверждает необходимость учета диссипативных потерь для тормозящихся дозвуковых потоков, иначе погрешность может достигать несколько десятков и сотен процентов. Для ускоряющихся дозвуковых потоков необходимость учета диссипативных потерь гораздо менее очевидна (Рис 1.3, область  $\Delta_S < 0$ , сравнение кривых  $B_2$  и  $M=0$ ).
- Течения в расширяющихся каналах  $\Delta_S > 0$ ,  $M^- \geq 1$ , несмотря на обнадеживающий результат совпадения расчета автора и эксперимента Уика (Рис. 1.7), не подтверждены другими исследователями (Рис. 1.8:  $M^- = 1$ ) и значительно расходятся между собой при больших числах Маха (Рис. 1.8). При «сопоставимых» условиях разница между результатами эксперимента разных исследователей может достигать 500% и оставляет большой простор для догадок относительно условий проведения эксперимента, состояния рабочей среды, трактовки результатов экспериментов.
- В связи с перечисленными выше обстоятельствами существенным является еще одно замечание: известные гипотезы построения замкнутых систем

уравнений на скачке площади сечения канала, содержащие теорему об изменении кинетической энергии с гидравлическими потерями [84] взамен уравнения импульсов, позволяют определить параметры состояния потока в конце зоны перестройки (для одиночных каналов (см. главу 4)). Однако не позволяют определять давление на уступе канала  $p_\sigma$ , даже привлекая уравнение движения (1.5), так как не располагают связью гидравлических потерь  $\zeta$  с воздействием  $\Delta_\tau$  (1.33), которая является продуктом использованного здесь подхода. При отсутствии такой связи вынужденным шагом будет исключение сил трения из уравнения движения, что неизбежно приведет к ошибочным результатам в определении  $p_\sigma$ , например к воспроизводству гипотезы Борда ( $p_\sigma = p^-$ ) для несжимаемой жидкости в расширяющемся канале.

### 1.5.3. К вопросу о «теории удара»

И наконец, с проблемой корректного определения давления на скачке площади расширяющегося канала связана абсурдная ситуация, ставшая плохой традицией, присутствия в монографиях, многочисленной учебной и научной литературе феномена под именами: «теория удара», «теоремы» или «формулы Борда-Карно» о потерянной энергии потока несжимаемой жидкости на скачке площади канала:

$$\Delta E = (v^+ - v^-)^2 / 2$$

Ниже приводится доказательство абсурдности феномена. Итак: жидкость несжимаемая, течение стационарное, законы сохранения (1.5, 1.4) записываются для выделенного объема жидкости (рис. 1.1):

$$\alpha S \rho v^2 + S p^+ - \alpha S \rho v^2 + S p^- - (S^+ - S^-) p_\sigma + \Delta_\tau S \rho v^2 = 0,$$

$$S \rho v^+ = S \rho v^- = G, \quad \text{где} \quad \Delta_\tau = - \int_S \tau_{nx}^* dS / G v^-;$$

и уравнения для изменения кинетической энергии (п. 1.3.3.)

$$\Delta E = \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right)^- - \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right)^+ = - \frac{1}{G} \int_V D dV = - v^-^2 \Delta_D.$$

Здесь:  $D = \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  - тензор вязких напряжений,  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  - тензор скоростей деформаций,  $\Delta E = - \int_V D dV / G$  потерянная энергия единицы массы потока.

Если, вслед за сторонниками гипотезы  $p_\sigma = p^-$  преобразовать уравнение движения, сохранив в нем пока силы трения  $\Delta_\tau$ , то последнее примет вид:

$$\frac{1}{\rho}(p^- - p^+) = v^+(v^+ - v^-) + \Delta_\tau(v^+v^-).$$

Исключив разность давлений из уравнения энергии, находим для потеряннной энергии

$$\Delta E = \zeta(v^-)^2 / 2 = -(v^-)^2 \Delta_D = (v^+ - v^-)^2 / 2 + (v^-v^+) \Delta_\tau.$$

И наконец, предварительно вспомнив соотношение (1.37)  $\Delta_D = \Delta_\tau$  и смысл величин, в нем представленных:  $\Delta_D = \int_V \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV / (Gv^2)^-$ ,

$\Delta_\tau = - \int_S (n \cdot \boldsymbol{\tau})_x dS / (Gv^-)$  - продолжим логику действий сторонников и поль-

зователей «теории удара». А именно: пренебрегаем вязкими напряжениями, представленных в силах трения -  $\Delta_\tau = 0$  на границах объема, но, сохраняем вязкие напряжения  $\Delta_D \neq 0$  при работе сил трения в объеме. Все это вопреки: условию  $\Delta_D = \Delta_\tau$ , прямому эксперименту  $p_\sigma \neq p^-$  (см. рис. 1.3) и полной потере смысла полученного результата, т. к. величина потеряннной энергии, по определению, отрицательна. Таким образом, единственной и полезной возможностью трактовки фрагмента

$$-(v^-)^2 \Delta_D = (v^+ - v^-)^2 / 2$$

этого соотношения, является трактовка его как результат аппроксимации экспериментальных данных по гидравлическим потерям

$$\zeta = (v^+ / v^- - 1)^2 / 2 = (S^- / S^+ - 1)^2 / 2,$$

опустив все известные попытки его «теоретического» обоснования.

## **1.6. Распад произвольного разрыва на скачке площади сечения канала<sup>\*)</sup>**

Решение подобного рода задач требует адекватного описания давления на скачке площади сечения в широком диапазоне условий. Состояние вопроса в этой области в необходимом объеме рассмотрено выше и позволяет

надеяться, что использование для этой цели метода ТДС, решает эту проблему, а использование экспериментальных данных по гидравлическим потерям повысит точность прогноза. Кроме того, в работе, не задаваясь вопросами технической реализуемости, исследовано влияние тепловых воздействий  $\Delta_Q$ , в сочетании с  $\Delta_S$ , на структуру РПР.

### 1.6.1. Постановка задачи. Соотношения на скачке площади

*N. В! В этом п. принята иная система обозначений. Смысл пояснен в тексте и на рис.1.9.*

Рассматривается канал, состоящий из двух участков постоянного поперечного сечения. Площадь сечения левого участка ( $x \leq 0$ ) равна  $S_1$ , правого ( $x > 0$ ) –  $S_2$ . Исходные состояния газов ( $v$  – скорость,  $\rho$  – плотность,  $p$  – давление) на левом и правом участках, которые обозначаются индексами 1 и 2, произвольные и однородные. Таким образом, имеем задачу о распаде произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения в точке  $x = 0$ .

Предполагается, следуя [Д10, 109], что через некоторый промежуток времени в окрестности скачка площади сечения поток устанавливается, на каждом участке канала течение является одномерным, и газ движется в виде разделенных элементарных волн постоянной интенсивности (под элементарными волнами подразумеваются ударные волны, контактный разрыв и волны разрежения). В принятой постановке решение задачи сводится к выбору таких элементарных волн и такой их конфигурации, что с их помощью можно перейти от начального состояния к текущему состоянию с соблюдением условий совместности на всех разрывах, включая разрыв площади сечения канала. Для описания параметров состояния на скачке площади используется метод, в основе которого лежит соотношение (1.46), позволяющее учитывать все возможные виды воздействий из перечня  $X = \{x_i\} = \{\Delta_r, \Delta_Q\}$ .

$$\rho = \rho_1, \quad v = v_1, \quad p = p_1, \quad \text{при } x \leq 0,$$

$$\rho = \rho_2, \quad v = v_2, \quad p = p_2, \quad \text{при } x \geq 0,$$

---

<sup>\*</sup>Здесь представлены материалы выпускной работы студента МАИ (2016 г.) Б. А. Стратулы.

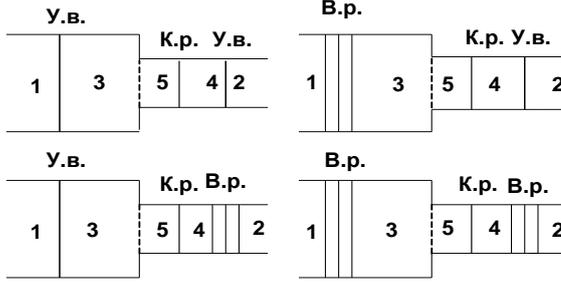


Рис. 1.9. Конфигурации распада

Также предполагается, что, как и в классическом решении задачи РПР, возможны четыре конфигурации распада (Рис. 1.9.): ударная волна или волна разрежения, распространяющаяся по газу 1, и ударная волна или волна разрежения, распространяющаяся по газу 2. В каждом случае между волнами образуется поверхность контактного разрыва.

Считается, что направление оси  $x$  и течение газа слева направо являются положительными (скорость поверхности контактного разрыва больше нуля), а величина  $S_1$  может быть как больше, так и меньше  $S_2$ . Обозначим индексом 3 параметры газа между левой волной и уступом, индексом 4 – параметры газа между правой волной и контактным разрывом, а индексом 5 – параметры газа между уступом и контактным разрывом.

Ниже, в качестве соотношений на скачке площади используются прямые следствия законов сохранения (1.8) и 2 – го начала термодинамики (1.14, 1.15) в виде (1.10) и (1.46) вместе с необходимыми замыкающими соотношениями:

$$\frac{p_5}{p_3} = \frac{K - vnN}{I \cdot (n+1)}, \quad \frac{\rho_5}{\rho_3} = \frac{(1 - \Delta_S)(n+1)M_3^2}{K + vN}, \quad \frac{v_5}{v_3} = \frac{K + vN}{(n+1)M_3^2}; \quad (1.56)$$

$$f_2(\Delta_S, X, \varphi_p(\Delta_S, X)) - f_1(X) = 0. \quad (1.57)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} 1. f_2(\Delta_S, X, \varphi_p(\Delta_S, X)) &= \pi(M_3) \cdot \frac{K - vnN}{(n+1) \cdot I} \cdot \left(1 + \frac{n-1}{2} \frac{K + vN}{K - vnN}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \\ 2. f_1(X) &= \pi(M_3) \frac{K_0 - v\gamma N_0}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot \frac{K_0 + vN_0}{K_0 - v\gamma N_0}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}; \quad (1.58) \\ 3. N &= \left\{ K^2 - 2 \frac{n^2 - 1}{\gamma - 1} M_3^2 \left( C_1 + \beta^- \cdot \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2 \right) \right\}^{1/2}, \quad K = I + nM_3^2 (\alpha^- - \Delta_\tau); \end{aligned}$$

$$4. N_0 = \left\{ K_0^2 - 2(\gamma + 1)M_3^2 \left( C_1 + \beta^{-1} \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2 \right) \right\}^{1/2},$$

$$K_0 = 1 + \gamma M_3^2 (\alpha^- - \Delta_\tau),$$

$$5. I = \frac{n - 1}{(\gamma - 1)(1 - \Delta_S)}, \quad n = \frac{\gamma}{1 + (\gamma - 1)\varphi_p \Delta_S}, \quad C_1 = 1 + (\gamma - 1)\Delta_Q;$$

$$6. M_3 = v_3 / a_3, \quad v = \text{sign}(M_3 - 1), \quad a_3^2 = \gamma p_3 / \rho_3, \quad \Delta_S = 1 - S_1 / S_2;$$

$$\Delta_\tau = \frac{\zeta_3}{2}, \quad \zeta_3 = \begin{cases} \Delta_S^2 & \text{для } \Delta_S > 0, M < 1; \\ -\frac{\Delta_S}{1 - \Delta_S} & \text{(формула Идельчика И. Е.) для } \Delta_S < 0, M < 1, \\ \text{если } \varphi_p > 1/2, \text{ то } \varphi_p = 1/2; \\ 0 & \text{если } \Delta_S \geq 0, M \geq 1. \end{cases}$$

Соотношения (1.56, 1.57), с одной стороны - обеспечивают связь параметров состояния газа по обе стороны скачка площади, удовлетворяющую законам сохранения и ограничениям термодинамики; с другой - допускают возможность исследования влияния на конфигурации и интенсивность волн геометрических -  $\Delta_S$ , тепловых -  $\Delta_Q$  и диссипативных -  $\Delta_\tau$  воздействий.

**Замечание.** В соотношениях (1.56) выбран верхний знак, не предусматривающий появление стационарного скачка уплотнения (соотношений Гюгонио) в сечении  $x = 0$  при отсутствии всех воздействий.

### 1.6.2. Конфигурации распада разрыва и соотношения на них

При распаде разрыва формируется контактный разрыв и две волны, распространяющиеся по левому и правому газам.

На контактном разрыве выполняются условия:

$$p_5 = p_4, \quad u_5 = u_4 \tag{1.59}$$

Каждая из образовавшихся волн может быть либо ударной волной, либо волной разрежения. Если по левому газу распространяется ударная волна, то параметры газа в областях 1 и 3 связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} \rho_1(N_1 - v_1) &= \rho_3(N_1 - v_3), \\ \rho_1(N_1 - v_1)(v_1 - v_3) &= p_1 - p_3, \end{aligned} \tag{1.60}$$

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{h\rho_3 - \rho_1}{h\rho_1 - \rho_3}, \quad h = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad \frac{a_3^2}{a_1^2} = \frac{h - \rho_1 / \rho_3}{h - \rho_3 / \rho_1},$$

$$v_1^{*2} = \frac{p_3 - p_1}{\rho_3 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_3}{\rho_1}, \quad v_3^{*2} = \frac{p_3 - p_1}{\rho_3 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_3}, \quad v_i^{*2} = (v_i - N_1)^2,$$

где  $N_1$  – скорость левой ударной волны, а уравнение энергии представлено двумя вариантами записи адиабаты Гюгонио. Здесь же приведены другие полезные следствия законов сохранения на ударной волне [100]. Если по левому газу распространяется волна разрежения, то параметры газа в областях 1 и 3 связаны соотношениями

$$v_1 + \frac{2}{\gamma - 1} \sqrt{\frac{\gamma p_1}{\rho_1}} = v_3 + \frac{2}{\gamma - 1} \sqrt{\frac{\gamma p_3}{\rho_3}}, \quad \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_3}{\rho_3^\gamma}. \quad (1.61)$$

Если по правому газу распространяется ударная волна, то параметры газа в областях 2 и 4 связаны соотношениями:

$$\rho_2 (N_2 - v_2) = \rho_4 (N_2 - v_4), \quad (1.62)$$

$$\rho_2 (N_2 - v_2)(v_2 - v_4) = p_2 - p_4,$$

$$\frac{p_4}{p_2} = \frac{h\rho_4 - \rho_2}{h\rho_2 - \rho_4}, \quad h = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad \frac{a_4^2}{a_2^2} = \frac{h - \rho_2 / \rho_4}{h - \rho_4 / \rho_2},$$

$$v_2^{*2} = \frac{p_4 - p_2}{\rho_4 - \rho_2} \cdot \frac{\rho_4}{\rho_2}, \quad v_4^{*2} = \frac{p_4 - p_2}{\rho_4 - \rho_2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_4}, \quad v_i^{*2} = (v_i - N_2)^2,$$

где  $N_2$  – скорость правой ударной волны. Если по правому газу распространяется волна разрежения, то параметры газа в областях 2 и 4 связаны соотношениями:

$$v_2 - \frac{2}{\gamma - 1} \sqrt{\frac{\gamma p_2}{\rho_2}} = v_4 - \frac{2}{\gamma - 1} \sqrt{\frac{\gamma p_4}{\rho_4}}, \quad (1.63)$$

$$\frac{p_2}{\rho_2^\gamma} = \frac{p_4}{\rho_4^\gamma}.$$

Назовем конфигурацию с двумя ударными волнами конфигурацией **1012**, конфигурацию с ударной волной, распространяющейся по газу 1, и волной разрежения в газе 2 назовем конфигурацией **1013**, конфигурацию с волной

разрежения в газе 1 и ударной волной в газе 2 – конфигурацией **1112**, конфигурацию с двумя волнами разрежения – конфигурацией **1113**.

### 1.6.3. Возможные варианты реализации распада разрыва

Для конфигурации **1012** имеем систему 12 уравнений: 3 – (1.56),

1 – (1.57), 2 – (1.59), 3 – (1.60), 3 – (1.62) с 12-ю неизвестными:

$$p_3, \rho_3, v_3, p_4, v_4, p_5, \rho_5, v_5, N_1, N_2, \varphi_p.$$

Для конфигурации **1013** имеем систему 11 уравнений: 3 – (1.56),

1 – (1.57), 2 – (1.59), 3 – (1.60), 2 – (1.63) с 11 неизвестными:

$$p_3, \rho_3, v_3, p_4, v_4, p_5, \rho_5, v_5, N_1, \varphi_p.$$

Для конфигурации **1112** имеем систему 11 уравнений: 3 – (1.56),

1 – (1.57), 2 – (1.59), 3 – (1.60), 2 – (1.61) с 11 неизвестными:

$$p_3, \rho_3, v_3, p_4, v_4, p_5, \rho_5, v_5, N_2, \varphi_p.$$

Для конфигурации **1113** имеем систему 10 уравнений: 3 – (1.56),

1 – (1.57), 2 – (1.59), 2 – (1.61), 2 – (1.63) с 10 неизвестными:

$$p_3, \rho_3, v_3, p_4, v_4, p_5, \rho_5, v_5, \varphi_p.$$

Каждая из перечисленных систем уравнений может быть сведена к системе двух уравнений относительно 2 – х неизвестных, например,  $p_3$  и  $\varphi_p$  или  $v_3$  и  $\varphi_p$ . Выбор названных пар неизвестных обусловлен спецификой задачи: наличием контактного разрыва и скачка площади сечения канала.

Решением совокупности перечисленных выше уравнений считается выполнение одного из равенств (1.56 для  $p_3$  или  $v_3$ ) и (1.57) при: произвольно заданных параметрах с индексами «1» и «2», воздействиях  $\Delta_S, \Delta_Q, \Delta_\tau$ ; подобранной системе волн (сжатия или разрежения) с отвечающими им соотношениями.

Выбранные таким образом два уравнения, вместе с замыкающими соотношениями (1.58) образуют систему уравнений относительно  $p_3$  и  $\varphi_p$

$$\frac{K + vN}{(n+1)M_3} v_3 - v_4 (= v_5) = 0, \quad (1.64)$$

$$f_2(\Delta_S, X, \varphi_p(\Delta_S, X)) - f_1(X) = 0.$$

Здесь  $K, N$ , согласно (1.58), зависят от числа Маха  $M_3$  и, следовательно, от  $v_3, p_3, \rho_3$ . Нижеследующие соотношения устанавливают связь искомой пары переменных с известными параметрами на внешних границах системы волн:

$$v_4 = \begin{cases} v_2 + a_2 \left( \sqrt{\frac{(p_5 + hp_2)^2}{(1+h)p_2(p_2 + hp_5)}} - \sqrt{\frac{(1+h)p_2}{p_5 + hp_2}} \right), & \text{если } p_5 > p_2, \\ v_2 - \frac{2}{\gamma-1} a_2 \left[ 1 - \left( \frac{p_5}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right], & \text{если } p_5 \leq p_2, \end{cases}$$

$$v_3 = \begin{cases} v_1 + a_1 \sqrt{\frac{hp_1 + p_3}{(h+1)p_1}} \left( \sqrt{\frac{hp_1 + p_3}{p_1 + hp_3}} - \sqrt{\frac{p_1 + hp_3}{hp_1 + p_3}} \right), & \text{если } p_3 > p_1, \\ v_1 + \frac{2}{\gamma-1} a_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_3}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right], & \text{если } p_3 \leq p_1, \end{cases}$$

$$\rho_3 = \begin{cases} \frac{\rho_1}{h + \frac{p_3}{p_1}} \left( h \frac{p_3}{p_1} + 1 \right), & \text{если } p_3 > p_1, \\ \rho_1 \left( \frac{p_3}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, & \text{если } p_3 \leq p_1, \end{cases}$$

#### 1.6.4. Решение и анализ

В результате многочисленных расчетов была подтверждена:

- единственность решения для каждой комбинации входных параметров;

- достаточность классических представлений [Д10] о волновой структуре РПР, отраженной на Рис.1.10, - 1.12, что делает излишними фантазии в этой области [109].

Некоторые результаты расчетов РПР и комментарии к ним по модели идеальной жидкости на скачке площади канала приведены ниже.

Анализ начат с классической ситуации – канал без скачка площади  $\Delta_S = 0$ , но дополненный тепловым воздействием  $\Delta_Q = -0,5; -1,0; -2,0$  ( $\Delta_Q < 0$  - соответствует отводу тепла) возрастающей интенсивности; диссипативные потери отсутствуют. Распределение характерных областей соответствует нумерации и расположению на рис. 1.9, начальная плотность газа во всех примерах соответствует СА, начальные скорости соответственно  $v_1 = 100$ ,  $v_2 = 50$  м/с; начальные давления – атмосферные.

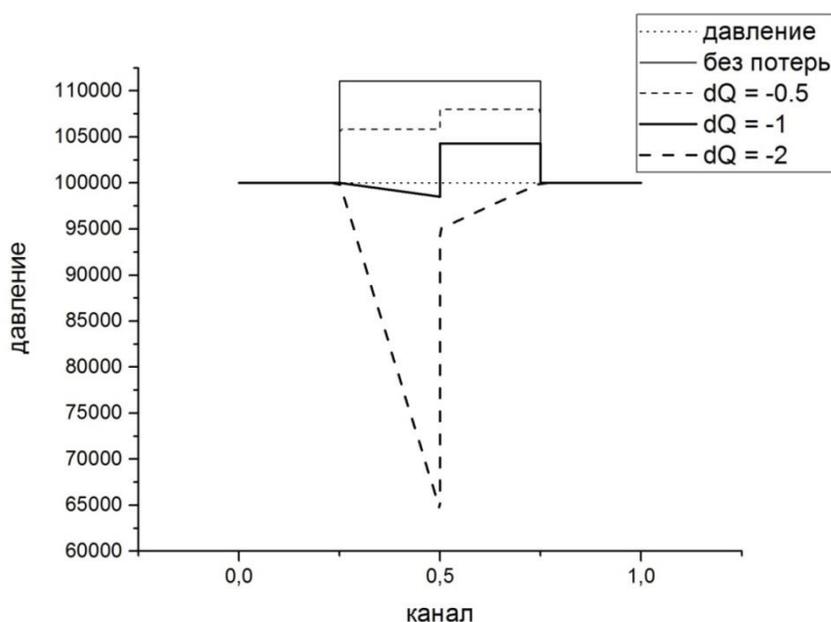


Рис. 1.10. РПР в канале посянного сечения ( $\Delta_S = 0$ ,  $\Delta_\tau = 0$ ) при наличии теплоотвода.

На всех рисунках ступеньке соответствует ударная волна, высоте ступеньки – интенсивность УВ; волна разрежения изображается наклонной линией, а угол наклона отражает ее интенсивность. Теперь картина волн на Рис. 1.10 расшифровывается следующим образом: при отсутствии теплового воздействия все параметры выравниваются, в обе стороны идут ударные волны. Отвод тепла во всех 3-х случаях в большей степени отражается на газе «1» с большей начальной скоростью ( $H_1 > H_2$ ,  $H$  - полное теплосо-

держание), «размывая» ударную волну, вплоть до превращения в волну разрежения. Газ справа с задержкой «отслеживает» реакцию левого газа на тепловое воздействие.

На Рис. 1.11 РПР на скачке площади ( $\Delta_s = 0,5$ ) «подвержен» поочередно (Таблица 1.1) чисто геометрическому воздействию; дополнительно учтены диссипативные потери, отвечающие складывающейся ситуации на скачке площади; затем диссипативные потери «замещаются» отводом тепла малой интенсивности. Начальная разность давлений выливается в две ударные волны мало отличающиеся между собой на скачке площади, а интенсивность их определяется, преимущественно разницей давлений в начальном состоянии.

Диссипативные потери слегка сглаживают разницу давлений на скачке площади, увеличивая интенсивность одной и уменьшая другой волны. Слабое тепловое воздействие слегка ослабит интенсивность обеих ударных волн. Теплоотвод, относительная величина которого соразмерима с первым примером (см. рис. 1.10), здесь «не справился» с радикальной перестройкой волновой структуры. Его хватило на перевод УВ меньшей интенсивности в ВР и уменьшение интенсивности УВ в газе «1». Представление о мощности теплового воздействия можно получить из определения  $\Delta_Q$  в (1.4). Тогда мощность на единицу расхода составит

$$N_Q = |\Delta_Q| a_3^2 = 224 \text{ кВт/кг.}$$

Таблица 1.1

	$\Delta_s$	Тип	p1	u1	rho1=rho2	M1	p2	u2	M2
БП	0,50	1012	100000	100	1,290	0,304	120000	10	0,028
$\Delta_r$	0,50	1012	100000	100	1,290	0,304	120000	10	0,028
$\Delta_Q = -0,1$	0,50	1012	100000	100	1,290	0,304	120000	10	0,028
$\Delta_Q = -2$	0,50	1013	100000	100	1,290	0,304	120000	10	0,028

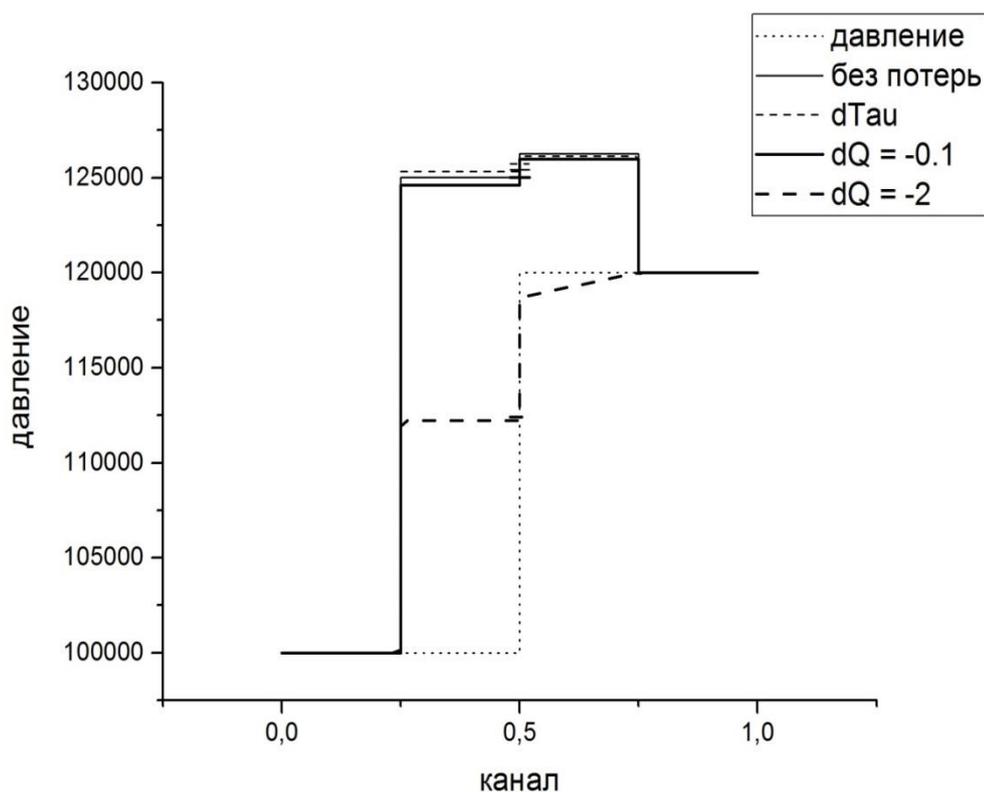


Рис. 1.11. РПР в расширяющемся канале

Вариант РПР на скачке площади сужающегося канала ( $\Delta_s = -0,9$ ) представлен на Рис. 1.12. Начальное состояние среды в Таблице 1.2. Десятикратная разность давлений и скоростей начального состояния при РПР на скачке площади реализуется в виде ударных волн. Если снижение интенсивности УВ рассматривать как положительно явление, то из сравнения с данными Рис. 1.11. следует, что сужение канала способствует снижению интенсивности обеих волн. Незначительный перепад давления в сравнении с начальным значением объясняется частичным преобразованием кинетической энергии начального состояния в давление. Локальное охлаждение зоны РПР «работает» вполне прогнозируемо. Незначительный отвод тепла лишь корректирует интенсивность существующей системы волн. Интенсификация теплоотвода из зоны РПР во всех случаях способствует направленному вырождению исходной системы волн в волны разрежения и последующему увеличению их интенсивности

Таблица 1.2

	$\Delta_s$	Тип	p1	u1	rho1= rho2	M1	p2	u2
БП	-0,90	1012	100000	100	1,290	0,304	10000	10
$\Delta_\varrho = -$ 0,1	-0,90	1012	100000	100	1,290	0,304	10000	10
$\Delta_\varrho = -$ 0,8	-0,90	1112	100000	100	1,290	0,304	10000	10

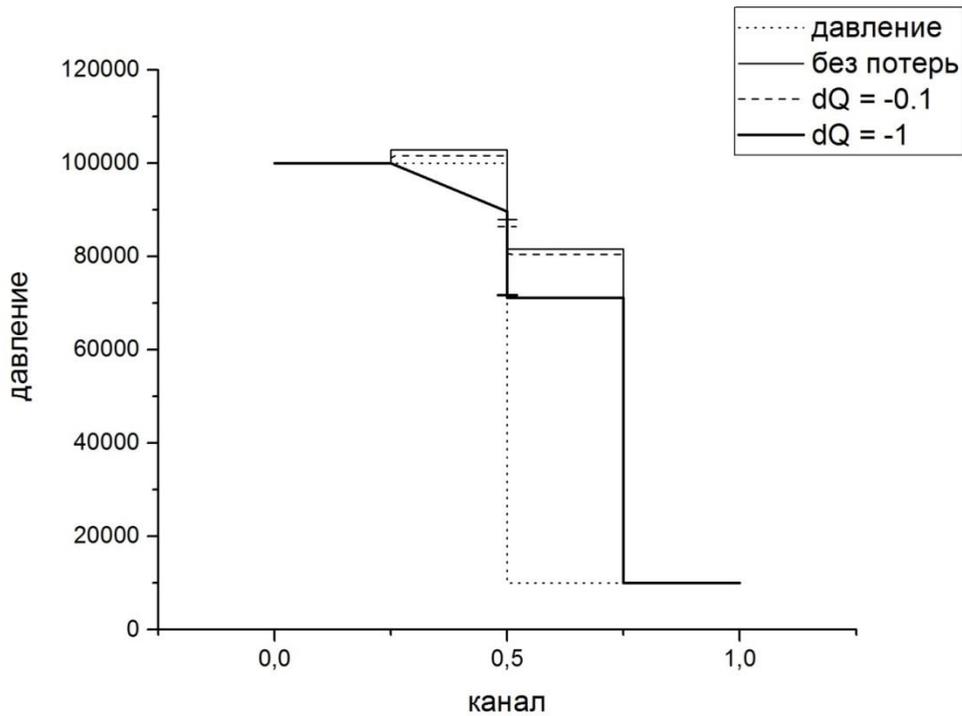


Рис. 1.12

Заметим, что отвод тепла из зоны перестройки потока сопровождается повышением «качества» газа, имея в виду изменение коэффициента восстановления давления. Этот результат коррелирует [50] с эффектом повышения коэффициента восстановления давления газа в канале за счет вдува «холодного» газа.

## Глава 2

### Течения в каналах с локальным подводом – отводом массы

#### 2.1. Существующие подходы к схематизации и описанию течений в каналах с раздачей и слиянием потоков

При истечении жидкости из каналов через боковые ответвления в ряде случаев (см. рис. 2.1) в боковых патрубках возникают течения со срывом струй и образованием струйных течений со свободной границей или замкнутых вихревых зон. Первый случай типичен при истечении жидкости через "короткие" патрубки, когда зона отрыва потока сообщается с окружающей средой с заданным давлением  $p_{\delta k}$ . Второй – возникает при истечении жидкости через "длинные" боковые патрубки, когда зона отрыва потока с давлением  $p_{\delta k}$  изолирована от окружающей среды вследствие расширения границ струи до стенок патрубка. Как будет ясно из дальнейшего, первый случай является составной частью расчетной схемы второго, в связи с чем, здесь, основное внимание уделяется первому случаю.

Неопределенность положения границы свободной струи в боковом патрубке влечет за собой проблемы при численной реализации математических моделей на основе дифференциальных уравнений или законов сохранения в интегральной форме для элементарных объемов среды. Один из распространенных приемов решения таких задач, в первом случае, использует процедуру установления и какой-либо из вариантов метода распада произвольного разрыва Годунова С.К. Реализация метода даже для плоских течений требует нескольких сот итераций и значительного времени современных ПЭВМ. Практика использования второго подхода в виде модификации метода частиц в ячейках [105] путем сглаживания осцилляций [73], на примере расчета дульного тормоза артиллерийского орудия, даже при достаточно грубых допущениях в модели (плос-

кое течение, ограниченные площади расчетной области, предписанные направления потока на границах области и т.п.), приводит к неутешительным выводам: требуются значительные ресурсы ЭВМ.

Для плоских потенциальных течений несжимаемой жидкости Н.Е. Жуковским, с использованием преобразования Шварца-Кристоффеля в теории комплексного переменного, была решена задача об истечении жидкости из полуограниченного пространства через щель между двумя пластинами [66 ч. 1]. Позднее, метод Жуковского был использован для определения коэффициента поджатия струи по заданному расходу при истечении жидкости из плоского канала с изменяемым сечением через боковое отверстие [102]. Богомоловым Е.Н. [3, 4], Космачевым П.П., Скобельциным Ю.А. [65] определены коэффициенты поджатия струи при истечении несжимаемой жидкости из потока в полуограниченном пространстве через отверстия конечной глубины. В работе Монахова В.Н. [77] подобные задачи сведены к краевым задачам для аналитических функций, где метод Жуковского выступает в качестве частного случая, сохранив, разумеется, ограничения, присущие этому методу: идеальная несжимаемая жидкость, плоские потенциальные течения, произвол в выборе части констант в формуле Шварца-Кристоффеля, реализуемый обычно в виде условий на бесконечности, или задания расхода для потока в боковом ответвлении. Однако первое не согласуется с экспериментальными данными [15], а второе, вообще говоря, является целью решения подобных задач, а не исходной информацией.

Для определения интегральных характеристик потока в задачах истечения из канала через боковые ответвления удобным инструментом могли бы стать законы сохранения в интегральной форме. Однако, законы сохранения, как и в случае течения в канале со скачком площади, вновь приводят к незамкнутой системе уравнений даже при отводе массы из канала постоянного сечения. "Лишними" неизвестными в этом случае являются: коэффициент поджатия струи в боковой патрубке и среднее давление в зоне перестройки течения, вызванной отводом массы из канала. В различных приложениях эти уравнения решаются с привлечением дополнительных гипотез. В [7, 56, 86] для разветвляющихся каналов (тройников) на характерных участках поверхности присваиваются значения давлений, присущие гидростатике. В [15, 16] коэффициент под-

жания потока в отверстиях перфорации и в боковых патрубках принимается равным единице. В [101] истечение сверхзвукового потока из канала через боковой патрубок отождествляется с истечением потока из полуограниченного пространства через щель в тонкой пластинке. В [82] постулируется кинематическая связь для потоков в основном канале и в боковых патрубках. В задачах подвода массы в канал число неизвестных, как будет показано ниже, может быть сокращено; однако такие задачи не должны решаться в рамках модели идеальной жидкости.

Краткий обзор состояния рассматриваемой проблемы – описание раздачи и слияния потоков в каналах – позволяет заключить.

– Обратной стороной универсальности численных методов является их ”ресурсоемкость”, будь то ресурсы времени, ЭВМ или квалификация исполнителей;

– Точные аналитические решения требуют ряда ограничений, оценка ”веса” которых, в тех или иных приложениях, требует дополнительных исследований;

– Методы решения на основе законов сохранения в интегральной форме требуют формулировки дополнительных гипотез. Во всех известных автору случаях эти гипотезы вступают в противоречие либо с количественными характеристиками описываемого явления, либо с качественными выводами самих законов сохранения (в том числе – вторым началом термодинамики).

При определении интегральных характеристик потока часть перечисленных проблем, присущих перечисленным методам, может быть снята обобщением метода, изложенного в Главе 1, основанного на условии о независимости термодинамической функции  $\sigma_p$  от геометрических характеристик каналов, на задачи о слиянии и разделении потоков в каналах.

## **2.2. Законы сохранения и схемы течения жидкости в боковых патрубках**

### **2.2.1. Возможные схемы течения жидкости в боковых патрубках при истечении**

Законы сохранения гидродинамики записываются для участка канала, в пределах которого осуществляются локальные конечные

по величине воздействия на поток и устанавливаются новые гидродинамические параметры состояния потока.

Одна из возможных схем участка канала и течения в нем с воздействиями достаточно общего вида приведена на рис. 2.1.

В боковую стенку канала переменного сечения врезаны произвольное число  $m$  различным образом ориентированных патрубков, при этом, оси патрубков пересекают ось канала. Сечения  $S^-$  и  $S^+$  ограничивают зону перестройки течения в канале. В патрубках сечение  $S_{mk}$  выбирается там, где становится приемлемым допущение об одномерном характере течения: при истечении - в минимальном сечении струи в зоне отрыва, при подводе массы - в любом месте окрестности сочленения патрубка с каналом, если характер течения в патрубке близок к одномерному. Граница  $S$  выделенного объема

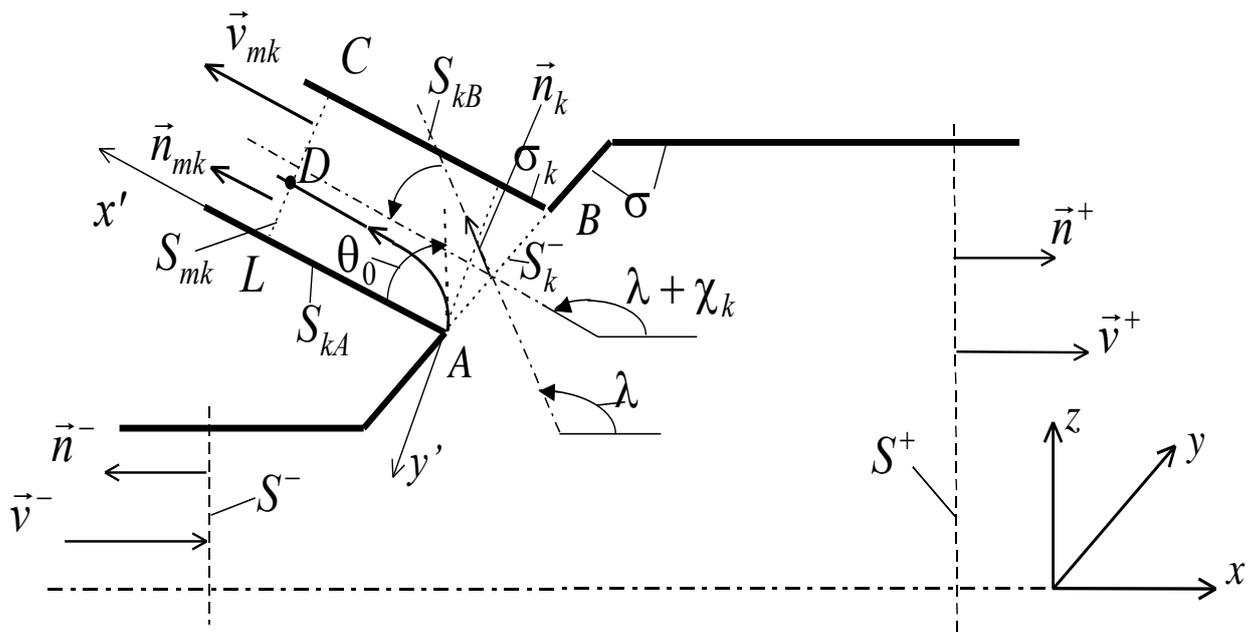


Рис.2.1 Схема участка канала с раздачей потока

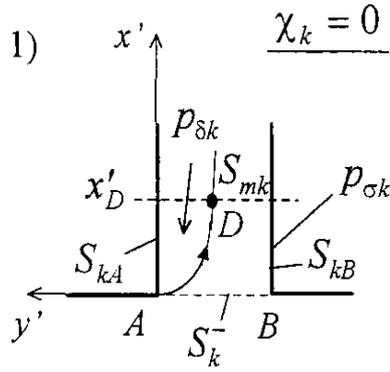
жидкости разбивается на ряд характерных участков. В частности, для схемы течения на Рис. 2.1 имеем

$$S = S^+ + S^- + \sigma + \sum_{k=1}^m ((S_{AD} + S_{DC})_k + S_{KB} + \sigma_k),$$

где схематизация течения внутри канала осталась в основном подобной рассмотренной в разделе 1, но в площадь боковой поверхности канала  $\sigma$  не входят площади входных отверстий боковых патрубков  $\sum_{k=1}^m S_k^-$ . Очевидно, что разбиение границы зоны перестройки течения внутри патрубков на характерные участки зависят от принятой схемы течения.

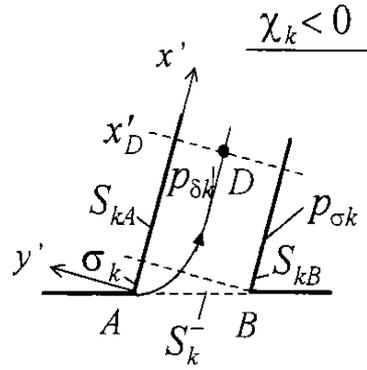
Рассмотренные в работе варианты приведены на рис. 2.2.

При этом предусмотрены возможность срыва потока с передней  $A$  (случаи 1 и 2) или задней  $B$  (случаи 3,4) кромок, срыв потока с передней и задней кромок (случай 5), истечение без срыва с кромок (коэффициент поджатия струи  $\varepsilon_k = 1$ ) – случай 6. Точка  $D$  на граничной линии тока определяет положение минимального сечения струи  $\varepsilon_k S_k$ . Впредь, патрубки считаются ”короткими”, если зона отрыва сообщается с внешней средой с давлением  $p_{\delta k}$ . Вихревые течения в этой области (ALDA рис. 2.1), инициируемые силой трения на границе струи, предполагают существование, пусть незначительного, градиента давления, отличного от давления в минимальном сечении струи  $p_k$ . Ниже, на начальном этапе постановки задачи, давления  $p_{\delta k}$  и  $p_k$  считаются различными. Средние давления в зоне контакта струи с боковой поверхностью патрубка  $p_{\sigma k}$  при истечении отличаются от среднего давления  $p_{\sigma}$  на боковой поверхности  $\sigma$  канала, что увеличивает число неизвестных в задаче. В рамках случая 1 (рис. 2.2), с увеличением отклонения патрубка от нормали к поверхности канала в направлении потока в канале (угол  $\rho_{\sigma}$ ), улучшаются условия входа потока в патрубок и коэффициент поджатия стремится  $\varepsilon_k \rightarrow 1$ . Описание течений в случаях 1–4 осложнено тем, что неизвестны коэффициенты поджатия струй  $\varepsilon_k$  и размеры площадей контакта струй с боковыми поверхностями патрубков. Случаи 5 и 6 приводят к менее сложным задачам: в 5 – вообще не возникает проблемы определения давлений  $p_{\sigma k}$ , а в 6 – площадь действия давления  $p_{\sigma k}$  однозначно определяется углом отклонения оси патрубка от нормали к поверхности канала.



$$p_{\sigma k} = S_{kB},$$

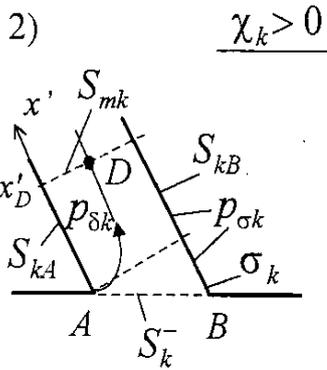
$$p_{\delta k} = S_{kA};$$



$$p_{\sigma k} = S_{kB},$$

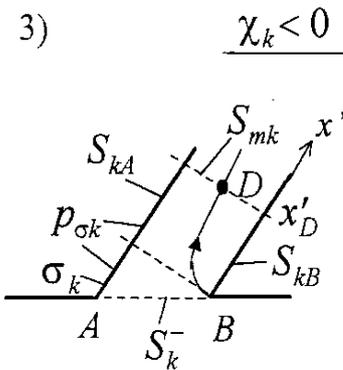
$$p_{\delta k} = S_{kA} + \sigma_k;$$

$$x'_D > x'_{\sigma k}$$



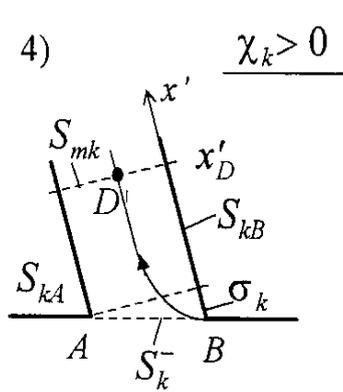
$$p_{\sigma k} = S_{kB} + \sigma_k,$$

$$p_{\delta k} = S_{kA}.$$



$$p_{\sigma k} = S_{kA} + \sigma_k,$$

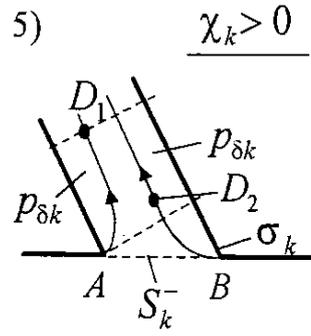
$$p_{\delta k} = S_{kB}.$$



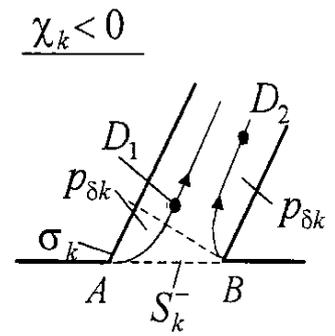
$$p_{\sigma k} = S_{kA},$$

$$p_{\delta k} = S_{kB} + \sigma_k;$$

$$x'_D > x'_{\sigma k}$$



$$p_{\sigma k} = S = 0, \quad p_{\delta k} = \sigma_k$$



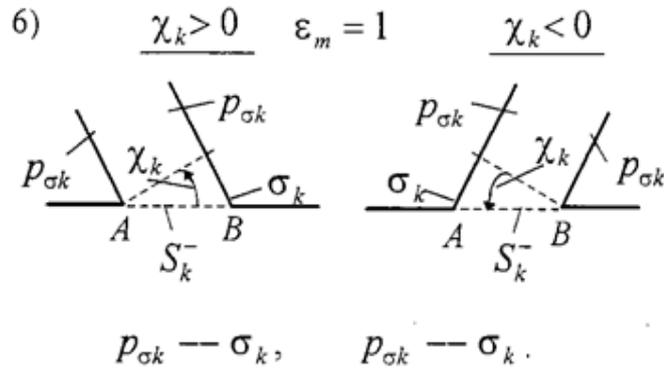


Рис. 2.2 Схемы течения жидкости в патрубках

В рамках излагаемого подхода выбор того или иного случая осуществляется на основе опытных данных или качественного анализа особенностей конструкции, однако случаи 3 и 4 представляются наименее вероятными. Определенные выводы о достоверности принятых схем истечения будут сделаны ниже на основе анализа результатов решения задач истечения.

### 2.2.2. Уравнение движения при истечении из канала

Исходным является уравнение движения (1.3). При этом, в дополнение к допущениям, изложенным в п. 2.2.1, следуя [3], без ущерба для точности определения интегральных характеристик потока, течение в боковых патрубках считается плоским, а сечение  $S_k$  – прямоугольным. В этом случае длины участков  $S_{kA} = S_{kB}$  – одинаковы.

Учитывается также известное свойство интеграла по замкнутой поверхности

$$\int_S \vec{n} ds = 0,$$

которое применяется для участков зоны отрыва потока; например, на рис. 2.1 - AL – LD – DA. Теорема об изменении количества движения для выделенного объема жидкости для всех 6-ти случаев истечения имеет общую и переменную части; последняя в формулах выделена фигурными скобками  $\{\{\dots\}\}$ . Случай подвода массы рассмотрен отдельно.

Ниже достаточно полно излагается вывод уравнения движения для наиболее вероятной **схемы истечения 1-2**, остальные - фрагментами.

$$\begin{aligned}
 & (\alpha S \rho v v + S p n)^+ - (\alpha S \rho v v - S p n)^- + p_\sigma \cdot \int_{\sigma + \sum_k S_k^-} n ds - \int_{\sigma_T + S^- + S^+} \tau_n^* ds + \\
 & + \sum_{k=1}^m \{ (\rho v_n)_k \int_{(\varepsilon S)_k} v ds + \{ \{ p_k \cdot \int_{(\varepsilon S)_k} n ds + p_{\delta_k} \cdot \int_{S_{A-D}} n ds + p_{\sigma_k} \cdot \int_{S_{B-C}} n ds \} \} - \\
 & (2.1)
 \end{aligned}$$

$$- p_\sigma \int_{S_k^-} n ds - \int_{\sigma_{Tk} + S_k} \tau_n^* ds \} = 0.$$

Здесь:  $\int_{(\varepsilon S)_k} v ds = (\varepsilon S)_k \alpha_k v_k \mathbf{n}_k$ ,  $v_{nk} = v_k = |v_k|$ ;  $\sigma_T$  и  $\sigma_{Tk}$  - поверхности трубок тока транзитного потока и потоков вытекающих в боковой патрубках, причем  $\sigma_T + S^+ + S^- + \sum (\sigma_{Tk} + \varepsilon_k S_k) = S$ . Затем поочередно рассматриваются интегралы в составе  $\{ \{ \dots \} \}$

$$p_k \cdot \int_{(\varepsilon S)_k} n ds = p_k (\varepsilon S)_k \cdot \mathbf{n}_k,$$

$$p_{\sigma_k} \cdot \int_{S_{B-C}} n ds = p_{\sigma_k} \int_{v_{1k} S_{kB} + v_{3k} \sigma_k} n ds = p_{\sigma_k} (v_{1k} S_{kB} + v_{3k} \sigma_k) \cdot \mathbf{n}_{kB},$$

$$\begin{aligned}
 p_{\delta_k} \cdot \int_{S_{A-D}} n ds &= p_{\delta_k} \cdot \left( \int_{S_{A-L}} n ds + \int_{S_{L-D}} n ds \right) = p_{\delta_k} \cdot \left( \int_{v_{1k} S_{Ak} + v_{4k} \sigma_k} n ds + \int_{(1-\varepsilon_k) S_k} n ds \right) = \\
 &= p_{\delta_k} \cdot [(v_{1k} \cdot S_{Ak} + v_{4k} \cdot \sigma_k) \cdot \mathbf{n}_{kA} + (1-\varepsilon_k) S_k \cdot \mathbf{n}_k].
 \end{aligned}$$

В итоге:

$$\{ \{ 1-2 \} \} = p_k (\varepsilon S)_k \cdot \mathbf{n}_k + p_{\sigma_k} (v_{1k} S_{kA} + v_{3k} \sigma_k) \cdot \mathbf{n}_{kB} + p_{\delta_k} [(1-\varepsilon_k) S_k \cdot \mathbf{n}_k + (v_{1k} S_{Ak} + v_{4k} \sigma_k) \cdot \mathbf{n}_{kA}].$$

Коэффициенты  $v_{ik}$  определяют зону действия давлений  $p_{\delta_k}$  и  $p_{\sigma_k}$  в боковых патрубках; их численные значения, отвечающие всем

шести случаям на Рис. 2.2 приведены в Таблице 2.1. Единичные векторы  $\mathbf{n}_{kA}$  и  $\mathbf{n}_{kB}$  - векторы внешних нормалей к поверхностям  $S_{kA}$  и  $S_{kB}$  - соответственно, очевидно  $\mathbf{n}_{kA} = \mathbf{n}_{kB}$ .

Далее, возвращаясь к **схеме 1-2**: вводя понятия длины  $\bar{b}_k = S_{kA} / S_k = S_{kB} / S_k$  участков  $S_{kA}$ ,  $S_{kB}$  (в калибрах величины  $(S_k)^{1/2}$ ), заменяя поверхность  $\sigma_k = S_k \operatorname{tg}|\chi_k|$  - силы в списке величин  $\{\{\dots\}\}$  можно представить в виде:

$$\{\{1-2\}\} = p_k (\varepsilon S)_k \cdot \mathbf{n}_k + p_{\sigma k} S_k q_{3k} \cdot \mathbf{n}_{kB} + p_{\delta k} S_k [(1 - \varepsilon_k) \cdot \mathbf{n}_k + q_{4k} \cdot \mathbf{n}_{kA}],$$

$$\text{где} \quad q_{3k} = (v_{1k} \bar{b}_k + v_{3k} \operatorname{tg}|\chi_k|), \quad q_{4k} = (v_{1k} \bar{b}_k + v_{4k} \operatorname{tg}|\chi_k|). \quad (2.2)$$

И, наконец, приняв  $p_\sigma \int_{\sigma^+ \sum S_k^-} \mathbf{n} ds = -p_\sigma (S^+ - S^-) \mathbf{i}$ ,  $p_\sigma \int_{S_k^-} \mathbf{n} ds = p_\sigma S_k^- \mathbf{n}_k^-$ , уравнение движения (2.1) для **схемы 1-2** в базисе системы координат (x,y,z) Рис. 2.1 принимает вид:

$$\begin{aligned} & (\alpha S \rho v^2 + Sp)^+ \cdot \mathbf{i} - (\alpha S \rho v^2 + Sp)^- \cdot \mathbf{i} - p_\sigma (S^+ - S^-) \cdot \mathbf{i} - \int_{\sigma_T + S^- + S^+} \tau_n^* ds + \\ & + \sum_{k=1}^m \{ (\alpha \varepsilon S \rho v^2)_k \mathbf{n}_k + \{ \{ p_k (\varepsilon S)_k \mathbf{n}_k + p_{\delta k} S_k (1 - \varepsilon_k) \mathbf{n}_k + p_{\delta k} S_k q_{4k} \mathbf{n}_{kA} + \\ & + p_{\sigma k} S_k q_{3k} \cdot \mathbf{n}_{kB} \} \} - p_\sigma S_k^- \cdot \mathbf{n}_k^- - \int_{\sigma_{Tk} + S_k} \tau_n^* ds \} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для **схемы истечения 3-4** аналогичные преобразования приводят к соотношениям.

$$\begin{aligned} \{\{3-4\}\} &= p_k \cdot \int_{(\varepsilon S)_k} \mathbf{n} ds + p_{\sigma k} \cdot \int_{S_{A-L}} \mathbf{n} ds + p_{\delta k} \cdot \int_{S_{B-D}} \mathbf{n} ds = \\ &= p_k \cdot \int_{(\varepsilon S)_k} \mathbf{n} ds + p_{\sigma k} \cdot \int_{v_{2k} S_{kA} + v_{4k} \sigma_k} \mathbf{n} ds + p_{\delta k} \cdot \left( \int_{(1-\varepsilon)_k S_k} \mathbf{n} ds + \int_{v_{2k} S_{kB} + v_{3k} \sigma_k} \mathbf{n} ds \right) = \\ &= p_k (\varepsilon S)_k \cdot \mathbf{n}_k + p_{\sigma k} (v_{2k} S_{kA} + v_{4k} \sigma_k) \cdot \mathbf{n}_{kA} + p_{\delta k} [(1 - \varepsilon_k) S_k \cdot \mathbf{n}_k + \\ & + (v_{2k} S_{kB} + v_{3k} \sigma_k) \cdot \mathbf{n}_{kB}] = \\ &= p_k (\varepsilon S)_k \cdot \mathbf{n}_k + p_{\sigma k} S_k \bar{q}_{4k} \cdot \mathbf{n}_{kA} + p_{\delta k} S_k [(1 - \varepsilon_k) \cdot \mathbf{n}_k + \bar{q}_{3k} \cdot \mathbf{n}_{kB}], \end{aligned}$$

$$\text{где } \bar{q}_{3k} = v_{2k} \bar{b}_k + v_{3k} \operatorname{tg} |\chi_k|, \quad \bar{q}_{4k} = v_{2k} \bar{b}_k + v_{4k} \operatorname{tg} |\chi_k|. \quad (2.4_1)$$

Сравнивая (2.2) и (2.4<sub>1</sub>) нетрудно заметить, что вариативность записи уравнений случаев 1-2 и 3-4 можно упростить, если обобщить запись этих соотношений

$$q_{3k} = (v_{1k} + v_{2k}) \bar{b}_k + v_{3k} \operatorname{tg} |\chi_k|, \quad q_{4k} = (v_{1k} + v_{2k}) \bar{b}_k + v_{4k} \operatorname{tg} |\chi_k|. \quad (2.4)$$

Уравнение движения принимает вид:

$$\begin{aligned} & (\alpha S \rho v^2 + Sp)^+ \cdot \mathbf{i} - (\alpha S \rho v^2 + Sp)^- \cdot \mathbf{i} - p_\sigma (S^+ - S^-) \cdot \mathbf{i} - \int_{\sigma_T + S^- + S^+} \tau_n^* ds + \\ & + \sum_{k=1}^m \{ (\alpha \varepsilon S \rho v^2)_k \mathbf{n}_k + \{ \{ p_k (\varepsilon S)_k \mathbf{n}_k + p_{\delta_k} S_k (1 - \varepsilon_k) \cdot \mathbf{n}_k + p_{\delta_k} S_k q_{3k} \mathbf{n}_{kB} + \\ & + p_{\sigma_k} S_k q_{4k} \cdot \mathbf{n}_{kA} \} \} - p_\sigma S_k^- \cdot \mathbf{n}_k^- - \int_{\sigma_{Tk} + S_k} \tau_n^* ds \} = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Таблица 2.1

№ п/п схемы течения (рис.2.2)	$v_{1k}$	$v_{2k}$	$v_{3k}$	$v_{4k}$	примечание
1	1	0	0	1	$\chi_k < 0$
2	1	0	1	0	$\chi_k > 0$
3	0	1	0	1	$\chi_k < 0$
4	0	1	1	0	$\chi_k > 0$
5	0	0	0	1	$\chi_k < 0$
	0	0	1	0	$\chi_k > 0$
6	0	0	0	1	$\chi_k < 0$
	0	0	1	0	$\chi_k > 0$

Для схемы истечения 5 область действия давления  $p_{\sigma k}$  отсутствует и переменная часть уравнения движения имеет вид:

$$\begin{aligned} \{\{5\}\} &= p_k \cdot \int_{(\varepsilon S)_k} nds + p_{\delta k} \cdot \left( \int_{S_{kA-D_1}} nds + \int_{S_{kB-D_2}} nds \right) = p_k \cdot \int_{(\varepsilon S)_k} nds + \\ &+ p_{\delta k} \cdot \left( \int_{S_{A-L}} nds + \int_{S_{B-C}} nds + \int_{S_k(1-\varepsilon_k)} nds \right) = p_k (\varepsilon S)_k \cdot \mathbf{n}_k + \\ &+ p_{\delta k} [\sigma_k (\mathbf{v}_{4k} \cdot \mathbf{n}_{kA} + \mathbf{v}_{3k} \cdot \mathbf{n}_{kB}) + S_k (1 - \varepsilon_k) \cdot \mathbf{n}_k] = \\ &= p_k (\varepsilon S)_k \cdot \mathbf{n}_k + p_{\delta k} S_k [\operatorname{tg} |\chi_k| \cdot (\mathbf{v}_{4k} - \mathbf{v}_{3k}) \cdot \mathbf{n}_{kA} + (1 - \varepsilon_k) \cdot \mathbf{n}_k]. \end{aligned}$$

Здесь, комбинация величин (см. Табл. 2.1)

$$\operatorname{tg} |\chi_k| \cdot (\mathbf{v}_{4k} - \mathbf{v}_{3k}) = \begin{pmatrix} \operatorname{tg} |\chi_k| = -\operatorname{tg} \chi_k, & (\chi_k < 0) \\ -\operatorname{tg} |\chi_k| = -\operatorname{tg} \chi_k, & (\chi_k > 0) \end{pmatrix} = -\operatorname{tg} \chi_k. \quad (2.6)$$

В итоге:  $\{\{5\}\} = p_k (\varepsilon S)_k \cdot \mathbf{n}_k + p_{\delta k} S_k [-\operatorname{tg} \chi_k \cdot \mathbf{n}_{kA} + (1 - \varepsilon_k) \cdot \mathbf{n}_k]$ .

Уравнение движения в векторной форме приводится к виду:

$$\begin{aligned} (\alpha S \rho v^2 + Sp)^+ \cdot \mathbf{i} - (\alpha S \rho v^2 + Sp)^- \cdot \mathbf{i} - p_{\sigma} (S^+ - S^-) \cdot \mathbf{i} - \int_{\sigma_T + S^- + S^+} \tau_n^* ds + \\ + \sum_{k=1}^m \{ (\alpha \varepsilon S \rho v^2)_k \cdot \mathbf{n}_k + \{ p_k (\varepsilon S)_k \cdot \mathbf{n}_k + p_{\delta k} S_k [(1 - \varepsilon_k) \cdot \mathbf{n}_k - \operatorname{tg} \chi_k \cdot \mathbf{n}_{kA}] \} \} - \\ - p_{\sigma} S_k^- \cdot \mathbf{n}_k^- - \int_{\sigma_{Tk} + S_k} \tau_n^* ds \} = 0. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Для схемы истечения 6 область действия давления  $p_{\delta k}$  отсутствует, ( $\varepsilon_k = 1$ ) и переменная часть уравнения движения, с учетом (2.6), имеет вид:

$$\begin{aligned} \{\{5\}\} &= p_k \cdot \int_{S_k} nds + p_{\sigma k} \sigma_k (\mathbf{v}_{4k} \cdot \mathbf{n}_{kA} + \mathbf{v}_{3k} \cdot \mathbf{n}_{kB}) = \\ &= p_k S_k \cdot \mathbf{n}_k + p_{\sigma k} S_k \operatorname{tg} |\chi_k| (\mathbf{v}_{4k} - \mathbf{v}_{3k}) \cdot \mathbf{n}_{kA} = p_k S_k \cdot \mathbf{n}_k - p_{\sigma k} S_k \operatorname{tg} \chi_k \cdot \mathbf{n}_{kA}, \end{aligned}$$

а уравнение движения -

$$\begin{aligned}
& (\alpha S \rho v^2 + Sp)^+ \cdot \mathbf{i} - (\alpha S \rho v^2 + Sp)^- \cdot \mathbf{i} - p_\sigma (S^+ - S^-) \cdot \mathbf{i} - \int_{\sigma_T + S^- + S^+} \tau_n^* ds + \\
& + \sum_{k=1}^m \{ (\alpha S \rho v^2)_k \cdot \mathbf{n}_k + \{ [ p_k S_k \cdot \mathbf{n}_k - p_{\sigma k} S_k \operatorname{tg} \chi_k \cdot \mathbf{n}_{kA} ] \} \} - \\
& - p_\sigma S_k^- \cdot \mathbf{n}_k^- - \int_{\sigma_{Tk} + S_k} \tau_n^* ds \} = 0. \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Последующие, не менее громоздкие преобразования, связаны с приведением уравнения движения к рабочему виду, включающему в себя:

запись уравнения движения в компонентах в системе координат  $(x, y, z)$ ;

распределение давлений  $p_{\sigma k}$  и  $p_\sigma$  между граничными значениями давлений  $p_k$ ,  $p^-$  и  $p^+$  с помощью весовых коэффициентов, подобно тому, как это сделано в **Главе 1**. В необходимых деталях эта технология будет воспроизведена для схемы истечения 1-2, для остальных – фрагментарно.

### Схема истечения 1-2.

Для записи уравнения движения в проекциях на оси координат (см. рис. 2.1) используются дополнительные допущения:

оси боковых патрубков пересекают ось  $x$ , что исключает появление закрученных течений внутри канала;

в связи с каждым боковым патрубком вводится вспомогательная плоскость, содержащая ось патрубка и ось  $x$ ;

все единичные векторы каждого патрубка  $p_k$  принадлежат этой вспомогательной плоскости;

для каждого бокового патрубка в плоскости осей патрубка и канала вводится местная система координат  $(x'_k, y'_k)$  с началом координат в точке отрыва потока (т. А рис. 2.1 для схемы 1-2). Затем, в этой плоскости и точке пересечения названных осей, строится единичный вектор  $\vec{r}_k$ , ортогональный оси  $x$ . Далее, все векторные характеристики жидкости в патрубках проектируются на направления  $x$  и  $\vec{r}_k$ , а затем на оси  $y, z$  основной системы координат.

На Рис. 2.1 и 2.2 вспомогательная плоскость совмещена с плоскостью рисунка. Тогда очевидны следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
1) \quad \mathbf{n}_k \uparrow\uparrow x'_k, \quad \mathbf{n}_k &= n_{kx} \vec{i} + n_{kr} \vec{r}_k = n_{kx} \vec{i} + n_{kr} (r_{ky} \vec{j} + r_{kz} \vec{k}), & (2.9) \\
n_{kx} &= \cos(\lambda + \chi_k), \quad n_{kr} = \sin(\lambda + \chi_k); \\
2) \quad \mathbf{n}_{kA} \perp x'_k, \quad \mathbf{n}_{kA} \uparrow\uparrow y'_k, \quad \mathbf{n}_{kA} &= \vec{j}'_k, \quad \mathbf{n}_{kA} = n_{Ax} \vec{i} + n_{Ar} (r_{ky} \vec{j} + r_{kz} \vec{k}), \\
n_{Ax} &= \cos(\lambda + \chi_k + \pi/2) = -\sin(\lambda + \chi_k) = -n_{kr}, \\
n_{Ar} &= \sin(\lambda + \chi_k + \pi/2) = \cos(\lambda + \chi_k) = n_{kx}; \\
3) \quad \mathbf{n}_k^- \perp (S_k^-), \quad \mathbf{n}_k^- &= n_{kx}^- \vec{i} + n_{kr}^- (r_{ky} \vec{j} + r_{kz} \vec{k}), \quad n_{kx}^- = \cos \lambda, \quad n_{kr}^- = \sin \lambda.
\end{aligned}$$

Как и ранее (**Глава 1**), неизвестные давления  $p_\sigma$  и  $p_{\sigma k}$  заменяются весовыми коэффициентами  $\varphi_p$  и  $\varphi_{pk}$

$$p_\sigma = \varphi_p p^+ + (1 - \varphi_p) p^-, \quad (2.10)$$

$$p_{\sigma k} = \varphi_{pk} p_k + (1 - \varphi_{pk}) p_\sigma = \varphi_{pk} p_k + \varphi_p (1 - \varphi_{pk}) p^+ + (1 - \varphi_p)(1 - \varphi_{pk}) p^-.$$

В итоге уравнение движения (2.3) с учетом обозначений (2.2) и (2.10) в проекциях на оси координат приводится к виду:

на ось  $x$  -

$$\begin{aligned}
& (\alpha S \rho v^2)^+ + p^+ S^+ - (\alpha S \rho v^2)^- - p^- S^- - [p^+ \varphi_p + p^- (1 - \varphi_p)] \cdot S^+ \cdot \Delta_S - \\
& - \int_{\sigma_T + S^- + S^+} \tau_{nx}^* ds + \sum_{k=1}^m \{ (\alpha \varepsilon S \rho v^2)_k n_{kx} + \{ \{ p_k (\varepsilon S)_k n_{kx} + p_{\delta k} (1 - \varepsilon_k) S_k n_{kx} + \\
& + p_{\delta k} S_k q_{4k} n_{Ax} + [p_k \varphi_{pk} + p^+ \varphi_p (1 - \varphi_{pk}) + p^- (1 - \varphi_p) (1 - \varphi_{pk})] S_k q_{3k} (-n_{Ax}) \} \} - \\
& - [p^+ \varphi_p + p^- (1 - \varphi_p)] S_k^- n_{kx}^- - \int_{\sigma_{T_k} + S_k} \tau_{nx}^* ds \} = 0; \quad (2.11)
\end{aligned}$$

на направление  $\vec{r}_k$  -

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^m \{ (\alpha \varepsilon S \rho v^2)_k n_{kr} + p_k (\varepsilon S)_k n_{kr} + p_{\delta k} (1 - \varepsilon_k) S_k n_{kr} + p_{\delta k} S_k q_{4k} n_{Ar} + \\
& + p_k \varphi_{pk} S_k q_{3k} (-n_{Ar}) - p_\sigma [S_k^- n_{kr}^- + (1 - \varphi_{pk}) S_k q_{3k} n_{Ar}] + (\varepsilon S \rho v^2)_k \Delta_{\tau k} \} = 0 \quad (2.12)
\end{aligned}$$

В уравнениях (2.11 и 2.12) здесь и ниже будут использоваться обозначения:

$$\Delta_{\tau} = \left( - \int_{\sigma_r + S^- + S^+} \tau_{nx}^* ds - \sum_{k=1}^m \int_{\sigma_{T_k} + S_k} \tau_{nx}^* ds \right) / (S \rho v^2)^-, \quad \Delta_S = 1 - S^- / S^+,$$

$$\Delta_{\tau k} = - \int_{\sigma_{T_k} + S_k} \tau_{nr}^* ds / (\varepsilon S \rho v^2)_k;$$

В совокупности уравнений (2.12) можно пренебречь величиной

$$\sum_{k=1}^m [\Delta_{\tau k} = - \int_{\sigma_{T_k} + S_k} \tau_{nr}^* ds / (\varepsilon S \rho v^2)_k] \approx 0$$

- последнее соотношение, в задачах истечения, выполняется точно при осевой, относительно оси  $x$ , симметрии; в остальных случаях – приближенно (в сравнении с продольными силами трения). Дополнительным аргументом в пользу последнего допущения является относительно малая роль сил трения в ускоряющихся потоках (Глава 1). Это заключение, тем не менее, не распространяется на течение в каждой отдельно взятой трубке: в разных схемах истечения этот вопрос решается различным образом.

Еще одно полезное замечание в отношении уравнения (2.12): проектирование уравнения (2.12) на поперечные координатные направления связаны с умножением каждого  $k$  – го уравнения на свой множитель (см. (2.9)), что лишено смысла для последующего использования этого уравнения.

И, наконец, все геометрические характеристики каждого патрубка (размеры, углы) рассматриваются как независимые аргументы задачи, вследствие чего уравнение (2.12) распадается на  $m$  уравнений, связанных между собой и с уравнением (2.11) через среднее давление  $p_{\sigma}$  на боковой поверхности канала.

$$(\alpha \varepsilon S \rho v^2)_k \left( 1 + \frac{\Delta_{\tau k}}{n_{kr}} \right) S_k n_{kr} + (p_k - p_{\delta k}) S_k n_{kr} \left[ \varepsilon_k - \frac{\varphi_{pk} q_{3k} n_{kx}}{n_{kr}} \right] + \quad (2.13)$$

$$+ p_{\delta k} S_k n_{kr} \left[ 1 + (q_{4k} - \varphi_{pk} q_{3k}) n_{kx} / n_{kr} \right] - p_{\sigma} [S_k^- n_{kr}^- + (1 - \varphi_{pk}) S_k q_{3k} n_{kx}] = 0;$$

Коэффициенты при давлениях  $p_{\sigma}$  и  $p_{\delta k}$  одинаковы (см. Приложение 2.10) и, вводя обозначения

$$k_{1k} = \varepsilon_k - \varphi_{pk} q_{3k} n_{kx} / n_{kr} = \varepsilon_k - \varphi_{pk} q_{3k} \cdot \text{ctg}(\lambda + \chi_k), \quad (n_{kr} \neq 0, ! ) \quad (2.14)$$

$$k_{2k} = 1 + q_{4k} n_{kx} / n_{kr} - \varphi_{pk} q_{3k} n_{kx} / n_{kr} = 1 + (q_{4k} - \varphi_{pk} q_{3k}) \cdot \text{ctg}(\lambda + \chi_k),$$

уравнение (2.12) сводится к соотношениям:

$$(p_k - p_{\delta k}) S_k \cdot k_{1k} + (\alpha \varepsilon S \rho v^2)_k (1 + \Delta_{\tau k} / n_{kr}) = (p_\sigma - p_{\delta k}) S_k \cdot k_{2k}, \quad (2.15)$$

где  $k \in [1, m]$ .

Далее, из уравнения (2.11) исключается давление  $p_k$  с помощью (2.15)

$$\begin{aligned} p_k &= p_{\delta k} \left(1 - \frac{k_{2k}}{k_{1k}}\right) - (\alpha \varepsilon \rho v^2)_k \cdot \frac{(1 + \Delta_{\tau k} / n_{kr})}{k_{1k}} + p^+ \varphi_p \frac{k_{2k}}{k_{1k}} + p^- (1 - \varphi_p) \frac{k_{2k}}{k_{1k}}. \\ (\alpha S \rho v^2)^+ + p^+ \{S^+ - S^+ \varphi_p \Delta_S + \varphi_p \sum_{k=1}^m (S_k n_{kr}) [(1 - \varphi_{pk}) q_{3k} - \frac{S_k^- n_{kx}^-}{S_k n_{kr}}] + \\ + S_k \frac{k_{2k}}{k_{1k}} [\varepsilon_k n_{kx} + \varphi_{pk} q_{3k} n_{kr}]\} - (\alpha S \rho v^2)^- - p^- \{S^+ - S^+ \varphi_p \Delta_S - \\ - (1 - \varphi_p) \sum_{k=1}^m (S_k n_{kr}) [(1 - \varphi_{pk}) q_{3k} - \frac{S_k^- n_{kx}^-}{S_k n_{kr}}] + S_k \frac{k_{2k}}{k_{1k}} [\varepsilon_k n_{kx} + \varphi_{pk} q_{3k} n_{kr}]\} + \\ + \sum_{k=1}^m \{(\alpha \varepsilon \rho v^2)_k S_k n_{kx} - (\alpha \varepsilon \rho v^2)_k S_k (1 + \Delta_{\tau k} / n_{kr}) \cdot \frac{[\varepsilon_k n_{kx} + \varphi_{pk} q_{3k} n_{kr}]}{k_{1k}}\} + \\ + \sum_{k=1}^m (p_{\delta k} S_k) \left\{ \left(1 - \frac{k_{2k}}{k_{1k}}\right) [\varepsilon_k n_{kx} + \varphi_{pk} q_{3k} n_{kr}] + [(1 - \varepsilon_k) n_{kx} - q_{4k} n_{kr}] \right\} + \\ + (S \rho v^2)^- \Delta_\tau = 0. \end{aligned}$$

Следующие этапы преобразования уравнения (2.11) включают в себя:

- общие участки боковых поверхностей канала, на которых действуют давления  $p^+$  и  $p^-$  обозначаются через  $\sigma^+ = \sigma^-$ ;
- «избыточные» участки действия давления  $p^-$  «объединяется» с участками давлением  $p_{\delta k}$  с общим множителем  $k_{3k}$ ;
- «собираются» множители при величине  $(\alpha \varepsilon \rho v^2)_k$  и обозначаются  $k_{4k}$ , (величина  $\Delta_{\tau k} = 0$  - см. ниже).

В результате, проекция уравнения движения на ось  $x$  для **схемы истечения 1-2** принимает вид:

$$\begin{aligned}
& (\alpha S \rho v^2)^+ + p^+ \sigma^+ - (\alpha S \rho v^2)^- - p^- \sigma^- + \sum_{k=1}^m (p^- - p_{\delta k}) (S_k k_{3k}) + \\
& + \sum_{k=1}^m (\alpha \varepsilon \rho v^2)_k S_k k_{4k} + (S \rho v^2)^- \cdot \Delta_\tau = 0.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Здесь:

$$\sigma^+ = \sigma^- = S^+ \{1 - \varphi_p [\Delta_S - (1 - \Delta_S) \sum \bar{S}_k k_{3k}]\}, \quad \bar{S}_k = S_k / S^-; \tag{2.17}$$

$$k_{3k} = \left[ \frac{\varepsilon_k q_{4k}}{\sin(\lambda + \chi_k)} + \varphi_{pk} \frac{(1 - \varepsilon_k) q_{3k}}{\sin(\lambda + \chi_k)} \right] / k_{1k}, \quad k_{4k} = - \frac{\varphi_{pk} q_{3k}}{k_{1k} \sin(\lambda + \chi_k)};$$

(необходимые преобразования и доказательства см. Приложение **2.10**).

Для ряда слагаемых уравнения (2.16) вводятся дополнительные обозначения:

$$\Delta_G^* = \sum_{k=1}^m \frac{(\alpha \varepsilon S \rho v^2)_k}{(S \rho v^2)^-} k_{4k} + \frac{p^-}{(\rho v^2)^-} \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{p_{\delta k}}{p^-}\right) \bar{S}_k k_{3k}, \quad \tilde{\Delta}_G^* = \Delta_G^* + \Delta_\tau. \tag{2.18}$$

В итоге, уравнение движения в проекции на ось канала для **схемы истечения 1-2** принимает вид:

$$(\alpha S \rho v^2)^+ + p^+ \sigma^+ - (\alpha S \rho v^2)^- - p^- \sigma^- + (S \rho v^2)^- \cdot \tilde{\Delta}_G^* = 0. \tag{2.19}$$

#### Схема истечения 3-4.

Уравнения движения (2.15) и (2.19) внешне неизменны, а коэффициенты  $k_{ik}$  принимают вид:

$$1) \quad k_{1k} = \varepsilon_k + \varphi_{pk} q_{4k} n_{kx} / n_{kr} = \varepsilon_k + \varphi_{pk} q_{4k} \cdot \text{ctg}(\lambda + \chi_k), \tag{2.20}$$

$$2) \quad k_{2k} = 1 - (q_{3k} - \varphi_{pk} q_{4k}) n_{kx} / n_{kr} = 1 - (q_{3k} - \varphi_{pk} q_{4k}) \cdot \text{ctg}(\lambda + \chi_k).$$

$$\sigma^+ = \sigma^- = S^+ \{1 - \varphi_p [\Delta_S + (1 - \Delta_S) \sum \bar{S}_k k_{3k}]\}, \quad \bar{S}_k = S_k / S^-; \tag{2.21}$$

$$k_{3k} = \left[ \frac{\varepsilon_k q_{3k}}{\sin(\lambda + \chi_k)} + \varphi_{pk} \frac{(1 - \varepsilon_k) q_{4k}}{\sin(\lambda + \chi_k)} \right] / k_{1k}, \quad k_{4k} = \frac{\varphi_{pk} q_{4k}}{k_{1k} \sin(\lambda + \chi_k)}.$$

$$\Delta_G^* = \sum_{k=1}^m \frac{(\alpha \varepsilon S_k \rho v^2)_k k_{4k}}{(S \rho v^2)^-} - \frac{p^-}{\rho^- (v^2)^-} \sum_{k=1}^m (1 - p_{\delta k} / p^-) (\bar{S}_k k_{3k}); \quad (2.22)$$

$$\tilde{\Delta}_G^* = \Delta_G^* + \Delta_\tau.$$

### Схема истечения 5.

Исходным является уравнение движения (2.7), в котором отсутствует величина давления  $p_{\sigma k}$ , в результате:

$$k_{1k} = \varepsilon_k, \quad k_{2k} = 1 - \operatorname{tg} \chi_k \cdot \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k). \quad (2.23)$$

$$\sigma^+ = \sigma^- = S^+ \{1 - \varphi_p [\Delta_S - (1 - \Delta_S) \sum \bar{S}_k k_{3k}]\}, \quad \bar{S}_k = S_k / S^-; \quad (2.24)$$

$$k_{3k} = -\frac{\operatorname{tg} \chi_k}{\sin(\lambda + \chi_k)}, \quad k_{4k} = \frac{\Delta_{\tau k}}{\sin(\lambda + \chi_k)};$$

$$\Delta_G^* = \sum_{k=1}^m \frac{(\alpha \varepsilon S \rho v^2)_k k_{4k}}{(S \rho v^2)^-} + \frac{p^-}{(\rho v^2)^-} \sum_{k=1}^m (1 - \frac{p_{\delta k}}{p^-}) \bar{S}_k k_{3k}, \quad \tilde{\Delta}_G^* = \Delta_G^* + \Delta_\tau.$$

Уравнения (2.15), (2.19) для рассматриваемой схемы истечения сохраняют свой вид.

### Схема истечения 6, $\varepsilon_k = 1$ .

Область действия давления  $p_{\delta k}$  отсутствует, уравнение движения на поперечное направление приводится к виду:

$$(\alpha S \rho v^2)_k (1 + \Delta_{\tau k} / n_{kr}) = p_\sigma S_k \cdot k_{2k} - p_k S_k \cdot k_{1k}, \quad (2.25)$$

$$\text{где } k_{1k} = 1 - \varphi_{pk} \operatorname{tg} \chi_k \cdot \frac{n_{kx}}{n_{kr}}, \quad k_{2k} = \frac{S_k^- \cdot n_{kr}^-}{S_k \cdot n_{kr}} + (1 - \varphi_{pk}) \cdot \operatorname{tg} \chi_k \cdot \frac{n_{kx}}{n_{kr}};$$

$$k_{2k} = k_{1k} = 1 - \varphi_{pk} \operatorname{tg} \chi_k \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k) \quad (\text{см. Приложение 2.10}).$$

Уравнение на продольное направление сохраняет вид (2.19), в нем:

$$\sigma^+ = \sigma^- = S^+ \{1 - \varphi_p [\Delta_S + (1 - \Delta_S) \sum \bar{S}_k k_{3k}]\}, \quad \bar{S}_k = S_k / S^-; \quad (2.26)$$

$$k_{3k} = 1 + \varphi_{pk} \operatorname{tg} \chi_k \cdot \operatorname{tg}(\lambda + \chi_k), \quad k_{4k} = n_{kx} = \cos(\lambda + \chi_k);$$

$$\Delta_G^* = \sum_{k=1}^m \frac{(\alpha \varepsilon S \rho v^2)_k}{(S \rho v^2)^-} k_{4k} - \frac{p^-}{\rho^- (v^2)^-} \sum_{k=1}^m (1 - p_k / p^-) (\bar{S}_k k_{3k}); \quad \tilde{\Delta}_G^* = \Delta_G^* + \Delta_\tau.$$

### 2.2.3. Уравнение движения при подводе массы

В задачах подвода массы в канал распространённым [90] и естественным допущением является предположение о равенстве давления в патрубке давлению в канале в месте сочленения патрубка с каналом, т.е.

$$p_\sigma = p_{\sigma_k} = p_{\delta_k} = p_k. \quad (2.27)$$

В этом случае на всей внутренней поверхности канала, включая  $S_k^-$ , действует среднее давление  $p_\sigma$

$$\begin{aligned} & (\alpha S \rho v v + S p n)^+ - (\alpha S \rho v v - S p n)^- + p_\sigma \cdot \int_{\sigma} n ds - \int_{\sigma_T + S^- + S^+} \tau_n^* ds + \\ & + \sum_{k=1}^m \{ (\rho v_n)_k \int_{S_k} v ds - \int_{\sigma_{Tk} + S_k} \tau_n^* ds \} = 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

а вектор скорости в патрубках с подводом массы направлен внутрь канала  $\int_{S_k} v ds = -S_k \alpha_k v_k n_k$  и  $v_{nk} = -v_k$ .

Проекция уравнения движения на продольное и поперечные направления:

$$\begin{cases} (\alpha S \rho v^2)^+ + p^+ \sigma^+ - (\alpha S \rho v^2)^- - p^- \sigma^- + (S \rho v^2)^- \cdot \left[ \sum_{k=1}^m \frac{(\alpha S \rho v^2)_k}{(S \rho v^2)^-} n_{kx} + \Delta_\tau \right] = 0, \\ (\alpha S \rho v^2)_k n_{kr} + (S \rho v^2)_k \Delta_{\tau k} = 0. \quad k \in [1, m] \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\text{Здесь: } \sigma^+ = \sigma^- = S^+ (1 - \varphi_p \Delta_S), \quad \tilde{\Delta}_\tau^* = \Delta_\tau + \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{S_k} \frac{\rho^-}{\rho_k} \Delta_{Gk}^2 k_{4k} = \Delta_\tau + \Delta_G^*,$$

$$k_{3k} = 0, \quad k_{4k} = n_{kx} = \cos(\lambda + \chi_k), \quad (2.30)$$

Нетрудно заметить, что уравнение движения в продольном направлении внешне не отличается от аналогичных при отводе массы (2.19), но со своим, специфичным, наполнением; это обстоятельство позволяет, в ряде случаев,

не выделять задачи подвода и отвода массы в отдельные группы. Иной вывод следует из уравнений движения в поперечном направлении (2.29):

$$\Delta_{\tau k} = \frac{(\alpha S \rho v^2)_k}{(S \rho v^2)_k} n_{kr} = -\alpha_k \cdot \sin(\lambda + \chi_k); \quad (2.31)$$

однозначная связь сил трения с ориентацией подводимого количества движения в канал ограничивает произвол в постановке задачи, т. к. пренебрежение силами трения  $\Delta_{\tau k}$  вынуждает отказаться либо от учета ориентации подводимого количества движения, либо от самого количества движения, что недопустимо! К слову, подобных ограничений нет в задачах истечения из канала через боковые патрубки.

В связи с соотношениями (2.30) и (2.31) существенно еще одно **замечание**. Величину  $\tilde{\Delta}_G^* = \Delta_G^* + \Delta_\tau$  можно представить в виде

$$\tilde{\Delta}_\tau^* = \Delta_\tau + \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{\bar{S}_k} \frac{\rho^-}{\rho_k} \Delta_{Gk}^2 n_{kx} = \Delta_\tau - \sum_{k=1}^m J_{kx} / (S \rho v H)^-.$$

где  $J_{kx} = -(\alpha S \rho v^2 n_x)_k$  – проекция количества движения массы жидкости, впрыскиваемой в канал через  $k$ -ое отверстие на направление потока в канале. Тогда, уравнения (2.29) идентичны в сопоставимых условиях ( $\Delta_G > 0$ ,  $\Delta_s \ll 1$ ) с уравнениями [90], а величина  $\tilde{\Delta}_\tau^*$  имеет смысл эффективного коэффициента трения, введенного в [54].

И, наконец, в силу  $p_\sigma = p_{\sigma k}$ , в задачах с подводом массы не существует проблемы определения величины  $\Phi_{pk}$ .

#### 2.2.4. Вывод уравнения энергии

Законы сохранения полной энергии в задачах подвода и отвода различны по содержанию и требуют отдельного описания. Для выделенного объема жидкости (Рис. 2.1) уравнение энергии имеет вид:

$$(S \rho v)^+ H^+ - (S \rho v)^- H^- + \int_{\sigma_T} (q_n^* - \tau_n^* \cdot \mathbf{v}) ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \left\{ (\varepsilon S \rho v_n)_k H_k + \int_{\sigma_{Tk}} (q_n^* - \tau_n^* \cdot v) ds \right\} = 0, \quad \sigma_T + \sum \sigma_{Tk} = S,$$

где  $\sigma_T$  и  $\sigma_{Tk}$  – поверхности трубок тока транзитного потока и потоков, пересекающих сечения  $S_k$  в пределах объема  $V$ , включая площади сечений названных трубок тока границами объема  $V$ ;  $H = v^2 / 2 + u + p / \rho$ .

Для истечения, наряду с общим законом энергии, рассмотрим уравнения энергии для жидкости в трубках тока  $\sigma_{Tk}$ :

$$-(S'_k \rho v)^- H^- + (\varepsilon S \rho v)_k H_k + \int_{\sigma_{Tk}} (q_n^* - \tau_n^* \cdot v) ds = 0.$$

Комбинируя его с уравнением энергии для всего потока имеем

$$\frac{(S \rho v)^+}{(S \rho v)^-} H^+ = H^- - \frac{\int_{\sigma_T} (q_n^* - \tau_n^* \cdot v) ds}{(S \rho v)^-} + \sum_{k=1}^m \Delta_{Gk} H^-,$$

где  $\Delta_{Gk} = -\frac{(\varepsilon S \rho v_n)_k}{(S \rho v)^-}$ ,  $(S'_k \rho v)^- = (\varepsilon S \rho v_n)_k$  – уравнение неразрывности для трубки тока  $\sigma_{Tk}$  при истечении.

В случае подвода массы теплосодержание  $H_k$  задано и целесообразно пользоваться общим уравнением энергии

$$\frac{(S \rho v)^+}{(S \rho v)^-} H^+ = H^- - \frac{\int_{\sigma_T} (q_n^* - \tau_n^* \cdot v) ds}{(S \rho v)^-} + \sum_{k=1}^m \Delta_{Gk} \left( \frac{H_k}{H^-} + \frac{\int_{\sigma_{Tk}} (q_n^* - \tau_n^* \cdot v) ds}{(\varepsilon S \rho v)_k} \right).$$

Уравнения энергии для истечения и подвода массы могут быть объединены в одной записи:

$$\frac{(S \rho v)^+}{(S \rho v)^-} H^+ = H^- + \Delta_H (a^{-2}), \quad (2.32)$$

$$\text{где } \Delta_H = \Delta_Q + \sum_{k=1}^m \Delta_{Gk} \left( A_{Hk} \cdot \frac{H^-}{(a^-)^2} - \theta_{Hk} \Delta_{Qk} \right),$$

$$\Delta_Q = -\frac{\int (q_n^* - \tau_n^* \cdot v) ds}{(S\rho v)^- \cdot (a^-)^2}; \Delta_{Qk} = -\frac{\int (q_n^* - \tau_n^* \cdot v) ds}{(\varepsilon S\rho v)_k \cdot (a^-)^2},$$

$$A_{Hk} = 1, \quad \theta_{Hk} = 0 \text{ – при истечении,}$$

$$A_{Hk} = H_k / H^-, \quad \theta_{Hk} = 1 \text{ – при подводе массы.}$$

### 2.2.5. Законы сохранения

Уравнения движения и энергии, полученные выше, дополненные законом сохранения массы и уравнениями состояния приводят к системе уравнений, полная сводка которых приведена ниже

$$(S\rho v)^+ = (1 + \Delta_G)(S\rho v)^-, \quad (1 + \Delta_G)H^+ = H^- + \Delta_H (a^-)^2, \quad (2.33)$$

$$(\alpha S\rho v^2)^+ + p^+ \sigma^+ = (\alpha S\rho v^2)^- + p^- \sigma^+ - (S\rho v^2)^- \cdot \tilde{\Delta}_G^*,$$

$$p = \rho RT, \quad u = p / (\gamma - 1) \cdot \rho.$$

$$1) (p_k - p_{\delta k})k_{1k} + (\varepsilon \rho v_n^2)_k \left( \alpha_k + \frac{\Delta_{\tau k}}{n_{kr}} \right) = (p_\sigma - p_{\delta k})k_{2k}, \quad k = \overline{1, m} \quad (2.34)$$

- для схем истечения 1-5;

$$2) (\alpha \rho v^2)_k (1 + \Delta_{\tau k} / n_{kr}) = (p_\sigma - p_k) \cdot k_{2k}, \quad k = \overline{1, m}$$

- для схем истечения б.

Здесь:

$$\Delta_G = \sum_{k=1}^m \Delta_{Gk}, \quad \Delta_{Gk} = -G_k / G^-, \quad G_k = (\varepsilon S\rho v_n)_k, \quad G^- = (S\rho v)^-; \quad (2.35)$$

$$\Delta_H = \Delta_Q + \sum_{k=1}^m \Delta_{Gk} (A_{Hk} H^- / (a^-)^2 - \theta_{Hk} \Delta_{Qk}); \quad A_{Hk} = H_k / H^-, \quad \theta_{Hk} = 1 -$$

при подводе массы в канал,  $A_{Hk} = 1$ ,  $\theta_{Hk} = 0$  – при истечении из канала;

содержание остальных обозначений специфично для каждой схемы истечения (см. п. 2.2.2) и (2.2.3) – для подвода массы в канал.

Уравнения (2.33) описывают реакцию газа в канале на локальные конечные по величине воздействия: геометрические  $\Delta_S, \chi_k$ , расходные  $\Delta_{Gk}$ , тепловые  $\Delta_Q, \Delta_{Qk}$  и сил трения  $\Delta_\tau, \Delta_{\tau k}$ . При заданных воздействиях в задачах истечения эти уравнения незамкнуты за счет  $m + 1$  неизвестных давлений  $p_\sigma$  и  $p_{\sigma k}$  (или  $\varphi_p$  и  $\varphi_{pk}$ ). Для величин:  $\varepsilon_k, \bar{b}_k$  - ниже (п. 2.2???) будет получена связь между собой и величиной  $\Delta_{Gk}$ .

Роль уравнений (2.34) сводится к условиям для определения расходных воздействий  $\Delta_{Gk}$ , если они не заданы.

В задачах подвода массы при заданных воздействиях число неизвестных в уравнениях (2.33) сокращается до одного  $p_\sigma$ , причем на часть воздействий накладываются связи (2.31) и следствия, вытекающие из них (см. замечание в п. 2.23).

## 2.2.6. Связи гидродинамических параметров состояния

### до и после воздействий

Параметры состояния газа в сечении  $S^-$  и давление  $p_{\delta_k}$  в задачах истечения считаются известными (в задачах с подводом массы  $p_{\delta_k} = p_\sigma$  - см. (2.27)), а в сечении  $S^+$  - искомыми. Полагая известными все воздействия, связь между параметрами в сечениях  $S^+$  и  $S^-$ , можно установить на основе уравнений (2.33) по схеме, описанной в п. 1.1.2.

$$\begin{aligned}
 1. \frac{v^+}{v^-} &= \frac{K \pm vN}{(1 + \Delta_G)(n+1)M^{-2}}, & 2. \frac{\rho^+}{\rho^-} &= \frac{(1 - \Delta_S)(1 + \Delta_G)^2(n+1)M^{-2}}{K \pm vN}, \\
 3. \frac{p^+}{p^-} &= \frac{K \mp vnN}{I \cdot (n+1)}, & 4. \frac{T^+}{T^-} &= \frac{(K \mp vnN)(K \pm vN)}{I(1 - \Delta_S)(1 + \Delta_G)^2(n+1)^2M^{-2}}, & (2.36) \\
 5. M^{+2} &= (1 - \Delta_S)I \frac{K \pm vN}{K \mp vnN}, & 6. \frac{p_\sigma}{p^-} &= 1 + \varphi_p \left( \frac{p^+}{p^-} - 1 \right), \\
 7. \frac{p_{\sigma k}}{p^-} &= \varphi_{pk} \frac{p_k}{p^-} + (1 - \varphi_{pk}) \left[ 1 + \varphi_p \left( \frac{p^+}{p^-} - 1 \right) \right].
 \end{aligned}$$

В приведенных ниже - (2.37) пояснениях смысла и содержания величин в формулах (2.36), величины  $\sigma^+$ ,  $\tilde{\Delta}_G^*$  отвечают схеме истечения **1-2**, как наиболее вероятной. Для остальных схем истечения и при подводе массы следует воспользоваться результатами п.п. (2.2.2) и (2.2.3).

$$M = v/a, \quad M^{-2} = (M^-)^2 = (M^2)^-, \quad a^2 = \gamma p/\rho, \quad \alpha^+ = \beta^+ = 1, \quad (2.37)$$

$$n = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\sigma^+}{S^+}\right)^{-1} = \frac{\gamma}{1 + (\gamma - 1)\varphi_p(\Delta_S - k_5)} = 1 + (\gamma - 1)(1 - \Delta_S) \cdot I,$$

$$I = \frac{n \sigma^+}{\gamma S^-} = \frac{1 - \varphi_p(\Delta_S - k_5)}{(1 - \Delta_S)[1 + (\gamma - 1)\varphi_p(\Delta_S - k_5)]} = \frac{(n - 1)}{(\gamma - 1)(1 - \Delta_S)},$$

$$k_5 = (1 - \Delta_S) \sum \bar{S}_k k_{3k}, \quad k_{3k}, k_{4k} - \text{см. (2.17)};$$

$$K = I + nM^{-2}(\alpha^- - \tilde{\Delta}_G^*), \quad v = \text{sign}(M^- - 1), \quad \tilde{\Delta}_G^* = \Delta_G^* + \Delta_\tau,$$

$$\Delta_G^* = \sum_{k=1}^m \frac{(\alpha \varepsilon S \rho v^2)_k}{(S \rho v^2)^-} k_{4k} + \frac{1}{\gamma(M^2)^-} \cdot \sum_{k=1}^m (1 - p_{\delta k} / p^-)(\bar{S}_k k_{3k}),$$

$$N = \left\{ K^2 - 2 \frac{n^2 - 1}{\gamma - 1} M^{-2} \left( C_1 + C_2 \frac{\gamma - 1}{2} M^{-2} \right) \right\}^{1/2},$$

$$C_1 = (1 + \Delta_G) \left[ 1 + \sum_{k=1}^m A_{Hk} \Delta_{Gk} + (\gamma - 1) \left( \Delta_Q - \sum_{k=1}^m \theta_{Hk} \Delta_{Gk} \Delta_{Qk} \right) \right],$$

$$C_2 = (1 + \Delta_G) \left( \beta^- + \sum_{k=1}^m A_{Hk} \Delta_{Gk} \right), \quad \Delta_G = \sum_{k=1}^m \Delta_{Gk}.$$

В соотношениях (2.36), помимо упомянутых выше воздействий, при выборе нижнего знака, предусмотрена возможность появления прямого скачка уплотнения.

Вводя для части воздействий обозначения

$$X = \{x_i\} = \{M^-, \Delta_{Gk}, \Delta_Q, \Delta_{Qk}, \Delta_\tau, \Delta_{\tau k}\}, \quad (2.38)$$

общую структуру решения для произвольного гидродинамического параметра  $\psi$  можно представить в виде

$$\psi^+ / \psi^- = f(X, \Delta_S, \chi_k, \varphi_p(X, \Delta_S, \chi_k), \varphi_{pk}(X, \Delta_S, \chi_k)). \quad (2.39)$$

Соотношения (2.36) рассматриваются как промежуточный этап решения, так как содержат неизвестные  $\varphi_p$  и  $\varphi_{pk}$ , предполагаемые функциями всех возможных действий.

В задачах истечения неопределенными величинами являются также коэффициенты поджатия струи в патрубках  $\varepsilon_k$ , а в вариантах истечения 1 и 2 (Табл. 2.1) – координаты  $x'_{D_k}$  (или -  $\bar{b}_k$ ) точек  $D_k$  (рис. 2.2) минимального сечения струи. Однако, при заданных воздействиях величины  $\varepsilon_k$  определены заданием  $\Delta_{Gk}$ , а координаты  $x'_{D_k}$  будут связаны с  $\varepsilon_k$  (см. ниже п. 2.5). Таким образом, названные величины не увеличивают числа ”лишних” неизвестных в уравнениях (2.33).

### 2.3. Второе начало термодинамики и дополнительные условия

Как и в Главе 1, первое и второе начала термодинамики, записанные для выделенного объема жидкости (Рис. 2.1)

$$\sigma_p = p_0^+ / p_0^- = \left[ \frac{1}{1 + \Delta_G} (1 + (\gamma - 1) \cdot \Delta_H \cdot \tau(M^-)) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \exp\left(\frac{s^- - s^+}{R}\right),$$

$$s^+ - s^- = \frac{1}{1 + \Delta_G} \left\{ \frac{1}{G^-} \left[ \int_s \frac{q_n^*}{T} dS + \int_V \left( \frac{D}{T} + \tilde{n} \left( \frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \frac{\nabla \cdot (P \cdot \vec{v} - Q)}{T} \right) dV \right] + \sum_{k=1}^m (s_k / s^- - 1) \Delta_{Gk} \right\}$$

позволяют сделать вывод качественного характера о независимости термодинамической функции – коэффициента восстановления давления  $\sigma_p$  – от геометрических воздействий (в данном случае  $\Delta_S$  и  $\chi_k$ ), рассматриваемых в качестве возможных аргументов этой функции. Такая зависимость может проявляться лишь неявно через зависимость  $\sigma_p$  от диссипативных и тепловых воздействий. Все эти вопросы достаточно подробно обсуждались в Главе 1 (п. 1.2.1); здесь лишь расширился список воздействий, изменяющих запас механической энергии потока – (2.38). В итоге вновь, подобно (1.19), можно предполагать существование функции

$$\sigma_p^{(1)} = f_1(\mathbf{X}), \quad (2.40)$$

вид которой, в рамках излагаемого подхода, неизвестен.

С другой стороны, три закона сохранения гидродинамики в форме (2.36), тоже позволяют определить отношение давлений торможения на границах зоны перестройки потока в канале

$$\sigma_p^{(2)} = \pi(M^-) \frac{K \mp \nu n N}{I(n+1)} \left[ 1 + \frac{n-1}{2} \frac{K \pm \nu N}{K \mp \nu n N} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (2.41)$$

Соотношение (2.41) отличается от аналогичного (1.20) лишь большим числом воздействий. Вследствие (2.39), описывающих общую структуру связей (2.36), имеем для  $\sigma_p^{(2)}$

$$\sigma_p^{(2)} = f_2(\mathbf{X}, \Delta_S, \chi_k, \varphi_p(\mathbf{X}, \Delta_S, \chi_k), \varphi_{pk}(\mathbf{X}, \Delta_S, \chi_k)). \quad (2.42)$$

Зависимость функции  $f_2$  от аргументов  $\mathbf{X}, \Delta_S, \chi_k$  и величин  $\varphi_p$  и  $\varphi_{pk}$  определена соотношением (2.41). Очевидно, также, что  $\sigma_p^{(1)}$  и  $\sigma_p^{(2)}$  определяют одну и ту же величину, поэтому

$$\sigma_p^{(1)} = \sigma_p^{(2)} \quad \text{или} \quad d\sigma_p^{(1)} - d\sigma_p^{(2)} = 0. \quad (2.43)$$

Рассуждения и выкладки, аналогичные изложенным в п. **1.2.2**, приводят теперь к системе дифференциальных квазилинейных уравнений 1-го порядка для определения искомых функций  $\varphi_p$  и  $\varphi_{pk}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_p} \frac{\partial \varphi_p}{\partial \Delta_S} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{pk}} \frac{\partial \varphi_{pk}}{\partial \Delta_S} &= - \frac{\partial f_2}{\partial \Delta_S} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_p} \frac{\partial \varphi_p}{\partial \chi_j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{pk}} \frac{\partial \varphi_{pk}}{\partial \chi_j} &= - \frac{\partial f_2}{\partial \chi_j} \quad j = \overline{1, m} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Соотношения (2.44), или исходное условие (2.43), являются аналитическим выражением условия о независимости термодинамической функции  $\sigma_p$  явно от геометрических воздействий как от независимых переменных и обобщают ранее полученные (в **Главе 1**) результаты на большее число воздействий.

Решения уравнений (2.44), или условий (2.43), относительно  $\Phi_p$  и  $\Phi_{pk}$  совместно с (2.36) описывают реакцию потока в канале на локальные конечные по величине воздействия  $X, \Delta_S, \chi_k$ , образуя при этом замкнутую систему уравнений.

Корректная постановка задачи по решению этой системы уравнений требует исследования типа дифференциальных уравнений (2.44), для чего, следуя [11], эти уравнения записываются в матричной форме. Для исследования ограничимся случаем одинаковых патрубков ( $\chi_k = idem = \chi, \Phi_{pk} = idem$ ):

$$A \frac{\partial u}{\partial \chi} + B \frac{\partial u}{\partial \Delta_S} = F,$$

где  $u = \{u_{1k}, u_2\}$ ,  $u_{1k} = \Phi_{pk}$ ,  $u_2 = \Phi_p$ ,

$$A_{11k} = \frac{\partial f_2}{\partial \Phi_{pk}}, \quad A_{12} = \frac{\partial f_2}{\partial \Phi_p}, \quad A_{21} = A_{22} = 0,$$

$$B_{11} = B_{12} = 0, \quad B_{21k} = \frac{\partial f_2}{\partial \Phi_{pk}}, \quad B_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial \Phi_p},$$

$$F_1 = -\frac{\partial f_2}{\partial \chi}, \quad F_2 = -\frac{\partial f_2}{\partial \Delta_S}, \quad A_{11k} = B_{21k}, \quad A_{12} = B_{22}.$$

Система дифференциальных уравнений дополняется выражениями для дифференциалов функций  $u$  вдоль некоторой произвольной линии в плоскости переменных  $(\chi, \Delta_S)$

$$d\chi E \frac{\partial u}{\partial \chi} + d\Delta_S E \frac{\partial u}{\partial \Delta_S} = du.$$

Расширенная матрица системы уравнений, состоящая из (2.44) и выражений для дифференциалов (где  $E$  – единичная матрица) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} mA_{11k} & A_{12} & 0 & 0 & F_1 \\ 0 & 0 & mB_{21k} & B_{22} & F_2 \\ md\chi & 0 & d\Delta_S & 0 & d\Phi_{pk} \\ 0 & md\chi & 0 & d\Delta_S & d\Phi_p \end{pmatrix}.$$

Определитель  $\Delta = 0$  вырожденной матрицы (первые четыре столбца расширенной матрицы) дает условие для определения характеристических направлений

$$md\chi \cdot d\Delta_S \cdot [A_{12} \cdot mB_{21_k} - mA_{11_k} \cdot B_{22}] = 0.$$

Вследствие равенства нулю выражения в скобках любые направления в плоскости переменных  $(\chi, \Delta_S)$  являются характеристическими, в том числе  $\chi = const$ ,  $\Delta_S = const$  и исследуемая система уравнений имеет вещественные характеристики. Аргументы в пользу выбора в качестве характеристических направлений семейства линий  $\chi = const$ ,  $\Delta_S = const$  появляются при рассмотрении соотношений на характеристиках и их анализе. Названные соотношения выводятся из условия равенства рангов расширенной и вырожденной матриц, для которой любой из определителей, составленный из ее произвольных четырех столбцов должен быть равен нулю. Один из вариантов рассмотрен выше. Оставшиеся четыре варианта, по своим следствиям, можно разбить на две группы, получающиеся при исключении первого или второго столбца и третьего или четвертого. Совместное рассмотрение этих случаев приводит к соотношениям:

$$\Delta_S = const : \quad m \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{pk}} d\varphi_{pk} + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_p} d\varphi_p = -\frac{\partial f_2}{\partial \chi} d\chi ,$$

$$\chi = const : \quad m \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{pk}} d\varphi_{pk} + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_p} d\varphi_p = -\frac{\partial f_2}{\partial \Delta_S} d\Delta_S .$$

Таким образом, исследование типа системы дифференциальных уравнений (2.44), выступающих в качестве дополнительных, замыкающих уравнения (2.36), выявило гипеболический характер этих уравнений независимо от скорости плтока в канале и, следовательно, необходимость задания начальных условий для их решения [43]. Ниже, для получения необходимого числа дополнительных уравнений используется первое из условий (2.43), снимающее проблему формулировки граничных условий и обеспечивающее получение частных интегралов (см. Глава 1).

## 2.4. О различиях в постановке задач отвода и подвода массы в канал

При выводе уравнения движения (п. 2.2.2 и п. 2.2.3) уже отмечались различия задач подвода и отвода массы для внутренних течений в каналах. Дополним их анализом с позиций второго начала термодинамики.

В задачах истечения перечень внешних воздействий на поток в канале состоит из списка величин (см. (2.38, 2.39))

$$\Delta_S, \chi_k^*), X, \quad X = \{M^-, \Delta_{Gk}, \Delta_Q, \Delta_{Qk}, \Delta_\tau, \Delta_{\tau k}\},$$

где все воздействия рассматриваются как независимые (см. п. 1.2.1.). Относительно диссипативных потерь отмечалась возможность использования экспериментальных данных по гидравлическим потерям для их определения (п. 1.3.3.). Однако это не накладывало каких-либо ограничений на свободу действий постановщика задачи, кроме очевидного – получить решение задачи, разумно сочетая располагаемые ресурсы и степень адекватности решения реальностям. В частности, можно пренебречь диссипативными эффектами ( $\Delta_\tau = \Delta_{\tau k} = 0$ ) и если течение адиабатическое ( $\Delta_Q = \Delta_{Qk} = 0$ ), то раздача потока из канала в боковые ответвления ( $\Delta_{Gk} < 0$ ) описывается в рамках изэнтропического течения ( $s^+ = s^-$  – см. начало п. 3.3.1.), но сама задача истечения потока из канала через  $m$  боковых патрубков прирастает, помимо неизвестной величины  $\varphi_p$ , необходимым числом дополнительных уравнений для неизвестных  $(\varphi_{pk}, \Delta_{Gk}, \varepsilon_k, \dots)$ , где  $k = \overline{1, m}$ .

Иная ситуация в задачах подвода массы в канал. Здесь прямым следствием уравнения движения является определение части диссипативных потерь –  $\Delta_{\tau k}$  через геометрические характеристики патрубков (см. (2.31)). При этом все количество движения вдуваемого газа, нормальное к оси потока, воспринимается силами трения и находит отражение в величине среднего давления  $p_\sigma$  (при одномерной трактовке течения) в зоне подвода массы. С другой стороны, величины  $\Delta_{\tau k}$  входят в список аргументов (2.38) функции  $\sigma_p$  (2.40).

---

\*) Ориентация бокового патрубка, вообще говоря, определяется двумя углами  $\chi_k$  и  $\lambda$ , но угол  $\lambda$  всюду выше и впредь рассматривается как фиксированный параметр.

Соответственно углы подвода массы, в силу однозначной связи с  $\Delta_{\tau k}$ , из перечня геометрических воздействий исключаются (вместе с соответствующими «неизвестными»  $\varphi_{pk}$ ) и течение в канале при этом является неизэнтропическим. Последнее обстоятельство не учитывалось в работе [98] при формулировке математической модели квазиодномерного течения в канале с подводом массы, где течение в канале принималось изэнтропическим.

## 2.5. Кинематика истечения жидкости из канала: течение с отрывом струи в боковом патрубке

При истечении из канала через патрубок идеальной жидкости одномерная трактовка течения, начиная с входного сечения бокового патрубка  $S_k^-$ , приводит к «нечувствительности» потока в канале к углу отвода массы [41] (при этом  $k_{1k} = k_{2k} = 1$ ,  $k_{3k} = 0$ ,  $\Delta_{\tau}^* = 0$ ). Отказ от этого допущения влечет за собой расширение границ рассматриваемого объема жидкости в боковых патрубках вплоть до сечений, где допущение об одномерности становится более обоснованным, например, в минимальном сечении струи в зоне отрыва (как на Рис. 2.1). При этом параметры потока в канале меняются с изменением угла отвода массы  $\chi_k$  за счет  $k_{4k}$  и  $k_{3k}$ . Платой за появление «чувствительности» потока является увеличение числа неизвестных в уравнениях гидродинамики (2.33) от одного до  $m + 1$  и требует определения, помимо  $\varphi_{pk}$ , величин  $b_k$  (2.2 и 2.4) (или  $x'_{D_k}$  – Рис. 2.1).

Для определения  $x'_{D_k}$  в задачах истечения поочередно рассматриваются течения несжимаемой и сжимаемой жидкостей.

### 2.5.1. Случай несжимаемой жидкости

При этом используются допущения:

- течение в патрубке плоское ([3] см. также п. (2.2.2.));
- безвихревое в окрестности граничной линии тока  $AD$  (рис. 2.3);
- в минимальном сечении поток однородный и параллелен оси патрубка;
- давление в зоне отрыва  $p_{\delta k}$  совпадает с давлением  $p_k$  в минимальном сечении струи (при этом на линиях  $AD$  и  $DC$  скорости одинаковы и постоянны ( $v_k = v_{nk} = \text{const}$ )).

В этих условиях в окрестности границы струи  $AD$  можно ввести комплексный потенциал  $W = \varphi + i\psi$  и комплексную скорость  $\xi = (Q/va)_k dW/dz$ . Здесь  $W$ ,  $\xi$ ,  $z = \bar{x}' + i\bar{y}'$  нормированы с помощью

объемного расхода через патрубок  $Q_k$ ,  $v_k$  и  $a_k$  соответственно. В плоскости годографа граничной линии тока  $\Psi_{AD}$  соответствует дуга сектора с углом  $\theta_0$ . Связь переменных в плоскости годографа и плоскости комплексного переменного  $W$  может быть найдена с помощью функции Н.Е. Жуковского, отображающую дугу окружности  $AD$  в плоскости  $\xi$  на отрезок вещественной оси плоскости  $W$

$$W = \frac{1}{2} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right).$$

Разрешив функцию Жуковского относительно  $\xi$ , составим дифференциальное уравнение

$$dz = \left( \frac{Q_k}{v_k a_k} \right) \cdot \frac{dW}{W \pm \sqrt{W^2 - 1}} = \frac{Q_k}{v_k a_k} (W \mp \sqrt{W^2 - 1}) dW,$$

которое, после определенного интегрирования, дает

$$z_D - z_A = \frac{Q_k}{2v_k a_k} \left\{ W^2 \mp W\sqrt{W^2 - 1} \pm \ln \left| W + \sqrt{W^2 - 1} \right| \right\}_{W_A}^{W_D}. \quad (2.45)$$

Значения  $z$  и  $W$  в точках  $A$  и  $D$  находятся из функции Жуковского

$$\xi^2 - 2W\xi + 1 = 0,$$

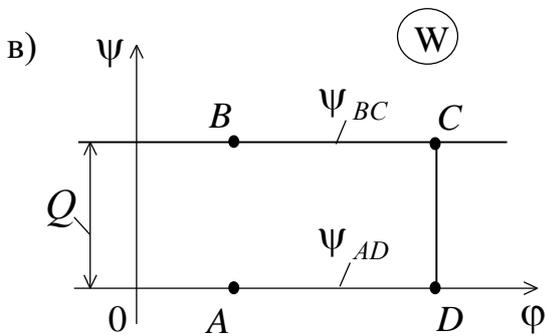
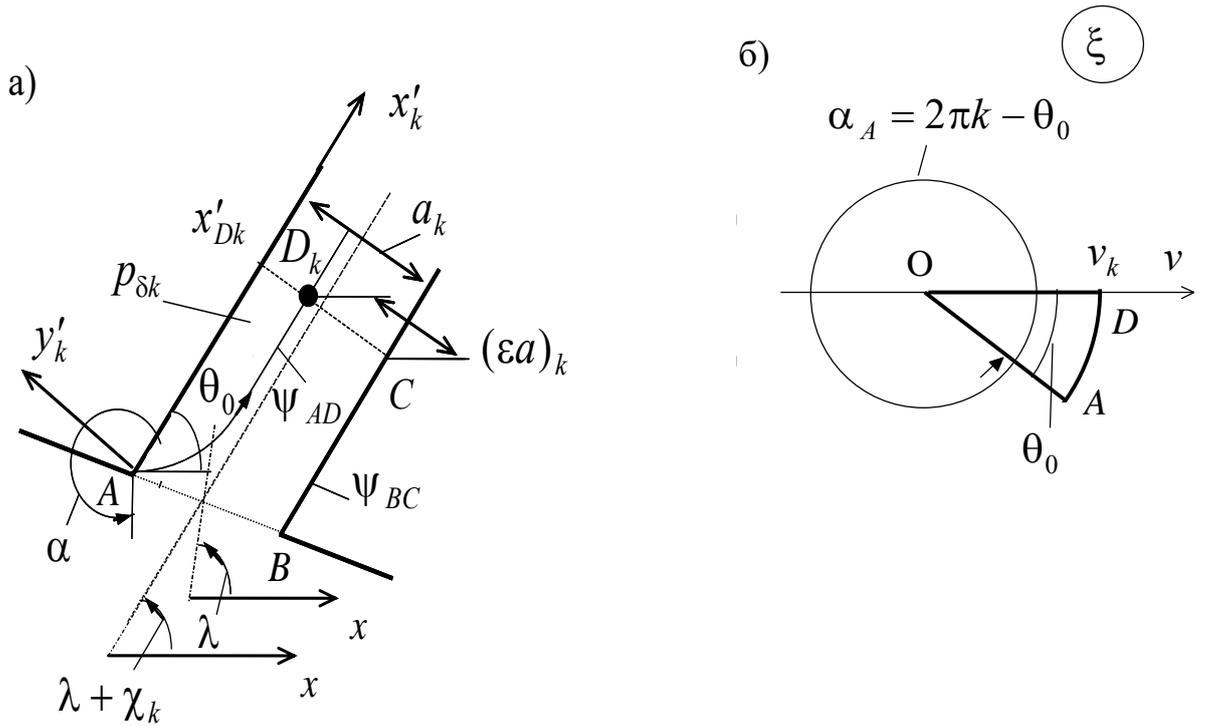


Рис. 2.3

- а) Схема течения в патрубке.
  - б) Плоскость годографа.
  - в) Плоскость комплексного потенциала.
- $(x'_k, y'_k)$  – местная система координат.

вещественные и мнимые части которой ( $\xi = \cos\alpha - i \sin\alpha$ ,  $W = \varphi + i\psi$ ):

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - 2\varphi \cos\alpha - 2\psi \sin\alpha + 1 = 0, \\ \sin\alpha \cos\alpha + \psi \cos\alpha - \varphi \sin\alpha = 0. \end{cases} \quad (2.46)$$

Приняв  $\psi_{AD} = 0$ , а в точках A и D:

т. A:  $z_A = 0$ ,  $\alpha_A = 2\pi k - \theta_0$ ,  $\varphi_A = \cos\alpha_A$ ,  $W_A = \cos\alpha_A$ ;

т.  $D$ :  $z_{D_k} = \bar{x}'_{D_k} - i(1 - \varepsilon_k)$ ,  $\alpha_D = 2\pi k$ ,  $\varphi_D = 1$ ,  $W_D = 1$ .

соотношение (2.45) приводится к виду

$$\bar{x}'_{D_k} - i(1 - \varepsilon_k) = \frac{Q_k}{2v_k a_k} \{1 - \cos^2 \alpha_A \pm \cos \alpha_A \sqrt{\cos^2 \alpha_A - 1} \pm$$

$$\pm [\ln 1 - \ln(\cos \alpha_A + \sqrt{\cos^2 \alpha_A - 1})]\}_k,$$

откуда, с учетом  $Q_k = \varepsilon_k v_k a_k$ , следуют:

$$\bar{x}'_{D_k} = \frac{1}{2} \varepsilon_k \sin^2 \alpha_A, \quad \alpha_A - \sin \alpha_k \cos \alpha_A = \pm 2 \frac{1 - \varepsilon_k}{\varepsilon_k}. \quad (2.47)$$

Следовательно, координата  $x'_{D_k}$  минимального сечения струи определяется величиной коэффициента поджатия  $\varepsilon_k$  (а значит и расходным воздействием  $\Delta_{G_k}$  ( $\Delta_{G_k} = -(\varepsilon v S)_k / (S v)^-$ ) и промежуточным параметром решения  $\alpha_A$ , или  $\theta_0$ , где  $\theta_0$  – «угол схода» струи  $AD$  в кромке  $A$ . В полученном решении предполагается наличие циркуляции  $2\pi k$ , с помощью которой моделируется «вихревая зона» в окрестности входа в боковой патрубке. Ее появление сопровождается падением расхода через патрубок [3, 4]. Ниже, циркуляция включена в угол  $\alpha_A = 2\pi k - \theta_0$ , отсчитываемый против часовой стрелки от оси  $x'_k$ , а выбор знака в решении связан с условием монотонного изменения величины  $\varepsilon_k$  вслед за изменением угла  $\alpha_A$ .

$$\left(2\pi n - \theta_0 - \sin(2\pi n - \theta_0) \cdot \cos(2\pi n - \theta_0)\right)_k = \pm 2 \frac{1 - \varepsilon_k}{\varepsilon_k}, \quad (2.48)$$

$$\bar{x}'_{D_k} = x'_{D_k} / a_k = \frac{1}{2} \varepsilon_k \cdot \sin^2 \theta_{0k}.$$

Заменяя в (2.45)  $z_D$  и  $W_D$  переменными верхними пределами  $z = \bar{x}' + i\bar{y}'$ ,  $W = \varphi + i\psi$ , учитывая соотношения  $\psi_{AD} = 0$ ,  $\varphi_{AD} = W_{AD} = \cos \alpha$ , можно получить уравнения для координат граничной линии тока  $AD$ .

Следует заметить, что согласно (2.47) величина  $\bar{x}'_{D_k}$  не превышает 0.5. Для плоских потенциальных течений с боковым отводом массы при использовании преобразования Шварца-Кристоффеля обычно принимается  $\bar{x}'_{D_k} \rightarrow \infty$  [3, 4, 77]. В аналогичных условиях при течении ньютоновской жидкости, согласно расчетам [69], величина  $\bar{x}'_{D_k}$  лежит в интервале  $0.3 < \bar{x}'_{D_k} < 0.4$  при числах Рейнольдса  $Re \sim 10^5$  и  $v_k / v^- \sim 4 \div 5$ .

### 2.5.2. Дозвуковые течения сжимаемой жидкости

При этом используется несколько иная система допущений в сравнении с предыдущим случаем для течения в патрубке:

- жидкость идеальная, движение в окрестности граничной линии тока безвихревое;
- процессы баротропны;
- течение в патрубке плоское, стационарное;
- давление в зоне отрыва от т.  $A$  до минимального сечения струи неизменно  $p_{\delta_k} = \text{const}$  и совпадает с давлением в минимальном сечении  $p_k$ .

При названных условиях имеет место связь между потенциалом скорости  $\varphi$  и функцией тока  $\psi$  в виде [93]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

На линии тока  $AD$   $\rho/\rho_0 = \rho_k/\rho_0 = \varepsilon(M_k) = \text{const}$ , ( $\varepsilon(M_k)$  – газодинамическая функция для плотности) и в переменных  $(x, y)$  может отождествляться с функцией С.А. Чаплыгина. Вводя приведенный потенциал скорости  $\varphi_1 = \varphi \varepsilon(M_k)$  и приведенную комплексную скорость  $\xi_1 = \xi/\varepsilon(M_k)$  можно рассматриваемую задачу свести к ранее решенной и получить

$$(\alpha_A - \sin \alpha_A \cos \alpha_A)_k = \pm 2 \frac{1 - \varepsilon_k}{\varepsilon_k} \cdot \varepsilon(M_k), \quad (2.49)$$

$$\bar{x}'_{D_k} = \frac{\varepsilon_k}{2\varepsilon(M_k)} \sin^2 \alpha_{A_k}, \quad \alpha_{A_k} = 2\pi n - \theta_0, \quad n \in N.$$

Впредь, удобнее пользоваться непосредственно углом  $\alpha_{A_k}$ , отсчитываемом в положительном направлении от оси  $x'_{D_k}$  (рис. 2.3.а).

### 2.5.3. Замечание об истечении сверхзвукового потока из канала

#### через боковой патрубков

Соответствующие экспериментальные исследования, выполненные в МВТУ им. Н.Э. Баумана [88], выявили достаточно сложную структуру течения в боковом патрубке: граничная линия тока  $AD$  практически прямолинейна, что, если бы не значительный градиент давления в зоне отрыва потока, позволило бы предполагать в окрестности отрыва струи веер волн разрежения типа

Прандтля-Майера. Течение осложнено наличием криволинейного скачка уплотнения, зарождающегося в окрестности точки  $D$  и простирающегося в поток транзитной трубки тока. На скачке уплотнения могут иметь место заметные диссипативные потери, без учета которых невозможно адекватное действительности описание характеристик потока. В настоящее время отсутствуют условия для должного обоснования гипотез, описывающих форму скачка и потерю механической энергии на нем, для целей исследования таких течений на основе законов сохранения в интегральной форме.

**Замечание.** Этот эксперимент послужил одним из оснований принятия допущения  $p_{\delta_k} \neq p_k$  в начальной стадии моделирования процессов истечения из канала через боковые ответвления.

## 2.6. Общее решение задачи о течении несжимаемой жидкости в канале. Подвод-отвод массы

Модель несжимаемой жидкости позволяет получить все необходимые параметры течения в явном виде, удобном для анализа качества схем течения в патрубках

### 2.6.1. Истечение жидкости из канала через боковые патрубки (схемы 1 2)

Здесь, как и в Главе 1 (п. 1.3.1), несжимаемая жидкость рассматривается как предельный случай полученных выше соотношений: (2.36, 2.41) и любого из вариантов реализации условия (2.43) – при малых числах Маха и условии  $\rho^+ / \rho^- \cong 1$ .

В задачах истечения дозвуковых потоков имеют место условия:  $A_{Hk} = 1$ ,  $\theta_{Hk} = 0$ ,  $v = \text{sign}(M^- - 1) = -1$ . Тогда процедура разложения в ряды функций в (2.36) и (2.41) по степеням чисел Маха и удержание членов до  $(M^-)^2$  включительно, реализация условия  $\rho^+ / \rho^- \cong \rho_k / \rho^- \cong 1$  в виде  $\Delta_Q = 0$  приводят к соотношениям:

$$K \cong I + nM^{-2}(\alpha^- - \tilde{\Delta}_\tau^*), \quad N \cong K - \frac{n^2 - 1}{\gamma - 1} \frac{C_1}{I} M^{-2}, \quad C_1 = (1 + \Delta_G)^2$$

и далее

$$\frac{v^+}{v^-} = (1 - \Delta_S)(1 + \Delta_G), \quad \frac{p^+}{p^-} = 1 + \frac{(1 - \Delta_S)(\tilde{\delta}^* + C_1 \Delta_S)}{Eu^- (1 - \varphi_p(\Delta_S - k_S))}, \quad (2.50)$$

$$\frac{p_\sigma}{p^-} = 1 + \varphi_p \frac{(1 - \Delta_S)(\tilde{\delta}^* + C_1 \Delta_S)}{Eu^- (1 - \varphi_p (\Delta_S - k_5))}, \quad \frac{p_{\sigma_k}}{p^-} = \varphi_{pk} \frac{p_k}{p^-} + (1 - \varphi_{pk}) \frac{p_\sigma}{p^-},$$

$$\text{где } \tilde{\delta}^* = \alpha^- - \tilde{\Delta}_\tau^* - C_1, \quad k_5 = (1 - \Delta_S) \sum_{k=1}^m \bar{S}_k k_{3k}, \quad Eu^- = p^- / \rho v^{-2},$$

$$\tilde{\Delta}_G^* = \Delta_G^* + \Delta_\tau, \quad \Delta_G^* = \sum_{k=1}^m \frac{(\alpha \varepsilon S \rho v^2)_k k_{4k}}{(S \rho v^2)^-} + \frac{p^-}{\rho^- (v^2)^-} \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{p_{\delta k}}{p^-}\right) (\bar{S}_k k_{3k}),$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{(\alpha \varepsilon S \rho v^2)_k k_{4k}}{(S \rho v^2)^-} = \sum_{k=1}^m [(\alpha \varepsilon \bar{S} \mu^2)_k] k_{4k}, \quad \bar{S}_k = S_k / S^-, \quad \mu_k = v_k / v^-.$$

$$\sigma_p^{(2)} = \frac{1}{1 + 2Eu^-} \cdot \left\{ 2Eu^- + 2 \frac{(1 - \Delta_S)(\tilde{\delta}^* + C_1 \Delta_S)}{1 - \varphi_p (\Delta_S - k_5)} + C_1 (1 - \Delta_S)^2 \right\} = \quad (2.51)$$

$$= \frac{1}{1 + 2Eu^-} \cdot \left\{ 2Eu^- + 2 \frac{(1 - \Delta_S)(\tilde{\delta}^* + C_1 \Delta_S)}{1 - \Delta_S \varphi_p (1 + \Phi(\chi_k)) + \varphi_p \Phi(\chi_k)} + C_1 (1 - \Delta_S)^2 \right\},$$

$$\text{где } \sum_{k=1}^m \bar{S}_k k_{3k} = \Phi(\chi_k).$$

Для определения  $\varphi_p$  и  $\varphi_{pk}$  в (2.50) используются методы, описанные в п. 1.3.2. Вследствие независимости  $\sigma_p$  в задачах истечения от геометрических воздействий  $\Delta_S$  и  $\chi_k$ , в (2.51) исключаются  $\Delta_S$ ,  $\chi_k$  и все функции, зависящие от них

$$\sigma_p = f_1(X) = \frac{2Eu^- + C_1 + 2\delta}{2Eu^- + 1}, \quad \delta = \alpha^- - \Delta_\tau - C_1. \quad (2.52)$$

Для разности  $\tilde{\delta}^* - \delta$  удобно ввести обозначение:

$$\tilde{\delta}^* - \delta = -\Delta_G^* = -\left[ \sum_{k=1}^m [(\alpha \varepsilon \bar{S} \mu^2)_k] k_{4k} + Eu^- \sum_{k=1}^m (1 - p_{\delta k} / p^-) (\bar{S}_k k_{3k}) \right] = -\Psi(\chi_k)$$

Далее, схема (1.30) дает (см. Приложение 4):

$$\Delta_S \left\{ -2\delta - C_1 \Delta_S + (2\delta + C_1 \Delta_S (2 - \Delta_S)) \varphi_p (1 + \Phi) + 2\Psi \right\} + \varphi_p (2\delta + C_1 \Delta_S (2 - \Delta_S)) \Phi + 2\Psi = 0.$$

Вследствие независимости воздействий  $\Delta_S$ ,  $\chi_k$  и произвольности их значений (в пределах физически допустимых значений (например:  $-\infty < \Delta_S < 1$ ,  $-\pi/2 < \chi_k < \pi/2$ )) последнее равенство расщепляется на два

$$\begin{cases} -2\delta - C_1\Delta_S + (2\delta + C_1\Delta_S(2 - \Delta_S))\varphi_p(1 + \Phi) + 2\Psi = 0 \\ \varphi_p(2\delta + C_1\Delta_S(2 - \Delta_S))\Phi + 2\Psi = 0. \end{cases}$$

Комбинация их приводит к выражению для  $\varphi_p$

$$\varphi_p = \frac{2\delta + C_1\Delta_S}{2\delta + C_1\Delta_S(2 - \Delta_S)}, \quad (2.53)$$

а второе, после исключения  $\varphi_p$  с помощью (2.53),

$$\sum_{k=1}^m \left[ (2\delta + C_1\Delta_S)\bar{S}_k k_{3k} + (\mu_k^2 - 1)\bar{S}_k k_{3k} + 2(\alpha\varepsilon\mu^2)_k \bar{S}_k k_{4k} \right] = 0, \quad (2.54_1)$$

где  $\mu_k^2 - 1 = 2Eu \left( 1 - \frac{p_k}{p} \right)$  - следствие интеграла Бернулли для несжимае-

мой жидкости для  $k$ -й трубки тока. (2.54<sub>1</sub>), в свою очередь, расщепляется на  $m$  равенств (в силу независимости  $\chi_k$ ) по числу различных патрубков

$$(2\delta + C_1\Delta_S + \mu_k^2 - 1)\bar{S}_k k_{3k} + 2\alpha_k \varepsilon_k \bar{S}_k \mu_k^2 k_{4k} = 0, \quad k = \overline{1, m}.$$

Каждое из этих соотношений, с учетом (2.4), (2.17) определяет величину  $\varphi_{pk}$  для «своего» патрубка для первых двух случаев табл. 2.1.

$$(2\delta + C_1\Delta_S + \mu_k^2 - 1)[\varepsilon_k q_{4k} + \varphi_{pk}(1 - \varepsilon_k)q_{3k}] - 2(\alpha\varepsilon\mu^2)_k \varphi_{pk} q_{3k} = 0, \quad k = \overline{1, m}.$$

$$\varphi_{pk} = \frac{q_{4k}}{q_{3k}} \cdot \frac{\varepsilon_k \cdot (2\delta + C_1\Delta_S + \mu_k^2 - 1)}{2(\alpha\varepsilon\mu^2)_k - (1 - \varepsilon_k)(2\delta + C_1\Delta_S + \mu_k^2 - 1)};$$

$$\frac{q_{4k}}{q_{3k}} = \frac{\nu_{1k}\bar{b}_k + \nu_{4k} \operatorname{tg}|\chi_k|}{\nu_{1k}\bar{b}_k + \nu_{3k} \operatorname{tg}|\chi_k|} = \left( \begin{array}{l} \frac{\bar{b}_k + \operatorname{tg}|\chi_k|}{\bar{b}_k} = \frac{\bar{x}'_k + \operatorname{tg}\chi_k + \operatorname{tg}|\chi_k|}{\bar{x}'_k + \operatorname{tg}\chi_k} = \frac{\bar{x}'_k}{\bar{x}'_k + \operatorname{tg}\chi_k} \\ \frac{\bar{b}_k}{\bar{b}_k + \operatorname{tg}|\chi_k|} = \frac{\bar{x}'_k}{\bar{x}'_k + \operatorname{tg}|\chi_k|} = \frac{\bar{x}'_k}{\bar{x}'_k + \operatorname{tg}\chi_k}; \end{array} \right)$$

Здесь использована связь длины поверхностей ( $S_{Ak}, S_{Bk}$ ) -  $b_k$  с местной координатой минимального сечения струи в патрубке -  $x'_k$  (см. рис. 2.1 и 2.2):

$$\bar{b}_k = \begin{cases} \bar{x}'_k + \operatorname{tg} \chi_k, & (\chi_k < 0), \\ \bar{x}'_k, & (\chi_k > 0). \end{cases}$$

В итоге:

$$\Phi_{pk} = \frac{\bar{x}'_k}{\bar{x}'_k + \operatorname{tg} \chi_k} \cdot \frac{\varepsilon_k \cdot (2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1)}{2(\alpha \varepsilon \mu^2)_k - (1 - \varepsilon_k)(2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1)}; \quad k = \overline{1, m}. \quad (2.54)$$

Соотношения (2.53) и (2.54) при заданных воздействиях не содержат неизвестных функций, удовлетворяют уравнениям (2.44), что проверяется непосредственной подстановкой и, следовательно, могут рассматриваться как частный интеграл уравнений (2.44).

Существенный (и естественный) вывод из (2.53) и (2.54) – зависимость среднего давления на боковой стенке канала  $p_\sigma$  (или  $\varphi_p$ ) только от суммарных воздействий (здесь  $\Delta_G, \Delta_S$  и  $\Delta_\tau$ ) и независимость от локальных (в смысле принадлежности к отдельному патрубку) воздействий, например  $\chi_k$ . Подобная зависимость может проявляться лишь неявно, из-за изменения общего расхода  $\Delta_G$  (вслед за изменением  $\Delta_{Gk}$ ) и  $\Delta_\tau$ . В свою очередь,  $\Phi_{pk}$  зависит от характеристик "своего" патрубка, остальные патрубки влияют лишь через суммарные воздействия.

Найденные значения  $\Phi_{pk}$  (2.54) позволяют определить функции  $k_{ik}$  (2.14, 2.17) для несжимаемой жидкости

$$k_{1k} = \varepsilon_k \left\{ 1 - \bar{x}'_k \cdot \frac{(\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1 \Delta_S)}{2(\alpha \varepsilon \mu^2)_k - (1 - \varepsilon_k) \cdot (\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1 \Delta_S)} \cdot \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k) \right\};$$

$$k_{2k} = 1 + \bar{x}'_k \cdot \frac{2(\alpha \varepsilon \mu^2)_k - (\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1 \Delta_S)}{2(\alpha \varepsilon \mu^2)_k - (1 - \varepsilon_k) \cdot (\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1 \Delta_S)} \cdot \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k),$$

$$k_{3k} = \bar{x}'_k \cdot \frac{2(\alpha\varepsilon\mu^2)_k}{\sin(\lambda + \chi_k) \cdot Q_k - \bar{x}'_k \cdot (\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1\Delta_S) \cdot \cos(\lambda + \chi_k)}, \quad (2.55)$$

$$k_{4k} = \bar{x}'_k \cdot \frac{(\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1\Delta_S)}{\sin(\lambda + \chi_k) \cdot Q_k - \bar{x}'_k \cdot (\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1\Delta_S) \cdot \cos(\lambda + \chi_k)},$$

$$\text{где } Q_k = 2(\alpha\varepsilon\mu^2)_k - (1 - \varepsilon_k) \cdot (\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1\Delta_S).$$

Приведенные выше соотношения позволяют оценить влияние всех учитываемых здесь воздействий  $(\Delta_S, \bar{S}_k, \lambda, \chi_k, \Delta_{Gk}, \Delta_\tau, \Delta_{\tau k})$  на гидродинамические параметры в сечении  $S^+$  и в патрубке. В отношении последнего в этом перечне воздействия  $\Delta_{\tau k}$  такая возможность представляется гипотетической и возможна лишь на качественном уровне. Желание учесть этот фактор приведет к отказу от предложенной здесь аналитической модели и необходимости численного решения уравнений Навье-Стокса.

С другой стороны, пренебрегая частью диссипативных потерь  $\Delta_{\tau k}$  в трубках тока  $\sigma_{Tk}$ , связанных с поперечными составляющими сил трения, можно значительно упростить решение задачи. Основанием для этого может служить известный эффект относительно малых потерь в ускоряющихся потоках (см., например, рис. 1.3), что и имеет место в окрестности входа жидкости в боковой патрубков. Ниже, и в соотношениях (2.54, 2.55), принято  $\Delta_{\tau k} = 0$ .

Соотношения (2.53 – 2.55) позволяют получить рабочий вариант формул (2.50) для определения параметров потока после всех воздействий. (Детали см. Приложение 5)

$$\frac{v^+}{v^-} = (1 - \Delta_S)(1 + \Delta_G), \quad \frac{p^+}{p^-} = 1 + \frac{2\delta + C_1\Delta_S(2 - \Delta_S)}{2Eu^-}, \quad (2.56)$$

$$\frac{p_\sigma}{p^-} = 1 + \frac{2\delta + C_1\Delta_S}{2Eu^-}, \quad \frac{p_{\sigma k}}{p^-} = \varphi_{pk} \frac{p_k}{p^-} + (1 - \varphi_{pk}) \frac{p_\sigma}{p^-},$$

где  $\varphi_{pk}$  описано в (2.54),  $k = \overline{1, m}$ ,  $\delta = \alpha^- - C_1 - \Delta_\tau$ ,  $C_1 = (1 + \Delta_G)^2$ .

Соотношения (2.56) решают задачу по определению средних гидродинамических параметров потока в канале в сечении  $S^+$  при **известных** начальных условиях в сечении  $S^-$ , давлении  $p_k$ , геометрии узла и воздействиях:

$$\Delta_S, \chi_k, \lambda, \Delta_{Gk}, \Delta_\tau, p_k, \quad k = \overline{1, m}.$$

**Замечание:** Задание величин  $\Delta_{Gk}$  равнозначно заданию коэффициентов поджатия струй  $\varepsilon_k$  и, согласно (2.48), величин  $\frac{\bar{x}'_{Dk}}{\bar{x}'_{Dk} + \text{tg } \chi_k}$ .

При **неизвестных** воздействиях  $\Delta_{Gk}$  и  $\Delta_\tau$  необходимо привлекать дополнительные условия: уравнения (2.34, 2.48) – для определения  $\Delta_{Gk}$  и связь коэффициента восстановления  $\sigma_p$  в (2.52) с гидравлическими потерями (1.32). В частности, для гидравлических потерь (отнесенных к начальной скорости потока) имеем

$$\xi = 1 - C_1 - 2\delta = 2(1 - \alpha^-) + \Delta_G(2 + \Delta_G) + 2\Delta_\tau, \quad (2.57)$$

тогда экспериментальные данные по гидравлическим потерям  $\xi_\ominus$  приточных тройников [58] могут быть использованы для определения  $\Delta_\tau$ .

Примеры решений задач на основе сформулированных выше математических моделей приведены в **Главе 3**. Ниже приведен предварительный анализ качества гипотезы схемы истечения 1-2.

### 2.6.2. Анализ схемы истечения 1-2

Качественный анализ пригодности схемы истечения проще всего выполнить на примере изменения коэффициента поджатия струи при варьировании угла отвода потока  $\lambda + \chi_k$ . Исходными являются соотношения: (2.34), (2.48), (2.55), (2.56):

$$(p_k - p_{\delta k})k_{1k} + (\varepsilon\rho v_n^2)_k \left( \alpha_k + \frac{\Delta_{\tau k}}{n_{kr}} \right) = (p_\sigma - p_{\delta k})k_{2k},$$

$$\bar{x}'_{Dk} = x'_{Dk}/a_k = \frac{1}{2} \varepsilon_k \cdot \sin^2 \theta_{0k}. \quad \frac{p_\sigma}{p^-} = 1 + \frac{2\delta + C_1 \Delta_S}{2Eu^-},$$

$$k_{2k} = 1 + \bar{x}' \cdot \frac{2(\alpha\varepsilon\mu^2)_k - (\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1 \Delta_S)}{2(\alpha\varepsilon\mu^2)_k - (1 - \varepsilon_k) \cdot (\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1 \Delta_S)} \cdot \text{ctg}(\lambda + \chi_k).$$

Здесь:  $\delta = \alpha^- - C_1 - \Delta_\tau$ ,  $C_1 = (1 + \Delta_G)^2$ . Ограничимся случаем одного патрубку, моделью идеальной жидкости, допущениями

$$p_{\delta k} = p_k, \quad \alpha^- = \alpha_k = 1.$$

Уравнение движения приводится к виду

$$2\varepsilon_k \mu_k^2 = (2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1) \cdot k_{2k}.$$

Для сокращения записи введем обозначения:

$$\begin{aligned} \mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1 \Delta_S = [\dots] > 0, \quad 2(\alpha \varepsilon \mu^2)_k - (\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1 \Delta_S) = \\ = 2(\alpha \varepsilon \mu^2)_k - [\dots] = \{\dots\}, \quad k_{2k} = 1 + \frac{\{\dots\}}{\{\dots\} + \varepsilon_k [\dots]} \bar{x}' \cdot \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k). \end{aligned}$$

Теперь уравнение движения:  $\{\dots\} = \frac{[\dots] \cdot \bar{x}'}{\{\dots\} + \varepsilon_k [\dots]} \{\dots\} \cdot \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k).$

Рассмотрим случай  $\lambda + \chi_k = \pi / 2$ :  $k_{2k} = 1$ , уравнение движения сводится к выражению

$2\varepsilon_{k0} \mu_k^2 = (2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1) = [\dots]_0$ . Очевидно, с увеличением правой части этого уравнения увеличивается и коэффициент  $\varepsilon_{k0}$  при фиксированном  $\mu_k$  и наоборот; при этом  $[\dots]_0 > 0$ ,  $\{\dots\} = 0$  (см. также п. 3.1.1).

Рассмотрим более общий случай  $\lambda = \pi / 2$  (см. Рис. 2.2 схемы 1-2), имея в виду наличие чисто конструкционных ограничений  $-\pi / 2 < \chi_k < \pi / 2$ :

$$\{\dots\} = -\frac{[\dots] \cdot \bar{x}'}{\{\dots\} + \varepsilon_k [\dots]} \{\dots\} \cdot \operatorname{tg} \chi_k; \quad \text{пусть, по к-либо причине}$$

$\varepsilon_k < \varepsilon_{k0}$ , или  $\varepsilon_k > \varepsilon_{k0}$  при условии  $[\dots] = [\dots]_0 > 1$ , тогда величина  $\{\dots\} < 0$  - в первом случае и  $\{\dots\} > 0$  - во втором случае и т. к.

$$\frac{[\dots] \cdot \bar{x}'}{\{\dots\} + \varepsilon_k [\dots]} > 0, \quad \text{из уравнения движения следует}$$

$$\operatorname{sign}\{\dots\} = \operatorname{sign}[-\{\dots\} \cdot \operatorname{tg} \chi_k], \quad \text{т.е. всегда } \operatorname{sign}\{\dots\} = -\operatorname{sign}(\operatorname{tg} \chi_k).$$

В частности, если  $\{\dots\} < 0$ , т.е.  $\varepsilon_k < \varepsilon_{k0}$ , то  $\operatorname{tg} \chi_k > 0$ ,  $\chi_k > 0$  и наоборот, если  $\{\dots\} > 0$ , т.е.  $\varepsilon_k > \varepsilon_{k0}$ , то  $\operatorname{tg} \chi_k < 0$ ,  $\chi_k < 0$ , что полностью соответствует предполагаемому изменению расхода (или коэффициента поджатия струи в патрубке) при отклонении оси патрубка навстречу

потоку в канале ( $\chi_k > 0$ ,  $\varepsilon_k < \varepsilon_{k0}$  Рис. 2.2, схема 2) и при отклонении оси патрубка по потоку в канале ( $\chi_k < 0$ ,  $\varepsilon_k > \varepsilon_{k0}$  Рис. 2.2, схема 1).

### 2.6.3. Другие возможные схемы истечения потока из канала через боковые ответвления

#### Схема 3-4

Повторяются все действия и преобразования п. 2.6.1 при условиях, характерных для этой схемы истечения. Предполагается, что внутри парубка существует минимальное сечение струи с местной координатой  $\bar{x}'_k$ , отсчитываемой от т. В (Рис. 2.2), не претедая, при этом, на существование решения для нее, подобного (2.48). В итоге, аналоги формул (2.53, 2.54):

$$\varphi_p = \frac{2\delta + C_1\Delta_S}{2\delta + C_1\Delta_S(2 - \Delta_S)},$$

$$\varphi_{pk} = \frac{\bar{x}'_k}{\bar{x}'_k - \operatorname{tg} \chi_k} \cdot \frac{\varepsilon_k \cdot (2\delta + C_1\Delta_S + \mu_k^2 - 1)}{2(\alpha\varepsilon\mu^2)_k - (1 - \varepsilon_k)(2\delta + C_1\Delta_S + \mu_k^2 - 1)},$$

и коэффициенты  $k_{ik}$  отличаются от (2.55) только знаками

$$1) k_{1k} = \varepsilon_k \left\{ 1 + \bar{x}'_k \frac{(\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1\Delta_S)}{2(\alpha\varepsilon\mu^2)_k - (1 - \varepsilon_k) \cdot (\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1\Delta_S)} \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k) \right\},$$

$$2) k_{2k} = 1 - \bar{x}'_k \cdot \frac{2(\alpha\varepsilon\mu^2)_k - (\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1\Delta_S)}{2(\alpha\varepsilon\mu^2)_k - (1 - \varepsilon_k) \cdot (\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1\Delta_S)} \cdot \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k).$$

Формулы (2.34), (2.55), (2.56) сохраняют свой вид и, в силу различия знаков в коэффициентах  $k_{2k}$  в сравниваемых схемах истечения, *выводы относительно влияния на расход изменения ориентации осей патрубков в схеме истечения 3-4 прямо противоположны выводам для схемы 1-2 и, следовательно, маловероятны.*

#### Схема 5

Повторяются все действия и преобразования п. 2.6.1 при условиях, характерных для этой схемы истечения. Аналоги коэффициентов (2.14, 2.17) не содержат неизвестной величины  $\varphi_{pk}$ :

$$k_{1k} = \varepsilon_k, \quad k_{2k} = \frac{\sin \lambda}{\cos \chi_k \sin(\lambda + \chi_k)} = 1 - \operatorname{tg} \chi_k \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k),$$

$$k_{3k} = -\operatorname{tg} \chi_k / \sin(\lambda + \chi_k), \quad k_{4k} = \Delta_{\tau k} / \sin(\lambda + \chi_k), \quad (2.58)$$

где величина  $\Delta_{\tau k}$  появилась за счет сохранения ее в уравнении (2.34). Теперь, в уравнении, подобном уравнению (2.54<sub>1</sub>), только один свободный параметр -  $\Delta_{\tau k}$ :

$$\Delta_{\tau k} = \frac{2\delta + C_1 + \mu_k^2 - 1}{2(\alpha\varepsilon\mu^2)_k} \cdot \frac{\operatorname{tg} \chi_k}{\cos(\lambda + \chi_k)},$$

которым нельзя пренебречь, не пренебрегая следствием 2-го началом термодинамики (здесь в виде утверждения (2.43)).

В уравнении движения (2.34) теперь все известно:

$$(p_k - p_{\delta k})k_{1k} + (\varepsilon\rho v_n^2)_k \left( \alpha_k + \frac{\Delta_{\tau k}}{n_{kr}} \right) = (p_\sigma - p_{\delta k}) \cdot k_{2k}, \quad p_k = p_{\delta k};$$

$$(\varepsilon\rho v_n^2)_k \left( \alpha_k + \frac{2\delta + C_1 + \mu_k^2 - 1}{2(\alpha\varepsilon\mu^2)_k} \cdot \frac{\operatorname{tg} \chi_k}{\cos(\lambda + \chi_k) \sin(\lambda + \chi_k)} \right) =$$

$$= \frac{(\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1 \Delta_s)}{2} \cdot \frac{\sin \lambda}{\cos \chi_k \sin(\lambda + \chi_k)}.$$

Упростив это выражение и приняв, для большей наглядности,  $\lambda = \pi / 2$ ,

$$2(\alpha_k \varepsilon \mu_n^2)_k \cdot \cos^2 \chi_k = 2\delta + C_1 + \mu_k^2 - 1,$$

приходим к выводу, что за счет  $\cos^2 \chi_k \geq 0$  функция  $\Delta_{Gk}(\chi_k)$  будет четной

$$\Delta_{Gk}(\chi_k > 0) = \Delta_{Gk}(\chi_k < 0).$$

*Такой тип течения возможен, например, при стоке жидкости в канале с двух сторон к патрубку, с зеркальной симметрией картины течения, и вряд ли возможен при наличии однонаправленного потока в канале.*

**Схема 6,**  $\varepsilon_k = 1$ .

В уравнении движения (2.8) отсутствует давление  $p_{\delta k}$ , специфика схемы истечения отражена в соотношениях (2.25, 2.26) и после необходимых стандартных преобразований и условия (2.54<sub>1</sub>) приводит к соотношениям:

$$\varphi_{pk} = \frac{2\alpha_k \mu_k^2 - [2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1]}{[2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1] \operatorname{tg} \chi_k \cdot \operatorname{tg}(\lambda + \chi_k)};$$

$$k_{2k} = 1 - \frac{\{2\alpha_k \mu_k^2 - [2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1]\} \operatorname{ctg}^2(\lambda + \chi_k)}{[2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1]}.$$

Уравнение 2) (2.34) позволяет оценить влияние на расход угла ориентации патрубка

$$(\alpha \rho v^2)_k (1 + \Delta_{\tau k} / n_{kr}) = (p_\sigma - p_k) \cdot k_{2k}, \quad \Delta_{\tau k} = 0:$$

$$2\alpha_k \mu_k^2 = [2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1] \cdot \left\{ 1 - \frac{\{2\alpha_k \mu_k^2 - [2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1]\}}{[2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1]} \cdot \operatorname{ctg}^2(\lambda + \chi_k) \right\},$$

Отсюда:  $\{2\alpha_k \mu_k^2 - [2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1]\} \cdot [1 + \operatorname{ctg}^2(\lambda + \chi_k)] = 0$ , тогда

$$2\alpha_k \mu_k^2 - [2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1] = 0,$$

где  $\delta = \alpha^- - \Delta_\tau - C_1$ ,  $C_1 = (1 + \Delta_G)^2 \geq 0$ .

Элементарные преобразования этого условия приводит к противоречию:

$$\mu_k^2 - (2\alpha^- - 1) = -(2 - \Delta_S)C_1 - 2\Delta_\tau. \quad (2.59)$$

Действительно, в однородном потоке идеальной жидкости ( $\alpha^- = \alpha_k = 1$ ,  $\Delta_\tau = 0$ ) выражение слева неотрицательно, т.к. определяет величину перепада давления  $(p^- - p_k)$ , обеспечивающим истечение из канала, а справа – только отрицательная величина. Таким образом, режим безотрывного истечения из канала через боковые патрубки невозможен.

#### 2.6.4. Локальный подвод массы в канал

В задачах подвода массы в канал ( $\Delta_{Gk} > 0$ ) имеют место условия (2.30)

$$k_{3k} = 0, k_{4k} = n_{kx} = \cos(\lambda + \chi_k), k_5 = 0,$$

а углы наклона патрубков определяют часть диссипативных потерь в канале  $\Delta_{\tau k}$  (см.(2.31)), в связи с чем углы ориентации патрубков  $\lambda + \chi_k$  исключаются из списка геометрических воздействий (п. 2.2.3) и величина  $\tilde{\Delta}_G^*$  трактуется как эффективный диссипативный фактор

$$\tilde{\Delta}_G^* = \Delta_{\tau} + \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k \Delta_{Gk}^2}{(\varepsilon \bar{S})_k} \cos(\lambda + \chi_k). \quad (2.60)$$

Тогда соотношение (2.51), откорректированное с учетом особенностей задач подвода массы по известной схеме (п. 1.3.2.) позволяет определить  $\sigma_p$  и  $\varphi_p$ , а вслед за тем по (2.50) – все гидродинамические параметры

$$\sigma_p = \frac{2Eu^- + 2\delta^* + C_1}{2Eu^- + 1}, \quad \varphi_p = \frac{2\delta^* + C_1\Delta_S}{2\delta^* + C_1\Delta_S(2 - \Delta_S)}, \quad (2.61)$$

$$\frac{v^+}{v^-} = (1 - \Delta_S)(1 + \Delta_G), \quad \frac{p^+}{p^-} = 1 + \frac{2\delta^* + C_1\Delta_S(2 - \Delta_S)}{2Eu^-},$$

$$\frac{p_{\sigma}}{p^-} = 1 + \frac{2\delta^* + C_1\Delta_S}{2Eu^-}, \quad p_{\sigma k} = p_{\sigma}, \quad \delta^* = \alpha^- - C_1 - \tilde{\Delta}_G^*.$$

Аналог соотношения (2.57) для задач подвода массы имеет вид

$$\xi = 1 - C_1 - 2\delta^* = 2(1 - \alpha^-) + \Delta_G(2 + \Delta_G) + 2\tilde{\Delta}_G^*. \quad (2.62)$$

Полученные в п. 2.6 решения удовлетворяют трем законам сохранения и второму началу термодинамики.

## 2.7. Общее решение задачи о течении сжимаемой жидкости в канале

### 2.7.1. Задачи истечения (схемы 1, 2)

Перечень воздействий, меняющих запас механической энергии при истечении через боковые отверстия, перечислен в массиве (2.38). Тогда, исключая из (2.41) все переменные и функции, от них зависящие, но не входящие в перечень (2.38), получим

$$\sigma_p = f_1(X) = \pi(M^-) \frac{K_0 \mp v\gamma N_0}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{K_0 \pm vN_0}{K_0 \mp v\gamma N_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (2.63)$$

где

$$K_0 = 1 + \gamma M^{-2} (\alpha^- - \Delta_\tau), \quad N_0 = \left\{ K_0^2 - 2(\gamma + 1) M^{-2} \left( C_1 + C_2 \frac{\gamma - 1}{2} M^{-2} \right) \right\}^{1/2}$$

Опыт расщепления переменных, относящихся к определению  $\Phi_p$  и  $\Phi_{pk}$ , на примере модели несжимаемой жидкости (п. 2.6.1); утверждение, что суммарный вклад каждой из этих групп переменных в величину  $\sigma_p$  равен нулю, что находит отражение в равенстве (2.43) – позволяет выстроить следующую схему для определения  $\Phi_p$  и  $\Phi_{pk}$ .

Для определения  $\Phi_p$ :

$$f_2^{(0)}(X, \Delta_S, \Phi_p(X, \Delta_S)) - f_1(X) = 0, \quad (2.64)$$

$$f_2^{(0)} = \pi(M^-) \frac{K^0 \mp \nu n^0 N^0}{I^0(n^0 + 1)} \left( 1 + \frac{n^0 - 1}{2} \frac{K^0 \pm \nu N^0}{K^0 \mp \nu n^0 N^0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}},$$

$$K^0 = I^0 + n^0 M^{-2} (\alpha^- - \Delta_\tau),$$

$$N^0 = \left\{ K^{0^2} - 2 \frac{n^{0^2} - 1}{\gamma - 1} M^{-2} \left( C_1 + C_2 \frac{\gamma - 1}{2} M^{-2} \right) \right\}^{1/2},$$

$$n^0 = \frac{\gamma}{1 + (\gamma - 1)\Phi_p \Delta_S}, \quad I^0 = \frac{1 - \Phi_p \Delta_S}{(1 - \Delta_S)[1 + (\gamma - 1)\Phi_p \Delta_S]}.$$

Для определения  $\Phi_{pk}$ :

$$f_2^{(k)}(X, \Delta_S, \chi_k, \Phi_p(X, \Delta_S), \Phi_{pk}(X, \Delta_S, \chi_k)) - f_1(X) = 0, \quad k = \overline{1, m}, \quad (2.65)$$

где  $f_2^{(k)}$  имеет структуру соотношения (2.41), которое записывается для фиксированных значений  $k$  (исключается суммирование по  $k$  от 1 до  $m$ ), т.е. вместо  $k_5$  используется  $k_5^{(k)} = (1 - \Delta_S) \bar{S}_k k_{3k}$ , а вместо  $\tilde{\Delta}_G^*$  – величина

$$\tilde{\Delta}_G^{*(k)} = \Delta_\tau + \frac{\alpha_k}{\varepsilon_k \bar{S}_k} \frac{\rho^-}{\rho_k} \Delta_{Gk}^2 k_{4k} + \frac{1}{\gamma M^{-2}} \left( 1 - \frac{p_{\delta_k}}{p^-} \right) \bar{S}_k k_{3k} \quad (\text{см. (2.50)}).$$

Уравнения (2.64) и (2.65) решаются поочередно для определения  $\varphi_p(X, \Delta_S)$  и  $\varphi_{pk}(X, \Delta_S, \chi_k)$ . В этих уравнениях учтено, что  $\varphi_p$  не зависит от локальных воздействий  $\chi_k$  (п. 2.6.1), а при определении  $\varphi_{pk}$  для фиксированного  $k$  вклад прочих патрубков осуществляется через суммарные воздействия  $\Delta_G, \Delta_Q, \Delta_\tau, \Delta_S$ .

Уравнения (2.64), (2.65) и (2.36), вместе с дополняющими их соотношениями (2.37) и (2.49), образуют замкнутую систему уравнений для определения гидродинамических параметров в сечении  $S^+$ , давлений  $p_\sigma$  и  $p_{\sigma k}$  при заданных воздействиях из перечня (2.38). Если расходные воздействия  $\Delta_{Gk}$  не заданы, для их определения названная система уравнений дополняется уравнениями (2.34) и необходимыми граничными условиями (см. Глава 3).

### 2.7.2. Задачи подвода массы в канал

Для патрубков с подводом массы в канал число неизвестных сокращается за счет очевидного допущения  $p_\sigma = p_{\sigma k} = p_k = p_{\delta k}$ ,  $\varepsilon_k = 1$  и нет проблемы определения величин  $\varphi_{pk}$ . При этом, согласно (2.30), имеет место

$$\tilde{\Delta}_\tau^* = \Delta_\tau^* = \Delta_\tau + \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{\varepsilon_k \bar{S}_k} \frac{\rho^-}{\rho_k} \Delta_{Gk}^2 \cos(\lambda + \chi_k). \quad (2.66)$$

В уравнении (2.41) для  $\sigma_p^{(2)}$  в качестве неизвестной присутствует только величина  $\varphi_p$ , а в качестве геометрического воздействия – только  $\Delta_S$ :

$$\sigma_p^{(2)} = f_2(\Delta_S, X, \varphi_p(\Delta_S, X)) = \pi(M^-) \frac{K \mp vnN}{(n+1) \cdot I} \left( 1 + \frac{n-1}{2} \frac{K \pm vN}{K \mp vnN} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.67)$$

где

$$K = I + nM^{-2} (\alpha^- - \tilde{\Delta}_G^*), \quad N = \left\{ K^2 - 2 \frac{n^2 - 1}{\gamma - 1} \left( C_1 + C_2 \frac{\gamma - 1}{2} M^{-2} \right) \right\}^{1/2}, \quad (2.68)$$

$$n = \frac{\gamma}{1 + (\gamma - 1)\varphi_p \Delta_S}, \quad I = \frac{\gamma}{1 + (\gamma - 1)\varphi_p \Delta_S},$$

для величин  $C_1$  и  $C_2$  в (2.37) используются значения  $A_{Hk} = H_k/H^-$  и  $\theta_{Hk} = 1$ . Углы  $\chi_k$ , вследствие однозначной связи с  $\Delta_{\tau k}$  (2.30), входят в массив величин  $X$ , меняющих коэффициент восстановления давления  $\sigma_p$  (2.40).

Исключив из (2.67)  $\varphi_p$  и  $\Delta_S$ , находим  $\sigma_p = f_1(X)$ :

$$\sigma_p = \pi(M^-) \frac{K_0 \mp v\gamma N_0}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{K_0 \pm vN_0}{K_0 \mp v\gamma N_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (2.69)$$

где

$$K_0 = 1 + \gamma M^{-2} (\alpha^- - \Delta_\tau^*), \quad N_0 = \left\{ K_0^2 - 2(\gamma + 1) \left( C_1 + C_2 \frac{\gamma - 1}{2} M^{-2} \right) \right\}^{1/2}.$$

Применив затем схему (2.43)

$$f_2(X, \Delta_S, \varphi_p(X, \Delta_S)) - f_1(X) = 0, \quad (2.70)$$

находим  $\varphi_p(X, \Delta_S)$  как решение трансцендентного уравнения.

Соотношения (2.67 ÷ 2.70) вместе с (2.36) образуют замкнутую систему уравнений в задачах локального подвода массы в канал, позволяют определить параметры состояния газа в сечении  $S^+$  и среднее давление на поверхности канала  $p_\sigma$  по заданным начальным значениям параметров потока и заданным воздействиям:  $\Delta_{Gk}, \Delta_Q, \Delta_{Qk}, A_{Hk}, \chi_k + \lambda, \Delta_\tau$ .

Полученные в п. 2.7 решения удовлетворяют законам сохранения массы, количества движения, энергии и второму началу термодинамики.

### 2.7.3. О поведении функции $\varphi_p$ в окрестности $\Delta_S = 0$

Среднее давление  $p_\sigma$  на уступе канала, при наличии или отсутствии расходных и иных воздействий, определяется весовым коэффициентом  $\varphi_p$ . Для рассматриваемого класса постановок задач законы сохранения оставляют широкий выбор:  $-\infty < \varphi_p < +\infty$ . Второе начало термодинамики решает проблему выбора единственного значения  $\varphi_p$ ; для несжимаемой жидкости – в форме аналитических решений (2.53), (2.61). При этом во всех рассмотренных

случаях локального воздействия на поток за счет каких-либо воздействий любого знака из перечня  $X$  (см. (2.38)) в канале постоянного сечения –  $\Delta_S = 0$  – величина  $\varphi_p$  одинакова:

$$\varphi_p(X \neq 0, \Delta_S = 0) = 1, \quad (2.71)$$

если суммарный эффект этих воздействий, представленный величинами  $\delta^* = \alpha^- - C_1 - \Delta_\tau^*$  в задачах вдува в канал или  $\delta = \alpha^- - C_1 - \Delta_\tau$  в задачах отвода массы, отличен от нуля ( $\delta^* \neq 0$  или  $\delta \neq 0$ ). В этих условиях средние значения давлений на боковых поверхностях узла равны  $p_\sigma = p^+ \neq p^-$  (см. формулы (2.56), (2.61)).

Если же суммарный эффект воздействий из списка величин  $X$  равен нулю ( $\delta^* = 0$  или  $\delta = 0$ ) и не меняет отношения давлений  $(p^+ / p^-)_{\Delta_S=0} = (p_\sigma / p^-)_{\Delta_S=0} = 1$ , то

$$\varphi_{p|\Delta_S=0} = 1/2. \quad (2.72)$$

Эти выводы распространяются и на течения сжимаемой жидкости, причем анализ поведения  $\varphi_p$  в окрестности  $\Delta_S = 0$ , проделанный на примере течений со скачком площади п. 1.4.1, полностью справедлив для задач, «отягощенных» расходными воздействиями. Но, в отличие от несжимаемой жидкости, здесь внешние воздействия сгруппированы в трех величинах:  $\Delta_\tau^*$ ,  $C_1$  и  $C_2$  – и, если суммарный эффект этих воздействий таков, что  $p^+ / p^- \neq 1$ , то имеет место (2.71); если же  $p^+ / p^- = 1$ , то при дополнительном условии  $M^- \neq 1$  – имеет место (2.72), а при  $M^- = 1$

$$\varphi_{p|\Delta_S=0} = 2/3. \quad (2.73)$$

Следует иметь в виду, что понятия  $X \neq 0$  для (2.71) и  $X = 0$  для (2.72) – относительны. В первом случае должно быть  $|X| \gg 0$  в окрестности  $\Delta_S = 0$ , или  $\Delta_S \sim 0$ . Во втором случае  $|X| = 0$  и  $\varphi_p = 1/2$  имеет место, даже если  $\Delta_S \sim 0$ . Например, при решении дифференциального уравнения для  $\varphi_p$  с учетом диссипации в области  $\Delta_S > 0$ , где  $\Delta_\tau = \Delta_S^2$ , в области

$\Delta_S \sim 0$  величина диссипативных потерь будет величиной 2-го порядка по сравнению с  $\Delta_S$ .

И, наконец, иная ситуация возникает, если в окрестности  $\Delta_S \sim 0$  все воздействия имеют одинаковый малый порядок. Пример подобного рода рассмотрен в **2.8**.

## **2.8. Моделирование затекания газа в узкий зазор между соосными цилиндрами**

### **2.8.1. Специфика задачи**

Определение функции  $\varphi_p$  и, следовательно, среднего давления  $p_\sigma$  на уступе канала связано с преодолением ряда особенностей. В их числе: «деление на ноль», когда комбинация воздействий такова, что  $p^+ / p^- = 1$  (см. (1.29)), «деление ноль на ноль» в окрестности  $\Delta_S = 0$ . (см. проблемы решения уравнения (1.38)). Условия появления этих проблем и способы их преодоления описаны в п. **1.4.1.**

Список проблем пополняется, когда в области  $\Delta_S = 0$  действуют два малых, соизмеримых по величине и, возможно, конкурирующих воздействия. В этих условиях, для определения  $\varphi_p$ , необходим совместный учет этих воздействий. Ниже, метод изложен на примере малых воздействий  $\Delta_S$  и  $\Delta_G$ . Рис. 2.4. поясняет одно из возможных состояний системы из двух соосных цилиндров с малым кольцевым зазором между ними и дозвукового потока газа в канале. Газ может затекать в зазор или вытекать из него. Вероятным прототипом этой ситуации может быть проблема герметизации – разгерметизации, возникающей в различных технических устройствах.

Наличие двух воздействий  $\Delta_S$  и  $\Delta_G$  предполагает необходимость определения двух функций  $\varphi_p$  и  $\varphi_{pk}$  при затекании в зазор. Специфика задачи позволяет существенно упростить процедуру решения.

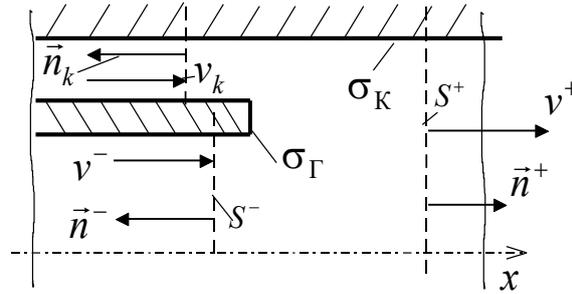


Рис. 2.4. Здесь случай втекания газа в канал. (Случаю «затекания» газа в зазор соответствует изменение направления вектора скорости  $v_k$  на противоположное).

Затекание газа в зазор (схема истечения 1-2) характеризуется условиями:  
 $\chi_k = 0$ ,  $\lambda + \chi_k = \pi$ ,

тогда  $S_k^- = S_k$ ,  $n_{kx}^- = n_{kx} = -1$ ,  $n_{kr}^- = n_{kr} = 0$ ,  $S_k^- n_{kx}^- - S_k n_{kx} = 0$ .

В окрестности скачка площади течение дозвуковое и можно принять  $p_k = p_{\delta_k}$ . Тогда уравнения (2.11, 2.12) приводятся к виду:

$$\begin{aligned} & (\alpha S \rho v^2)^+ + p^+ [S^+ - \varphi_p (S^+ - S^-) - \varphi_p \sum_{k=1}^m S_k n_{kx}] - (\alpha S \rho v^2)^- - \\ & - p^- [S^- + (1 - \varphi_p)(S^+ - S^-) + (1 - \varphi_p) \sum_{k=1}^m S_k n_{kx}] + \\ & + \sum_{k=1}^m \{ (\alpha \varepsilon S \rho v_n^2)_k n_{kx} + p_k S_k n_{kx} \} - \int_S \tau_{nx}^* ds = 0, \end{aligned}$$

$$[(\alpha \varepsilon S \rho v_n^2)_k - (p_\sigma - p_k) S_k] n_{kr} + [(p_\sigma - p_k)(1 - \varphi_{pk})(v_{1k} - v_{2k}) S_k] n_{kx} = 0.$$

Вследствие  $n_{kr} = 0$ ,  $p_\sigma - p_k \neq 0$  (при истечении из канала),  $v_{1k} - v_{2k} \neq 0$  из последнего уравнения следует:

$$\varphi_{pk} = 1, \quad p_{\sigma k} = p_k \quad \text{— на внутренних стенках зазора давление одинаковое.}$$

Затем, коэффициент  $k_{2k}$  в (2.14) {вследствие  $q_{3k} = q_{4k}$  при  $\text{tg } \chi_k = 0$ ,

(см. (2.2)), или уравнение (\*)} может быть принят  $k_{2k} = 1$  и уравнение (2.15),

при  $\Delta_{\tau k} = 0$ , принимает вид

$$(\varepsilon \rho v_n^2)_k = p_\sigma - p_k . \quad (2.74)$$

Далее, уравнение движения в проекции на ось  $x$  преобразуется с помощью (2.74)

$$\begin{aligned} & (\alpha S \rho v^2)^+ + p^+ [S^+ - \varphi_p (S^+ - S^-)] - (\alpha S \rho v^2)^- - \\ & - p^- [S^- + (1 - \varphi_p)(S^+ - S^-)] - \int_S \tau_{nx}^* ds = 0 \end{aligned}$$

и сравнивается с общим видом этого уравнения в форме (2.16). Из сопоставления следует

$$k_{3k} = 0, \quad k_{4k} = 0, \quad k_5 = 0$$

и, как следствие (2.18),  $\tilde{\Delta}_\tau^* = \Delta_\tau$ .

В задачах подвода массы в канал имеют место соотношения (2.30):

$$k_{3k} = k_5 = 0 \quad \text{и} \quad k_{4k} = n_{kx}, \quad \tilde{\Delta}_\tau^* = \Delta_\tau^* = \Delta_\tau + \frac{\rho^-}{\rho_k} \frac{\Delta_G^2}{S_k} \cdot \cos(\lambda + \chi_k);$$

проблемы определения  $\varphi_{pk}$  здесь не существует.

### 2.8.2. Определение $\varphi_p$ при малых расходе $\Delta_G$ и геометрическом $\Delta_S$ воздействиях

В итоге соотношения (2.36) содержат лишь одну неизвестную функцию –  $\varphi_p$ , для определения которой при фиксированных  $\lambda$  и  $\chi_k$  в малой окрестности  $\Delta_S = 0$  при малых расходах  $\Delta_G$  могут использоваться уравнения (1.38, 1.39), где в содержании величин  $K$  и  $N$  отражена специфика задачи

$$K = I + nM^{-2}(1 - \tilde{\Delta}_\tau^*), \quad \tilde{\Delta}_\tau^* = \begin{cases} \Delta_\tau - \text{при истечении из канала,} \\ \Delta_\tau + \frac{\rho^-}{\rho_k} \frac{\Delta_G^2}{S_k} n_{kx} - \text{при подводе массы;} \end{cases}$$

$$N = \left\{ K^2 - 2 \frac{n^2 - 1}{\gamma - 1} M^{-2} Q \right\}^{1/2}, \quad Q = (\tau(M^-))^{-1} [1 + (1 + A_H)\Delta_G + A_H \Delta_G^2].$$

Здесь и далее принято:  $\alpha^- = \beta^- = 1$ ,  $\Delta_Q = \Delta_{Q_k} = \Delta_\tau = 0$ .

Далее раскладываются в ряды функции  $K$  и  $N$  относительно величин  $\delta\Delta_S$ ,  $\delta n = n - \gamma$ ,  $\delta\Delta_G$  в окрестности точки  $\Delta_S = 0$ ,  $\Delta_G = 0$ ,  $n = \gamma$ ;

сохраняются линейные относительно величин  $\delta\Delta_S$  и  $\delta n$  члены разложения. Относительно расходных воздействий в разложениях следует сохранять величины второго порядка, так как в задачах подвода массы “чувствительность” к направлению вдува сохраняется лишь при этом условии. В задачах отвода массы можно ограничиться линейными членами разложения. Ниже, ради общности вывода, квадратичные члены разложения сохраняются в обоих случаях.

$$K \cong K_0 + \delta\Delta_S + \delta n M_0 - \gamma M^{-2} \delta\tilde{\Delta}_\tau^*, \quad M_0 = \frac{1}{\gamma} \left( K_0 + \frac{1}{\gamma-1} \right), \quad K_0 = 1 + \gamma M^{-2};$$

$$N \cong N_0 + \frac{K_0}{N_0} \delta\Delta_S + \frac{(\gamma+1)K_0 - (K_0^2 - \gamma^2 N_0^2)}{\gamma(\gamma-1)N_0} \delta n -$$

$$- \frac{(N_0^2 - K_0^2)[(1 + A_H)\delta\Delta_G + A_H\delta\Delta_G^2]}{2N_0} - \frac{K_0}{N_0} \gamma M^{-2} \delta\tilde{\Delta}_\tau^* ;$$

$$N_0 = K_0^2 - 2(\gamma+1)((\tau(M^-))^{-1}).$$

Коэффициенты  $a$  и  $b$  в дифференциальном уравнении (1.38) примут вид:

$$a_0 \cong \pm v(\gamma-1)(\gamma^2-1)N_0\Psi \pm v\delta\Delta_S(\gamma-1)(\gamma^2-1)\left[\frac{K_0}{N_0}\Psi - N_0(\Psi + \gamma + 1 \pm$$

$$\pm v\frac{\gamma K_0 \mp v N_0}{N_0})\right] + \delta n(\gamma-1)\{\Psi[\Psi + \gamma + 1 \pm v2\gamma N_0 \pm$$

$$\pm v\frac{(\gamma+1)K_0 - (K_0^2 - \gamma^2 N_0^2)}{\gamma N_0}]\pm v(\gamma+1)N_0[-2\gamma + (\gamma-1) \times$$

$$\times \left(\frac{\Psi + \gamma + 1}{\gamma} \mp v\frac{\gamma K_0 \mp v N_0}{\gamma(\gamma-1)N_0} \pm v\frac{K_0^2 - \gamma^2 N_0^2}{(\gamma^2-1)N_0}\right)]\} + [(1 + A_H)\delta\Delta_G + A_H\delta\Delta_G^2] \times$$

$$\times \{\gamma(\gamma-1)(\gamma^2-1)\frac{N_0^2 - K_0^2}{2} \mp v(\gamma-1)(\gamma^2-1)\Psi\frac{N_0^2 - K_0^2}{2N_0}\} -$$

$$- \gamma(\gamma-1)(\gamma^2-1)\frac{N_0^2 - K_0^2}{2N_0}(1 + A_H)^2\delta\Delta_G^2 \mp v(\gamma-1)(\gamma^2-1)\Psi\frac{K_0}{N_0}\gamma M^{-2}\delta\tilde{\Delta}_\tau^* \pm$$

$$\pm v(\gamma - 1)(\gamma^2 - 1)N_0[-\gamma M^{-2}\delta\tilde{\Delta}_\tau^* \pm v\gamma \frac{K_0}{N_0}\gamma M^{-2}\delta\tilde{\Delta}_\tau^*];$$

$$\begin{aligned} b_0 \cong & \pm v\gamma(\gamma - 1)^2(\gamma^2 - 1)N_0\Psi \pm v\delta\Delta_S\gamma(\gamma - 1)^2(\gamma^2 - 1)\left\{\frac{K_0}{N_0}\Psi \mp v\gamma(K_0 \pm vN_0)\right\} + \\ & + \delta n \left\{\pm v(\gamma - 1)^2(3\gamma^2 - 1)N_0\Psi \pm v(\gamma - 1)^2 \frac{(\gamma + 1)K_0 - (K_0^2 - \gamma^2 N_0^2)}{N_0}\Psi \pm \right. \\ & \left. \pm v(\gamma - 1)^2\gamma(\gamma^2 - 1)N_0\left[-\frac{2\gamma}{\gamma - 1} + \frac{\Psi + \gamma + 1}{\gamma} \mp v\frac{\gamma K_0 \mp vN_0}{\gamma(\gamma - 1)N_0} \pm v\frac{K_0^2 - \gamma^2 N_0^2}{(\gamma^2 - 1)N_0}\right] - \right. \\ & \left. - \gamma(\gamma^2 - 1)(\gamma - 1)(\pm v(\gamma + 1)N_0 + \Psi + \gamma + 1)\right\} + \\ & + \delta\Delta_G\left\{\gamma(\gamma^2 - 1)(\gamma - 1)^2[(1 + A_H) + A_H\delta\Delta_G][\mp v\frac{N_0^2 - K_0^2}{2N_0}\Psi + \gamma\frac{N_0^2 - K_0^2}{2}]\right\} - \\ & - (\gamma - 1)^2\gamma^2(\gamma^2 - 1)\left(\frac{N_0^2 - K_0^2}{2N_0}\right)^2(1 + A_H)^2\delta\Delta_G^2 \pm v\gamma(\gamma^2 - 1)(\gamma - 1)^2 \times \\ & \times \left[-\gamma M^{-2}N_0\delta\tilde{\Delta}_\tau^* - \Psi\frac{K_0}{N_0}\gamma M^{-2}\delta\tilde{\Delta}_\tau^*\right], \end{aligned}$$

где  $\Psi = K_0 \mp v\gamma N_0 - (\gamma + 1)$ ,  $\tilde{\Delta}_\tau^* = \tilde{\Delta}_G^*$ .

В точке  $\Delta_S = \Delta_G = 0$  отношение давлений

$$\frac{p^+}{p^-} = \frac{K_0 \mp v\gamma N_0}{\gamma + 1} = 1,$$

откуда  $\Psi = 0$ . Тогда для идеальной жидкости при наличии малых расходных и геометрических воздействий уравнение (1.38) дает

$$\delta n \cong -\gamma(\gamma - 1)\frac{\delta\Delta_S - F(\delta\Delta_G)}{2\delta\Delta_S - F(\delta\Delta_G)}\delta\Delta_S,$$

где

$$F(\delta\Delta_G) = \left(\tau(M^-)\right)^{-1} \left\{ (1 + A_H)\delta\Delta_G + A_H\delta\Delta_G^2 - [(\gamma + 1)M^{-2} \left(\tau(M^-)\right)^{-1} \times \right. \\ \left. \times (1 + A_H)^2 / (1 - M^{-2})^2 \right] \delta\Delta_G^2 \left. \right\} + [1 + (\gamma - 1)M^{-2}] \delta\tilde{\Delta}_\tau^*; \quad M^{-2} = (M^-)^2.$$

Так как  $n = \gamma + \delta n$  и в окрестности точки  $(\Delta_S = 0, \Delta_G = 0)$ :

$\delta\Delta_S = \Delta_S$  и  $\delta\Delta_G = \Delta_G$  имеем

$$\varphi_p = \frac{\gamma - n}{(\gamma - 1)n\Delta_S} = \frac{\Delta_S - F(\Delta_G)}{\Delta_S(2 - (\gamma - 1)\Delta_S) - F(\Delta_G)(1 - (\gamma - 1)\Delta_S)}. \quad (2.75)$$

Соотношение (2.75) обобщает результаты (1.42), где: при  $\Delta_S = 0$  и  $\Delta_G \neq 0$ , или  $\Delta_G = 0$   $\Delta_S \neq 0$  -  $\varphi_p$  принимает значения либо 1, либо 1/2. В задачах истечения (затекания газа в зазор) следует брать  $A_H = 1$  и  $\tilde{\Delta}_\tau^* = 0$ , при истечении газа из зазора  $A_H$  определяется (задается) из внешних условий.

Замечание о корректности соотношения (2.75).

Строго говоря, в задачах истечения результат (2.75) должен быть следствием первого из уравнений (2.44) при условии, что второе слагаемое в левой части много меньше первого. Тогда названное уравнение сводится к (1.38), взятому за основу при выводе (2.75). В связи с этим целесообразна сравнительная оценка слагаемых в левой части первого уравнения (2.44). При использовании решения в аналитической форме для модели несжимаемой жидкости (2.51), (2.53) и (2.54), такая оценка даст

$$K = \left( \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{pk}} \frac{\partial \varphi_{pk}}{\partial \Delta_S} \Big/ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_p} \frac{\partial \varphi_p}{\partial \Delta_S} \right) \Big|_{\substack{\Delta_S=0 \\ \chi_k=0 \\ \lambda=\pi}} = \frac{\varepsilon_k^2 \bar{S}_k^2 \Delta_G^2 (2 - \Delta_G)}{|\Delta_G| + \varepsilon_k (1 - \varepsilon_k) \bar{S}_k^2 (2 - \Delta_G)}.$$

Так как  $|\Delta_G| \ll 2$   $K$  можно упростить и при любых возможных комбинациях ( $\varepsilon_k \ll 1$ ,  $\varepsilon_k \rightarrow 1$ ,  $\varepsilon_k \sim 0.5$ ) самая неблагоприятная оценка для  $K$  дает

$$K \sim \left| \bar{S}_k^2 \Delta_G \right|.$$

Учет сжимаемости в оценке вряд ли приведет к радикальным изменениям для  $\varphi_p$ . Например, для идеальной сжимаемой жидкости

$\varphi_p = 1/[2 - (\gamma - 1)\Delta_S]$  – (1.42), и для несжимаемой жидкости  $\varphi_p = 1/[2 - \Delta_S]$  – (1.50) в окрестности  $\Delta_S = 0$  дают практически совпадающие значения.

Эти оценки и рассуждения являются достаточным основанием для использования (2.75) при решении задачи о затекании (или истечении) газа в зазор между двумя соосными цилиндрами, где  $|\Delta_S| \ll 1$ ,  $|\Delta_G| \ll 1$ ,  $M^- \ll 1$  и  $K < 10^{-3}$ .

Вместе с уравнениями, необходимыми для определения расходного воздействия, уравнениями, описывающими состояние газа в канале и в кольцевом зазоре, соотношения (2.75) позволили свести исходную осесимметричную задачу газодинамических процессов в канале артиллерийского орудия к двум квазиодномерным течениям [26, 28, 33] и исследовать процессы обтюрации и условия защемления гильз в канале АО [22, Д4, Д5, 28, 29, 33, 34]. Следует заметить, что волновой характер процессов и исчезающий до нуля зазор при «работе» конструкции, делают практически невозможным осесимметричное численное моделирование процессов и является одной из иллюстраций утверждения [93] в преамбуле.

## 2.9. Выводы к Главе 2

1. Законы сохранения гидрогазодинамики в интегральной форме для течений в каналах при наличии локальных конечных по величине воздействий – здесь  $\Delta_S$ ,  $\Delta_{Gk}$  – приводят к незамкнутой системе уравнений. Анализ этой системы уравнений, с привлечением 2-го начала термодинамики, позволил построить замкнутую систему нелинейных алгебраических уравнений. Следствия привлечения 2-го начала термодинамики, в виде функций  $\varphi_p$ ,  $\varphi_{pk}$ , обладают свойством частных интегралов системы квазилинейных дифференциальных уравнений вида (2.44).

2. Качественный анализ шести математических моделей схем истечения газа из канала через боковые патрубки позволяет рассматривать схему истечения с отрывом потока в передней кромке как наиболее вероятную (схемы 1-2 Рис. 2.1, 2.2), а схему истечения со срывом потока с двух противоположных кромок патрубка (схема 5) – как возможную, при определенных условиях.

Истечение из канала с полным заполнением бокового патрубка ( $\varepsilon_k = 1$  – без срыва потока с кромок патрубка) – физически невозможно в условиях однонаправленного потока в канале (схема 6). В математических моделях,

использующих это допущение [83, 84], априори закладывается расхождение с практикой. Истечение из канала через боковой патрубок со срывом потока в задней кромке – маловероятно (схемы 3-4).

3. Течения в каналах с подводом массы через боковые патрубки не могут рассматриваться в рамках изэнтропических приближений.

## 2.10. Приложение к Главе 2

### 1) Коэффициенты уравнения (2.14)

$$\begin{aligned}
 & p_{\delta k} S_k n_{kr} [1 + q_{4k} n_{kx} / n_{kr} - \varphi_{pk} q_{3k} n_{kx} / n_{kr}] - p_{\sigma} [S_k^- n_{kr}^- + (1 - \varphi_{pk}) S_k q_{3k} n_{kx}] = \\
 & = p_{\delta k} S_k n_{kr} [1 + q_{4k} \frac{n_{kx}}{n_{kr}} - \varphi_{pk} q_{3k} \frac{n_{kx}}{n_{kr}}] - p_{\sigma} S_k n_{kr} [\frac{S_k^- n_{kr}^-}{S_k n_{kr}} + (1 - \varphi_{pk}) q_{3k} \frac{n_{kx}}{n_{kr}}]
 \end{aligned}$$

Рассматриваются внешне отличающиеся части коэффициентов при давлениях:

$$p_{\delta k} : 1 + q_{4k} \frac{n_{kx}}{n_{kr}} = \left\{ \begin{array}{l} 1 + (v_{1k} \bar{b}_k + v_{4k} \operatorname{tg} |\chi_k|) \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k) \\ 1 + (v_{1k} \bar{b}_k + 0 \cdot \operatorname{tg} |\chi_k|) \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k) \end{array} \right\} \quad (\text{см. табл. 2.1})$$

$$p_{\sigma} : \frac{S_k^- n_{kr}^-}{S_k n_{kr}} + q_{3k} \frac{n_{kx}}{n_{kr}} = \frac{\sin \lambda}{\cos \chi_k \sin(\lambda + \chi_k)} + q_{3k} \frac{n_{kx}}{n_{kr}} = \Rightarrow$$

$$\text{где } \frac{\sin \lambda}{\cos \chi_k \sin(\lambda + \chi_k)} = 1 - \operatorname{tg} \chi_k \cdot \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k),$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow & = 1 - \operatorname{tg} \chi_k \cdot \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k) + (v_{1k} \bar{b}_k + v_{3k} \operatorname{tg} |\chi_k|) \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k) = \\
 & = 1 + v_{1k} \bar{b}_k \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k) + \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{tg} \chi_k + 0 \cdot \operatorname{tg} |\chi_k| = \operatorname{tg} |\chi_k| \\ -\operatorname{tg} \chi_k + 1 \cdot \operatorname{tg} |\chi_k| = 0 \end{array} \right\} \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k).
 \end{aligned}$$

### 2) К выводу уравнения (2.16).

$$\begin{aligned}
 p^+ : & S^+ - S^+ \varphi_p \Delta_S + \varphi_p \sum_{k=1}^m \{ (S_k n_{kr}) [(1 - \varphi_{pk}) q_{3k} - \frac{S_k^- n_{kr}^-}{S_k n_{kr}}] + \\
 & + S_k \frac{k_{2k}}{k_{1k}} [\varepsilon_k n_{kx} + \varphi_{pk} q_{3k} n_{kr}] \} = S^+ \{ 1 - \varphi_p \Delta_S + \varphi_p \frac{S^-}{S^+} \sum_{k=1}^m \bar{S}_k \{ [(1 - \varphi_{pk}) q_{3k} n_{kr} - \\
 & - S_k^- n_{kr}^- / S_k] + \frac{k_{2k}}{k_{1k}} [\varepsilon_k n_{kx} + \varphi_{pk} q_{3k} n_{kr}] \} \} = \\
 & = S^+ \{ 1 - \varphi_p [\Delta_S - (1 - \Delta_S) \sum_{k=1}^m \bar{S}_k k_{3k}] \} = \sigma^+ = \sigma^-; \quad \text{таким образом}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3k} &= [(1 - \varphi_{pk})q_{3k}n_{kr} - S_k^- n_{kx}^- / S_k] + \frac{k_{2k}}{k_{1k}} [\varepsilon_k n_{kx} + \varphi_{pk} q_{3k} n_{kr}] = \dots = \\
&= \left[ \frac{\varepsilon_k q_{4k}}{\sin(\lambda + \chi_k)} + \frac{(1 - \varepsilon_k) \varphi_{pk} q_{3k}}{\sin(\lambda + \chi_k)} \right] / k_{1k}, \quad \text{где} \quad -\frac{S_k^- n_{kx}^-}{S_k n_{kr}} \pm \frac{n_{kx}}{n_{kr}} \text{ и} \\
&\quad -\frac{S_k^- n_{kx}^-}{S_k n_{kr}} + \frac{n_{kx}}{n_{kr}} = -\frac{\cos \lambda}{\cos \chi_k \sin(\lambda + \chi_k)} + \frac{\cos(\lambda + \chi_k)}{\sin(\lambda + \chi_k)} = \dots = -\operatorname{tg} \chi_k.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{\delta k} &: \quad \left(1 - \frac{k_{2k}}{k_{1k}}\right) [\varepsilon_k n_{kx} + \varphi_{pk} q_{3k} n_{kr}] + [(1 - \varepsilon_k) n_{kx} - q_{4k} n_{kr}] = \\
&= (k_{1k})^{-1} \{k_{1k} \cdot [(\varepsilon_k n_{kx} + \varphi_{pk} q_{3k} n_{kr}) + ((1 - \varepsilon_k) n_{kx} - q_{4k} n_{kr})] - \\
&\quad - k_{2k} [\varepsilon_k n_{kx} + \varphi_{pk} q_{3k} n_{kr}]\} = \dots = -\left[ \frac{\varepsilon_k q_{4k}}{\sin(\lambda + \chi_k)} + \frac{(1 - \varepsilon_k) \varphi_{pk} q_{3k}}{\sin(\lambda + \chi_k)} \right] / k_{1k} = -k_{3k}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha \varepsilon \rho v^2)_k &: \quad n_{kx} - \frac{(\varepsilon_k n_{kx} + \varphi_{pk} q_{3k} n_{kr})}{k_{1k}} = [n_{kx} k_{1k} - (\varepsilon_k n_{kx} + \varphi_{pk} q_{3k} n_{kr})] / k_{1k} = \dots \\
&\quad \dots = -\frac{\varphi_{pk} q_{3k}}{k_{1k} \sin(\lambda + \chi_k)} = k_{4k}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3k} &= \frac{S_k^- n_{kx}^-}{S_k n_{kr}} - (1 - \varphi_{pk}) \operatorname{tg} \chi_k \frac{n_{kr}}{n_{kx}} = \frac{\cos \lambda}{\cos \chi_k \cos(\lambda + \chi_k)} - \operatorname{tg} \chi_k \cdot \operatorname{tg}(\lambda + \chi_k) + \\
&\quad + \varphi_{pk} \operatorname{tg} \chi_k \cdot \operatorname{tg}(\lambda + \chi_k) = 1 + \varphi_{pk} \operatorname{tg} \chi_k \cdot \operatorname{tg}(\lambda + \chi_k).
\end{aligned}$$

$$+ S_k \frac{k_{2k}}{k_{1k}} [\varepsilon_k n_{kx} + \varphi_{pk} q_{3k} n_{kr}] = S^+ \{1 - \varphi_p \Delta_S + \varphi_p \frac{S^-}{S^+} \sum_{k=1}^m \bar{S}_k \{[(1 - \varphi_{pk}) q_{3k} n_{kr} -$$

### 3) К уравнению (2.25):

$$k_{1k} = 1 - \varphi_{pk} \operatorname{tg} \chi_k \cdot \frac{n_{kx}}{n_{kr}}, \quad k_{2k} = \frac{S_k^- \cdot n_{kr}^-}{S_k \cdot n_{kr}} + (1 - \varphi_{pk}) \cdot \operatorname{tg} \chi_k \cdot \frac{n_{kx}}{n_{kr}}$$

$$k_{2k} = \frac{S_k^- \cdot n_{kr}^-}{S_k \cdot n_{kr}} + (1 - \varphi_{pk}) \cdot \operatorname{tg} \chi_k \cdot \frac{n_{kx}}{n_{kr}} = \frac{\sin \lambda}{\cos \chi_k \sin(\lambda + \chi_k)} +$$

$$+ (1 - \varphi_{pk}) \cdot \operatorname{tg} \chi_k \cdot \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k) = 1 - \operatorname{tg} \chi_k \cdot \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k) +$$

$$+ (1 - \varphi_{pk}) \cdot \operatorname{tg} \chi_k \cdot \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k) = 1 - \varphi_{pk} \cdot \operatorname{tg} \chi_k \cdot \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k) = k_{1k}.$$

### 4) К определению величин $\varphi_p$ , $\varphi_{pk}$

$$(3.51) - (3.52): \quad \sigma_p^{(2)} - \sigma_p = 0 =$$

$$= 2Eu^- + 2 \frac{(1 - \Delta_S)(\tilde{\delta}^* + C_1 \Delta_S)}{1 - \Delta_S \varphi_p (1 + \Phi(\chi_k)) + \varphi_p \Phi(\chi_k)} + C_1 (1 - \Delta_S)^2 - 2Eu^- - C_1 - 2\delta;$$

$$1 - \Delta_S \varphi_p (1 + \Phi(\chi_k)) + \varphi_p \Phi(\chi_k) \neq 0, \quad \tilde{\delta}^* - \delta = -\Psi(\chi_k), \quad \delta = \alpha^- - \Delta_\tau - C_1;$$

$$0 = -2\Psi(\chi_k) - \varphi_p [2\delta + C_1 \Delta_S (2 - \Delta_S)] \Phi(\chi_k) + \Delta_S \cdot \{-2\tilde{\delta}^* - C_1 \Delta_S -$$

$$- \varphi_p (1 + \Phi(\chi_k)) [-2\delta - C_1 \Delta_S (2 - \Delta_S)]\}.$$

После упрощения выражения в фигурных скобках и учитывая независимость переменных  $\Delta_S$  и  $\chi_k$  приходим к 2-м группам уравнений.

### 5) К выводу уравнений (2.56)

$$\frac{p^+}{p^-} = 1 + \frac{(1 - \Delta_S)(\tilde{\delta}^* + C_1 \Delta_S)}{Eu^- (1 - \varphi_p (\Delta_S - k_5))}. \quad \text{Комбинация величин}$$

$$\frac{(1 - \Delta_S)(\tilde{\delta}^* + C_1 \Delta_S)}{1 - \varphi_p [\Delta_S - (1 - \Delta_S) \sum_{k=1}^m \bar{S}_k k_{3k}]} = \frac{[1]}{[2]}.$$

$$[1] = (1 - \Delta_S)(\tilde{\delta}^* + C_1\Delta_S): \quad \tilde{\delta}^* = \alpha^- - C_1 - \tilde{\Delta}_G^* = \alpha^- - C_1 - \Delta_\tau - \Delta_G^* = \delta - \Delta_G^*,$$

$$\Delta_G^* = \left[ \sum_{k=1}^m [(\alpha\varepsilon\bar{S}\mu^2)_k] k_{4k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (\mu_k^2 - 1)(\bar{S}_k k_{3k}) \right].$$

Для сокращения записи примем: во всех патрубках все одинаковое, т.е.

$$\Delta_G^* = (\alpha\varepsilon\bar{S}\mu^2)_k \bar{S}_m k_{4k} + \frac{1}{2} (\mu_k^2 - 1) \bar{S}_m k_{3k}, \quad \sum_{k=1}^m \bar{S}_k = \bar{S}_m.$$

и введем обозначения (только для приложения!):

$$Q_k = Q_{1k} \sin(\lambda + \chi_k) - Q_{2k} \cos(\lambda + \chi_k), \quad Q_{2k} = [2\delta + C_1 + (\mu_k^2 - 1)\bar{S}_m],$$

$$Q_{1k} = 2(\alpha\varepsilon\mu^2)_k \bar{S}_m - (1 - \varepsilon_k)[2\delta + C_1 + (\mu_k^2 - 1)\bar{S}_m], \quad Q_{3k} = 2(\alpha\varepsilon\mu^2)_k \bar{S}_m.$$

Теперь, ф-лы (2.54)

$$\Delta_G^* = \bar{S}_m [(\alpha\varepsilon\mu^2)_k k_{4k} + \frac{1}{2} (\mu_k^2 - 1) k_{3k}] = \frac{1}{2} [-Q_{3k} \frac{\bar{x}'_k Q_{2k}}{Q_k} + (\mu_k^2 - 1) \bar{S}_m \frac{\bar{x}'_k Q_{3k}}{Q_k}] =$$

$$= -\frac{\bar{x}'_k Q_{3k} (2\delta + C_1 \Delta_S)}{2Q_k}; \quad \tilde{\delta}^* = \delta - \Delta_G^* = \delta + \frac{\bar{x}'_k Q_{3k} (2\delta + C_1 \Delta_S)}{2Q_k}.$$

$$[1] = (1 - \Delta_S)(\tilde{\delta}^* + C_1\Delta_S) = \frac{(1 - \Delta_S)[2(\delta + C_1\Delta_S)Q_k + \bar{x}'_k Q_{3k} (2\delta + C_1\Delta_S)]}{2Q_k}.$$

$$[2] = 1 - \varphi_p [\Delta_S - (1 - \Delta_S) \sum_{k=1}^m \bar{S}_k k_{3k}]:$$

$$1 - \varphi_p [\Delta_S - (1 - \Delta_S) \sum_{k=1}^m \bar{S}_k k_{3k}] = 1 - \frac{(2\delta + C_1\Delta_S)}{2\delta + C_1\Delta_S (2 - \Delta_S)} \cdot \frac{\Delta_S Q_k - (1 - \Delta_S) \bar{x}'_k Q_{3k}}{Q_k} =$$

$$= \frac{Q_k [2\delta + C_1\Delta_S (2 - \Delta_S)] - (2\delta + C_1\Delta_S) [\Delta_S Q_k - (1 - \Delta_S) \bar{x}'_k Q_{3k}]}{Q_k [2\delta + C_1\Delta_S (2 - \Delta_S)]} =$$

$$= \frac{(1 - \Delta_S) [2(\delta + C_1\Delta_S) Q_k + (2\delta + C_1\Delta_S) \bar{x}'_k Q_{3k}]}{Q_k [2\delta + C_1\Delta_S (2 - \Delta_S)]}.$$

$$\frac{[1]}{[2]} = \frac{(1 - \Delta_S)(\tilde{\delta}^* + C_1\Delta_S)}{1 - \varphi_p [\Delta_S - (1 - \Delta_S) \sum_{k=1}^m \bar{S}_k k_{3k}]} = \frac{2\delta + C_1\Delta_S (2 - \Delta_S)}{2}.$$



потерям и соотношение (2.57) дают возможность определить  $\Delta_\tau$ ). Впредь в задачах истечения принимается

$$\Delta_{\tau k} = 0, \quad \alpha_k = \alpha^- = 1$$

и предполагается равенство давлений  $p_k = p_{\delta k} = p_a$ .

Перечисленные выше соотношения и гипотезы составляют математическую модель явления:

$$1. (\varepsilon \rho v^2)_k = k_{2k} (p_\sigma - p_a), \quad (3.1)$$

$$2. k_{2k} = 1 + \bar{x}'_k \cdot \frac{2(\alpha \varepsilon \mu^2)_k - (\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1 \Delta_S)}{2(\alpha \varepsilon \mu^2)_k - (1 - \varepsilon_k) \cdot (\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1 \Delta_S)} \cdot \text{ctg}(\lambda + \chi_k),$$

$$3. \bar{x}'_{D_k} = \frac{1}{2} \varepsilon_k \sin^2 \alpha_k,$$

$$\alpha_k - \sin \alpha_k \cos \alpha_k = 2 \frac{1 - \varepsilon_k}{\varepsilon_k}.$$

$$4. \frac{p_\sigma}{p^-} = 1 + \frac{2\delta + C_1 \Delta_S}{2Eu^-}, \quad Eu^- = \frac{p^-}{(\rho v^2)^-}, \quad \Delta_S = 1 - \frac{S^-}{S^+},$$

$$\delta = 1 - C_1 - \Delta_\tau = -\Delta_G (2 + \Delta_G) - \Delta_\tau, \quad \Delta_G = -\varepsilon_k \bar{S}_k \frac{v_k}{v^-}.$$

5.  $p_0^- \cong p_{0k}$  — следует из допущения  $\Delta_{\tau k} = 0$  (т. е. для трубки тока с ускоряющимся потоком, уходящей в боковой патрубков);

6. Диссипативные потери, сопровождающие торможение расширяющегося потока в транзитной трубке тока при отводе массы из канала, могут внести заметную поправку в величину давления в зоне перестройки потока  $p_\sigma$  и, соответственно, в величину расхода через патрубок. Проводя аналогию с расширением потока на скачке площади канала (см. (1.33), (1.51)), названные потери можно приближенно учесть в величине  $2\delta = 2(1 - C_1) - 2\Delta_\tau$  при условии  $v^+ / v^- < 1$ :

$$-2\Delta_\tau = -\Delta'_S{}^2 \quad \text{где} \quad \Delta'_S = 1 - S^- (1 + \Delta_G) / S^+ = 1 - (1 + \Delta_G)(1 - \Delta_S)$$

Впредь, это условие реализуется в виде  $1 - (1 + \Delta_G)(1 - \Delta_S) > 0$ .

Соотношение 5. (3.1) позволяет записать для трубки тока  $\sigma_{Tk}$

$$\frac{v_{nk}^2}{2} + \frac{p_a}{\rho} = \frac{v^{-2}}{2} + \frac{p^-}{\rho}, \quad \text{откуда } \mu_k = \frac{v_{nk}}{v^-} = \sqrt{1 + 2Eu^- \left(1 - \frac{p_a}{p^-}\right)} \quad (3.2)$$

$\mu_k$  – комплексный гидродинамический параметр, составленный по исходным данным задачи (при необходимости здесь могут быть учтены гидравлические потери в виде экспериментальных данных).

Теперь расходное воздействие  $\Delta_G$  принимает вид

$$\Delta_G = -\varepsilon_k \bar{S}_m \mu_k, \quad (3.3)$$

а уравнение движения (3.1) —

$$2(\varepsilon \mu^2)_k = k_{2k} (2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1).$$

Промежуточный параметр  $2\delta$ , комплекс параметров  $2\delta + \Delta_S C_1$  и всю задачу удобно свести к зависимости от двух неизвестных: угла  $\alpha_k$  и  $\varepsilon_k$ .

$$1. \quad (3.4)$$

$$2\delta = -2\Delta_G(2 + \Delta_G) - 2\Delta_\tau =$$

$$= 2\varepsilon_k \bar{S}_m \mu_k (2 - \varepsilon_k \bar{S}_m \mu_k) - D_1 \left[ 1 - (1 - \varepsilon_k \bar{S}_m \mu_k)(1 - \Delta_S) \right]^2$$

$$2. \quad (3.5)$$

$$2\delta + \Delta_S C_1 = -2\Delta_G(2 + \Delta_G) + \Delta_S(1 + \Delta_G)^2 - D_1 \left[ 1 - (1 + \Delta_G)(1 - \Delta_S) \right]^2 =$$

$$= 2\varepsilon_k \mu_k \bar{S}_m (2 - \varepsilon_k \mu_k \bar{S}_m) + \Delta_S (1 - \varepsilon_k \mu_k \bar{S}_m)^2 - D_1 \left[ \Delta_S + (1 - \Delta_S) \varepsilon_k \mu_k \bar{S}_m \right]^2$$

В итоге, уравнение движения приводится к виду:

$$\left\{ 2\varepsilon_k \mu_k^2 - (2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1) - f_k (2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1) \right\} = 0, \quad (3.6)$$

$$f_k = k_{2k} - 1 = \text{ctg}(\lambda + \chi_k) \frac{[2\varepsilon_k \mu_k^2 - (2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1)] \cdot \varepsilon_k \sin^2 \alpha_k}{2\varepsilon_k \mu_k^2 - (1 - \varepsilon_k)(2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1)},$$

и, совместно с уравнением (3.7) образуют систему уравнений

$$\alpha_k - \sin \alpha_k \cos \alpha_k = 2 \frac{1 - \varepsilon_k}{\varepsilon_k}. \quad (3.7)$$

Решение системы уравнений (3.6 и 3.7) позволяет определить коэффициент поджатия потока в боковом ответвлении  $\varepsilon_k$  и область действия давления  $P_{\sigma k}$  - величину  $\bar{x}'_{Dk}$  (рис. 3.1) как функции комплексного гидродинамического параметра  $\mu_k$  и геометрических характеристик канала  $\Delta_S$ ,  $\lambda$  и патрубка  $\chi_k$ ,  $\bar{S}_m$ .

Ниже, в расчетах, используется множитель

$$D_1 = \begin{cases} 1, & \text{если учитываются потери в канале и} \\ 1 - (1 - \Delta_S)(1 - \varepsilon_k \mu_k \bar{S}_m) > 0, & \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В частном случае  $\lambda + \chi_k = \pi / 2$  - патрубок ортогонален оси канала - система уравнений (3.6, 3.7) распадается на два уравнения, решаемых поочередно, причем первое из них сводится к квадратному уравнению (3.8)

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^2 \left[ (2 - \Delta_S) + D_1 (1 - \Delta_S)^2 \right] \bar{S}_m^2 \mu_k^2 - 2 \varepsilon_k [(2 - \Delta_S) \bar{S}_m - \mu_k + \\ + D_1 \Delta_S (1 - \Delta_S) \bar{S}_m] \mu_k - (\mu_k^2 - 1 + \Delta_S - D_1 \Delta_S^2) = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

с решением (3.9)

$$\begin{aligned} \varepsilon_k = \frac{(2 - \Delta_S) \bar{S}_m - \mu_k + D_1 \Delta_S (1 - \Delta_S) \bar{S}_m}{\left[ (2 - \Delta_S) + D_1 (1 - \Delta_S)^2 \right] \bar{S}_m^2 \mu_k} + \\ + \sqrt{\left( \frac{(2 - \Delta_S) \bar{S}_m - \mu_k + D_1 \Delta_S (1 - \Delta_S) \bar{S}_m}{\left[ (2 - \Delta_S) + D_1 (1 - \Delta_S)^2 \right] \bar{S}_m^2 \mu_k} \right)^2 + \frac{\Delta_S + (\mu_k^2 - 1) - D_1 \Delta_S^2}{\left[ (2 - \Delta_S) + D_1 (1 - \Delta_S)^2 \right] \bar{S}_m^2 \mu_k^2}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Отсюда (3.8): при:  $\bar{S}_m \rightarrow 0$ , что соответствует  $S^- = S^+ \rightarrow \infty$  и  $\Delta_S = 0$ , имеем истечение из безграничного полупространства:

$$\varepsilon_k = \frac{\mu_k^2 - 1}{2\mu_k^2},$$

что дает при  $\mu_k = 1$  (т.е.  $p_a = p^-$  – нет перепада давления)  $\varepsilon_k = 0$  – результат, совпадающий с [3], а при  $\mu_k \rightarrow \infty$  ( $\mu_k = v_k/v^-$  т.е.  $v^- \rightarrow 0$  – истечение из безграничного полупространства, занятого неподвижной жидкостью) приводит к известному результату  $\varepsilon_k = 1/2$ .

Далее, непосредственно из уравнения (3.8) следует, что в канале постоянного сечения  $\Delta_S = 0$  при  $\mu_k = 1$  ( $p_a = p^-$ ) при любых размерах патрубка  $\bar{S}_m$  —  $\varepsilon_k = 0$  – нет истечения через патрубок. Для канала переменного сечения этот вывод корректируется. Если в расширяющемся канале ( $1 > \Delta_S > 0$ ,  $D_1 = 1$ ) при условии  $\mu_k^2 \geq 1 - \Delta_S + \Delta_S^2$  истечение через патрубок может продолжаться даже при  $\mu_k < 1$  (т. е. при  $p^- < p_a$ ), то в сужающемся канале ( $\Delta_S < 0$ ,  $D_1 = 1$ ), наоборот, требуемый для обеспечения истечения перепад давлений должен быть увеличен ( $\mu_k > 1$  в сравнении со случаем  $\Delta_S = 0$ ).

Найденные значения  $\varepsilon_k(\mu_k, \Delta_S, \lambda, \chi_k, \bar{S}_m)$  и  $\bar{x}'_{Dk}(\mu_k, \Delta_S, \lambda, \chi_k, \bar{S}_m)$  позволяют, предварительно определив:  $\Delta_G = -\varepsilon_k \bar{S}_m \mu_k$ ,  $\varphi_p$  по (2.53) и  $\varphi_{pk}$  по (2.54), – рассчитать по (2.56) гидродинамические параметры в сечении  $S^+$  канала и средние давления  $p_\sigma$  на боковую стенку канала  $\sigma$ ,  $p_{\sigma k}$  – давление струи на стенку патрубка ( $CB$  на рис.3.1). Перечисленные уравнения представлены ниже, при этом комплексы величин  $2\delta$  и  $2\delta + \Delta_S C_1$  описаны в (3.4, 3.5).

$$1. \varphi_p = \frac{2\delta + C_1 \Delta_S}{2\delta + C_1 \Delta_S (2 - \Delta_S)}, \quad 2. \bar{x}'_k = \varepsilon_k \cdot \frac{\sin^2 \alpha_k}{2}, \quad (3.10)$$

$$3. \varphi_{pk} = \frac{\bar{x}'_k}{\bar{x}'_k + \operatorname{tg} \chi_k} \cdot \frac{\varepsilon_k \cdot (2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1)}{2(\alpha \varepsilon \mu^2)_k - (1 - \varepsilon_k)(2\delta + C_1 \Delta_S + \mu_k^2 - 1)};$$

$$4. \frac{v^+}{v^-} = (1 - \Delta_S)(1 + \Delta_G), \quad 5. \frac{p^+}{p^-} = 1 + \frac{2\delta + C_1 \Delta_S (2 - \Delta_S)}{2Eu^-};$$

$$6. \frac{p_\sigma}{p^-} = 1 + \frac{2\delta + C_1 \Delta_S}{2Eu^-}, \quad 7. \frac{p_{\sigma k}}{p^-} = \varphi_{pk} \cdot \frac{p_k}{p^-} + (1 - \varphi_{pk}) \cdot \frac{p_\sigma}{p^-}.$$

Соотношения (3.5 – 3.7 и 3.10) описывают в терминах средне интегральных величин в квазиодномерном приближении истечение несжимаемой жидкости из канала в среду с заданными параметрами в широком диапазоне конструктивных и гидродинамических параметров. Модель позволяет оценить диссипативные потери в канале ( $D_1=1$ ) и коррелирует со всеми известными сведениями в доступных источниках, имеющих отношение к рассматриваемой задаче. Для ортогональных к оси патрубков модель допускает полностью аналитическое решение.

Ниже приводятся некоторые результаты расчетов, дающих достаточно полное представление о возможностях модели и степени влияния учитываемых факторов (рис. 3.2 ÷ 3.5). Рост отношения скоростей  $\mu_k = v_{nk}/v^-$  (или, что то же самое, увеличение перепада давлений  $p^-$  и  $p_a$ ) увеличивает ”чувствительность” потока к углу отвода массы (рис. 3.2). Здесь же для сравнения приведено значение  $\varepsilon_k$  по гипотезе [83, 84] – кривая 5.

Подобным же образом влияет  $\mu_k$  и при истечении несжимаемой жидкости через боковое ответвление из бесконечного полупространства [3]. Рост поперечного сечения патрубка  $\bar{S}_m$  сопровождается ростом коэффициента поджата  $\varepsilon_k$  вплоть до полного отвода массы из сечения  $S^-$  ( $\Delta_G = -1$ ) (рис.3.3). Дальнейший рост  $\bar{S}_m$  сопровождается падением  $\varepsilon_k$ , вплоть до нуля при  $\bar{S}_m \rightarrow \infty$ . В окрестности малых значений величин  $(\mu_k - 1)$  коэффициент поджата весьма чувствителен к величине  $\bar{S}_m$  (рис. 3.4). Это различие сглаживается с ростом  $\mu_k$ . Расширение (или сужение) канала, как и следовало ожидать, приводит к росту  $\varepsilon_k$  и расхода  $\Delta_G$  (или уменьшению его) (рис. 3.5) вследствие очевидного роста перепада давлений  $p_\sigma - p_a$  в расширяющемся канале в первом случае и падения – во втором (см. ур-е (3.1)).

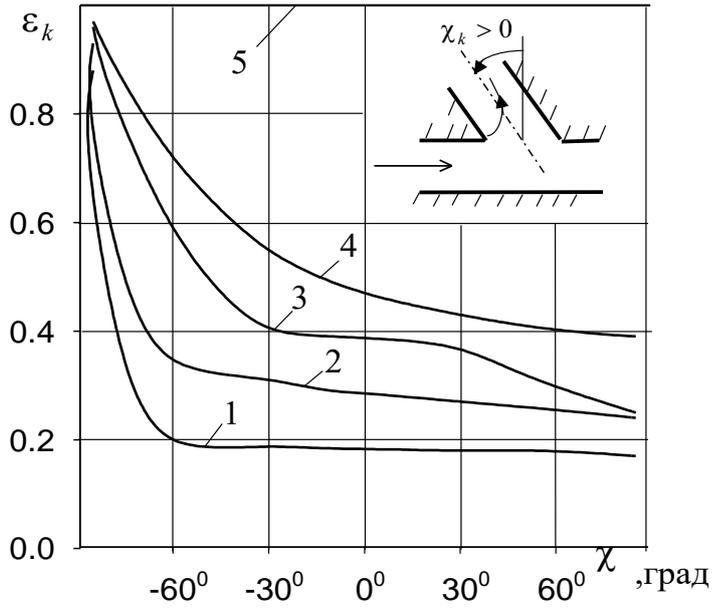


Рис. 3.2 Влияние угла отвода массы и канала  $\chi_k$  на коэффициент поджатия струи  $\varepsilon_k$  в боковом патрубке.

$$\Delta_S = 0, \bar{S}_m = 0.1; \mu_k = 1.2,$$

1.4, 1.8, 3.0 для кривых 1 – 4

соответственно. 5 –  $\varepsilon_k$  по гипотезе [83, 84].

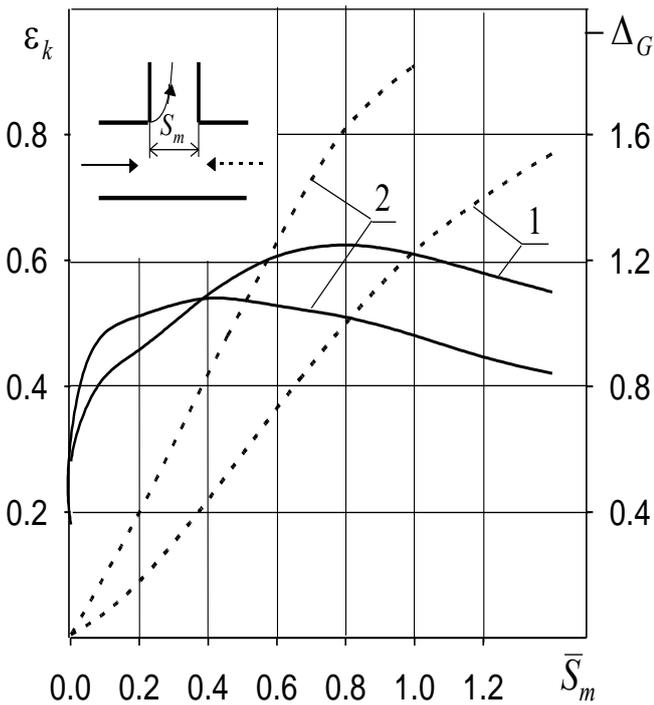


Рис.3.3

Влияние размера отверстия  $\bar{S}_m$

$\Delta_S = 0, \chi_k = 0; 1 - \mu_k = 2,$

$2 - \mu_k = 4; \text{ — } - \varepsilon_k,$

$\text{---} - \Delta_G$

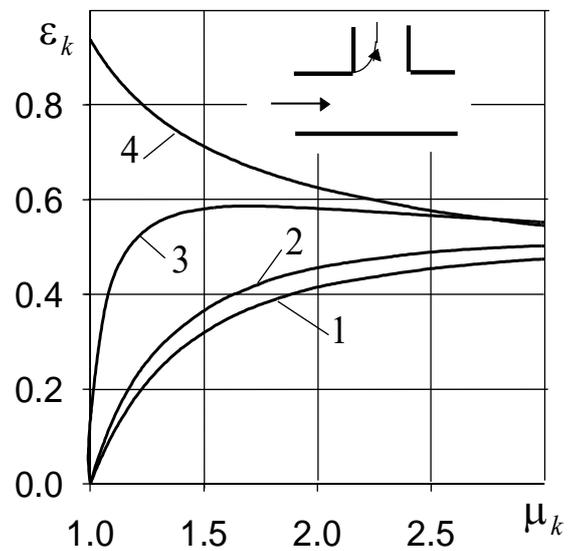


Рис. 3.4

$\Delta_S = 0, \chi_k = 0;$

$\bar{S}_m = 0.1; 0.2; 0.5; 0.8 - \text{ для}$

кривых 1 – 4.

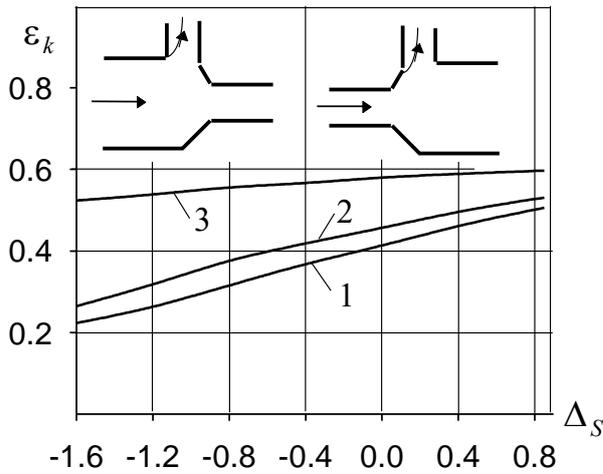


Рис. 3.5 Коэффициент поджатия струи  $\epsilon_k$  в боковом патрубке в расширяющемся ( $\Delta_S > 0$ ) и сужающемся ( $\Delta_S < 0$ ) канале.

$\mu_k = 2, \lambda + \chi_k = \pi/2, \bar{S}_m = 0.1, 0.2,$   
 0.5— для кривых 1 – 3.

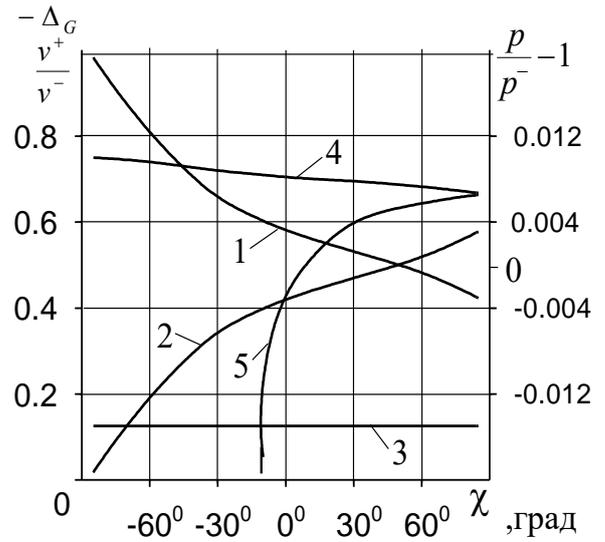


Рис.3.6 Гидродинамические параметры при отводе массы через наклонный патрубок  $\Delta_S = 0, (\varphi_p = 1, p_\sigma = p^+)$ ;  $\bar{S}_m = 0.5, \mu_k = 2$

1 –  $\Delta_G (= \epsilon_k)$ ; 2 –  $v^+/v^-$ ;

3 –  $p_{\delta k}/p^- - 1$ ; 4 –  $p_\sigma/p^- - 1$ ;

5 –  $p_{\sigma k}/p^- - 1$ .

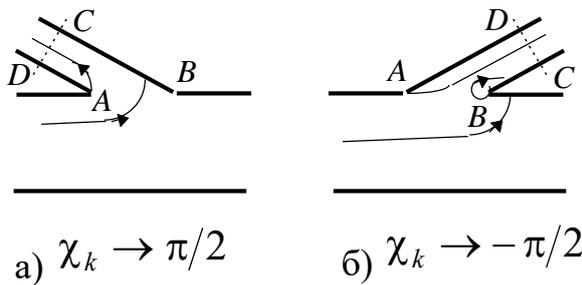


Рис. 3.7 Предполагаемые картины течения для предельных положений боковых патрубков.

На рис. 3.6 приведена детальная характеристика одного из характерных вариантов расчета по соотношениям (3.5), (3.6) и (2.56). При этом расход  $\Delta_G$  падает при отклонении оси патрубка навстречу потоку; давление  $p_\sigma = p^+$  (т.к. при  $\Delta_S = 0 \quad \varphi_p = 1$  и  $p_\sigma = p^+$ ) уменьшается – при меньшем отводе массы поток в транзитной трубке тока тормозится в меньшей степени;  $p_{\sigma k} \rightarrow p_\sigma$  при

$\chi_k \rightarrow \pi/2$ , когда поверхность патрубка  $CB$  практически сливается с боковой поверхностью канала  $\sigma$  (рис. 3.7 а). При этом коэффициент поджатия мал, а разделительная линия тока транзитного потока и потока в патрубок, предположительно, выходит на поверхность  $CB$ . В области углов  $\chi < 0$   $p_{\sigma k}$  сначала принимает значения  $p_{\sigma k} = p_k$ , а затем уходит в область значений  $p_{\sigma k} < p_k$ , что может быть объяснено смещением критической точки с поверхности  $CB$  на поверхность  $\sigma$  с последующим обтеканием частью потока в трубке тока  $\sigma_{Tk}$  острого угла  $B$  (рис. 3.7 б). При этом возможен отрыв потока с образованием замкнутых локализованных в окрестности т.  $B$  зон отрыва. Подобная трактовка течения согласуется с результатами полученных здесь расчетов и наблюдалась в точных решениях при истечении плоского потенциального потока из бесконечного полупространства через боковое ответвление [3].

Условие существования решения  $\varepsilon_k \geq 0$  может быть получено из (3.6). Принимая в (3.6)  $\varepsilon_k = 0$  и, как следствие  $f = 0$ , имеем

$$\mu_k^2 \geq 1 - \Delta_S + D_1 \Delta_S^2 \quad \text{или} \quad \frac{2(p^- - p_k)}{\rho v^{-2}} \geq -\Delta_S + D_1 \Delta_S^2. \quad (3.11)$$

Напомним, что условие  $D_1 = 1$  «работает» лишь для замедляющихся потоков в транзитной трубке тока. Но, для  $\varepsilon_k \cong 0$  в канале постоянного сечения  $\Delta_S = 0$ , скорость потока практически не меняется. Отсюда, независимо от принятой модели (идеальная или вязкая) жидкости, существование решения  $\varepsilon_k \geq 0$  связано с условием  $\mu_k^2 \geq 1$ . В расширяющемся канале геометрический фактор ( $\Delta_S > 0$ ) и диссипативный действуют в противоположных направлениях по отношению к давлению  $p_\sigma$ . Первый увеличивает его и, соответственно, перепад давлений  $p_\sigma - p_k$ , что снижает требования к величине  $\mu_k^2$  вплоть до значений  $\mu_k^2 \leq 1$ ; второй действует в противоположном направлении и, казалось бы, полностью нивелирует эффективность первого (см. (3.11)). На деле, последнее слагаемое в (3.11) лишь «обозначает» фактор диссипации, а не его величину и в (3.11) при  $\varepsilon_k \cong 0$  следует писать  $\mu_k^2 \geq 1 - \Delta_S + D_1 \Delta_S^2$ , где согласно б.(3.1)

$2\Delta_\tau = \Delta_S^2$ . В сужающихся каналах  $\Delta_S < 0$  среднее давление падает, что требует для реализации истечения больших значений  $\mu_k^2$ . При этом, в принятой математической модели  $D_1 = 0$ .

### 3.1.2. Истечение через ”длинный” патрубок

При решении задачи используются допущения:

- внутри зоны перестройки потока от сечения  $S^-$  до  $S^+$  и  $S_k$  используются уравнения и гипотезы предыдущего пункта (3.1.1);
- на границе  $S_k$  зоны перестройки условие  $p_{\delta k} = p_a$  заменяется связью давления в зоне отрыва и в минимальном сечении струи –  $p_{\delta k}$  с давлением в той среде, куда происходит истечение –  $p_2$ . Названные давления отличаются, по меньшей мере, на величину потерянного напора. Для этой цели используются:

интеграл Бернулли для реальной жидкости и уравнение неразрывности для участка патрубка между сечениями  $S_k$  и  $S_{2k}$

$$\frac{v_k^2}{2} + \frac{p_k}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + (h_1 + h_2)g,$$

$$\varepsilon_k v_k = v_2,$$

где  $h_1 = \xi_1 \frac{v_k^2}{2g}$ ,  $h_2 = \xi_2 \frac{v_2^2}{2g}$  – потери напора на расширении потока от сечения

$\varepsilon_k S_k$  до  $S_{1k}$  и на длине патрубка  $l_2$  за счет распределенных по длине потерь;  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – эмпирические коэффициенты гидравлических потерь на соответствующих участках. Отсюда следует связь между гидродинамическими параметрами

Условия 5 (3.1) и перечисленные выше соотношения позволяют записать

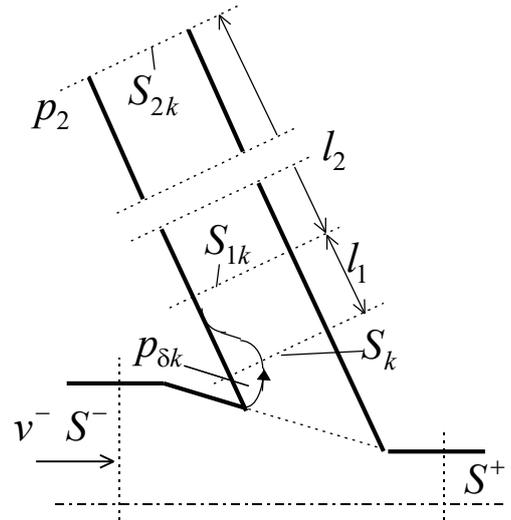


Рис. 3.8 Схема канала с ”длинным” патрубком

$$\frac{v_2^2}{v^{-2}} = \mu_2^2 = \frac{\mu_2^{02}}{1 + \xi}, \quad \mu_2^{02} = 1 + 2Eu^{-} \left( 1 - \frac{p_2}{p^-} \right),$$

где  $\mu_2^0$  - отношение скоростей, реализуемое при отсутствии гидравлических потерь по длине патрубка, начиная с минимального сечения

$$\xi = \xi_1 \frac{v_k^2}{v_2^2} + \xi_2 = \xi_1 \frac{1}{\varepsilon_k^2} + \xi_2 ;$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{p_{\delta_k}}{p^-} &= 1 - \frac{p_2}{p^-} - \frac{\rho(v_2^2 - v_k^2) + \rho v_2^2 \xi}{2p^-} = 1 - \frac{p_2}{p^-} - \frac{v_2^2}{v^{-2}} \frac{1}{2Eu^{-}} \left( \frac{\varepsilon_k^2 - 1}{\varepsilon_k^2} + \xi \right) \\ &= \frac{1}{2Eu^{-}} \left[ \mu_2^{02} - 1 - \frac{\mu_2^{02}}{1 + \xi} \left( \frac{\varepsilon_k^2 - 1}{\varepsilon_k^2} + \xi \right) \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

после чего уравнение движения в (3.1)

$$\varepsilon_k \mu_k^2 = (1 + f_k) Eu^{-} \left\{ \frac{p_\sigma}{p^-} - 1 + \frac{1}{2Eu^{-}} \left[ \mu_2^{02} - 1 - \frac{\mu_2^{02}}{1 + \xi} \left( \frac{\varepsilon_k^2 - 1}{\varepsilon_k^2} + \xi \right) \right] \right\},$$

$$\text{где } \mu_k^2 = \frac{\mu_2^{02}}{\varepsilon_k^2 (1 + \zeta_1 / \varepsilon_k^2 + \zeta_2)} \quad (3.13)$$

Ниже, для краткости, используется обозначения:

$$\zeta = \frac{\zeta_1}{\varepsilon_k^2} + \zeta_2 \quad \text{и} \quad \zeta = \frac{D_2 \zeta_1}{\varepsilon_k^2} + D_3 \zeta_2, \quad \text{где можно принять } \zeta_1 = (1 - \varepsilon_k)^2 \text{ [58], а } \zeta_2$$

рассматривается как варьируемый параметр, зависящий от длины участка  $l_2$ , закона движения жидкости, степени шероховатости и т. п.  $D_i$  - обобщенная функция (здесь со свойствами дельты Кронекера); используется для комбинирования состава математической модели с целью оценки вклада диссипативных потерь на разных участках потока в канале.

$$D_i = \begin{cases} 1 & - \text{ для учета гидравлических потерь} \\ & \text{на } i\text{-том участке потока,} \quad i = \overline{1, 3}. \\ 0 & - \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Первое из допущений и соотношение (3.13) позволяют выстроить следующую схему решения задачи. В уравнении (3.6) неизвестный теперь внутренний параметр  $\mu_k$ , с помощью (3.13), выражается через внешний известный параметр  $\mu_2$  (индекс «0» опущен), после чего названное уравнение, совместно с (3.7), образуют систему уравнений относительно  $\varepsilon_k$ ,  $\alpha_k$  с аргументами и параметрами  $(\mu_2, \Delta_S, \lambda, \chi_k, \bar{S}_m, D_1, D_2, D_3, \zeta_2)$ . Элементарные преобразования, в частности, для комплекса

$$(2\delta + \Delta_S C_1 + \mu_k^2 - 1) \varepsilon_k^2 (1 + \zeta) = G \varepsilon_k^2 + \mu_2^2, \quad (3.14)$$

где

$$G = 2\mu_2 \bar{S}_m (2\sqrt{1+\zeta} - \mu_2 \bar{S}_m) + \Delta_S (\sqrt{1+\zeta} - \mu_2 \bar{S}_m)^2 - (1+\zeta) - \\ - D_1 \left[ \sqrt{1+\zeta} - (1-\Delta_S) (\sqrt{1+\zeta} - \mu_2 \bar{S}_m) \right]^2; \quad \zeta = D_2 \frac{(1-\varepsilon_k)^2}{\varepsilon_k^2} + D_3 \zeta_2$$

приводят уравнение (3.6) к виду:

$$2\varepsilon_k \mu_2^2 - \varepsilon_k^2 G - \mu_2^2 - f_k (\varepsilon_k^2 G + \mu_2^2) = 0, \\ f_k = \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k) \cdot \frac{2\varepsilon_k \mu_2^2 - (\varepsilon_k^2 G + \mu_2^2)}{2\varepsilon_k \mu_2^2 - (1-\varepsilon_k)(\varepsilon_k^2 G + \mu_2^2)} \cdot \frac{\varepsilon_k \sin^2 \alpha_k}{2} \quad (3.15)$$

$$(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)_k = 2 \frac{1-\varepsilon_k}{\varepsilon_k}. \quad (3.7)$$

Уравнения (3.7, 3.15) решаются совместно относительно  $\varepsilon_k$ ,  $\alpha_k$ , определяется  $\bar{x}'_{Dk} = (\varepsilon_k \sin^2 \alpha_k) / 2$ , после чего, для определения остальных гидродинамических параметров можно поступать двояко. Уравнения (3.10) с помощью (3.13) свести к зависимости от  $\mu_2$  или, по известным теперь  $\varepsilon_k$ ,  $\mu_2$ ,  $\zeta(\varepsilon_k)$  по (3.13) вычислить  $\mu_k$  и использовать (3.10) ничего в них не меняя.

$$\mu_k^2 = \frac{\mu_2^2}{\varepsilon_k^2 (1 + D_2 \cdot \zeta_1 / \varepsilon_k^2 + D_3 \cdot \zeta_2)} = \frac{\mu_2^2}{\varepsilon_k^2 (1 + D_3 \cdot \zeta_2) + D_2 \cdot (1 - \varepsilon_k)^2} \quad (3.16)$$

Таким образом, специфика задачи об истечении из канала через длинный патрубок, в сравнении с истечением через короткий, сводится к замене решения системы уравнений (3.6, 3.7) системой уравнений (3.15, 3.7) с большим числом параметров  $(\mu_2, \Delta_S, \lambda, \chi_k, \bar{S}_m, D_1, D_2, D_3, \zeta_2)$ , где  $\mu_2$  и  $\mu_k$  связаны соотношением (3.13).

Уравнение (3.15) для ортогонального к оси патрубка решается независимо от (3.7), а пренебрегая потерями в патрубке при расширении потока от минимального сечения до полного заполнения сечения ( $\zeta_1 = 0$ ), уравнение сводится к квадратному:

$$G_2 \varepsilon_k^2 - 2\mu_2^2 \varepsilon_k + \mu_2^2 = 0, \quad (3.17)$$

где  $G_2$  отличается от  $G$  в (3.14) частичным учетом гидравлических потерь, а именно  $\zeta = D_3 \zeta_2$ ,  $\zeta_1 = 0$ .

$$\varepsilon_k = \mu_2^2 / G_2 + [(\mu_2^2 / G_2)^2 - \mu_2^2 / G_2]^{1/2} \quad (3.18)$$

В итоге, совместное решение уравнений (3.15), (3.7) позволяет определить

$$\varepsilon_k \left[ \Delta_S, \lambda + \chi_k, \mu_2^0(v^-, p^-, p_2), \bar{S}_m, \zeta_1, \zeta_2 \right] \quad (3.19)$$

Случай  $D_1 = 0$ ,  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$  (3.15, 3.7) соответствует решению на основе модели идеальной жидкости. Для учета гидравлических потерь для  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  могут быть использованы экспериментальные данные [58] в виде  $\zeta_1 = (1 - \varepsilon_k)^2$ ,  $\zeta_2 = \lambda \cdot l_2 / d_k$ , где  $d_k$  – гидравлический диаметр патрубка,  $\lambda$  – коэффициент гидравлического трения.

На рис. 3.9, 3.10 приведены результаты расчета расхода  $\Delta_G = -\varepsilon_k \bar{S}_m \mu_k$  с использованием соотношений (3.15, 3.7). Общий вывод состоит в том, что при длинах патрубков  $l_2$ , соответствующих  $\xi_2 = 5^*$ ) влияние угла отвода массы нивелируется (рис. 3.10) и происходит заметное снижение расхода в сравнении с

---

\*) Для квадратичного закона сопротивления  $\zeta_2 = 5$  соответствует длине канала в калибрах  $\sim 10^2$ .

истечением через "короткий" патрубок, который моделируется заданием  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ .

Эти результаты согласуются с экспериментом [86], где при истечении через "длинный" патрубок при условиях:  $\bar{S}_m = 0.0036 \div 0.142$  и  $-50^\circ \leq \chi_k \leq 40^\circ$  - изменение расхода  $\Delta_G(\chi_k)$  не выходило за пределы "погрешности, допустимой для практических целей".

Из приведенных расчетов также следует, что при экспериментальном определении расходных характеристик тройников, гидравлическое сопротивление боковых патрубков может внести значительное искажение.

Условия существования рассматриваемой схемы течения, как и ранее, следуют из условия  $\varepsilon_k \geq 0$ . При этом удобно исходить из (3.12), в котором связаны параметры в начале и конце патрубка и, иметь в виду, что условия существования решения для предыдущего участка течения уже сформулированы (см. (3.11) и комментарии к ним). Для течения в патрубке в окрестности значений  $\varepsilon_k = 0$  отсутствует само течение  $v_2 = v_k = 0$  и, как следствие,

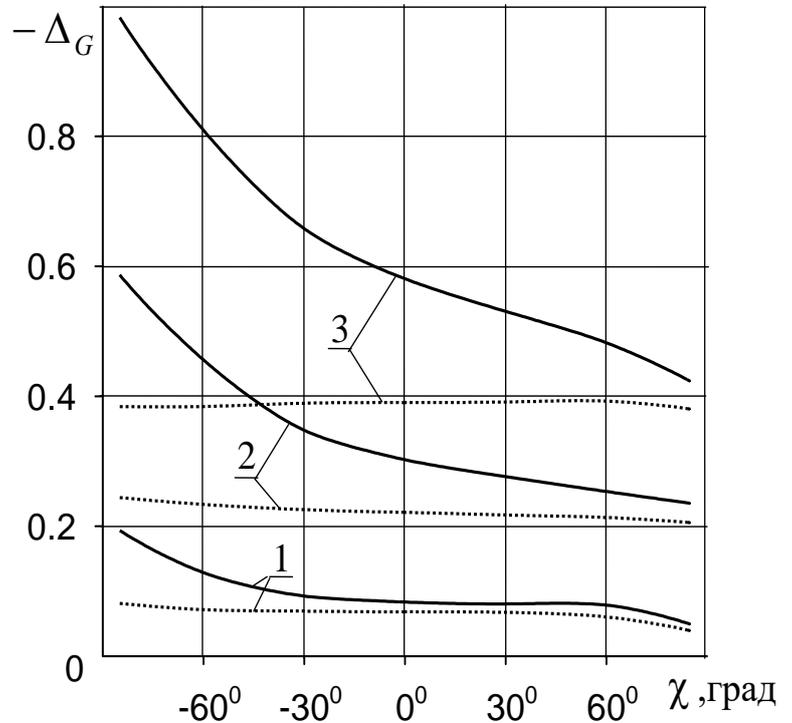


Рис.3.9 Влияние угла наклона патрубка на отвод массы через "длинный" патрубок.

$$\Delta_S = 0, \lambda = \pi/2; \quad 1 - \bar{S}_m = 0.1,$$

$$2 - \bar{S}_m = 0.3, \quad 3 - \bar{S}_m = 0.5.$$

—————  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$  – идеальная жидкость,

..... – реальная жидкость.

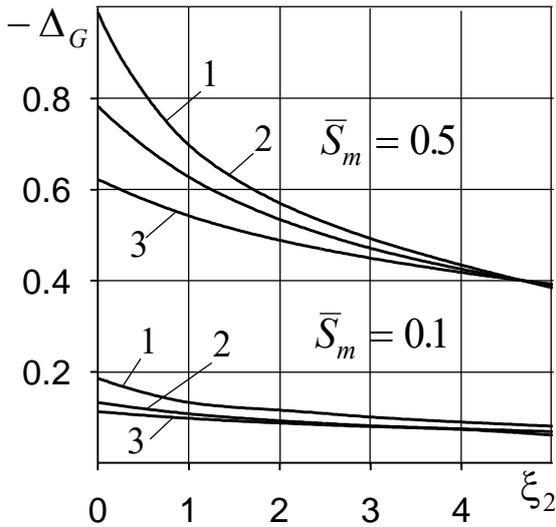


Рис. 3.10 Влияние гидравлических потерь  $\zeta_2$  (длины патрубка) на отвод массы из канала:

$$\Delta_S = 0, \lambda = \pi/2,$$

$$\zeta_1 = (1 - \varepsilon_k)^2, \quad 1 - \chi_k = -60^\circ,$$

$$2 - \chi_k = 0^\circ, \quad 3 - \chi_k = 60^\circ.$$

гидравлические потери при расширении от минимального сечения струи до полного заполнения сечения патрубка ( $\zeta_1 = 0$ ), но сохраняется  $\zeta_2$ . Величина  $\zeta_2$  рассматривается как гидравлическая характеристика патрубка, вообще говоря, не связанная со скоростью потока в нем, но реализуемая при движении.

$$\varepsilon_k \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_k^2 \geq 1 - \Delta_S + D_1 \Delta_S^2; \\ \mu_2^{02} \geq 1 + D_3 \zeta_2 + D_3 \frac{\zeta_2}{1 + \zeta_2}. \end{cases} \quad (3.20)$$

В итоге, утверждается, что  $\varepsilon_k \geq 0$  должно выполняться с двух сторон, примыкающих к min сечению потока в парубке, и имеет место связь (3.13).

### 3.1.3. Истечение несжимаемой жидкости из канала через произвольное число различных патрубков (гидродинамическая интерференция)

Рассматривается течение в канале постоянного сечения ( $\Delta_S = 0, \lambda = \pi/2$ ). Перестройка потока в канале вызвана отводом массы через  $m$  произвольно ориентированных “коротких” боковых патрубков (рис. 3.11). Жидкость считается идеальной:  $\alpha^- = \alpha_k = 1, \Delta_\tau = \Delta_{\tau k} = 0,$

$k = \overline{1, m}$ . Система уравнений подобна (3.1), но расширена по числу патрубков:

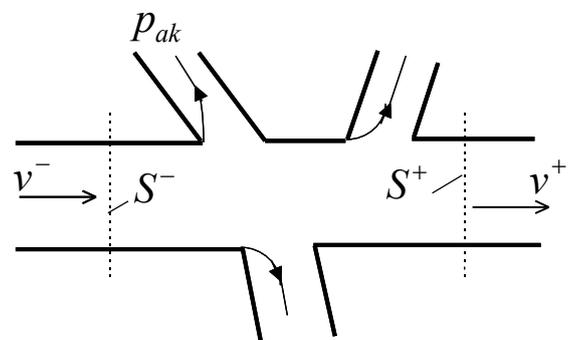


Рис. 3.11 Схема канала с боковыми патрубками.

$$1. (\varepsilon \rho v^2)_k = k_{2k} (p_\sigma - p_a), \quad k = \overline{1, m};$$

$$2. k_{2k} = 1 + \bar{x}'_k \cdot \frac{2(\alpha \varepsilon \mu^2)_k - (\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1 \Delta_S)}{2(\alpha \varepsilon \mu^2)_k - (1 - \varepsilon_k) \cdot (\mu_k^2 - 1 + 2\delta + C_1 \Delta_S)} \cdot \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k),$$

$$3. \bar{x}'_{Dk} = \frac{1}{2} \varepsilon_k \sin^2 \alpha_k,$$

$$\alpha_k - \sin \alpha_k \cos \alpha_k = 2 \frac{1 - \varepsilon_k}{\varepsilon_k},$$

$$4. \frac{p_\sigma}{p^-} = 1 + \frac{\delta}{Eu^-}, \quad Eu^- = \frac{p^-}{\rho v^{-2}}, \quad \delta = 1 - C_1, \quad C_1 = (1 + \Delta_G)^2,$$

$$\Delta_G = \sum_{k=1}^m \Delta_{Gk}, \quad \Delta_{Gk} = -\varepsilon_k \bar{S}_{mk} \mu_k, \quad \mu_k = \sqrt{1 + 2Eu^- \left(1 - \frac{p_{ak}}{p^-}\right)}.$$

$$\delta = 1 - C_1 = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \bar{S}_j \mu_j (2 - \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \bar{S}_j \mu_j).$$

Перечисленные уравнения сводятся к системе  $2m$  уравнений относительно  $\varepsilon_k, \alpha_k, (k = \overline{1, m})$ , после решения которой могут быть определены гидродинамические параметры в сечении  $S^+$ :

$$1. \varepsilon_k \mu_k^2 - (1 + f_k) \left[ \frac{\mu_k^2 - 1}{2} + \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \bar{S}_j \mu_j \left( 2 - \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \bar{S}_j \mu_j \right) \right] = 0, \quad (3.21)$$

$$2. \alpha_k - \sin \alpha_k \cos \alpha_k = 2 \frac{1 - \varepsilon_k}{\varepsilon_k},$$

$$\text{где: } f_k = -\operatorname{tg} \chi_k \cdot \frac{2\varepsilon_k \mu_k^2 - [2\delta + \mu_k^2 - 1]}{2\varepsilon_k \mu_k^2 - (1 - \varepsilon_k)[2\delta + \mu_k^2 - 1]} \cdot \frac{\varepsilon_k \sin^2 \alpha_k}{2};$$

Полученная система уравнений предполагает взаимное влияние конструктивных особенностей патрубков и условий в окружающей среде ( $p_{ak}$ ) на расходные характеристики каждого из них. Это обстоятельство отмечалось ранее (п. 2.6.1) по отношению к величинам  $\Phi_{pk}$  и проявляется здесь, в частности в том,

что прекращение истечения через какой-либо патрубок ( $\varepsilon_k = \Delta_{Gk} = 0$ ) не совпадает с величиной  $\mu_k = 1$  (см. (3.11)). Действительно, из уравнения (3.21) для  $k$ -го патрубка при  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  имеем

$$\frac{1 - \mu_k^2}{2} = \sum_{j=1}^{m_k} \varepsilon_j \bar{S}_j \mu_j \left( 2 - \sum_{j=1}^{m_k} \varepsilon_j \bar{S}_j \mu_j \right) \geq 0, \quad (3.22)$$

где суммирование по  $m_k$  предполагает исключение из суммы  $m$  патрубков  $k$ -го патрубка. Вместе с тем, последнее условие допускает истечение из  $k$ -го патрубка при значениях  $\mu_k$  меньших единицы, т.е. при  $p_{ak} > p^-$ . Этот результат вполне объясним тем обстоятельством, что за счет отвода массы через патрубки среднее давление  $p_\sigma$  больше  $p_{ak}$  (см. уравнение 1. этого пункта).

Еще более наглядным проявлением гидродинамической интерференции являются результаты расчета для истечения жидкости из канала через два произвольно ориентированных «коротких» патрубка в среду с одинаковым давлением  $p_{ak}$  (рис. 3.12). Для одного патрубка сохраняются неизменными «входные» данные, для другого – «активного» - угол отвода меняется в широком диапазоне. При этом сохраняются закономерности поведения при истечении жидкости через одиночный патрубок: отвод массы «по потоку» увеличивает расход через него, «против потока» - уменьшает. Вместе с тем, «активный» патрубок «тянет» за собой не только суммарный расход  $\Delta_{G1} + \Delta_{G2} = \Delta_G$ , но и через него расход в патрубок с фиксированными условиями на «входе».

Для ортогональных к оси канала патрубков система  $2m$  уравнений сокращается вдвое

$$\varepsilon_k \mu_k^2 - \left[ \frac{\mu_k^2 - 1}{2} + \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \bar{S}_j \mu_j \left( 2 - \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \bar{S}_j \mu_j \right) \right] = 0, \quad k = \overline{1, m} \quad (3.22)$$

и, вообще говоря, может быть сведена к одному уравнению. Например, для

2-х различных патрубков, через которые жидкость истекает из канала в среды с различными давлениями ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ), исключение общей части этих уравнений приводит к связи между коэффициентами поджатия струй

$$2\varepsilon_1 \mu_1^2 - \mu_1^2 + 1 = 2\varepsilon_2 \mu_2^2 - \mu_2^2 + 1, \text{ решающей задачу.}$$

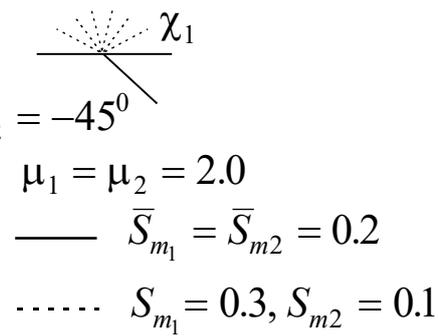
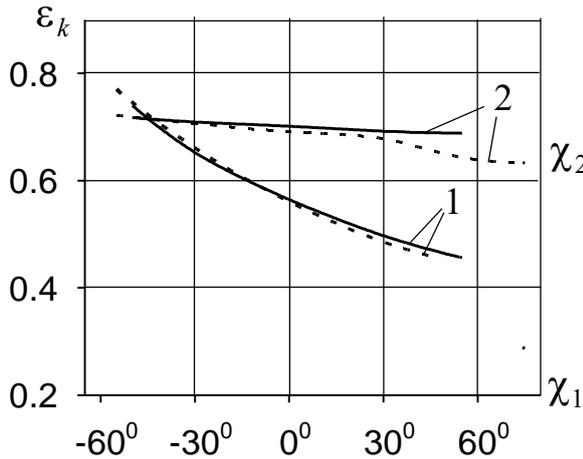
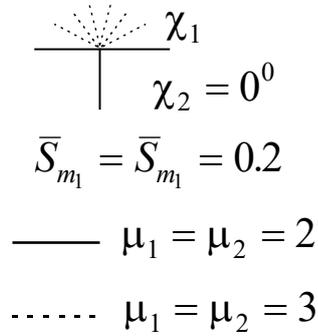
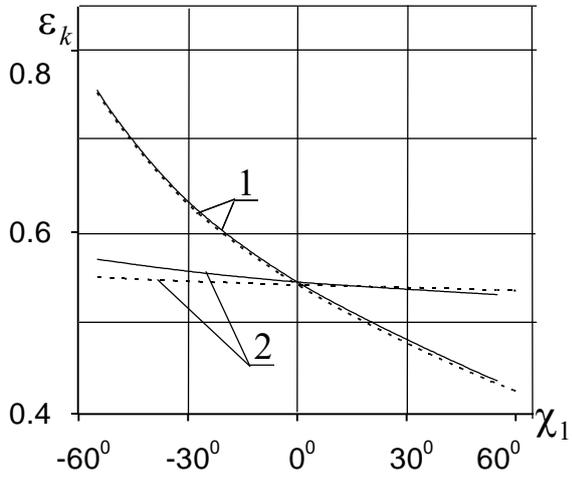
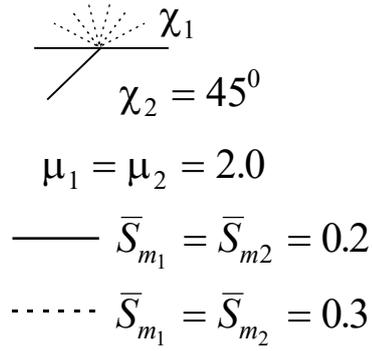
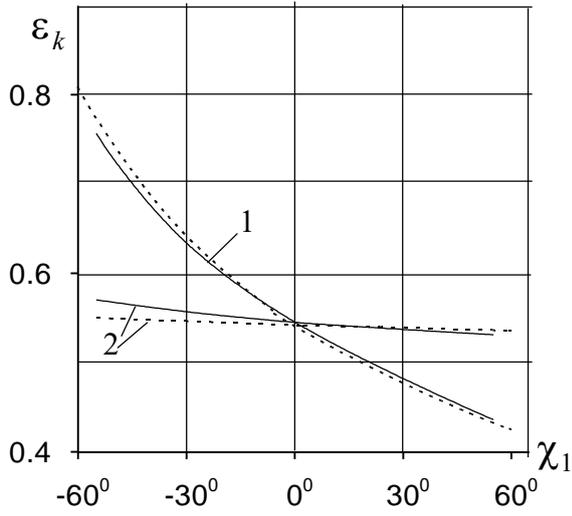


Рис. 3.12 Истечение жидкости из канала неизменного сечения через два различных патрубка: 1 –  $\varepsilon_1$ , 2 –  $\varepsilon_2$ .

### 3.2. Перетекание несжимаемой жидкости между перекрещивающимися каналами через соединительный патрубок

Схема течения приведена на рис. 3.13. В отличие от предыдущей задачи, давление на срезе патрубка  $p_{\Pi}$  неизвестно, но совпадает со средним давлением в зоне перестройки потока в канале "2", куда, предположительно, перетекает часть жидкости из канала "1".

$$p_{\Pi} = p_{\sigma_2} \quad (3.23)$$

Соотношения для канала "1" ( $\Delta_{G1} < 0$ ):

$$\Delta_{S1} = 0, \quad \Delta_{\tau 1} = \Delta_{\tau_{k1}} = 0, \quad \alpha_1^- = \alpha_{k1} = 1, \quad \lambda_1 = \pi / 2.$$

$$\frac{p_{\sigma_1}}{p_1^-} = 1 + \frac{\delta_1}{Eu_1^-}, \quad (3.24)$$

$$\varepsilon_{k1} \mu_{k1}^2 = (1 + f_1) Eu_1^- \left( \frac{p_{\sigma_1}}{p_1^-} - \frac{p_{\delta 1}}{p_1^-} \right), \quad (3.25)$$

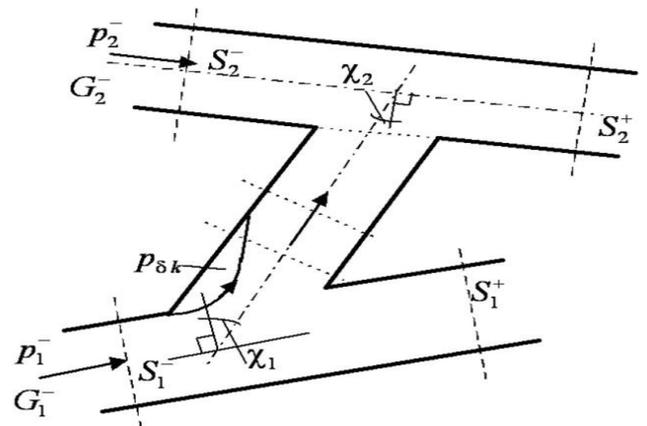
где 1)  $f_1 = -\operatorname{tg} \chi_1 \cdot \frac{2\varepsilon_{k1} \mu_{k1}^2 - [2\delta_1 + \mu_{k1}^2 - 1]}{2\varepsilon_{k1} \mu_{k1}^2 - (1 - \varepsilon_{k1})[2\delta_1 + \mu_{k1}^2 - 1]} \cdot \frac{\varepsilon_{k1} \sin^2 \alpha_1}{2};$

$$\mu_{k1}^2 = \left( \frac{v_{k1}}{v^-} \right)^2 = 1 + 2Eu_1^- \left( 1 - \frac{p_{\delta 1}}{p^-} \right),$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \delta_1 &= 1 - (1 + \Delta_{G1})^2 = \\ &= \bar{S}_{k1} \varepsilon_{k1} \mu_{k1} (2 - \bar{S}_{k1} \varepsilon_{k1} \mu_{k1}), \end{aligned}$$

$$4) \quad \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = 2 \frac{1 - \varepsilon_{k1}}{\varepsilon_{k1}}.$$

Рис.3.13



Соотношения для патрубка, подобно предыдущему пункту, с учетом разницы в обозначениях, можно записать в виде:

$$\mu_{\Pi}^2 = \frac{v_{\Pi}^2}{v_1^{-2}} = \frac{\mu_{\Pi}^{02}}{1 + \xi}, \quad \mu_{\Pi}^{02} = 1 + 2Eu_1^- \left( 1 - \frac{p_{\Pi}}{p_1^-} \right), \quad (3.26)$$

$$\zeta = \zeta_1 / \varepsilon_{k1}^2 + \zeta_2, \quad \mu_{\Pi} = \varepsilon_{k1} \mu_{k1}, \quad \mu_{k1}^2 = \frac{(\mu_{\Pi}^0)^2}{\varepsilon_{k1}^2 (1 + \zeta)}.$$

Соотношения для канала "2" с подводом массы (2.60, 2.61) ( $\Delta_{G2} > 0$ ):

$$\Delta_{S2} = 0, \quad \lambda_2 = \pi / 2, \quad \Delta_{\tau_2} = 0, \quad \alpha_2^- = 1, \quad (3.27)$$

$$\frac{p_{\sigma_2}}{p_2^-} = 1 + \frac{\delta_2^*}{Eu_2^-}, \quad \delta_2^* = 1 - (1 + \Delta_{G2})^2 - \Delta_{\tau_2}^*, \quad \Delta_{\tau_2}^* = -\frac{\Delta_{G2}^2}{\varepsilon_{k2} \bar{S}_{m2}} \sin \chi_2 (= \Delta_{G2}^*),$$

$$\delta_2^* = -\Delta_{G2} [2 + \Delta_{G2} (1 - \frac{\sin \chi_2}{\varepsilon_{k2} \bar{S}_{m2}})], \quad \bar{S}_{m2} = \frac{S_{m2}}{S_2^-};$$

Для схемы течения на рис. 3.13 коэффициент поджатия  $\varepsilon_{k2} = 1$ , в общем случае  $\varepsilon_{k2} < 1$ .

Соотношение (3.27) используется для связи течения в канале "1" и в "длинном" патрубке с течением в канале "2". Дополнительные соотношения для связи двух течений следуют из условий

$$G_{k1} = G_{k2}, \quad S_{m1} = S_{m1} \quad (3.28)$$

и определений  $\Delta_{G1} = -G_{k1} / G_1^-$ ,  $\Delta_{G2} = G_{k2} / G_2^-$ , где  $G_1^-$  и  $G_2^-$  – массовые расходы в "1" и "2" каналах в начальных ( $S^-$ ) сечениях. Тогда:

$$\Delta_{G2} = -\Delta_{G1} \frac{G_1^-}{G_2^-} = \varepsilon_{k1} \bar{S}_{m1} \mu_{k1} \frac{G_1^-}{G_2^-}, \quad \bar{S}_{m1} = \frac{S_{m1}}{S_1^-}, \quad \bar{S}_{m1} = \bar{S}_{m2} \frac{S_2^-}{S_1^-}, \quad (3.29)$$

$$\delta_2^* = -\varepsilon_{k1} \bar{S}_{m1} \mu_{k1} \frac{G_1^-}{G_2^-} [2 + \varepsilon_{k1} \bar{S}_{m1} \mu_{k1} \frac{G_1^-}{G_2^-} (1 - \frac{\sin \chi_2}{\varepsilon_{k2} \bar{S}_{m2}})].$$

В качестве промежуточного этапа решения устанавливается связь коэффициента поджатия  $\varepsilon_{k1}$  и величины  $\mu_{k1}$ : из (3.23), (3.26) и (3.27)

$$\mu_{\Pi}^{02} = 1 + 2Eu_1^- \left( 1 - \frac{p_{\sigma_2}}{p_2^-} \frac{p_2^-}{p_1^-} \right) = \mu_{2-1}^2 - 2Eu_1^- \frac{p_2^-}{p_1^-} \left( \frac{p_{\sigma_2}}{p_2^-} - 1 \right),$$

где  $\mu_{2-1}^2 = 1 + 2Eu_1^- \left(1 - \frac{p_2^-}{p_1^-}\right)$ . и  $Eu_1^- \cdot \frac{p_2^-}{p_1^-} \cdot \left(\frac{p_{\sigma 2}}{p_2^-} - 1\right) = \delta_2^* \cdot \frac{Eu_1^-}{Eu_2^-} \cdot \frac{p_2^-}{p_1^-}$

Отсюда, вместе с (3.29) и (3.26), может быть получено квадратное уравнение относительно  $\mu_{k_1}(\varepsilon_{k_1})$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k_1}^2 (1 + \zeta) \mu_{k_1}^2 &= \mu_{2-1}^2 + 4 \frac{G_2^-}{G_1^-} \frac{S_1^-}{S_2^-} \varepsilon_{k_1} \bar{S}_{m_2} \mu_{k_1} + 2 \bar{S}_{m_2} \varepsilon_{k_1}^2 \mu_{k_1}^2 \left( \bar{S}_{m_2} - \frac{\sin \chi_2}{\varepsilon_{k_2}} \right), \\ \mu_{k_1} &= \left\{ 2 \frac{G_2^-}{G_1^-} \frac{S_1^-}{S_2^-} \bar{S}_{m_2} \varepsilon_{k_1} + \left[ \left( 2 \frac{G_2^-}{G_1^-} \frac{S_1^-}{S_2^-} \bar{S}_{m_2} \varepsilon_{k_1} \right)^2 + \mu_{2-1}^2 \cdot [\varepsilon_{k_1}^2 (1 + \zeta) - \right. \right. \quad (3.30) \\ &\quad \left. \left. - 2 \bar{S}_{m_2} \varepsilon_{k_1}^2 \left( \bar{S}_{m_2} - \frac{\sin \chi_2}{\varepsilon_{k_2}} \right) \right]^{1/2} \right\} : \left[ \varepsilon_{k_1}^2 (1 + \zeta) - 2 \bar{S}_{m_2} \varepsilon_{k_1}^2 \left( \bar{S}_{m_2} - \frac{\sin \chi_2}{\varepsilon_{k_2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Выбор знака обусловлен возможностью сведения квадратного уравнения и его решения к известной из п. 3.1.2. ситуации (истечение через «длинный» патрубок из канала в среду с заданным давлением), для чего, полагая  $\bar{S}_{m_2} \rightarrow 0$  (т.е., заменяя 2-й канал безграничной средой), получим соотношение

$$\mu_{k_1}^2 = \frac{\mu_{2-1}^2}{\varepsilon_{k_1}^2 (1 + \xi)}, \text{ подобное (3.13).}$$

Теперь уравнение движения (3.25) вместе с замыкающими соотношениями (3.24), (3.30) и 4) в (3.25) сводятся к системе уравнений относительно  $\varepsilon_{k_1}$  и  $\alpha_{k_1}(\varepsilon_{k_1})$

$$\begin{cases} \varepsilon_{k_1}^2 \bar{S}_{m_1}^2 \mu_{k_1}^2 - (2 \bar{S}_{m_1} \mu_{k_1} - \mu_{k_1}^2) \varepsilon_{k_1} - F = 0, \\ \alpha_{k_1} - \sin \alpha_{k_1} \cos \alpha_{k_1} = 2 \frac{1 - \varepsilon_{k_1}}{\varepsilon_{k_1}}. \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\text{Здесь } F = \frac{\mu_{k_1}^2 - 1}{2} + f_1 \left\{ \frac{\mu_{k_1}^2 - 1}{2} + 2 \bar{S}_{m_1} \mu_{k_1} \varepsilon_{k_1} - \bar{S}_{m_1}^2 \mu_{k_1}^2 \varepsilon_{k_1}^2 \right\},$$

$$f_1 = -\operatorname{tg} \chi_1 \cdot \frac{2\varepsilon_{k1}\mu_{k1}^2 - [2\delta_1 + \mu_{k1}^2 - 1]}{2\varepsilon_{k1}\mu_{k1}^2 - (1 - \varepsilon_{k1})[2\delta_1 + \mu_{k1}^2 - 1]} \cdot \frac{\varepsilon_{k1} \sin^2 \alpha_{k1}}{2},$$

$$\delta_1 = \bar{S}_{m1} \varepsilon_{k1} \mu_{k1} (2 - \bar{S}_{m1} \varepsilon_{k1} \mu_{k1}),$$

$$\mu_{k1} = \left\{ 2 \frac{G_2^-}{G_1^-} \frac{S_1^-}{S_2^-} \bar{S}_{m2} \varepsilon_{k1} + \left[ \left( 2 \frac{G_2^-}{G_1^-} \frac{S_1^-}{S_2^-} \bar{S}_{m2} \varepsilon_{k1} \right)^2 + \mu_{2-1}^2 \cdot [\varepsilon_{k1}^2 (1 + \zeta) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\bar{S}_{m2} \varepsilon_{k1}^2 \left( \bar{S}_{m2} - \frac{\sin \chi_2}{\varepsilon_{k2}} \right) \right]^{1/2} \right\} : \left[ \varepsilon_{k1}^2 (1 + \zeta) - 2\bar{S}_{m2} \varepsilon_{k1}^2 \left( \bar{S}_{m2} - \frac{\sin \chi_2}{\varepsilon_{k2}} \right) \right],$$

$$\mu_{2-1} = \sqrt{1 + 2Eu_1^- \left( 1 - \frac{p_2^-}{p_1^-} \right)}.$$

Решение (3.31) дает  $\varepsilon_{k1} \left( \chi_1, \chi_2, \mu_{2-1}, \bar{S}_{m2}, \frac{S_1^-}{S_2^-}, \frac{G_2^-}{G_1^-}, \xi \right)$ . При этом реше-

ние может быть получено в нескольких вариантах. Для течения в "длинном" патрубке с учетом гидравлических потерь следует брать

$$\varepsilon_{k2} = 1, \quad \varepsilon_{k1}^2 (1 + \xi) = \xi_1 + (1 + \xi_2) \varepsilon_{k1}^2. \quad (3.32)$$

Для течения в "длинном" патрубке идеальной жидкости

$$\varepsilon_{k2} = 1, \quad \xi = 0. \quad (3.33)$$

При перетекании жидкости через "короткий" патрубок, когда  $p_{\delta k} = p_{\sigma 2}$ ,  $S_1^- = S_2^-$  в (3.31) следует принять

$$\varepsilon_{k1}^2 (1 + \xi) = 1, \quad \varepsilon_{k2} = \varepsilon_{k1}, \quad (3.34)$$

где первое из соотношений (3.34) исключает из рассмотрения группу условий (3.26), относящихся к "длинному" патрубку.

После определения коэффициента поджатия струи в боковом патрубке  $\varepsilon_{k1}$  подсчитывается  $\mu_{k1}$  (3.30), расходы

$$\Delta_{G1} = -\varepsilon_{k1} \bar{S}_{m1} \mu_{k1}, \quad \Delta_{G2} = -\Delta_{G1} \frac{G_1}{G_2},$$

а вслед за тем все необходимые гидродинамические параметры состояния в обоих каналах по соотношениям (2.56) и (2.61).

Необходимое условие существования режима течения, отвечающего схеме на рис. 3.13, здесь, как и ранее, определяется из критического условия  $\varepsilon_{k_1} = 0$ .

При этом, из (3.31) следует

$$F = 0, \quad f_1 = 0, \quad \mu_{k_1}^2 = 1,$$

а из (3.30)  $\mu_{k_1}^2 = \mu_{2-1}^2 / (1 + \xi_2)$ ; теперь искомое условие

$$\mu_{2-1}^2 \geq 1 + \xi_2 \quad \text{или} \quad \frac{2(p_1^- - p_2^-)}{\rho v^{-2}} \geq \xi_2. \quad (3.35)$$

Влияние различных параметров на интенсивность перетекания жидкости между каналами демонстрируют результаты расчетов на рис. 3.14 - 3.17. Данные рис. 3.14 указывают на доминирующее влияние закономерностей отвода массы при изменении углов  $\chi_1$  и  $\chi_2$ . В отличие от истечения жидкости через "короткий" патрубок в среду с заданным давлением, где при  $\mu_k = 1$  ( $p^- = p_a$ ) расход  $\Delta_G = 0$ , здесь при  $\mu_{2-1} = 1$  ( $p_1^- = p_2^-$  - нет перепада давлений в начальных сечениях зон перестройки течения в обоих каналах)

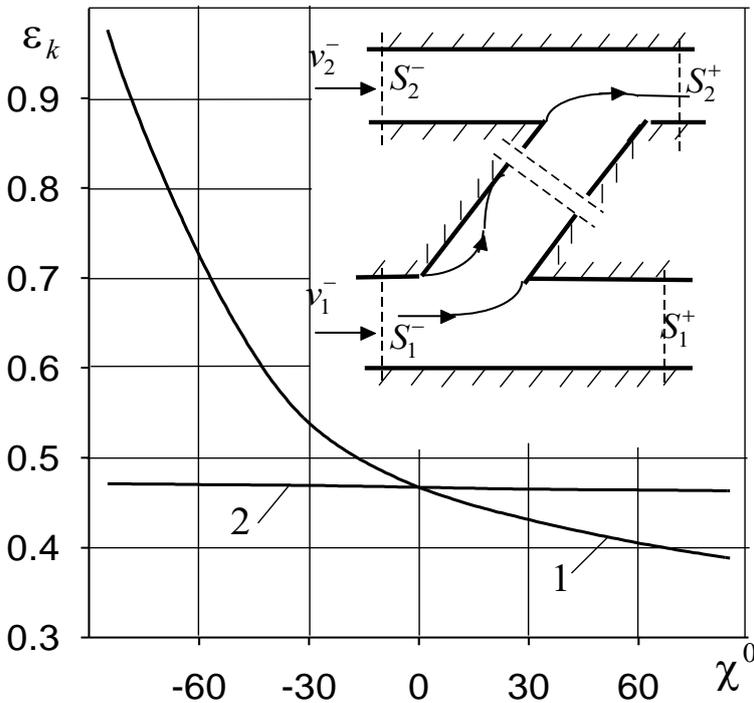


Рис. 3.14 Перетекание жидкости между каналами: влияние углов подвода и отвода массы.

$$\mu_{2-1} = 2,$$

$$\bar{S}_{m_1} = 0.2, \quad \bar{S}_{m_2} = 0.1,$$

$$\frac{G_2}{G_1} = 2, \quad \frac{p_2^-}{p_1^-} = 0.985,$$

$$1 - \chi_2 = 0, \quad \chi_1 = \text{var},$$

$$2 - \chi_1 = 0, \quad \chi_2 = \text{var}.$$

расход отличен от нуля  $\Delta_{G_1} \neq 0$  за счет существования перепада давления между средними давлениями  $p_{\sigma_1}$  и  $p_{\sigma_2}$  (кривая 4 на рис. 3.15) в зонах перестройки течений в двух каналах, которые и определяют величину расхода между каналами. Подтверждением этому являются также значение  $\mu_{k_1} > 1$  при  $\mu_{2-1} = 1$  (кривая 3).

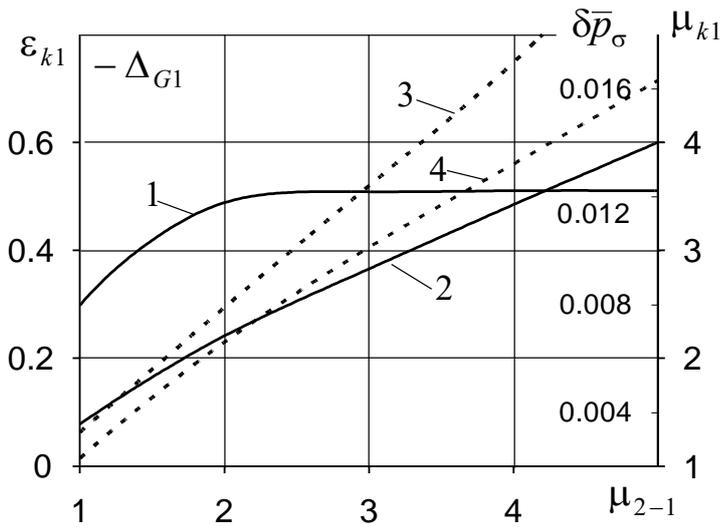


Рис. 3.15 Перетекание жидкости между каналами: влияние комплексного гидродинамического параметра  $\mu_{2-1}$ .

$$\chi_1 = \chi_2 = 0; G_2/G_1 = 2.0;$$

$$\bar{S}_{m1} = 0.2, \bar{S}_{m2} = 0.1;$$

$$\xi_1 = (1 - \epsilon_{k1})^2, \xi_2 = 1;$$

$$1 - \epsilon_{k1}, \quad 2 - \Delta_{G1}, \quad 3 - \mu_{k1},$$

$$4 - \delta\bar{p}_\sigma = (p_{\sigma_1} - p_{\sigma_2})/p_1^-.$$

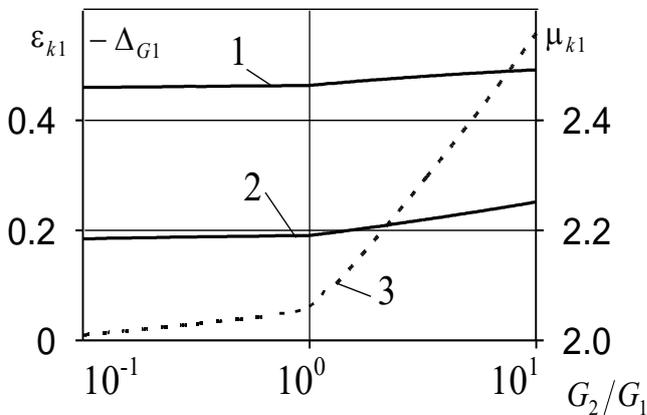


Рис. 3.16 Перетекание жидкости между каналами.

$$\xi = 0, \mu_{2-1} = 2, \chi_1 = \chi_2 = 0,$$

$$\bar{S}_{m1} = 0.2, \bar{S}_{m2} = 0.1;$$

$$p_2^-/p_1^- = 0.985;$$

$$1 - \epsilon_{k1}, \quad 2 - (-\Delta_{G1}), \quad 3 - \mu_{k1}.$$

Изменение отношения расходов  $G_2^-/G_1^-$  (скоростей  $v_2^-/v_1^-$ ) при фиксированных геометрии каналов и отношении давлений  $p_2^-/p_1^-$  практически не оказывает влияния на расходные характеристики (кривая 2 на рис. 3.16). В значительно большей степени влияние характеристик второго канала ощутимо при варьировании сечения  $\bar{S}_{m_2}$ . При прочих равных условиях (рис. 3.17) увеличение  $\bar{S}_{m_2}$  (т.е. уменьшение  $S_2^-$ ) влечет за собой рост скорости  $v_2^-$ , падение давления

$p_2^-$ , увеличение перепада давления, стимулирующего расход (кривая 2) и падение давления в изолированной зоне отрыва потока  $p_{\delta k}$  (кривая 4 – штриховая линия). Областью применения полученного решения является  $p_{\delta k} \geq 0$  или, точнее,  $M_{k_1} = v_{k_1}/a_{k_1} \ll 1$  (условия  $M^- \ll 1$ ,  $M^+ \ll 1$  были сформулированы ранее и остаются неизменными). Варьирование  $\bar{S}_{m_1}$  в целом подтвердило уже известные закономерности истечения из канала через боковое ответвление.

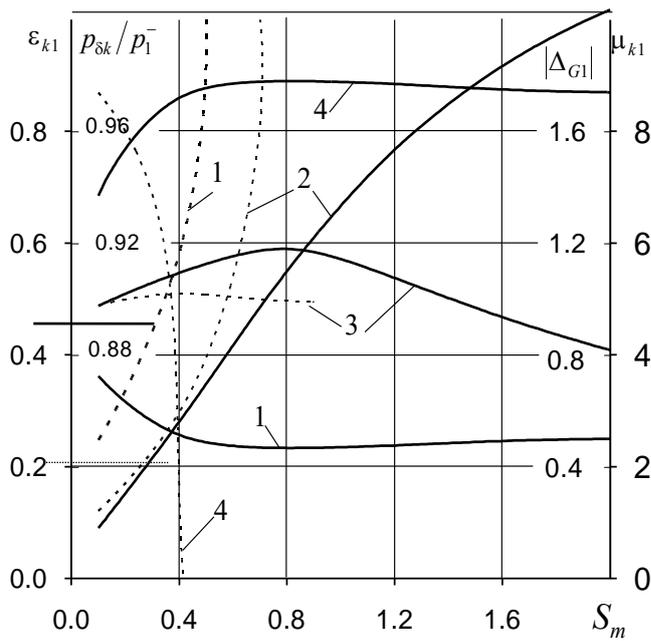


Рис. 3.17 Перетекание жидкости между каналами:

$$\mu_{2-1} = 2, \quad G_2^- / G_1^- = 2,$$

$$\chi_1 = \chi_2 = 0,$$

$$\xi_1 = (1 - \varepsilon_{k_1})^2, \quad \xi_2 = 1;$$

$$- \bar{S}_{m_2} = 0.2,$$

(варьируется  $\bar{S}_{m_1}$ )

$$- \bar{S}_{m_1} = 0.2;$$

(варьируется  $\bar{S}_{m_2}$ )

$$1 - \mu_{k_1}, \quad 2 - |\Delta_{G1}|,$$

$$3 - \varepsilon_{k_1}, \quad 4 - p_{\delta k} / p_1^-.$$

### 3.3. Истечение сжимаемой жидкости из канала через патрубки

#### в среде с заданным давлением

##### 3.3.1 Истечение дозвукового потока из канала через патрубок

#### в среде с заданным давлением

По аналогии с задачей об истечении несжимаемой жидкости (п. 3.1.1., рис. 3.1) выписывается система исходных уравнений, основное отличие которой состоит в неявной форме определения весовых коэффициентов  $\varphi_p$ ,  $\varphi_{pk}$ ,  $k_{ik}$  и использовании нелинейных соотношений для гидродинамических параметров состояния.

Гипотезы и соотношения математической модели истечения дозвукового потока из канала через "короткий" патрубок включает в себя.

- давление на боковой поверхности струи  $p_{\delta_k}$ , в минимальном сечении струи  $p_k$  и в окружающей среде  $p_a$  – совпадают

$$p_{\delta_k} = p_k = p_a ; \quad (3.36)$$

- в пределах зоны перестройки потока в каналах и патрубке – жидкость идеальная

$$\Delta_\tau = \Delta_{\tau_k} = 0, \quad \alpha^- = \beta^- = \alpha_k = \beta_k = 1 ;$$

- процессы в трубках тока  $\sigma'_{Tk}$  адиабатические (п. 2.2.3)

$$\Delta_{Q_k} = 0, \quad p_{0k} = p_0^-, \quad H_k = H^- ; \quad (3.37)$$

- все патрубки и течения в них одинаковы

$$\bar{S}_m = m S_k / S^-, \quad \Delta_G = m \Delta_{G_k} ;$$

- уравнение движения (2.34) в проекции на поперечные координатные направления

$$(\varepsilon \rho v^2)_k = (p_\sigma - p_{\delta k}) k_{2k}, \quad (3.38)$$

- соотношения для коэффициентов  $k_{ik}$ : (2.14), (2.17) (срыв потока в передней кромке  $A$  – случаи 1 и 2 табл. 2.1)

$$k_{1k} = \varepsilon_k - \varphi_{pk} q_{3k} \cdot \text{ctg}(\lambda + \chi_k), \quad \sin(\lambda + \chi_k) \neq 0 \quad (3.39)$$

$$k_{2k} = 1 + (q_{4k} - \varphi_{pk} q_{3k}) \cdot \text{ctg}(\lambda + \chi_k), \quad k_5 = (1 - \Delta_S) \bar{S}_m k_{3k},$$

$$k_{3k} = \left[ \frac{\varepsilon_k q_{3k}}{\sin(\lambda + \chi_k)} + \varphi_{pk} \frac{(1 - \varepsilon_k) q_{4k}}{\sin(\lambda + \chi_k)} \right] / k_{1k}, \quad k_{4k} = \frac{\varphi_{pk} q_{4k}}{k_{1k} \sin(\lambda + \chi_k)},$$

$$q_{3k} = \bar{x}'_k + \text{tg} \chi_k, \quad q_{4k} = \bar{x}'_k \quad (\text{см. н. (2.6.1)});$$

- связь среднего давления  $p_\sigma$  с воздействиями на поток в зоне перестройки течения (2.36), (2.37)

$$\frac{p_\sigma}{p^-} = 1 + \varphi_p \left( \frac{p^+}{p^-} - 1 \right), \quad \frac{p^+}{p^-} = \frac{K - \nu n N}{I(n+1)}, \quad (3.40)$$

$$\nu = -1, \quad K = I + nM^{-2} (1 - \tilde{\Delta}_\tau^*), \quad I = \frac{n-1}{(\gamma-1)(1-\Delta_S)},$$

$$N = \left\{ K^2 - 2 \frac{n^2-1}{\gamma-1} M^{-2} \left( C_1 + C_2 \frac{\gamma-1}{2} M^{-2} \right) \right\}^{1/2}, \quad n = \frac{\gamma}{1 + (\gamma-1)\varphi_p(\Delta_S - k_5)},$$

$$C_1 = (1 + \Delta_G)[1 + \Delta_G + (\gamma-1)\Delta_Q], \quad C_2 = (1 + \Delta_G)^2,$$

$$\tilde{\Delta}_G^* = \frac{\rho^-}{\rho_k} \frac{\Delta_G^2}{\varepsilon_k \bar{S}_m} k_{4k} + \left( 1 - \frac{p_{\delta k}}{p^-} \right) \frac{\bar{S}_m}{\gamma M^{-2}} k_{3k};$$

- для определения  $\varphi_p$  и  $\varphi_{pk}$  используются схемы, описанные в п. 2.7.1, при этом для случая  $\Delta_S = 0$   $\varphi_p = 1$  (см. (2.71));

- и, наконец,  $\bar{x}'_{Dk}$  определяется по соотношениям (2.49)

$$\left( \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \right)_k = 2 \frac{1 - \varepsilon_k}{\varepsilon_k} \cdot \varepsilon(M_k), \quad \bar{x}'_{Dk} = \frac{\varepsilon_k}{2\varepsilon(M_k)} \sin^2 \alpha_k. \quad (3.41)$$

Часть соотношений математической модели удобно записать в ином виде. В частности,

$$k_{2k} = 1 + f_k, \quad f_k = [\bar{x}' - \varphi_{pk} (\bar{x}'_k + \operatorname{tg} \chi_k)] \cdot \operatorname{ctg}(\lambda + \chi_k) \quad (3.42)$$

для случая  $\lambda + \chi_k = \pi/2$  – патрубок ортогонален оси канала –  $f = 0$ .

Для расходных воздействий  $\Delta_G$  можно получить

$$\Delta_G = - \sum_{k=1}^m \frac{(\varepsilon \rho \nu_n S)_k}{(\rho \nu S)^-} = - \varepsilon_k \bar{S}_m \mu_k \sigma_{pk}, \quad \sigma_{pk} = \frac{p_{0k}}{p_0^-}, \quad (3.43)$$

$$\mu_k = \frac{M_k}{M^-} \left[ \frac{\tau(M_k)}{\tau(M^-)} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad \tau(M) = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1},$$

– газодинамическая функция для температуры. В силу (3.37)  $\sigma_{pk} = 1$ .

Величина  $\tilde{\Delta}_\tau^*$  приводится к виду

$$\tilde{\Delta}_G^* = \frac{\bar{S}_m}{M^{-2}} \left[ \frac{k_{3k}}{\gamma} \left( 1 - \frac{\pi(M_k)}{\pi(M^-)} \sigma_{pk} \right) + k_{4k} \varepsilon_k M_k^2 \frac{\pi(M_k)}{\pi(M^-)} \sigma_{pk} \right],$$

где  $\pi(M) = [\tau(M)]^{\gamma/\gamma-1}$ .

И, наконец, уравнение движения (3.38) может быть записано в форме

$$\gamma M_k^2 \frac{\pi(M_k)}{\pi(M^-)} \sigma_{pk} \varepsilon_k = (1 + f_k) \left[ 1 - \frac{\pi(M_k)}{\pi(M^-)} \sigma_{pk} + \varphi_p \left( \frac{K - \nu n N}{I(n+1)} - 1 \right) \right]. \quad (3.44)$$

Уравнение (3.44) вместе с (3.41), уравнениями для определения  $\Phi_p$  и  $\Phi_{pk}$  (2.63 – 2.65) и необходимыми замыкающими соотношениями, образуют замкнутую систему уравнений для определения коэффициента поджатия струи

$$\varepsilon_k(\gamma, M^-, M_k, \bar{S}_m, (\lambda + \chi_k), \Delta_S, \Delta_Q, \sigma_{pk}),$$

где  $\sigma_{pk} = 1$  для идеальной жидкости и адиабатических процессов в трубке тока жидкости, вытекающей в патрубке.

После определения  $\varepsilon_k$  подсчитывается  $\Delta_G$  (3.43) и все гидродинамические параметры (2.36) в сечении  $S^+$ .

На рис. 3.18 - 3.19 демонстрируется влияние сжимаемости среды на истечение газа из канала через боковой патрубок. С ростом числа Маха  $M^-$  в начальном сечении (увеличивается инерционность потока) уменьшается доля массы газа, отводимая в патрубок (рис. 3.18).

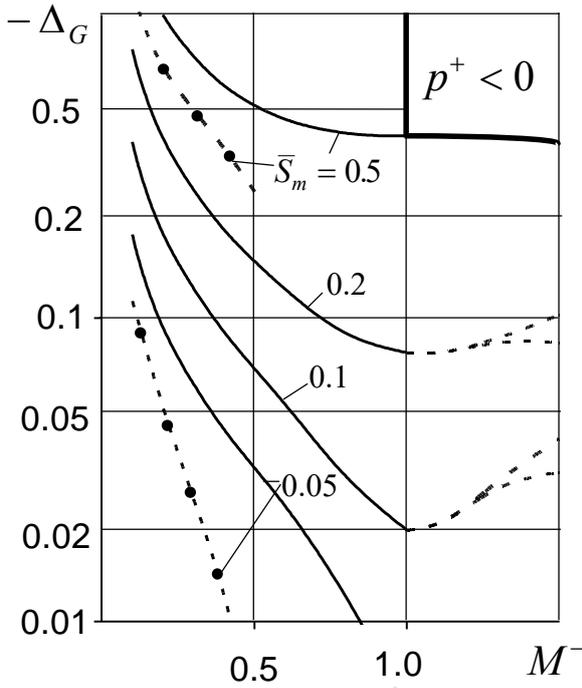


Рис. 3.18. Истечение газа из канала через “короткий” патрубок:

$$\Delta_S = 0, \lambda = \pi/2, \chi_k = 0, \gamma = 1.25;$$

$$\text{—} \quad - \quad M_k = 1,$$

$$\text{---} \bullet \bullet \text{---} \quad - \quad M_k = 0.5.$$

При этом отвод массы из звукового потока в канале  $M^- = 1^{*)}$  может привести к падению давления в транзитной трубке тока до нуля (на рис. 3.18 область  $p^+ < 0$ ). Штриховые линии  $\Delta_G(M^-)$  в области  $M^- > 1^{*)}$  экстраполируют расчетную схему, изложенную выше, на

сверхзвуковые течения. Отдавая себе отчет, что в области  $M^- > 1$  кинематика течения будет иной за счет появления скачков уплотнения, экстраполяция возможна для малых сверхзвуковых скоростей (верхняя кривая в ”штриховой вилке” соответствует учету диссипативных потерь  $\sigma_{pk} < 1$  в трубке тока  $\sigma_{Tk}$  по схеме прямого скачка уплотнения, нижняя – при  $\sigma_{pk} = 1$ ).

В работе [Д12] аналогичные задачи решались численно методом установления. Расхождение результатов не превышает 5% и объясняется неоднородностью потоков в выходных сечениях канала и струи.

На рис. 3.19 выявлены другие эффекты сжимаемости. При истечении через малые боковые отверстия ( $\bar{S}_m \ll 1$ ) коэффициент поджатия струи  $\varepsilon_k$  (и расход  $\Delta_G$ ) падают с ростом начальной скорости  $M^-$ . Однако, с увеличением размеров отверстий увеличивается  $|\Delta_G|$  и  $\varepsilon_k$ , причем в большей степени для газа с большими числами  $M^-$ . Последнее объясняется ростом разности  $p_\sigma - p_a$  (3.38) за счет увеличения  $p_\sigma$  (при  $\varphi_p = 1 \quad p_\sigma = p^+$ ) при отводе массы из дозвукового

\*) При  $M^- \geq 1$  в (2.36) принимается  $\nu = +1$ , а при учете скачка уплотнения – выбирается нижний знак.

потока. Коэффициент  $\varepsilon_k$  достигает максимальной величины при отводе всего потока через боковые отверстия, когда  $\Delta_G = -1$ ,  $v^+/v^- = 0$  и  $\max(p^+/p^-)$ . Дальнейший рост боковых отверстий влечет за собой появление обратного течения в сечении  $S^+$  ( $v^+ < 0$ ) и падение  $p_\sigma$ , что уменьшает  $\varepsilon_k$ , причем  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  при  $\bar{S}_m \rightarrow \infty$ .

Рис. 3.19. Истечение газа из канала через “короткий” патрубков

$$\Delta_S = 0, \lambda = \pi/2, \chi_k = 0,$$

$$M_k = 1, \gamma = 1.25;$$

$$1 - M^- = 0.1, 2 - M^- = 0.5,$$

$$3 - M^- = 0.8,$$

— —  $\varepsilon_k$ ,

..... —  $p^+/p^-$ .

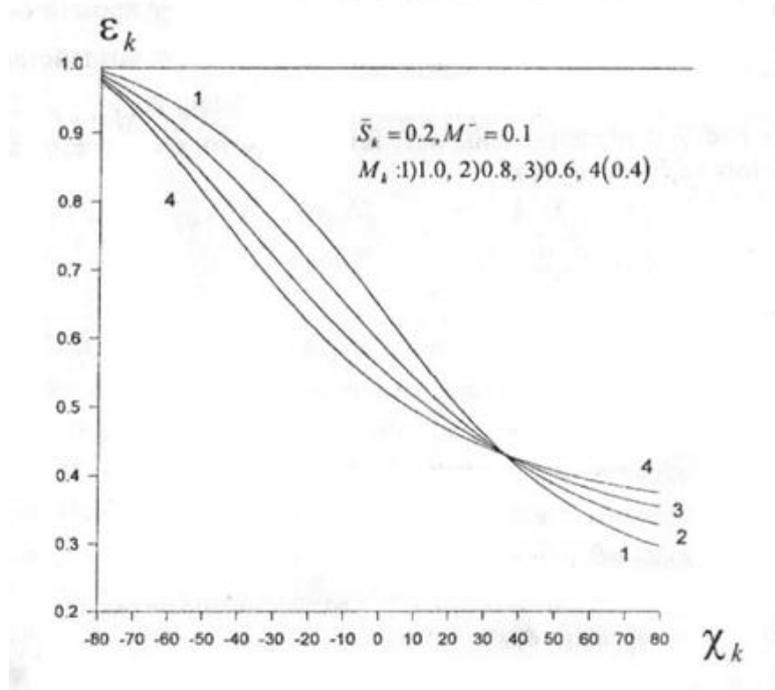
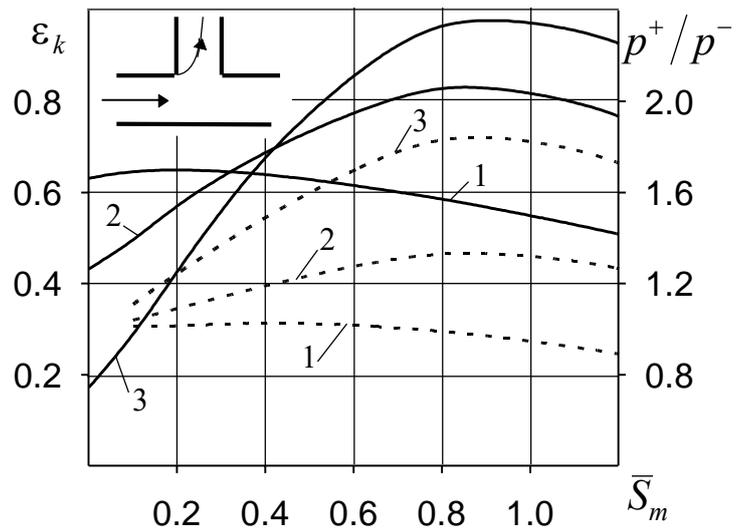


Рис. 3.20.

Зависимость коэффициента поджатия струи в патрубке  $\varepsilon_k(\chi_k)$  (рис. 3.20, 3.21) при различных сочетаниях  $M^-$  и  $M_k$  в целом повторяют закономерности истечения несжимаемой жидкости. Здесь же, для сравнения, приведено значение  $\varepsilon_k = 1$ , отвечающее распространенной гипотезе [83].

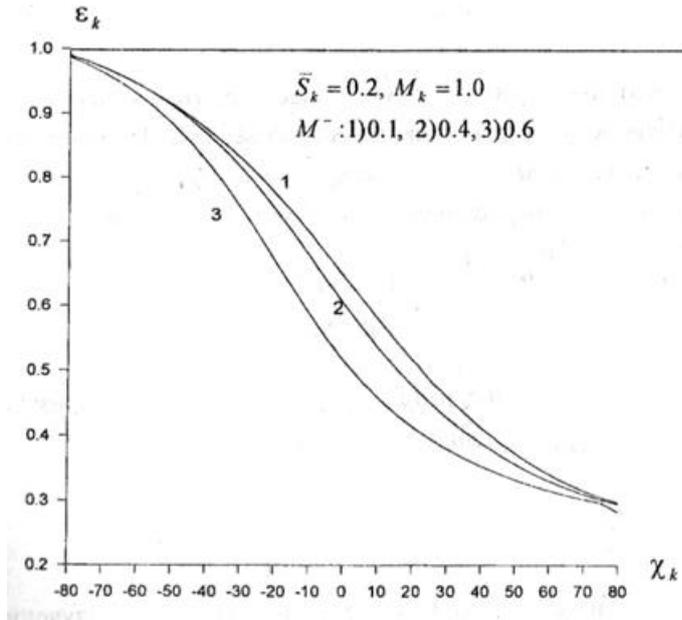


Рис.3.21.

### 3.3.2. Специфика решения задач истечения сжимаемой жидкости

На примере задачи истечения жидкости из канала через боковой патрубок излагаются возможные приемы и возникающие проблемы при реализации основной идеи метода построения замкнутой системы уравнений, выраженной соотношениями

$$\partial \sigma_p / \partial \Delta_S = 0, \quad \partial \sigma_p / \partial \chi_k = 0,$$

Учет сжимаемости среды сопровождается в общем случае, как минимум, удвоением числа нелинейных уравнений в системе уравнений на старте решения задачи в сравнении с моделью несжимаемой жидкости. В первом случае, для определения неизвестных  $\varphi_p$ ,  $\varphi_{pk}$ ,  $\varepsilon_k$ ,  $\alpha_k$  как функций аргументов  $\Delta_S$ ,  $\chi_k$  и ряда параметров  $\lambda$ ,  $M^-$ ,  $M_k$ ,  $\bar{S}_m, \dots$ , решается система уравнений (2.34, 2.49, 2.64, 2.65). При этом, функция  $\varphi_p$  имеет ряд особенностей в окрестности  $\Delta_S = 0$  и в окрестности состояния  $p^+ = p^-$ . Методы устранения и преодоления этих особенностей исследованы и описаны выше. Более того, для несжимаемой

жидкости общее решение для  $\varphi_p$ ,  $\varphi_{pk}$  получено в явном виде, что вдвое уменьшает порядок системы нелинейных уравнений за счет сужения ее до необходимости определения  $\varepsilon_k$ , и  $\alpha_k$  и делает предсказуемым и появление, и методы преодоления особенностей, связанных с функциями  $\varphi_p$  и  $\varphi_{pk}$ .

Для сжимаемой жидкости исследование особенностей поведения функции  $\varphi_{pk}$  становится актуальным. В частности, особой точкой второго рода для функции  $\varphi_{pk}(\chi_k)$  является координата  $\chi_k^*$ , отвечающая условию  $q_{3k} = \bar{x}_k' + \operatorname{tg} \chi_k^* = 0$  (как и для несжимаемой жидкости (2.54)). Имея в виду зависимость (3.41), находим, что  $\chi_k^* = \chi_k^*(\Delta_G, M^-, M_k)$ , а для устранения особенности, в качестве исходного, принимается условие независимости термодинамической функции  $\sigma_p$  от геометрических воздействий (здесь – от  $\chi_k$ ) в дифференциальной форме (2.44). Для случая  $\Delta_S = 0$ , когда  $\varphi_p = 1$ , названное условие принимает вид

$$\frac{\partial \varphi_{pk}}{\partial \chi_k} = - \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial \chi_k} \bigg/ \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial \varphi_{pk}} \quad (3.45)$$

и имеет особенность в точке  $\chi_k^*$ , здесь

$$f_k^{(0)} = \sigma_p^{(2)} = \pi(M^-) \frac{K \mp \nu n N}{I(n+1)} \left[ 1 + \frac{n-1}{2} \frac{K \pm \nu N}{K \mp \nu n N} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \bigg|_{\Delta_S=0, \varphi_p=1}$$

Прием преодоления участков, примыкающих к особым точкам, на примере функции  $\varphi_p(\Delta_S^*, \dots)$ , вполне пригоден и здесь: используя соотношения (2.37) и 1. в (2.9), функцию  $\varphi_{pk}$  можно заменить функцией  $n_k(\chi_k)$ . Названные соотношения, при сформулированных условиях ( $\Delta_S = 0$ , отрыв потока в передней кромке патрубка и  $\lambda = \pi/2$ ), имеют вид:

$$n = \frac{\gamma}{1 - (\gamma - 1)k_5}, \quad I = \frac{(n - 1)}{(\gamma - 1)}, \quad k_5 = \bar{S}_k k_{3k}, \quad (3.46)$$

$$k_{3k} = \left[ \frac{\varepsilon_k q_{4k}}{\cos \chi_k} + \varphi_{pk} \cdot \frac{(1 - \varepsilon_k) q_{3k}}{\cos \chi_k} \right] / k_{1k}, \quad k_{1k} = \varepsilon_k + \varphi_{pk} q_{3k} \cdot \operatorname{tg} \chi_k.$$

Величину  $\frac{q_{4k}}{\cos \chi_k}$  удобно представить в виде  $\frac{q_{4k}}{\cos \chi_k} = \frac{q_{3k} - \operatorname{tg} \chi_k}{\cos \chi_k} = \psi_{1k}$ .

В результате уравнение (3.45) приводится к виду

$$\frac{dn_k}{d\chi_k} = - \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial \chi_k} \bigg/ \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial n_k} \quad (3.47)$$

Относительно функции  $n_k(\chi_k)$  известно, что в точке  $\chi_k^*$  она не имеет особенностей. Правая часть соотношения (3.47) линеаризуется относительно малых величин  $\delta n_k = n_k - n_k^*$  и  $\delta \chi_k = \chi_k - \chi_k^*$ , а уравнение приводится к дифференциальному уравнению в разделяющихся переменных

$$\frac{dn_k}{d\chi_k} = - \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \delta n_k + \alpha_2 \delta \chi_k}{\beta_0 + \beta_1 \delta n_k + \beta_2 \delta \chi_k}. \quad (3.48)$$

Функции, входящие в интеграл уравнения (3.48), линеаризуются в окрестности  $(n_k^*, \chi_k^*)$  и приводят его к соотношению

$$n_k = n_k^* - (\chi_k - \chi_k^*) \frac{\alpha_0}{\beta_0}, \quad (3.49)$$

где  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  – известные функции значений  $(n_k^*, \chi_k^*)$ , полученные в результате линеаризации дифференциального уравнения (3.47), а величина  $n_k^*$  определяется из (3.50),

$$f_k^{(0)}(X, \varphi_{pk}(X, \chi_k), \chi_k) - \sigma_p(X) = 0, \quad X = \{M^-, M_k, \Delta_G\} \quad (3.50)$$

где  $f_k^{(0)}$  переформулирована в виде  $f_k^{(0)}(X, n_k^*(X, \chi_k^*), \chi_k^*)$ .

В результате для  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  получены выражения:

$$\alpha_0 = 8\cos^3(\chi_k^*)\sin(\chi_k^*)M_k^{-2}(-1 + \pi_1)\varepsilon_k n_k^* \cdot \\ \cdot \left(-\gamma + n_k^* + (-1 + \gamma)\sin(\chi_k^*)\bar{S}_k\varepsilon_k n_k^*\right)(-1 + n_k^{*2}),$$

$$\beta_0 = 4\cos^2(\chi_k^*)(-2 + 2\cos^2(\chi_k^*)\varepsilon_k) \cdot \\ \cdot \{ -1 + K_0 - K_0\gamma + \pi_1 - N_0(-1 + \gamma)n_k^* - (-1 + \pi_1)n_k^{*2} + \\ + \cos^2(\chi_k^*)\varepsilon_k[1 - K_0 + K_0\gamma - \pi_1 + N_0(-1 + \gamma)n_k^* + \\ + (-1 + \pi_1)n_k^{*2} + \gamma M_k^{-2}(-1 + \pi_1)(-1 + n_k^{*2})] \}.$$

Здесь  $K_0, N_0, \Delta_{\tau 0}, \psi_{10}, \dots$  — соотношения, полученные в результате линеаризации по  $\delta n_k$  и  $\delta\chi_k$  величин  $K, N, \tilde{\Delta}_G^*, \psi_{1k}$ :

$$K_0 = \frac{-1 + [1 + (-1 + \gamma + \Delta_{\tau 0})M^{-2}]n_k^*}{-1 + \gamma}, \quad \Delta_{\tau 0} = \frac{(B_0\psi_{10}\pi_1 - A_0\pi_{12})\bar{S}_k}{C_0\gamma M^{-2}};$$

$$\psi_{10} = -\frac{1}{\cos(\chi_k^*)}\operatorname{tg}(\chi_k^*), \quad A_0 = \gamma - n_k^* + (-1 + \gamma)\psi_{10}\bar{S}_k n_k^*;$$

$$B_0 = \sin(\chi_k^*)(\gamma - n_k^*) + (1 - \gamma)\bar{S}_k(1 - \varepsilon_k)n_k^*, \quad \pi_{12} = (1 - \varepsilon_k)\pi_1 + \gamma\varepsilon_k M_k^{-2}(1 - \pi_1);$$

$$C_0 = -n_k^*(-1 + \gamma)\bar{S}_k(-1 + \varepsilon_k + \sin(\chi_k^*)\psi_{10}), \quad \pi_1 = 1 - \pi(M_k)/\pi(M^-);$$

$$N_0 = [K_0^2 - 2(n_k^{*2} - 1) \cdot f]^{1/2}, \quad f \equiv M^{-2}(C_1 + C_2 \frac{\gamma - 1}{2} M^{-2}) / (\gamma - 1).$$

Соотношение (3.49) используется в интервале  $\pm|\delta\chi_k|$  в окрестности особой точки  $\chi_k^*$  и решает проблему преодоления особых точек в исследуемой задаче. Вне интервала  $\varphi_{pk}$  определяется непосредственно из решения алгебраического уравнения (3.50) или решением дифференциального уравнения (3,45). Преимуществом ориентации на условия в алгебраической форме, является получение частного интеграла. При использовании дифференциального соотношения, например (3.45) . проблема начального условия может быть решена с помощью (3,49) и последующего интегрирования в противоположные стороны от особой точки.

### 3.4. Истечение сжимаемой жидкости из камеры конечных размеров

В каналах с отверстием на боковой поверхности, находящихся под давлением, при отсутствии однонаправленного потока возникают течения, направленные к отверстию. Такая же картина течения возникает в камерах с отверстием или "коротким" патрубком на боковой поверхности (рис.3.22).

Полагая течение квазистационарным, можно применить полученные выше соотношения для определения расхода газа из камеры в среду с заданным давлением  $p_a$ .

Течение, возникающее в камере, характеризуется соотношениями (см.(2.71))

$$\Delta_S = 0, \quad \lambda = \pi/2, \quad \varphi_p = 1, \quad p_\sigma = p^+.$$

В силу симметрии истечения из левой и правой частей камеры следует принять срыв потока в точках  $A$  и  $B$  (случай 5 табл. 2.1) и  $\chi = 0$ . Тогда соотношения (2.23)

и (2.24) дают:

$$k_{2k} = 1, \quad k_{3k} = 0, \quad k_{4k} = 0, \quad k_5 = 0,$$

$$\Delta_G^* = 0,$$

а из (2.37) следует  $I = 1$ ,  $n = \gamma$ .

Уравнение движения (2.34) для адиабатического ( $\Delta_Q = \Delta_{Qk} = 0$ ) истечения идеального газа ( $\Delta_\tau = \Delta_{\tau k} = \tilde{\Delta}_\tau^* = 0$ ) из камеры при очевидном условии  $p_{\delta_k} = p_k = p_a$  приводится к виду

$$\gamma M_k^2 \frac{\pi(M_k)}{\pi(M^-)} \varepsilon_k = \left( \frac{p^+}{p^-} - \frac{\pi(M_k)}{\pi(M^-)} \right), \quad (3.51)$$

где  $\pi(M_k) = p_a/p_0$ ,  $p_0$  – давление торможения для газа в камере.

Условия симметрии истечения из камеры позволяют утверждать, что в некоторых сечениях  $S^-$  и  $S^+$  в окрестности отверстия  $AB$  имеют место соотношения

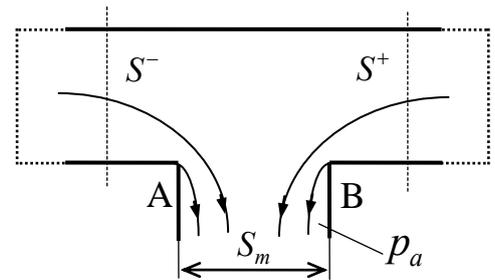


Рис. 3.22

$$M^+ = M^- , \quad v^+ = -v^- . \quad (3.52)$$

Первое из них вместе с 5.(2.36) дает  $N = 1 - M^{-2}$  при дозвуковом истечении ( $v = -1$ ). При этом 3.(2.36) приводит к  $p^+/p^- = 1$ . В итоге уравнение (3.51) может быть записано в виде

$$\varepsilon_k = \frac{\pi(M^-) - \pi(M_k)}{\gamma \cdot M_k^2 \cdot \pi(M_k)} . \quad (3.53)$$

Следует заметить, что при истечении газа из полуограниченного пространства ( $S^+ = S^- \rightarrow \infty$ ), когда  $\pi(M^-) \rightarrow 1$ , соотношение (3.53) приводит к известному результату [96]:

$$\varepsilon_k = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \Delta_G^* = 0, M_k^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1}{\gamma M_k^2} .$$

Второе условие (3.52) вместе со следствиями первого и 1.(2.36) дает

$$\Delta_G = -2 .$$

Отсюда и из определения  $\Delta_G$  в виде

$$\Delta_G = -\varepsilon_k \bar{S}_m \mu_k , \quad \bar{S}_m = S_m/S^- , \quad \mu_k = \frac{M_k}{M^-} \left( \frac{\tau(M_k)}{\tau(M^-)} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

следует еще один способ описания  $\varepsilon_k$

$$\varepsilon_k = \frac{2}{\bar{S}_m \mu_k} . \quad (3.54)$$

Совместное решение (3.53) и (3.54) позволяет определить  $M^-$  по известному из отношения давлений  $p_a/p_0 = \pi(M_k)$  числу Маха  $M_k$

$$1 = \frac{\bar{S}_m}{2\gamma M^- M_k} \left( \frac{\tau(M^-)}{\tau(M_k)} \right)^{1/2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\tau(M_k)}{\tau(M^-)} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] . \quad (3.55)$$

Вслед за тем определяются  $\mu_k$  и  $\varepsilon_k$  по (3.54) или (3.53) и расход газа

$$G_k = 2G^- = 2(\rho v S)^- = 2\gamma S^- \frac{p_0}{a_0} M^- \cdot (\tau(M^-))^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}},$$

где  $a_0 = \sqrt{\gamma RT_0}$ ,  $T_0$  – температура торможения газа в камере.

### 3.5. Задача о вдуве газа в канал из камеры

#### 3.5.1. Математическая модель

Схема течения приведена на рис. 3.23: из камеры с текущими параметрами торможения  $p_{0_2}$ ,  $T_{0_2}$  газ, под действием перепада давлений, вытекает в канал с потоком газа, параметры состояния которого известны в некотором сечении  $S_1^-$ . Впредь это сечение принимается в качестве одной из границ (сечение, в котором задано начальное состояние потока) зоны перестройки течения. Ставится задача определения расхода газа из камеры в канал с учетом возможного отрыва струи в кромках  $A$  и  $B$  соединительного патрубка и всех параметров состояния газа в выходном сечении  $S_1^+$  канала

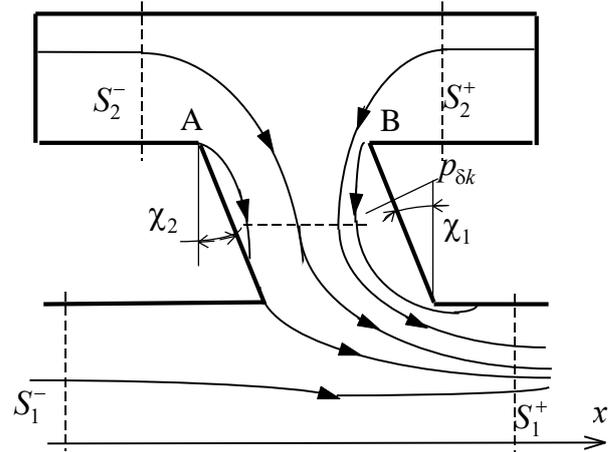


Рис. 3.23

в конце зоны перестройки течения. При этом задача, рассмотренная в предыдущем параграфе, может рассматриваться как составная часть настоящей с той лишь разницей, что в среде, куда истекает поток из камеры, давление  $p_{\delta_k}$  неизвестно. В этих условиях соотношение (3.55) должно рассматриваться как связь между двумя неизвестными величинами потока в камере  $M_2^-$  и в минимальном сечении струи  $M_k$  в патрубке

$$1 = \frac{\bar{S}_{m_2}}{2\gamma M_2^- M_k} \left( \frac{\tau(M_2^-)}{\tau(M_k)} \right)^{1/2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\tau(M_k)}{\tau(M_2^-)} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right]. \quad (3.56)$$

Давление  $p_{\delta_k}$  можно связать со средним давлением  $p_{\sigma_1}$  в зоне перестройки течения в канале. Варианты связей рассмотрены в параграфах 3.1 и 3.2

на примере модели несжимаемой жидкости и могут быть обобщены на течение сжимаемой жидкости. Ниже, в качестве примера, рассмотрен один из возможных вариантов: патрубок считается "коротким" – зона отрыва потока в патрубке сообщается с зоной перестройки течения в канале и имеет место

$$p_{\delta_k} = p_{\sigma_1} . \quad (3.57)$$

Течение в самом канале осуществляется при условиях

$\Delta_{S1} = 0$ ,  $\varphi_{pk} = 1$ ,  $\lambda_1 = \pi / 2$ , угол  $\chi_1$  определяется конструкцией патрубка (на рис. 3.23  $\chi_1 > 0$ ); имеют место соотношения  $k_{ik}$  для вдува (2.30), т.е.  $k_{3k} = k_{5k} = 0$ ,  $k_{4k} = -\sin \chi_1$ .

Пренебрегая силами трения потока в канале ( $\Delta_{\tau_1} = 0$ ), из (2.66) имеем:

$$\tilde{\Delta}_{G1}^* = \Delta_{G1}^* = -\frac{\rho_1^-}{\rho_k} \frac{\Delta_{G1}^2}{\varepsilon_k \bar{S}_{m1}} \sin \chi_1 = -\frac{\varepsilon(M_1^-)}{\varepsilon(M_k)} \frac{A_H}{A_p} \frac{\Delta_{G1}^2}{\varepsilon_k \bar{S}_{m1}} \sin \chi_1, \quad (3.58)$$

где  $\rho_1^- / \rho_{10}^- = \varepsilon(M_1^-)$ ,  $\rho_k / \rho_{20} = \varepsilon(M_k)$ ,  $\rho_{10} / \rho_{20} = A_H / A_p$ ,

$$A_H = H_2 / H_1^- = T_{20} / T_{10}^-, \quad A_p = p_{20} / p_{10}^-, \quad \bar{S}_{m1} = S_m / S_1^-,$$

$$\Delta_{G1} = -\frac{(\varepsilon \rho v_n S)_k}{(\rho S v)_1^-} = \varepsilon_k \bar{S}_{m1} \mu_1 A_p A_H^{-1/2}, \quad \mu_1 = \frac{M_k}{M_1^-} \left( \frac{\tau(M_k)}{\tau(M_1^-)} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}.$$

С учетом (3.54)  $\Delta_{G1}$  и  $\tilde{\Delta}_{\tau_1}^*$  приводятся к виду (здесь  $\tilde{\Delta}_{\tau_1}^* = \tilde{\Delta}_{G1}^*$ )

$$\Delta_{G1} = 2 \frac{S_2}{S_1} \frac{\mu_1}{\mu_2} A_p A_H^{-1/2}, \quad \tilde{\Delta}_{G1}^* = -2 A_p \frac{S_2}{S_1} \frac{\mu_1^2}{\mu_2} \frac{\varepsilon(M_1^-)}{\varepsilon(M_k)} \sin \chi_1, \quad (3.59)$$

$$\text{где } \mu_2 = \frac{M_k}{M_2^-} \left( \frac{\tau(M_k)}{\tau(M_2^-)} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (\text{см. п. 3.4}).$$

Для рассматриваемых условий ( $\Delta_{S1} = 0$ ,  $k_5 = 0$ ) имеют место  $n_1 = \gamma$ ,  $I_1 = 1$ ;  $p_{\sigma_1} = p_1^+$  вследствие  $\varphi_{p1} = 1$ . Тогда, с учетом (3.57), отношение

давлений в начальном и выходном сечениях канала (без допущения об адиабатичности течения в канале) запишется в виде

$$\frac{p_1^+}{p_1^-} = \frac{p_{\delta_k}}{p_1^-} = A_p \frac{\pi(M_k)}{\pi(M_1^-)}.$$

С другой стороны, то же отношение давлений, с помощью 3.(2.36), выражается через воздействия на поток в канале. В итоге имеем еще одну связь между числами Маха  $M_k$  и  $M_2^-$

$$1 = \frac{\pi(M_1^-)}{\pi(M_k)A_p} \frac{K_1 + \gamma N_1}{\gamma + 1}, \quad (3.60)$$

где  $K_1 = 1 + \gamma M_1^{-2} (1 - \tilde{\Delta}_{G_1}^*)$ ,

$$N_1 = \left\{ K_1^2 - 2(\gamma + 1)M_1^{-2} \left( C_1 + C_2 \frac{\gamma - 1}{2} M_1^{-2} \right) \right\}^{1/2},$$

$$C_2 = (1 + \Delta_{G_1})(1 + A_H \Delta_{G_1}), \quad C_1 = C_2 + (1 + \Delta_{G_1})(\gamma - 1)\Delta_{Q_1}.$$

Система уравнений (3.56, 3.60) и дополняющие их соотношения для  $K_1, N_1, \Delta_{G_1}, \tilde{\Delta}_{\tau_1}^*, \mu_1$  и  $\mu_2$  образуют замкнутую систему алгебраических уравнений для  $M_2^-$  и  $M_k$  при известных параметрах

$$A_p = \frac{p_{20}}{p_{10}^-}, \quad A_H = \frac{H_2}{H_1^-}, \quad \frac{S_2}{S_1}, \quad \bar{S}_{m_1} = \frac{S_m}{S_1}, \quad \chi_1, \quad \Delta_Q, \gamma, M_1^-. \quad (3.61)$$

Решение названной системы уравнений позволяет затем определить расход  $\Delta_{G_1}$  из камеры в канал (3.59) и, при необходимости, по (2.36) все гидродинамические параметры потока в канале в конце зоны перестройки течения (в сечении  $S_1^+$ ) и давление  $p_{\delta_k}$  в замкнутой зоне отрыва потока в боковом патрубке ( $p_{\delta_k} = p_{\sigma_1} = p^+$ ). При необходимости может быть определен полный запас механической энергии потока в сечении  $S_1^+$ , характеризуемый коэффициентом восстановления давления  $\sigma_p = p_{10}^+ / p_{10}^-$

$$\sigma_{p_1} = \pi(M_1^-) \frac{K_1 + \gamma N_1}{\gamma + 1} \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{K_1 - N_1}{K_1 + \gamma N_1} \right]^{\gamma/\gamma-1}.$$

**3.5.2. К вопросу об эффективности подвода массы в канал [50]**

Полученное решение позволяет формулировать различные критерии эффективности вдува газа в канал, например, обеспечение максимальных расходов  $\Delta_{G1}$ , или изменения запаса механической энергии потока  $\sigma_{p_1}$ ,

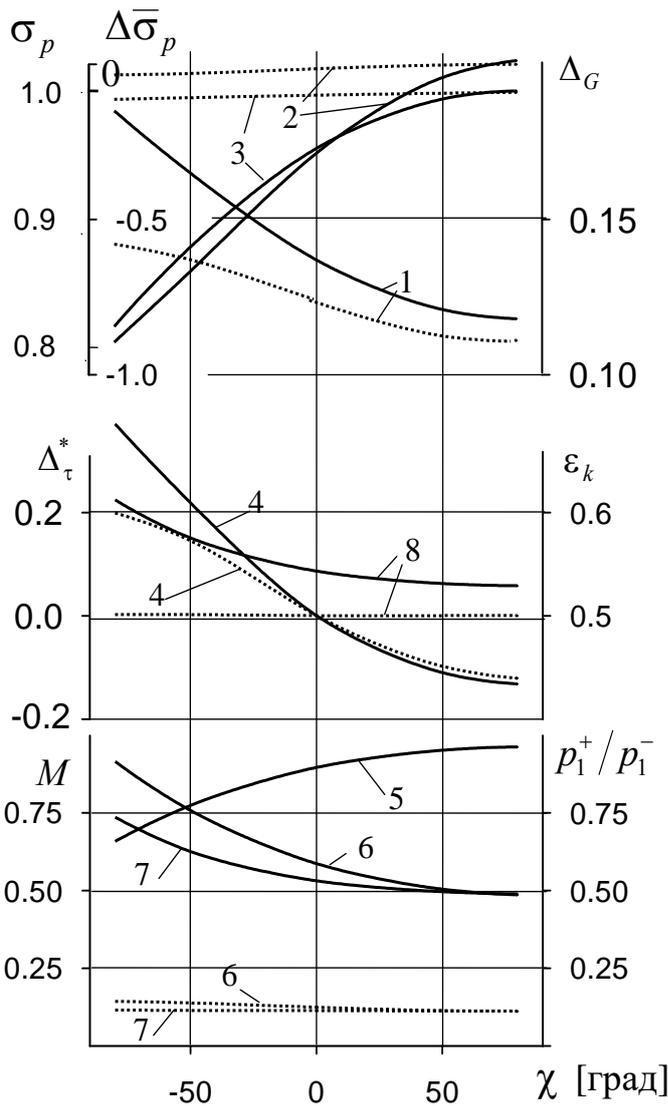


Рис.3.24. Вдув газа из камеры в канал под различными углами:

$$S_2/S_1 = 1, \bar{S}_{m_2} = 0.2,$$

$$A_p = A_H = 1, \Delta_Q = 0, \gamma = 1.4;$$

— —  $M^- = 0.423$ ,

..... —  $M^- = 0.1$ ;

1 —  $\Delta_G$ ,    2 —  $\Delta \bar{\sigma}_p$ ,

3 —  $\sigma_p$ ,    4 —  $\Delta \tau^*$ ,

5 —  $p_1^+ / p_1^-$ , 6 —  $M_k$ ,

7 —  $M_1^+$ ,    8 —  $\epsilon_k$ .

приращения удельного запаса механической энергии  $(\sigma_{p_1} - 1)/\Delta_{G_1} = \Delta \bar{\sigma}_p$  и т.п. Для достижения этих целей существует широкий спектр возможностей, перечень которых содержится в (3.61).

Некоторое представление о возможностях воздействий на поток в канале, по указанной на рис. 3.23 схеме, дают графики на рис. 3.24 и 3.25.

На рис. 3.24 меняется угол наклона подводящего патрубка  $\chi_1$  при фиксированных параметрах:  $A_H = A_p = 1$ ,  $\Delta_Q = \Delta_{Q_m} = 0$ ,  $\chi_2 = 0$  ( $\varepsilon_{m1} = \varepsilon_{m2}$ ),  $\gamma = 1.4$ ; сплошные и штриховые линии относятся к числам Маха  $M^- = 0.423$  и  $0.1$  соответственно. Неожиданным, но объяснимым результатом является большой расход из камеры в канал (кривые 1) при вдуве навстречу потоку в канале ( $\chi_1 < 0$ ) в сравнении с вдувом по потоку ( $\chi_1 > 0$ ). Причиной является больший перепад давления, устанавливающийся между камерой и каналом, при вдуве против потока ( $p_1^+(\chi_1 < 0) < p_1^+(\chi_1 > 0)$ ,  $p_1^+/p_1^- = p_{\sigma_1}/p_1^-$  – кривая 5), чем по потоку вследствие больших потерь на трение  $\tilde{\Delta}_\tau^*$  (кривая 4).

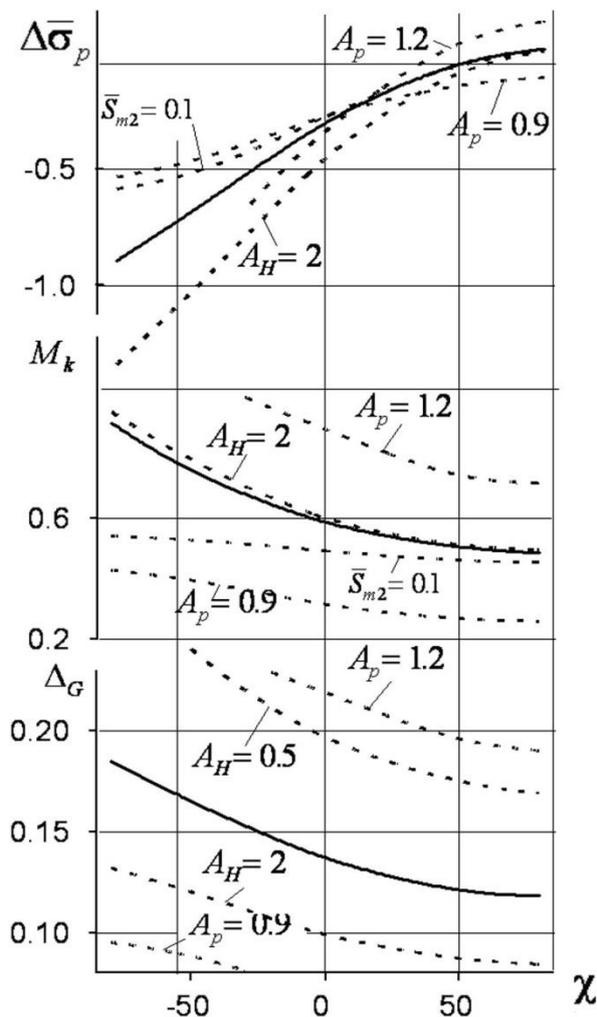


Рис. 3.25. Эффективность вдува газа в канал из камеры при различных условиях:

— базовый вариант:

$$\gamma = 1.4, S_2/S_1 = 1,$$

$$\bar{S}_{m2} = 0.2, M_k = 1,$$

$$A_H = A_p = 1, \Delta_Q = 0,$$

$$M^- = 0.423;$$

..... — изменен один из параметров (указан на графике).

Возможность трактовки величины  $\tilde{\Delta}_\tau^*$  (см. 3.59) как эффективного коэффициента трения при вдуве отмечена в п. 2.2.3. Поведение остальных гидродинамических параметров вполне согласуется с ожидаемым: числа Маха  $M_1^+$  (кривая

7) больше при вдуве против потока вследствие большего подвода массы в дозвуковой поток; скорость потока в соединительном патрубке (число Маха  $M_m$  – кривые 6) больше при вдуве против потока вследствие большего перепада давления между камерой и каналом. С другой стороны, вдув по потоку благоприятен для приращения механической энергии потока (кривые 3 и  $\Delta\sigma_{p_1}/\Delta G_1$  – кривые 2). И, наконец, при меньших числах Маха  $M_1^-$  все гидродинамические эффекты вдува проявляются менее эффективно.

Подобный анализ возможен и для прочих величин из списка (3.59). Варьирование параметров вдува (рис. 3.25) выявило общие закономерности для сохранения и увеличения запаса механической энергии потока в канале за счет вдува. Целесообразен вдув "холодного" газа ( $A_H < 1$ ) с  $A_p > 1$  по потоку ( $\chi_k > 0$ ), однако при этом велик расход газа  $\Delta G$ . Обратная задача наиболее эффективно решается при вдуве "горячего" газа ( $A_H > 1$ ) против потока ( $\chi_k < 0$ ). Заметим, что, при необходимости, сечение патрубка в окрестности сочленения с каналом может быть уменьшено на величину не более  $(1 - \varepsilon_k)S_m$  без нарушения схемы течения (кривая 8, рис. 3.23), а при известной форме граничных линий тока п.п. 2.5.1, 2.5.2. и форме патрубка, повторяющих их, организовать безотрывное течение в патрубке. Следует иметь в виду, что помимо названных ранее ограничений –  $M_k$ ,  $M^-$ ,  $M^+$ ,  $M_2 \leq 1$ , описанная схема течения ограничена очевидным условием  $\varepsilon_{k_1} = \varepsilon_{k_2} / \cos\chi_2 \leq 1$ . Нарушение его требует корректировки математической модели.

### 3.6. Некоторые обобщения решений на основе законов сохранения в интегральной форме

#### 3.6.1. Среды, подчиняющиеся уравнению состояния Гэза

Уравнения состояния и внутренней энергии капельных (собственно) жидкостей могут быть записаны в виде [7]

$$\frac{p + p^*}{p_H + p_H^*} = \left( \frac{\rho}{\rho_H} \right)^{\gamma_l} \exp\left(\gamma_l \int_{T_H}^T \alpha_H dT\right),$$

$$u = \frac{p^* - T \frac{dp^*}{dT}}{\rho} + \frac{1 - \gamma_l \alpha_H T_H}{\gamma_l - 1} \frac{p_H + p_H^*}{\rho_H} \left( \frac{\rho}{\rho_H} \right)^{\gamma_l - 1} \times \\ \times \exp \left( \gamma_l \int_{T_H}^T \alpha_H dT \right) + \int C_p dT.$$

Здесь  $\gamma_l, \alpha_H, p_H^* = p_H^*(T_H)$  – эмпирические константы,  $p^*(T), C_p(p, T)$  – эмпирические функции,  $T_H, \rho_H, p_H$  – температура, плотность и давление в начальном состоянии. Пренебрегая объемным расширением жидкости при изменении температуры ( $\alpha_H = 0$ ), принимая  $p^* = p_H^*$  и  $C_p = \text{const}$ , можно существенно упростить исходные уравнения, ограничив область рассматриваемых термодинамических процессов близкими к изотермическим и изэнтропическим [7, 67]

$$\frac{p + p^*}{p_H + p_H^*} = \left( \frac{\rho}{\rho_H} \right)^{\gamma_l}, \quad u = \frac{p^*}{\rho} + \frac{1}{\gamma_l - 1} \frac{p_H + p_H^*}{\rho_H} \left( \frac{\rho}{\rho_H} \right)^{\gamma_l - 1}.$$

Первое из этих соотношений носит название уравнения состояния Тэта.

Пренебрегая начальным давлением ( $p_H/p^* \sim 10^{-3}$ ), можно получить

$$\frac{p + p^*}{p^*} = \left( \frac{\rho}{\rho_H} \right)^{\gamma_l}, \quad u = \frac{p^*}{\rho} + \frac{1}{\gamma_l - 1} \frac{p + p^*}{\rho}, \quad h = \frac{\gamma_l}{\gamma_l - 1} \frac{p + p^*}{\rho}, \quad (3.62)$$

$$a^2 = \gamma_l \frac{p + p^*}{\rho}.$$

Дополнив уравнения движения (2.3) величиной

$$\int_S p^* \vec{n} dS = 0,$$

получим систему уравнений, подобную (2.11) и (2.12), в которых давление  $p$  заменено суммой

$$p \rightarrow p + p^*. \quad (3.63)$$

При этом остаются неизменными (с учетом замены  $p$  на  $p + p^*$ ) связи между гидродинамическими параметрами (2.23) и способы определения  $\varphi_p$  и  $\varphi_{pk}$  (2.30), (2.51), (2.52). Следует лишь иметь в виду, что условия

$$\left| \frac{T}{T^-} - 1 \right| \ll 1 \quad \text{и} \quad \left| \frac{s}{s^-} - 1 \right| \ll 1$$

накладывают ограничения на суммарный эффект от воздействий  $X, \Delta_S, \chi_k$ . Однако, эти ограничения вряд ли являются обременительными. Это утверждение основано на двух примерах. В первом – при распространении ударной волны от ядерного подводного взрыва энтропия и температура воды менялась незначительно [67]. К тем же выводам привели результаты работы [72], где решалась модельная задача о движении столба жидкости в канале артиллерийского орудия под действием поршня со скоростями, характерными для артиллерийских снарядов при учете сил трения столба жидкости о стенки ствола. В частности, температура воды на длине канала в 50 калибров изменилась на 3%.

Для малых чисел Маха  $M^2 = v^2/a^2$  решения законов сохранения в интегральной форме могут быть линеаризованы подобно соотношениям (2.50). При этом в линеаризованных соотношениях параметр  $p^*$  легко исключается и решение для несжимаемой капельной жидкости ничем не отличается от решения для течений несжимаемого газа.

### 3.6.2. Двухфазные смеси

Плотность  $\rho$  двухфазной смеси жидкости и газа описывается соотношением

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha}{\rho_l} + \frac{1-\alpha}{\rho_g},$$

где  $\rho_l$  – истинная плотность жидкой фазы,  $\rho_g$  – истинная плотность газа,  $\alpha$  – массовая доля жидкости в смеси. Для быстропротекающих процессов в таких смесях допустимо предположение о баротропности в каждой из компонент смеси. Для жидкой фазы соответствующее уравнение может быть взято в форме уравнения состояния Тэта (3.62)

$$\frac{p_l}{p^*} = \left( \frac{\rho_l}{\rho_{lH}} \right)^{\gamma_l} - 1;$$

для газообразной фазы в форме изэнтропы

$$\frac{p_g}{p_{gH}} = \left( \frac{\rho_g}{\rho_{gH}} \right)^{\gamma_g},$$

где “Н” – индекс некоторого начального состояния.

Используя “однодавленческую” гипотезу [79]  $p_l = p_g = p$ , для плотности смеси имеем

$$\rho = \left( \frac{\alpha}{\rho_{lH} \left( \frac{p + p^*}{p^*} \right)^{1/\gamma_l}} + \frac{1 - \alpha}{\rho_{gH} \left( \frac{p}{p_H} \right)^{1/\gamma_g}} \right)^{-1}. \quad (3.64)$$

Сжимаемость смеси существенно отличается от сжимаемости чистой жидкости даже при очень малых долях газа  $(1 - \alpha) \ll 1$  [39]. Подобные ситуации характерны для гидравлических амортизаторов самолетных шасси и гидравлических тормозов противооткатных систем артиллерийских орудий, где часть объема внутренних полостей занята газом. В [25] соотношение (3.64) аппроксимировалось уравнением Тэта (3.62) и использовалось для расчета гидротормозов артиллерийских орудий.

### 3.6.3. Уточнение смысла и записи уравнений квазиодномерных течений в каналах с распределенными расходными воздействиями

Квазиодномерные течения в каналах с распределенной по длине раздачей или подводом массы через пористую (перфорированную) стенку канала достаточно распространенная модель прикладной гидрогазодинамики [68, 90]. При этом наиболее проблемной представляется запись уравнения движения (3.65) [7] при отводе массы, где множитель  $\theta$  варьируется от 0 до 1. Суть проблемы при истечении из канала сформулируем, цитируя Л. Крокко [68]. «...Случай ...отвода массы. должен быть рассмотрен особо тщательно вследствие неопределенности выбора  $v_{xk}$  ... В действительности их можно выбрать равными значению

в равномерном потоке ( $v_{xk} = v^-$ ). Однако, фактические условия в жидкости, достигающей стенки перед тем, как быть выведенной наружу, не совпадают со средними условиями в потоке.

$$\frac{\partial \rho v^2 S}{\partial x} + S \frac{\partial p}{\partial x} = -\pi_x \tau_w - \theta \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n (\alpha \varepsilon S \rho v_n v_x)_k}{\Delta x}, \quad (3.65)$$

Например, для пор или отверстий, расположенных перпендикулярно оси канала  $v_{xk} = 0$ . .... При написании уравнений сохранения мы не пользовались вторым законом термодинамики. Этот закон .... Не может быть нарушен....». В некоторой степени это утверждение относится и к задачам подвода массы в канал: здесь, при почти полном единодушии в уравнении (3.65) (при подводе массы!) величина  $\theta = -1$ , при формулировании уравнения энергии позиции диаметрально противоположны. В частности, согласно [68] течение может быть только неизэнтропическим (см. также п. 2.4), тогда как в [98] принимается  $s = const$ .

Задачи прикладной гидрогазодинамики, рассмотренные выше, удовлетворяют всем законам сохранения и 2-му началу термодинамики и могут быть использованы для снижения неопределенности в ответах на поставленные вопросы. С этой целью рассмотрим [Д8], поочередно, течение в каналах с подводом массы и отводом, исходя из полученных выше решений частных задач, теперь распределенных с некоторой плотностью в пределах элементарного участка  $\Delta x$  канала Рис. 3.26.

### Уравнение движения в случае подвода массы в канал.

Система условий и допущений:

- течение в канале дозвуковое;
- расходные воздействия осуществляются через систему боковых патрубков, отверстий перфорации или поры в поверхности канала в пределах участка  $\Delta x$ ;  $\chi_k$  и  $\lambda_k$  – местные (зависящие от  $x$ ) углы, характеризующие ориентацию патрубков; в пределах участка  $\Delta x$   $\chi_k$  и  $\lambda_k$  считаются неизменными;

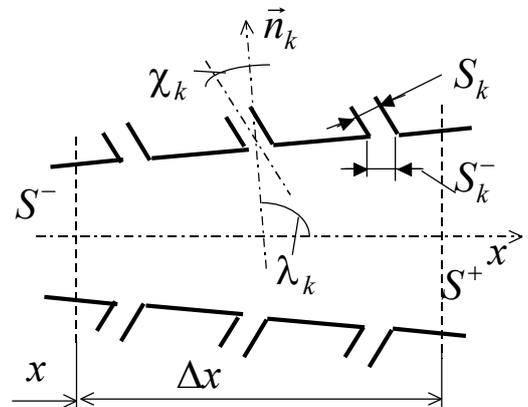


Рис. 3.26

- исключены эффекты закрутки потока в окрестности мест вдува;

– на участке  $\Delta x$  изменение поперечных размеров канала незначительно:

$$S^+ \cong S^-, \text{ т.е. } \Delta_S \cong 0, \quad \varphi_p \cong 1, \quad p_\sigma \cong p^+, \quad \lambda_k \cong \pi/2.$$

- тогда  $p_\sigma = p_k$ ,  $\varepsilon_k = 1$  (см. (2.27)) и, как следствие, имеют место (2.29), (2.30), (2.31)

$$\Delta_{\tau_k} = -\cos \chi_k, \quad k_{3k} = 0, \quad k_{4k} = \sin \chi_k, \quad k_5 = 0,$$

$$\Delta_\tau^* = \Delta_\tau - \frac{1}{(\rho S v^2)^-} \sum_{k=1}^n (\alpha S \rho v_n^2 \sin \chi_k)_k.$$

При этом уравнение движения в (2.33) принимает вид:

$$(\alpha S \rho v^2)^+ + p^+ S^+ = (\alpha S \rho v^2)^- + p^- S^- - (S \rho v^2)^- \cdot \Delta_\tau + \sum_{k=1}^m (\alpha S \rho v_n^2 \sin \chi)_k,$$

ему эквивалентно уравнение движения в интегральной форме

$$\int_{S^+} \rho v^2 dS - \int_{S^-} \rho v^2 dS = - \int_{S^-} (p^+ - p^-) dS + \int_S \tau_{nx}^* dS + \sum_{k=1}^m \int_{S_k} \rho v_n^2 \sin \chi dS.$$

Далее, применяя известную процедуру перехода от законов сохранения в интегральной форме к дифференциальным уравнениям одномерного движения в канале [7], имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} (\alpha \rho v^2 S) = -S \frac{\partial p}{\partial x} - \pi_x \tau_w + \pi_x \sin \chi \bar{S}_m (\alpha \rho v_n^2), \quad (3.66)$$

$$\text{где } \bar{S}_m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sum_k^m S_k}{\Delta x \cdot \pi_x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sum_k^m \cos \chi_k S_k^-}{\Delta x \cdot \pi_x} = \mu \cos \chi,$$

$\pi_x$  – периметр канала,  $\mu$  – пористость боковой поверхности канала,  $v_n \sin \chi_n = -v_x$ . Из сравнения (3.65, 3.66) следует  $\theta = -1$ .

Уравнение движения (3.66), описывающее подвод массы в канал, удовлетворяет законам сохранения и 2-му началу термодинамики.

**Уравнение движения в случае отвода массы из канала.**

В уравнении движения (2.33), при названных выше допущениях, имеет место соотношение

$$\sigma^+ = \sigma^- = S^+ \left[ 1 + \sum_{k=1}^m \bar{S}_k k_{3k} \right],$$

что позволяет записать (2.33) в виде:

$$\begin{aligned} (\alpha S \rho v^2)^+ - (\alpha S \rho v^2)^- &= -p^+ S^+ + p^- S^+ - (S \rho v^2)^- \cdot \Delta_\tau - \\ &- (p^+ - p^-) \sum_{k=1}^m S_k k_{3k} - \sum_{k=1}^m (\alpha \varepsilon S \rho v_n^2)_k k_{4k} - \sum_{k=1}^m (p^- - p_{\delta k}) S_k k_{3k}. \end{aligned}$$

Здесь:  $p^+ = p_\sigma$  ( $\varphi_p = 1$ ) и разность давлений  $(p_\sigma - p_{\delta k})$  может быть исключена с помощью (2.34).

При этом возникает очередная ситуация вариативности и допущений. В частности, если стенка канала достаточно тонкая и зона отрыва потока в патрубках сообщается с окружающей средой, то, при  $\Delta_{\tau k} = 0$ ,  $p_k = p_{\delta k}$ , уравнение (2.34)  $p_\sigma - p_k = (\alpha \varepsilon \rho v_n^2)_k / k_{2k}$  позволяет записать уравнение движения в виде

$$(\alpha S \rho v^2)^+ + p^+ S^+ = (\alpha S \rho v^2)^- + p^- S^- - (S \rho v^2)^- \Delta_\tau - \sum_{k=1}^m (\alpha S \rho v_n^2)_k \left[ k_{4k} + \frac{k_{3k}}{k_{2k}} \right].$$

Процедура перехода к дифференциальной форме записи (см. выше) приводит к уравнению:

$$S \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \rho v^2) = -S \frac{\partial p}{\partial x} - \pi_x \tau_w - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^m (\alpha \varepsilon S \rho v_n^2)_k \left[ k_{4k} + \frac{k_{3k}}{k_{2k}} \right]}{\Delta x}; \quad (3.67)$$

сопоставление его с (3.65) дает в случае отвода массы из канала

$$\theta \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \sum_{k=1}^m (\alpha \varepsilon S \rho v_n v_x)_k \right] / \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \sum_{k=1}^m (\alpha \varepsilon S \rho v_n^2)_k \left( k_{4k} + \frac{k_{3k}}{k_{2k}} \right) \right] / \Delta x. \quad (3.68)$$

Далее, полагая кромки патрубков без фасок и закруглений, а схему истечения вида 1-2, коэффициенты  $k_{ik}$ ,  $\varepsilon_k$ ,  $v_k$  могут быть определены по схеме изложенной в п. 3.1.1. - для несжимаемой среды, или по схеме п. 3.1.3. - для сжимаемых дозвуковых течений.

При истечении через "длинные" патрубки ("толстые" стенки канала) уравнение (3.67) сохраняет свой вид, но схема расчета существенно усложняется за счет учета потерь на трение в патрубках. При этом кратно сокращаются расходные характеристики отверстий в стенках канала и нивелируется влияние угла отвода массы (см. п. (3.2.1.)).

**P. S.!** Наличие фасок и скруглений на входе в патрубок существенно снижает достоверность расчетных методов решения задач с отводом массы, а нерегулярная и нелинейная форма поперечных сечений по длине патрубков (прессованный, композитный материал стенок канала) сводит их достоверность к нулю.

#### **3.6.4. Закрученные течения в каналах с локальными воздействиями**

Интерес к закрученным течениям в каналах связан с многообразными техническими приложениями: циклонные пылеуловители, центробежные форсунки, вихревые трубы Ранка, повышение эффективности сгорания твердого и жидкого топлива в вихревых камерах, снижение гидравлических потерь выхлопных трактов самолетных двигателей при тангенциальном подводе массы и т. п. Теоретические модели закрученных течений в каналах, ориентированные на различные приложения, содержат различные системы допущений: от потенциальных течений [21, 80, 81] до учета реальных свойств жидкости в рамках модели пограничного слоя [113] и, далее, решения полной системы уравнений Навье-Стокса [73].

Неоднородность распределения гидродинамических параметров в поперечных сечениях закрученного потока и их геометрические характеристики являются принципиальным препятствием для распространения на них методологии построения замкнутых систем уравнений на основе законов сохранения в интегральной форме в терминах средних величин. Имея в виду именно эту цель в качестве конечной, в [Д4, 47] рассмотрены вопросы осреднения по сечению потоков массы, количества движения, энергии, и момента количества движения. При этом, в качестве базовой была принята модель «твердотельных» закрученных течений [20], для которых в поперечном сечении канала присущи: максимум энтропии, однородность продольной составляющей скорости по радиусу трубы, тангенциальная составляющая скорости изменяется по закону вращения твердого тела, радиальная составляющая скорости равна нулю, статическая температура неизменна по радиусу:

$$v_x = const, \quad v_\varphi = \omega \cdot r = \frac{V_\varphi}{R} r, \quad v_r = 0, \quad T = const;$$

давление и плотность во всех точках сечения подчиняются условию

$$\frac{p - p_1}{\rho - \rho_1} = const,$$

где индекс «1» присваивается параметрам на оси канала,  $V_\varphi$  - окружная скорость на внешней границе канала. И наконец, закрученный поток характеризуется степенью и направлением закрутки  $\sin^2 \beta = V_\varphi^2 / (v_x^2 + V_\varphi^2)$ .

Условие о независимости термодинамической функции – коэффициента восстановления давления - от геометрических «воздействий» и здесь, применительно к зонам перестройки потока, вызванных локальными, конечными по

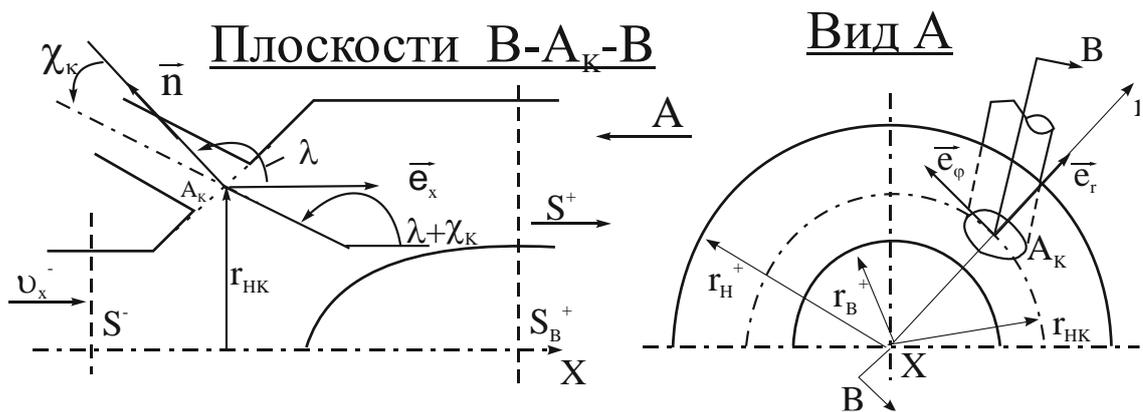


Рис. 3.27.

величине воздействиями, позволило получить необходимое число дополнительных соотношений, решающих проблему замкнутости [47, 48]. В названных работах построены общие решения для подобных участков каналов по моделям сжимаемой и несжимаемой жидкостей, решены некоторые задачи внутренних течений и течений со свободными границами.

Ниже, в качестве иллюстрации возможности метода, приведены результаты расчета гидравлических потерь, вызванных подводом массы в закрученный поток в канале под различными углами, включая ввод по касательной [Д6]. Подобные задачи, применительно к течениям без закрутки рассмотрены в п. 3.5.2, где было показано, что нормальная к оси канала составляющая количества движения воспринимается силами трения и приводит к диссипативным потерям.

Для закрученных течений коэффициент гидравлических потерь среднего давления определим по отношению к средней скорости потока  $\bar{v}^-$  в сечении  $S^-$

$$\Delta \bar{p} = \zeta \frac{\rho (\bar{v}^-)^2}{2}, \quad (\bar{v}^-)^2 = (\bar{v}_x^-)^2 + V_\varphi^{-2} \delta^-.$$

Здесь:  $\bar{v}^-$ ,  $\delta^-$  - модуль средней по сечению  $S^-$  скорости потока и коэффициент осреднения (аналог коэффициента Буссинеска).

Следствия различных способов организации вдува на величину гидравлических потерь представлены на рис. 3.28 – 3.30 для несжимаемой жидкости.

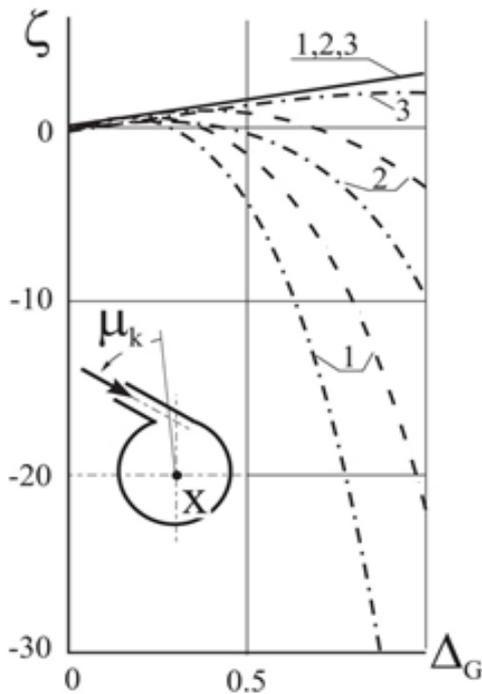


Рис. 3.28  $\chi_k = 0$ ,  $\beta^- = 0$ :

- 1 —  $\bar{S}_k = 0.1$ ,  $\mu_k = 0$  —————  
 2 —  $\bar{S}_k = 0.2$ ,  $\mu_k = 45^\circ$  - - - - -  
 3 —  $\bar{S}_k = 0.8$ ,  $\mu_k = 90^\circ$  - · - · - ·

При этом, как и в [20], пренебрегалось собственно трением на по-

верхности выделенного объема жидкости, а значениям коэффициента гидравлических потерь  $\zeta < 0$  отвечает увеличение запаса механической энергии потока  $\sigma_p > 0$  и наоборот.

Графики убеждают в широких возможностях рационального использования энергии вдуваемого газа и транзитного потока. Общими и достаточно очевидными выводами являются: впрыск по потоку ( $\chi_k > 0$ ) и в направлении начальной закрутки ( $\beta^- > 0$ ,  $\mu_k < 0$ ) или ( $\beta^- < 0$ ,  $\mu_k > 0$ ) способствует уменьшению гидравлических потерь (значение  $\zeta < 0$  соответствует увеличению запаса механической энергии потока). При прочих равных условиях поток с высокой степенью начальной закрутки слабо реагирует на изменение условий подвода массы (кривая 3 на рис. 3.30), так как в этом

случае с тангенциальной составляющей скорости связан высокий уровень кинетической энергии и для изменения исходного состояния потока требуются сопоставимые по величине энергии внешние воздействия. Графики на рис. 3.30 указывают также на существование комбинации условий, при которых  $\zeta$  достигает экстремальных состояний. Следует отметить, что эти результаты согласуются с качественными выводами экспериментальных и численных исследований, упомянутых в [Д11], но в отличие от последних, получены в аналитической форме.

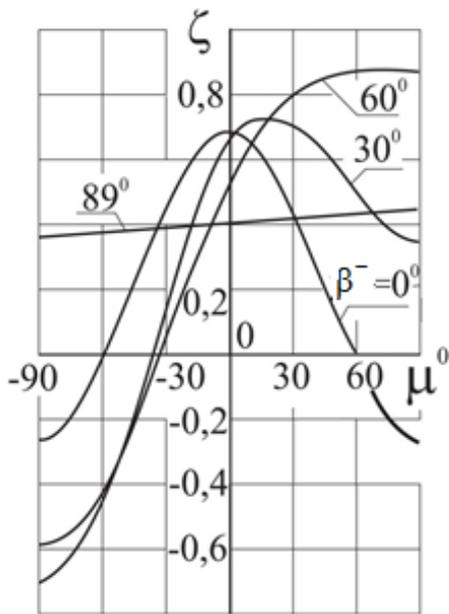


Рис. 3.29

$$\chi_k = 0, \bar{S}_k = 0.1, \Delta_G = 0.3$$

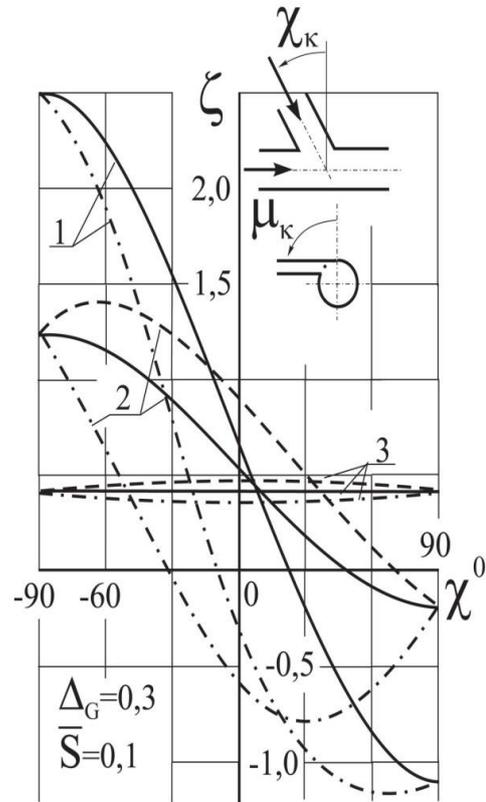


Рис. 3.30

$$1 - \beta^- = 0^\circ, \quad \mu_k = 0^\circ \text{ —————}$$

$$2 - \beta^- = 60^\circ, \quad \mu_k = 90^\circ \text{ - - - - -}$$

$$3 - \beta^- = 89^\circ, \quad \mu_k = -90^\circ \text{ - · - · - ·}$$

### 3.6.5. О сопротивлении тел в ограниченном потоке

#### (постановка проблемы)

Фундаментальные результаты, относящиеся к названной проблеме, рассмотрены, например, в [94, 96] для различных схем обтекания на основе модели идеальной жидкости (парадокс Д`Аламбера, обтекание тел с кавитатором, со встречной струей и т. п.). Учет реальных свойств потока в области развитых турбулентных течений возможен численными методами. Здесь, применительно к названной проблеме получены в аналитической форме результаты достаточно общего вида [49]. Часть из них, по-видимому, требует экспериментальной проверки.

В канале неизменного сечения  $S_k$  произвольной формы находится тело с миделевым сечением  $s$  (Рис. 3.31). В сечении «1» канала известны параметры потока. Сопротивление тела определяется выражением

$$R_x = \int_{\sigma} p_{nx} dS = p_{\sigma_{1-2}} \cdot s - p_{\sigma_{3-4}} \cdot s + \int_{\sigma_{2-3}} \tau_{nx} dS + \int_{\sigma_{1-2} + \sigma_{3-4}} \tau_{nx} dS ,$$

т. е. средними давлениями в лобовой и кормовой частях тела и суммой сил трения в проекции на направление потока по всей поверхности тела.

Впредь считаем, что составляющая общей силы сопротивления, связанная с последним интегралом, найдет отражение в значениях средних давлений на торцах тела. Вводя понятие коэффициента сопротивления  $C_p = R_x / (0,5\rho v_1^2 s)$  и местного коэффициента трения  $c_f = (\tau_{nx})_{2-3} / (0,5\rho v_{2-3}^2)$ , имеем

$$C_p = \frac{2p_{\sigma_{1-2}}}{\rho v_1^2} - \frac{2p_{\sigma_{3-4}}}{\rho v_1^2} + \frac{v_3^2}{v_1^2} \int_{\sigma_{2-3}} c_f d\left(\frac{S}{s}\right). \quad (3.69)$$

Интеграл в третьем слагаемом может быть найден методами теории пограничного слоя [8] для турбулентного потока в кольцевом цилиндрическом канале, тогда как для средних давлений на торцах уместно воспользоваться возможностями метода, описанного выше.

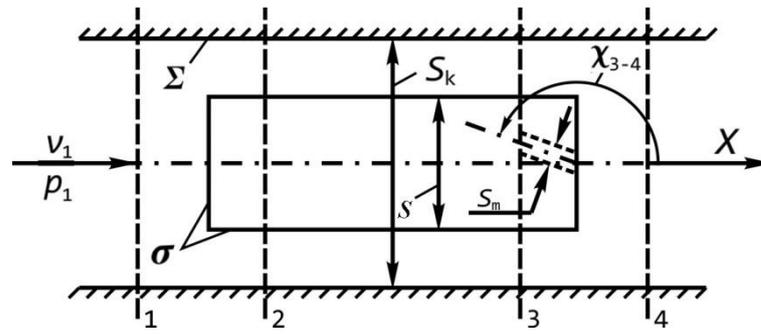


Рис. 3.31. К расчету сопротивления на различных участках тела в ограниченном потоке

Впредь жидкость считаем несжимаемой, возможен подвод-отвод массы в поток через отверстия в лобовой и кормовой частях тела. Предполагая возможность привлечения экспериментальных данных на скачках площади для учета диссипативных потерь, в расчетные формулы (2.56) – в задачах истечения и (2.61) – в задачах подвода массы в поток, вводится коэффициент гидравлических потерь (2.57) и (2.62) соответственно

$$\frac{v^+}{v^-} = (1 - \Delta_s)(1 + \Delta_G), \quad \frac{p^+}{p^-} = 1 + \frac{1 - C_1(1 - \Delta_s)^2 - \zeta}{2Eu^-}, \quad (3.70)$$

$$\frac{p_\sigma}{p^-} = 1 + \frac{1 - C_1(1 - \Delta_s) - \zeta}{2Eu^-},$$

$$\zeta = 1 - C_1 - 2\delta \quad \text{- для отвода потока,}$$

$$\zeta = 1 - C_1 - 2\delta^* \quad \text{- для подвода потока в канал.}$$

Соотношения (3.70) позволяют связать сопротивление тела с воздействиями на поток в канале, для чего составляющие в (3.69) удобно представить в виде

$$\frac{p_{\sigma_{1-2}}}{\rho v_1^2} - \frac{p_{\sigma_{3-4}}}{\rho v_1^2} = Eu_1 \frac{p_{\sigma_{1-2}}}{p_1} - Eu_3 \frac{v_3^2}{v_1^2} \frac{p_{\sigma_{3-4}}}{p_3},$$

где

$$Eu_3 = p_3 / \rho v_3^2 = \frac{p_3}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{v_1^2}{v_3^2} Eu_1, \quad Eu_1 = p_1 / \rho v_1^2.$$

и воздействия для отдельных участков потока примут вид:

$$\langle\langle 1-2 \rangle\rangle \quad \Delta_{S_{1-2}} = -s / (S_k - s), \quad \Delta_{G_{1-2}} = -G_{0_{1-2}} / G_1;$$

$$\langle\langle 2-3 \rangle\rangle \quad \Delta_{S_{2-3}} = \Delta_{G_{2-3}} = 0, \quad Eu_2 = (p_2 / p_1) (v_1^2 / v_2^2) Eu_1;$$

$$\langle\langle 3-4 \rangle\rangle \quad \Delta_{S_{1-2}} = s / S_k, \quad \Delta_{G_{1-2}} = -G_{0_{3-4}} / G_3.$$

В итоге коэффициент сопротивления тела в ограниченном потоке

$$C_p = \frac{(1 + \Delta_{G_{1-2}})^2}{(1 - \bar{s})^2} \cdot \left\{ \zeta_{2-3} + \zeta_{3-4} + (1 - \bar{s}) \left[ (1 + \Delta_{G_{1-2}})^2 - 1 \right] + \int_{S_{2-3}} c_f d \left( \frac{S}{s} \right) \right\} \quad (3.71)$$

$$\bar{s} = s / S_k.$$

Как и следовало ожидать, при безотрывном обтекании тела потоком идеальной жидкости при отсутствии расходных воздействий воспроизводится парадокс Д`Аламбера – сопротивление тела равно нулю.

Неожиданным представляется результат, когда форма лобовой части безразлична с точки зрения вклада в общее сопротивление тела, точнее, явно не представлена в общем сопротивлении тела (3.71). Это влияние неявным образом заложено в параметрах потока на входе в кормовую зону 3 – 4 обтекаемого тела. При этом играет роль общее загромождение поперечного сечения канала – миделево сечение - и количество подведенной или отведенной массы жидкости. Причем, в первом случае сопротивление возрастает, во втором – убывает.

Не меньшая возможность управления сопротивлением тела заложена в совместном рассмотрении двух факторов:

$$\zeta_{3-4} + (1 - \bar{s}) \left[ (1 + \Delta_{G_{1-2}})^2 - 1 \right]$$

-гидравлических потерь и расходных воздействий в кормовой части тела в условиях подвода массы в поток. При этом, учитывая (2.62, 2.37 (для  $\Delta_G^*$ ), 2.30)

$$\xi_{3-4} = (1 - C_1)_{3-4} - 2\delta_{3-4}^* = (1 - C_1)_{3-4} + 2\Delta_\tau + 2 \frac{\Delta_{G_{3-4}}^2}{S_m} k_{4k}.$$

Теперь:

$$\zeta_{3-4} + (1 - \bar{s}) [C_1 - 1] = 2\Delta_\tau + \Delta_G \left[ (2 - \bar{s})(2 + \Delta_G) - 2\mu_k \right]$$

и, подобрав режим впрыска жидкости из кормовой части тела в поток, при котором скорость впрыска  $\mu_k$  нивелирует или преобладает над соседним слагаемым,

можно существенно уменьшить силу сопротивления. Вплоть до изменения ее знака за счет реактивной составляющей «сопротивления»

$$2\left(\Delta_G^2 / \bar{S}_m\right)_{3-4} = 2\left(\Delta_G \mu_k\right)_{3-4}.$$

И, наконец, вклад в общее сопротивление участка «2-3» состоит из двух частей: «собственный» вклад по поверхности обтекаемого тела – последнее слабое в (3.71), и гидравлические потери  $\zeta_{2-3}$  в кольцевом канале, частью которого является поверхность тела. Последние появляются и учитываются в модели при определении параметров потока на входе в участок «3-4». Нелишне заметить, что часть этих потерь имела бы место и при отсутствии самого тела в потоке. Здесь, как и на любой другой поверхности, корректировать сопротивление можно известными методами теории пограничного слоя.

В рамках использованного здесь подхода – определение сопротивления на основе законов сохранения в интегральной форме: соотношения (3.71) - диссипативные потери  $\Delta_{\tau 3-4}$  являются неопределенной составляющей сопротивления и становятся единственной причиной его для «коротких» тел при отсутствии расходных воздействий

$$C_p = \frac{\zeta_{3-4}}{(1-\bar{s})^2} = \frac{2\Delta_{\tau 3-4}}{(1-\bar{s})^2}. \quad (3.72)$$

Результаты автора прямого измерения силы сопротивления, выполненные в аэродинамической трубе с закрытой рабочей частью, обобщены в виде

$$C_p = 4,63(1 \pm 0,09) \quad (3,72)$$

с доверительной вероятностью 0.9. Условия проведения эксперимента: модель – круговой цилиндр с плоскими торцами и отношением диаметра к длине  $d/l = 463/250$  мм/мм на системе растяжек укреплялся соосно в разборной трубе, при этом обеспечивалось  $\bar{s} = 0,507$ . Трубками Пито - Прандтля измерялось поле скоростей в набегающем потоке (сечение 1 – 1 на рис. 3.31) и тензометрированием – силовое воздействие потока на тело. Числа Рейнольдса в серии экспериментов варьировались в диапазоне  $Re_1 = (3,1 \div 4,1)10^5$ .

Следует заметить, что попытка привлечь экспериментальные данные по гидравлическим потерям в каналах со скачком площади, является несостоятельной, вследствие несоблюдения геометрического подобия. Неприемлемым является и изменение схемы эксперимента путем протаскивания модели в трубе (парадокс Дюбуа). И, наконец, ограниченная программа эксперимента, представленная в (3.72) не позволили ответить однозначно о влиянии, или не влиянии, формы лобовой части тела на величину сопротивления в ограниченном потоке, что и нашло отражение в заголовке этого пункта.

## Глава 4

### Течения в каналах с изломом оси

«Сшивание» в узел нескольких участков квазиодномерных течений, раздача потока в веер каналов с различной ориентацией осей, смешение потоков различных газов в общий поток, задачи распада произвольного разрыва в подобных узлах – вообще говоря, не требуют знания кинематических особенностей течения внутри узла (например, наличия или отсутствия зон отрыва потока (см. п.п. 2.6, 2.7, 3.1, ...)). В этих условиях достаточно ограничиться предположением об однородном распределении параметров потока на границах узла каналов, а не замкнутость математических моделей преодолевается методом ТДС. Примеры подобных течений рассмотрены ниже.

#### 4.1. Раздача потока в веер каналов [Д7]

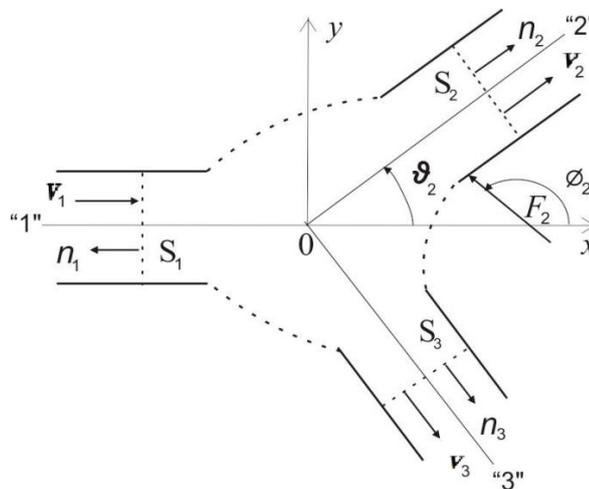


Рис. 4.1. Схема узла с раздачей потока газа

В окрестности узла трех каналов (Рис.1) выделяется объем сечениями каналов  $S_1, S_2, S_3$ , в которых параметры потока можно считать однородными (здесь - за пределами возможной зоны отрыва потока). Допущение предполагает использование модели идеального газа или развитых турбулентных течений. Параметры состояния газа в одном из каналов на входе в зону перестройки потока считаются известными и отмечаются индексом "1", в двух других – ис-

комыми, с индексами “2” и “3”. Законы сохранения в интегральной форме записываются для двух трубок тока; каждая из них занимает свою долю -  $d_i$  ( $d_2 + d_3 = 1$ ) в начальном сечении узла  $S_1$  и заканчивающихся в выходном сечении  $S_i$  “своего” канала. Потoki пересекают общую зону перестройки с равными для обоих потоков средними давлениями  $p_{\sigma_i}$ , испытывают разворот на угол  $\vartheta_i$  и изменение площади поперечного сечения от начальной величины  $d_i S_1$  до  $S_i$ . Углы  $\vartheta_i$  отсчитываются от первоначального направления вдоль оси канала “1” до направления оси  $i$ -го канала, каждый в своей плоскости “1-0- $i$ ”. На рис. 1 оси трубки тока “1-0-2” лежат в плоскости “х-у” декартовой системы координат; плоскость осей другой трубки тока повернута на угол  $\chi$  вокруг оси х. (На рис. 1 плоскости обеих трубок тока условно совмещены в общую плоскость). Предполагается также: линейные размеры зоны перестройки потока в каждой трубке тока малы в сравнении с внешними участками соответствующих потоков, что позволяет считать такой участок сильным разрывом или течение стационарное, а массовые эффекты незначительны.

#### 4.1.1. Учет сжимаемости среды

В итоге, система законов сохранения для каждой трубки тока принимают вид [95]:

$$\int_{\Sigma_i} \rho v_n dS = 0, \quad \int_{\Sigma_i} \rho v_n \mathbf{v} dS = - \int_{\Sigma_i} p n dS + \int_{\Sigma_i} \boldsymbol{\tau}_n dS + \mathbf{F}_i, \quad i = 2, 3;$$

$$\int_{\Sigma_i} \rho v_n (v^2 / 2 + u) dS = - \int_{\Sigma_i} p v_n dS + \int_{\Sigma_i} (-q_n + \boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{v}) dS.$$

Здесь:  $\rho, p, v, u$  – плотность, давление, скорость, внутренняя энергия;  $\mathbf{q}, \boldsymbol{\tau}_n$  – векторы плотности теплового потока и напряжения (включая молекулярную и турбулентную составляющие);  $\Sigma_i = d_i S_1 + S_i + \sigma_i$ ,  $\sigma_i$  – боковая поверхность  $i$ -й трубки тока;  $\mathbf{F}_i$  – реакция стенок соответствующего канала при развороте потока - выделена в отдельную составляющую из общего числа поверхностных сил. Силы трения, с некоторой долей условности, несущественной с позиций конечного результата (см. 3. (4.6)), могут быть представлены в виде суммы для двух участков каждой трубки тока: до и после поворота оси

$$\int_{\Sigma_i} \boldsymbol{\tau}_n dS = d_i (Gv)_1 \cdot (-\Delta_{\tau_{ix}} \mathbf{i} - \Delta_{\tau_{in}} \mathbf{n}), \quad \Delta_{\tau_{ix}} = \int_{d_i S_1 + \sigma_{ix}} |\boldsymbol{\tau}_n| dS / d_i (Gv)_1,$$

$$\Delta_{\tau_{in}} = \int_{\sigma_{in} + S_i} |\boldsymbol{\tau}_n| dS / d_i (Gv)_1, \quad (\sigma_i = \sigma_{ix} + \sigma_{in}).$$

Граничные условия:  $v_n(S_1) = -v_1$ ,  $v_n(S_i) = v_i$ ,  $v_n(\sigma_i) = 0$  и осреднение параметров состояния среды на характерных участках поверхности узла сводят систему уравнений к виду:

$$\begin{aligned} 1. (S\rho v)_i &= d_i(S\rho v)_1, & 2. (S\rho v H)_i - d_i(S\rho v H)_1 - d_i(Ga^2)_1 \Delta_{qi} &= 0; & (4.1) \\ 3. J_i \cos \vartheta_i - F_i \cos \phi_i - d_i J_1 &= 0, & i = 2, 3; \\ 4. J_2 \sin \vartheta_2 - F_2 \sin \phi_2 = 0, & & (J_3 \sin \vartheta_3 - F_3 \sin \phi_3) \cos \chi = 0; \\ 5. (J_3 \sin \vartheta_3 - F_3 \sin \phi_3) \sin \chi &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь: } H &= \beta v^2 / 2 + p / \rho + u, & G &= S\rho v, & d_i J_1 &= d_i(\alpha S\rho v^2 + Sp)_1 - d_i(Gv)_1 \Delta_{\tau ix}, \\ J_i &= (\alpha S\rho v^2 + Sp)_i - p_{\sigma i}(S_i - d_i S_1) + d_i G_1 v_1 \Delta_{\tau in}, & \Delta_{qi} &= - \int_{\sigma_i} (q_n - \tau_n \cdot \mathbf{v}) ds / d_i(Ga^2)_1, \end{aligned}$$

$\alpha, \beta$  – коэффициенты неравномерности поля скоростей в характерных сечениях потока,  $G$  – расход;  $\Delta_{qi}, \Delta_{\tau ix}, \Delta_{\tau in}$  – тепловое и сил трения воздействия,  $a$  – скорость звука. Направление некомпенсированной составляющей средних давлений на боковой поверхности  $\sigma_i$  трубок тока –  $p_{\sigma i}$ , связанных с изменением площади поперечного сечения каждой трубки тока, в общем случае зависит от конструкции узла раздачи потока; здесь, без ограничения общности метода, отнесены к направлению повернутого потока.

Уравнения (4.1) дополняются уравнениями состояния совершенного газа:

$$p = \rho RT, \quad u = p / \rho(\gamma - 1).$$

В модели, применительно к каждой трубке тока, неизвестными являются: параметры состояния в выходном сечении  $\rho_i, p_i, v_i$ ; давление  $p_{\sigma i}$ ; реакция стенки  $F_i$  и угол  $\phi_i$ ; доля  $d_i$  – при 4-х уравнениях для их определения.

Для каждой трубки тока среднее давление  $p_{\sigma i}$  распределяется весовым коэффициентом  $\varphi_{pi}$  между давлениями на границах

$$p_{\sigma i} = \varphi_{pi} p_i + (1 - \varphi_{pi}) p_1. \quad (4.2)$$

Уравнения 3. в (4.1) в комбинации с 4. или 5. приводятся к виду:

$$\begin{aligned} (\alpha S\rho v^2)_i A_i + (pS_{\sigma})_i A_i - (\alpha S\rho v^2)_1 d_i - p_1 S_{\sigma i} A_i + (pS)_1 d_i (A_i - 1) + \\ + (S\rho v^2)_1 d_i \Delta_{\tau i} = 0, & & i = 2, 3, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $S_{\sigma i} = S_i(1 - \varphi_{pi} \Delta_{si})$ ,  $\Delta_{si} = (S_i - d_i S_1) / S_i = 1 - d_i / s_i$ ,  $s_i = S_i / S_1$ ,

$$A_i = \sin(\phi_i - \vartheta_i) / \sin \phi_i. \quad (4.4)$$

Уравнения движения в форме (4.3), вместе с остальными законами сохранения (4.1) и уравнениями состояния, позволяют установить связи между параметрами состояния на границах зоны перестройки потока для каждой трубки тока:

$$\begin{aligned}
 1. \frac{v_i}{v_1} &= \frac{K_i \pm \nu N_i}{(n_i + 1)M_1^2}, & 2. \frac{\rho_i}{\rho_1} &= \frac{(1 - \Delta_{si})(n_i + 1)M_1^2}{K_i \pm \nu N_i}, \\
 3. \frac{p_i}{p_1} &= \frac{K_i \mp \nu n_i N_i}{I_i(n_i + 1)}, & 4. \frac{T_i}{T_1} &= \frac{(K_i \mp \nu n_i N_i)(K_i \pm \nu N_i)}{I_i(1 - \Delta_{si})(n_i + 1)^2 M_1^2}. \\
 5. M_i^2 &= (1 - \Delta_{si})I_i \frac{K_i \pm \nu N_i}{K_i \mp \nu n_i N_i}, & 6. \frac{p_{\sigma i}}{p_1} &= 1 + \varphi_{pi} \left( \frac{p_i}{p_1} - 1 \right).
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь:  $M = v/a$ ,  $a^2 = \gamma p/\rho$ ,  $\nu = \text{sign}(M_1 - 1)$ ,  $\alpha_i = \beta_i = 1$ ,  $i = 2, 3$ ;

$$\begin{aligned}
 1. n_i &= \frac{\gamma}{1 + (\gamma - 1)\varphi_{pi}\Delta_{si}}; & 2. I_i &= \frac{(n_i - 1)}{(\gamma - 1)(1 - \Delta_{si})}; \\
 3. K_i &= I_i + n_i M_1^2 (\alpha_1 - \Delta_{\tau i}) / A_i - n_i (A_i - 1) / \gamma A_i, & \Delta_{\tau i} &= \Delta_{\tau ix} + A_i \Delta_{\tau in}; \\
 4. N_i &= \left\{ K_i^2 - 2 \frac{n_i^2 - 1}{\gamma - 1} M_1^2 \left( 1 + \beta_1 \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 + (\gamma - 1)\Delta_{qi} \right) \right\}^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

При отсутствии каких-либо воздействий на потоки:  $\Delta_{si} = 0$ ,  $\mathcal{G}_i = 0$  ( $A_i = 1$ ),  $\Delta_{\tau i} = \Delta_{qi} = 0$ , - выбор верхнего знака в соотношениях (4.5) соответствует непрерывным течениям, нижнего – приводит к соотношениям Рэнкина - Гюгонио на прямом скачке уплотнения; функция  $\nu$  – определяет реакцию потока на воздействия в области до – и сверхзвуковых течений.

При отличных от нуля воздействиях связи между параметрами состояния на границах узла имеют вид соотношений

$$\psi_i / \psi_1 = \phi_i [X_i, \Delta_{si}, A_i, \varphi_{pi}(X_i, \Delta_{si}, A_i)] \tag{4.7}$$

и допускают множество решений в силу неопределенности величин  $A_i$ ,  $\varphi_{pi}$  и неизвестной зависимости последних от аргументов. Среди аргументов различаются геометрические ( $\Delta_{si}$ ,  $A_i$ ) и физические ( $X_i = \{x_{ij}\} = \{\Delta_{\tau i}, \Delta_{qi}\}$ ), последние ниже рассматриваются как внешние (задаваемые) параметры.

Для выбора единственного решения из множества, допускаемых законами сохранения, используется метод ТДС [41, 43, Д7], основанный на утверждении о независимости термодинамической функции – коэффициента восста-

новления давления -  $\Phi_i = p_{0i} / p_{01}$  от геометрических воздействий ( $p_0$  - давление торможения), как от независимых аргументов этой функции. Подобная зависимость может проявляться лишь неявно – через физические  $\Phi_i = f_{0i}(X_i)$ . Сформулированное утверждение, в интегральном подходе, носит чисто качественный характер, являясь результатом анализа 1-го и 2-го начал термодинамики. С другой стороны, законы сохранения, в виде (4.5), позволяют построить функции подобные коэффициентам восстановления давления:

$$f_i = \frac{p_{0i}}{p_{01}} = \frac{p_{0i}}{p_i} \frac{p_i}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}} = \pi(M_1) \cdot \frac{K_i \mp \nu n_i N_i}{(n_i + 1)I_i} \cdot \left( 1 + \frac{n_i - 1}{2} \frac{K_i \pm \nu N_i}{K_i \mp \nu n_i N_i} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (4.8)$$

которые, согласно (4.7) имеют вид  $f_i = f_i[X_i, \Delta_{si}, A_i(\mathcal{G}_i), \varphi_{pi}(X_i, \Delta_{si}, A_i)]$ . Противоречие между двумя подходами, разрешаемое в пользу выводов термодинамики, устраняется двумя, равнозначными по результатам, способами, или их комбинацией:

$$df_i - df_{0i} = 0, \quad f_i - f_{0i} = 0, \quad i = 2, 3 \quad (4.9)$$

- соответственно “дифференциальным” и “алгебраическим”.

Заменяя полные дифференциалы суммой частных дифференциалов, первое из условий (4.9), с учетом  $\partial f_{0i} / \partial \Delta_{si} = \partial f_{0i} / \partial \vartheta_i = 0$ , приводится к виду:

$$\left[ \frac{\partial f_{0i}}{\partial x_{ij}} - \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_{ij}} + \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_{pi}} \frac{\partial \varphi_{pi}}{\partial x_{ij}} \right) \right] dx_{ij} + \left[ - \left( \frac{\partial f_i}{\partial \Delta_{si}} + \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_{pi}} \frac{\partial \varphi_{pi}}{\partial \Delta_{si}} \right) \right] d\Delta_{si} + \left[ - \left( \frac{\partial f_i}{\partial \mathcal{G}_i} + \frac{\partial f_i}{\partial A_i} \frac{\partial A_i}{\partial \mathcal{G}_i} + \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_{pi}} \frac{\partial \varphi_{pi}}{\partial A_i} \frac{\partial A_i}{\partial \mathcal{G}_i} \right) \right] d\mathcal{G}_i = 0 \quad i = 2, 3.$$

Отсюда, вследствие независимости всех аргументов задачи, следуют дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial A_i}{\partial \mathcal{G}_i} = - \frac{\partial f_i}{\partial \mathcal{G}_i} \left( \frac{\partial f_i}{\partial A_i} + \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_{pi}} \frac{\partial \varphi_{pi}}{\partial A_i} \right)^{-1}, \quad A_i(\mathcal{G}_i = 0) = 1; \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \varphi_{pi}}{\partial \Delta_{si}} = - \frac{\partial f_i}{\partial \Delta_{si}} \left( \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_{pi}} \right)^{-1}, \quad n_i(\Delta_{si} = 0) = \gamma. \quad (4.11)$$

Отсутствие явной зависимости функций  $f_i$  в (4.8), каждой от своего аргумента  $\vartheta_i$ , сводят уравнения (4.10) к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)  $dA_i / d\mathcal{G}_i = 0$ ,  $A_i(\mathcal{G}_i = 0) = 1$ , с частными интегралами:

$$A_i = \frac{\sin(\phi_i - \mathcal{G}_i)}{\sin \phi_i} = 1, \quad \text{tg} \phi_i = \frac{\sin \mathcal{G}_i}{\cos \mathcal{G}_i - 1}, \quad \mathcal{G}_i \in [0, \pi). \quad (4.12)$$

Соотношения (4.12) определяют линии действия сил  $F_i$  и величины  $A_i = 1$ , вследствие чего в уравнениях (4.3), в их следствиях (4.5) и (4.8), в явном виде исчезает влияние угла разворота потока в трубках тока. Подобное влияние осуществляется на уровне учета диссипативных потерь в трубках тока через величины  $\Delta_{\tau_i}$  (4.22); при этом, уравнения (4.11) превращаются в ОДУ первого порядка с переменными параметрами вида:

$$\frac{d\varphi_{pi}}{d\Delta_{si}} = \phi_i(\Delta_{si}, \varphi_{pi}, X_i), \quad n_i(\Delta_{si} = 0) = \gamma. \quad (4.13)$$

Решение уравнений вида (4.13), применительно к одиночному каналу без излома оси, исследовано в [41], приведено в Главе 1 и может быть заменено равноценным по результатам на основе алгебраического подхода. Реализация последнего сводится к ряду процедур. В уравнении (4.8) устраняется влияние геометрических аргументов ( $\Phi_i = f_{0i}(X_i) = f_i(X_i, \Delta_{si} = 0, A_i = 1)$ ), что дает значения коэффициентов восстановления давления в каждой трубке тока

$$\Phi_i = f_{0i}(X_i) = \pi(M_1) \frac{K_{0i} \mp \nu \gamma N_{0i}}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{K_{0i} \pm \nu N_{0i}}{K_{0i} \mp \nu \gamma N_{0i}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (4.14)$$

где  $K_{0i} = 1 + \gamma M_1^2 (\alpha_1 - \Delta_{\tau_i})$ ,

$$N_{0i} = \left\{ K_{0i}^2 - 2(\gamma + 1)M_1^2 \left( 1 + \beta_1 \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 + (\gamma - 1)\Delta_{qi} \right) \right\}^{1/2}.$$

Разность  $f_i[X_i, \Delta_{si}, A_i = 1, \varphi_{pi}(X_i, \Delta_{si})] - f_{0i}(X_i) = 0$  - позволяла определить функции  $\varphi_{pi}[\Delta_{si}, X_i]$ . Здесь, дополнительно, условие равенства средних давлений на боковых поверхностях, соприкасающихся трубок тока в зоне разделения потока  $p_{\sigma 2} = p_{\sigma 3}$ , вместе с очевидным требованием  $\sum d_i = 1$ , составят систему уравнений для функций  $\varphi_{pi}(\Delta_{si}, X_i)$ ,  $d_i(\Delta_{si}, X_i)$ :

$$\left( f_{i|A_i=1} = (M_1) \left( \frac{K_i \mp \nu n_i N_i}{I_i(n_i + 1)} \right)_{A_i=1} \left[ 1 + \frac{n_i - 1}{2} \frac{K_i \pm \nu N_i}{K_i \mp \nu n_i N_i} \right]_{A_i=1}^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \right) - f_{i0}(X_i) = 0, \quad (4.15)$$

$$\varphi_{p2} \left( \frac{K_2 \mp \nu n_2 N_2}{I_2(n_2 + 1)} - 1 \right)_{A_2=1} = \varphi_{p3} \left( \frac{K_3 \mp \nu n_3 N_3}{I_3(n_3 + 1)} - 1 \right)_{A_3=1}, \quad d_2 + d_3 = 1,$$

где  $K_{i|A_i=1} = I_i + n_i M_1^2 (\alpha_1 - \Delta_{\tau_i})$ ,  $\Delta_{si} = 1 - d_i / s_i$   $i = 2, 3$ ;

$$N_{i|A_i=1} = \left\{ K_{i|A_i=1}^2 - 2 \frac{n_i^2 - 1}{\gamma - 1} M_1^2 \left( 1 + \beta_1 \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 + \xi_i \right) \right\}^{1/2}, \quad \xi_i = (\gamma - 1)\Delta_{qi}.$$

Численное решение системы уравнений (4.15) в окрестности  $\Delta_{si} = 0$  связано с особенностями поведения функций  $\varphi_{pi}(\Delta_{si} = 0)$  вида  $0/0$ . Способ устранения особенностей изложен в [41] и, применительно к каждой трубке тока, сводится к соотношениям (см. п. 1.4.1.):

$$\varphi_{pi} = \begin{cases} 1/(1 - (\gamma - 1)\Delta_{si}): & |\Delta_{si}| \leq \varepsilon_{\Delta}, \quad \Psi_i \neq 0; \\ 1/(2 - (\gamma - 1)\Delta_{si}): & |\Delta_{si}| \leq \varepsilon_{\Delta}, \quad \Psi_i = 0, \quad |M_1 - 1| > \varepsilon_M; \\ 2/(3 - 2(\gamma - 1)\Delta_{si}): & 0 \leq \Delta_{si} \leq \varepsilon_{\Delta}, \quad \Psi_i = 0, \quad |M_1 - 1| \leq \varepsilon_M. \end{cases} \quad (4.16)$$

Здесь  $\Psi_i = K_{0i} \mp \nu \gamma N_{0i} - (\gamma + 1)$ ; функция  $\Psi_i = 0$ , если отношение давлений  $p_i / p_1 = 1$  за счет комбинации воздействий противоположных знаков.

Силы, действующие на каждый из потоков, со стороны элементов конструкции: на «скачке» площади поперечного сечения  $i$ -го потока и обеспечивающие поворот потока на угол  $\mathcal{G}_i$  - определяются теперь соотношениями:

$$\begin{aligned} 1. \quad P_{\sigma i} &= p_{\sigma i} \Delta_{si} S_i, \\ 2. \quad F_i / d_i G_1 v_1 &= \left\{ \frac{v_i}{v_1} + \frac{1}{\gamma M_1^2} \frac{s_i}{d_i} \left( \frac{p_i}{p_1} - \frac{p_{\sigma i}}{p_1} \Delta_{si} \right) \right\} \frac{\sin \mathcal{G}_i}{\sin \phi_i}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

#### 4.1.2. Истечение малосжимаемой среды

В случае малых чисел Маха - в (4.5, 4.6, 4.8, 4.14) выбирается верхний знак и  $\nu = -1$  - решение всей задачи может быть представлено в явном виде. Разложение всех функций в ряды по степеням чисел Маха и сохранение линейных составляющих относительно  $M_1^2$  приводит к соотношениям:

$$\begin{aligned} K_i &= I_i \{1 - (n_i / \gamma I_i) [(A_i - 1) / A_i - \gamma M_1^2 (\alpha_1 - \Delta_{\tau i}) / A_i]\}, \\ N_i &= K_i - A_i (n + 1) (1 - \Delta_{si}) M_1^2 (1 + \xi_i) / [A_i - n_i (A_i - 1) / \gamma I_i] \\ f_i &= \pi(M_1) \left\{ 1 + \frac{n_i}{\gamma I_i} \left[ \left( \frac{\alpha_1 - \Delta_{\tau i}}{A_i} - \frac{A_i (1 - \Delta_{si}) (1 + \xi_i)}{A_i - n_i (A_i - 1) / \gamma I_i} \right) \gamma M_1^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{A_i - 1}{A_i} \right] + \frac{A_i (1 - \Delta_{si})^2 (1 + \xi_i)}{A_i - n_i (A_i - 1) / \gamma I_i} \cdot \frac{\gamma M_1^2}{2} \right\}, \quad i = 2, 3. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Отсюда, вследствие  $\Phi_i = f_{0i}(X_i)$ , реализуемой в (4.18) при  $\Delta_{si} = 0$ ,  $\mathcal{G}_i = 0$  ( $n_i = \gamma$ ,  $A_i = 1$ ), или из (4.14), после разложения в ряды, следуют

$$\Phi_i = f_{0i}(X_i) = \frac{2Eu_1 + 1 + 2\delta_i - \xi_i}{2Eu_1 + 1}, \quad \delta_i = \alpha_1 - 1 - \Delta_{\tau i}, \quad (4.19)$$

где  $Eu_1 = (p / \rho v^2)_1 = 1 / \gamma M_1^2$ .

Разность функций (4.18) и (4.19), равную нулю и содержащую комбинацию частных интегралов для  $A_i$  и  $\varphi_{pi}$  дифференциальных условий (4.10, 4.11), удобно представить в виде:

$$\frac{A_i - 1}{A_i} = \gamma M_1^2 \left\{ \left( \frac{1}{A_i} - \frac{\gamma I_i}{n_i} \right) (\alpha_1 - \Delta_{\tau i}) - \left[ \frac{A_i(1 - \Delta_{si})}{A_i - n_i(A_i - 1) / \gamma I_i} - \frac{\gamma I_i}{n_i} \right] \cdot (1 + \xi_i) + \frac{\gamma I_i}{n_i} \left[ \frac{A_i(1 - \Delta_{si})}{A_i - n_i(A_i - 1) / \gamma I_i} - 1 \right] \frac{(1 + \xi_i)}{2} \right\}.$$

Отсюда, в силу независимости и произвольности значений переменных  $\Delta_{si}$  и  $\vartheta_i$  (при  $\Delta_{si} = 0$   $n_i = \gamma$ ,  $I_i = 1$ , или при  $\vartheta_i = 0$   $A_i = 1$ ), следует равенство нулю обеих частей этого выражения; тогда  $A_i = 1$  и

$$1. \varphi_{pi} = \frac{\Delta_{si}(1 + \xi_i) + 2\delta_i - 2\xi_i}{\Delta_{si}(2 - \Delta_{si})(1 + \xi_i) + 2\delta_i - 2\xi_i}, \quad 2. A_i = 1 = \frac{\sin(\phi_i - \vartheta_i)}{\sin \phi_i}. \quad (4.20)$$

Вариант соотношений (4.5) для мало сжимаемой среды, с учетом (4.20), принимают вид:

$$\begin{aligned} 1. \frac{v_i}{v_1} &= (1 - \Delta_{si})(1 + \xi_i), & 2. \frac{\rho_i}{\rho_1} &= (1 + \xi_i)^{-1}, & i &= 2, 3, & (4.21) \\ 3. \frac{p_i}{p_1} &= 1 + [\Delta_{si}(2 - \Delta_{si})(1 + \xi_i) + 2\delta_i - 2\xi_i] / 2Eu_1, \\ 4. \frac{p_{\sigma i}}{p_1} &= 1 + [\Delta_{si}(1 + \xi_i) + 2\delta_i - 2\xi_i] / 2Eu_1, & 5. M_i^2 &= \frac{(v_i / v_1)^2 (\rho_i / \rho_1)}{p_i / p_1}, \end{aligned}$$

где соотношение 5. в (4.21) позволяет оценить приемлемую величину комбинации воздействий на поток, с позиции модели мало сжимаемой среды.

В представленной модели силы трения -  $\Delta_{\tau i}$  могут быть связаны с диссипативными потерями в трубке тока -  $\zeta_i = (p_{01} - p_{0i}) / (\rho_1 v_1^2 / 2)$ . В случае несжимаемой среды эта связь, с учетом (4.19), имеет вид

$$\zeta_i = (1 + 2Eu_1)(1 - f_{0i}) = -2\delta_i = -2(\alpha_1 - 1 - \Delta_{\tau i}) \quad (4.22)$$

и позволяет использовать методы и экспериментальный материал прикладной гидрогазодинамики [1, 7, Д11] по гидравлическим потерям в узле

$\zeta_i = \zeta_i(\Delta_{si}, \mathcal{G}_i)$ . В работах [41,103] подобные эмпирические зависимости, с приемлемой погрешностью, использовались для учета диссипативных потерь при числах Маха меньших единицы.

Далее, связи между параметрами состояния среды на границах зоны перестройки потока (4.21) приобретают статус рабочих формул после определения долей трубок тока  $d_i$  в сечении  $S_1$  и величин  $\Delta_{si} = 1 - d_i / s_i$  из условий

$$p_{\sigma 2} = p_{\sigma 3} \quad \text{и очевидного} \quad d_2 + d_3 = 1:$$

$$d_2 = (s_{2q} / s_{+q}) [1 + s_{3q} (\zeta_3 - \zeta_2 + \xi_3 - \xi_2)],$$

$$d_3 = (s_{3q} / s_{+q}) [1 - s_{2q} (\zeta_3 - \zeta_2 + \xi_3 - \xi_2)],$$

$$\text{где: } s_+ = s_2 + s_3, \quad s_{+q} = s_{2q} + s_{3q}, \quad s_{iq} = s_i / (1 + \xi_i), \quad \xi_i = (\gamma - 1) \Delta_{qi}.$$

Для идеальной жидкости в адиабатическом процессе ( $\zeta_i = \xi_i = 0$ ) доли расхода в каждую ветвь узла определяются только размерами поперечных сечений каналов  $d_i = s_i / s_+$  с одинаковыми параметрами на выходе.

#### 4.1.3. Истечение с произвольным числом ветвей. Анализ результатов

Рассмотренная задача обобщается на раздачу потока из канала “1” в произвольное число ветвей  $i \in [2, n]$ . Для “несжимаемой среды” соотношения (4.12, 4.17, 4.19 - 4.21) сохраняют внешний вид и дополняются уравнениями:

$$1. \quad d_i = [1 + \sum_{j=2}^n (s_{jq} \zeta_j) + s_+ - s_{+q} (1 + \xi_i)] s_{iq} / s_{+q} - s_{iq} \zeta_i, \quad s_{+q} = \sum_{i=2}^n s_{iq}, \quad (4.23)$$

$$2. \quad \Delta_{si} = \{2(1 + \xi_i) s_{+q} + \zeta_i s_{+q} - [1 + \sum_{j=2}^n (s_{jq} \zeta_j) + s_+]\} / (1 + \xi_i) s_+, \quad s_+ = \sum_{i=2}^n s_i.$$

Для произвольных чисел Маха уравнения (4.12, 4.14, 4.16, 4.17) имеют место для каждой трубки тока в веере, а система уравнений, подобная (4.15), расширяется до порядка  $2(n-1)$  и служит для определения функций

$$d_i[\Delta_{si}, \zeta_i(\mathcal{G}_i, \Delta_{si}), \xi_i], \quad \varphi_{pi}[\Delta_{si}, \zeta_i(\mathcal{G}_i, \Delta_{si}), \xi_i]:$$

$$f_{i|A_i=1} - f_{0i} = 0, \quad p_{\sigma 2} = p_{\sigma 3} = \dots = p_{\sigma n}, \quad \sum_{i=2}^n d_i = 1 \quad (4.24)$$

В представленной выше модели параметры потока на выходе из узла определяются конструкцией узла, параметрами на входе и физическими воздействиями в пределах узла. При наличии дополнительных ограничений на свободные параметры накладываются дополнительные связи. Например, при  $\Delta_{qi} = 0$ ,

$\rho_i = \rho_1$  для обеспечения: равных давлений ( $p_i / p_1 = idem$ ) из (4.21) и (4.23) следуют  $(d_i^2 / s_i^2 + \zeta_i) = idem$ ; равных расходов ( $d_i = idem$ ) из (4.23) -

$$s_i [1 + \sum_{j=2}^n s_j (\zeta_j - \zeta_i)] = idem \text{ и т.д.}$$

Для сжимаемой среды, в качестве дополнительных ограничений, рассматривается задача о переводе исходного потока в критическое состояние  $M_i = 1$  в  $i$ -той трубке тока. Тогда, из 5. (4.5) -  $(\gamma - n_i)K_i \mp \nu(\gamma n_i - 1)N_i = 0$  и соответствующее число уравнений дополняет систему уравнений (4.24), накладывая ограничения на допустимые значения геометрических характеристик и физических воздействий в узле. В случае одиночного канала постоянного сечения ( $d = 1, \Delta_s = 0$ ) из (4.16, 4.6) следует  $\varphi_p = 1, n = \gamma, I = 1$ , тогда  $N = 0$ . Отсюда следует необходимая величина теплового воздействия, сопровождающаяся изменением коэффициента восстановления давления при наличии диссипативных потерь в канале:

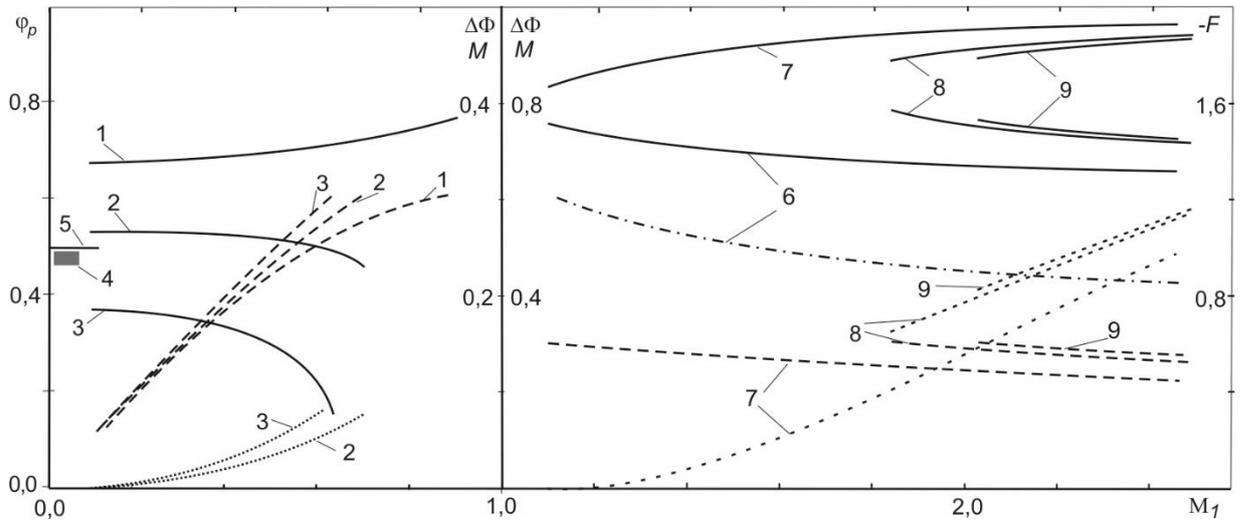


Рис. 2. Симметричные расширяющиеся течения ( $\Delta_{si} = 0.5, a_i = 0.2, m = 1$ ).

1.  $\zeta_i = 0, \Delta_{qi} = 0, \vartheta_i = 0$ ; 2.  $\zeta_i \neq 0, \Delta_{qi} = 0, \vartheta_i = 90^\circ$ ; 3.  $\zeta_i \neq 0, \Delta_{qi} = 0.2, \vartheta_i = 90^\circ$ ;
  - 4, 5 - данные работ [Д4, 41]: 4.- эксперимент, 5.- расчет  $\varphi_p = 1/2$  (см. п. 1.5.1.);
  6.  $\zeta_i = 0, \Delta_{qi} = 0, \vartheta_i = 0$ ; 7.  $\zeta_i = 0, \Delta_{qi} = 0, \vartheta_i = 0, (+)$ ;
  8.  $\zeta_i \neq 0, \Delta_{qi} = 0, \vartheta_i = 90^\circ, (+)$ ; 9.  $\zeta_i \neq 0, \Delta_{qi} = +0.2, \vartheta_i = 90^\circ, (+)$ ;
- $\varphi_p$ , - - - -  $M$ , .....  $-\Delta\Phi = 1 - \Phi$ , - · - · -  $-F$ .

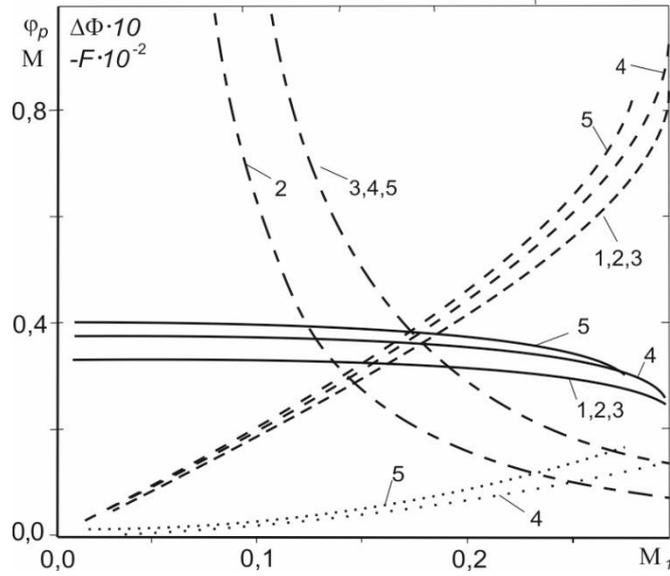
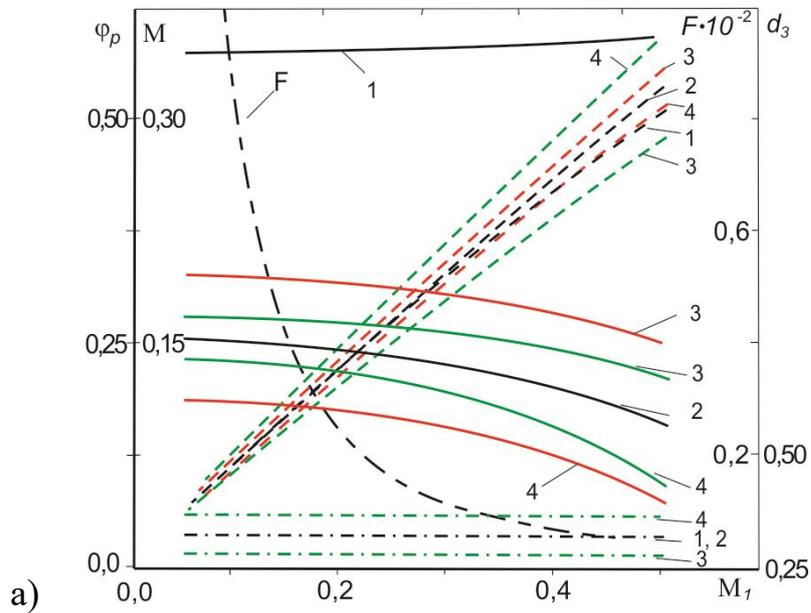


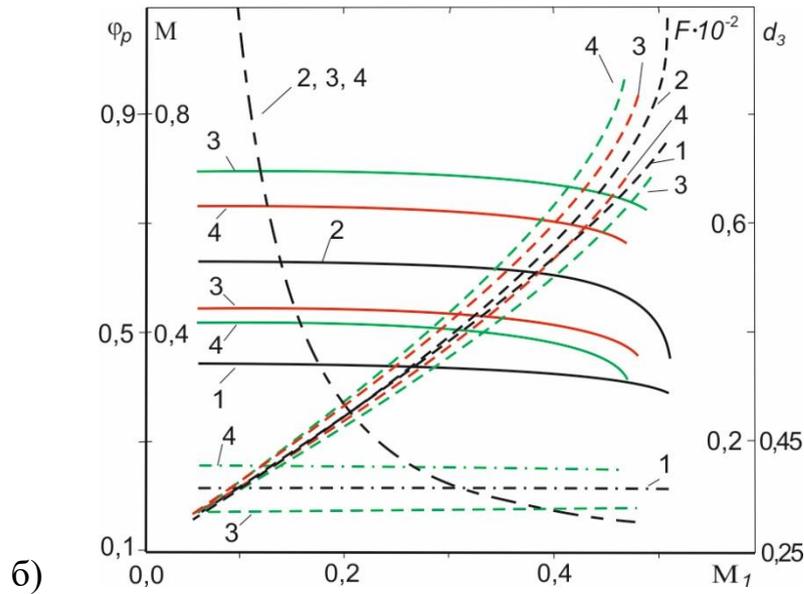
Рис. 3 Симметричные сужающиеся течения ( $\Delta_{si} = -1.0, a_i = 0.2, m = -1$ ).

- 1.  $\zeta_i = 0, \Delta_{qi} = 0, \vartheta_i = 0^\circ$ ; 2.  $\zeta_i = 0, \Delta_{qi} = 0, \vartheta_i = 45^\circ$ ; 3.  $\zeta_i = 0, \Delta_{qi} = 0, \vartheta_i = 90^\circ$ ;
- 4.  $\zeta_i \neq 0, \Delta_{qi} = 0, \vartheta_i = 90^\circ$ ; 5.  $\zeta_i \neq 0, \Delta_{qi} = +0.2, \vartheta_i = 90^\circ$ ;

—————  $\varphi_p$ , - - - - -  $-M_i$ , .....  $-\Delta\Phi$ , — · — · —  $F$



- ( $s_2 = 1.0, s_3 = 0.5, \Delta_{si} > 0, a_i = 0.1, m = 1$ ). 1.  $\zeta_i = 0, \Delta_{qi} = 0, \vartheta_i = 0^\circ$ ;
- 2.  $\zeta_i \neq 0, \Delta_{qi} = 0, \vartheta_i = 90^\circ$ ; 3.  $\zeta_i \neq 0, \Delta_{q2} = -0.1, \Delta_{q3} = +0.1, \vartheta_i = 90^\circ$ ;
- 4.  $\zeta_i \neq 0, \Delta_{q2} = +0.1, \Delta_{q3} = -0.1, \vartheta_i = 90^\circ$ ;



- ( $s_2 = 0,5$   $s_3 = 0,3$ ,  $\Delta_{s_i} < 0$ ,  $a_i = 0,1$ ,  $m = -1$ ). 1.  $\zeta_i = 0$ ,  $\Delta_{q_i} = 0$ ,  $\vartheta_i = 0^\circ$ ;  
 2.  $\zeta_i \neq 0$ ,  $\Delta_{q_i} = 0$ ,  $\vartheta_i = 90^\circ$ ; 3.  $\zeta_i \neq 0$ ,  $\Delta_{q_2} = -0,1$ ,  $\Delta_{q_3} = +0,1$ ,  $\vartheta_i = 90^\circ$ ;  
 4.  $\zeta_i \neq 0$ ,  $\Delta_{q_2} = +0,1$ ,  $\Delta_{q_3} = -0,1$ ,  $\vartheta_i = 90^\circ$ .

Рис. 4. Асимметрия конструкции, тепловых и сил трения воздействий

—————  $\varphi_p$ , - - - - -  $M_i$ , - · - · -  $d_3$ , — — — — —  $F$ .

$$\Delta_q = [(1/M_1 - M_1)^2 - \gamma\zeta [1 + \gamma M_1^2(1 - \zeta/4)]] / 2(\gamma^2 - 1), \quad (4.24_1)$$

$$f_0 = p_0 / p_{01} = (\gamma + 1) / 2^{1/(\gamma-1)} \cdot \pi(M_1) \cdot [1 + M_1^2(1 - \zeta/2)] / 2.$$

При  $\zeta = 0$  эти результаты совпадают с известными решениями [1].

Анализ задачи и сопоставление с иными подходами [Д2, Д3, 53, Д9], продолжен на рис. 2-4. При этом задаваемые значения физических воздействий не связаны с возможностью технической реализации, а служат для обозначения тенденций или количественной оценки влияния на выходные параметры. В частности, для учета диссипативных потерь в области дозвуковых течений использовались рекомендации гипотетического характера [1, 7, 103]:

$$\zeta_i = k_i [1 + (d_i / s_i)^{2m} - 2(d_i / s_i)^m \cos \vartheta_i], \quad k_i = a_i (5/8 + 0,5 \sin^2(\vartheta_i / 2)).$$

На рис. 2 и 3 представлены расчеты течений газа в бинарных симметричных узлах:  $d_i = 0,5$ ,  $\vartheta_2 = \vartheta_3$ : на рис. 2 – в расширяющихся до- и сверхзвуковых течениях (для последних наличие скачка уплотнения отмечено индексом (+)), на рис. 3 – в сужающихся дозвуковых течениях. На рис. 4 подобный анализ выполнен для асимметрии конструкции и физических воздействий. При этом в индексации кривых цифра соответствует варианту расчета; красный и зеленый

цвета – параметрам трубки тока “2” и “3” соответственно; черный – совпадающим.

В работах [Д2, Д3] аналогичные задачи рассматривались в условиях адиабатического дозвукового течения, а неизвестное давление на скачке площади  $p_{\sigma i}$  варьировалось от вакуума до давления торможения. Причем, всякий раз в направлениях противоположным закономерностям течения газа в расширяющихся или сужающихся каналах, что выводит значения коэффициента  $\varphi_p(p_\sigma)$  далеко за пределы, обозначенных на рис. 2-4. Произвол в назначении давления на скачке площади нарушает законы сохранения и, согласно [109], влечет за собой нарушение 2-го начала термодинамики. В цикле работ, представленных в обзоре [53], векторное уравнение движения заменяется его скалярным следствием, что исключает возможность определения сил в виде (4.17). В работе [Д9], по результатам численного решения стационарных уравнений Навье-Стокса в узле разветвления, давление  $p_\sigma$  и гидравлические потери аппроксимируются степенными полиномами только от геометрических характеристик узла. На этой основе, в рамках одномерной трактовки потока на границах узла, исследуется явление колебания потока в узле. Но величина  $p_\sigma$  определяется в «некоторой точке прямого канала» узла без сформулированных критериев ее местоположения, а не на всей поверхности  $\sigma_i$ . Кроме того, в определение потерь вошли внешние участки узла, существенно меняющие его расходные характеристики (см. рис. 3.10). Все перечисленное ограничивает область применения результатов работы в пределах допустимых вариаций существенных критериев подобия, к сожалению, тоже не представленных в работе.

#### 4.1.4. Истечение при условии $p_i = p_1$

Особенности поведения функции  $\varphi_{p_i}$  в области малых изменений площади поперечных сечений трубок тока представлены в соотношениях (4.16). Вне рамок этого исследования находится случай произвольных по величине воздействий, включая  $\Delta_{\sigma i} \neq 0$ , когда  $p_i = p_1$ , а величина  $\varphi_{p_i}$  не определена и может находиться в интервале  $(-\infty, +\infty)$ .

Ниже, в качестве примера, рассматривается случай одиночного канала при условиях:  $d_i = 1$ ,  $A_i = 1$ ,  $i = 2$ ,  $M_1 < 1$ ,  $\nu = -1$ ; затем определяется необходимая комбинация воздействий, и все газодинамические параметры на выходе.

Исходным является соотношение 3. в (4.5):  $\frac{p_2}{p_1} = 1 = \frac{K + nN}{I(n+1)}$ , откуда

$$I(n+1) - K = nN. \quad (4.25)$$

Возведение в квадрат и использование соотношений 3. и 4. в (4.6) приводит

$$(4.25) \quad n^2 K^2 - (I(n+1) - K)^2 = n^2 \cdot 2 \frac{n^2 - 1}{\gamma - 1} M_1^2 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 + \xi \right) \text{ и далее}$$

$$\left[ n(n+1)M_1^2 (1 - \zeta / 2) \right] \cdot \left[ 2In + n(n-1)M_1^2 (1 - \zeta / 2) \right] =$$

$$= n^2 \cdot 2 \frac{n^2 - 1}{\gamma - 1} M_1^2 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 + \xi \right)$$

Отсюда, с учетом 2. (4.6) и замены величины  $\Delta_s = 1 - 1/s$  на  $s = S_2 / S_1$ , следует искомая комбинация воздействий:

$$s - s\zeta / 2 - (\gamma - 1)M_1^2 \zeta / 2 + (\gamma - 1)M_1^2 \zeta^2 / 8 = \xi + 1. \quad (4.26)$$

Скорость потока в выходном сечении узла, с учетом условия (4.25):

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{K - N}{(n+1)M_1^2} = \frac{K - (I(n+1) - K) / n}{(n+1)M_1^2} = \frac{(n+1)(K - I)}{n(n+1)M_1^2}, \text{ отсюда}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \alpha_1 - \Delta_\tau = 1 - \zeta / 2. \quad (4.27)$$

Изменение плотности находится из уравнения неразрывности (4.1)

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{S_1 v_1}{S_2 v_2} = \frac{1}{s(1 - \zeta / 2)}, \quad (4.28)$$

а температуры, при баротропном процессе, из уравнения состояния

$$\frac{T_2}{T_1} = s(1 - \zeta / 2). \quad (4.29)$$

Наконец, числа Маха до и после воздействий связаны соотношением

$$M_2 = M_1 \left( \frac{1 - \zeta / 2}{s} \right)^{1/2}. \quad (4.30)$$

Величина среднего давления на боковой поверхности канала  $p_\sigma$  может быть найдена из уравнения движения 3. в комбинации с 4. (4.1) при  $A_i = 1$ :

$$(\alpha S \rho v^2)_2 + (Sp)_2 - p_\sigma (S_2 - S_1) + Gv_1 (\Delta_{zn} + \Delta_{rx}) - (\alpha S \rho v^2)_1 - (Sp)_1 = 0.$$

Условие  $p_2 = p_1$  и соотношения (4.27, 4.28) приводят к выводу  $p_\sigma = p_1$

В частности, при течении невязкого газа ( $\zeta = 0$ ) в сужающемся канале ( $s < 1$ ) баротропный процесс ( $p_2 = p_1$ ) реализуется при отводе тепла  $\xi = (\gamma - 1)\Delta_q < 0$ , что следует из (4.26):  $s = \xi + 1$ , скорость потока не меняется, плотность увеличивается, число Маха возрастает. Все повторяется в обратном порядке при течении в расширяющемся канале. Учет диссипации при течении реального газа вносит количественную корректировку в эти закономерности, не меняя тенденций.

## 4.2. Слияние и смешение потоков совершенного газа

Рассматривается течение газа в узле трех каналов различных поперечных сечений и произвольной ориентации. По двум каналам газы с известными, но различными теплофизическими параметрами состояния и свойствами, подводятся к узлу, смешиваются, и отводятся от узла по третьему каналу с некоторыми средними по сечению, подлежащими определению, параметрами состояния. Исследованы случаи смешения до- и сверхзвуковых потоков, в том числе, со скачками уплотнения.

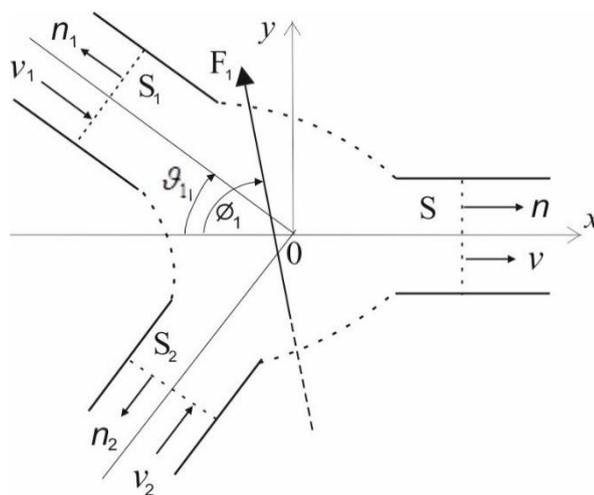


Рис. 5. Схема узла смешения потоков газа

### 4.2.1. Смесь сжимаемых сред

1. В окрестности узла (т. 0 на Рис.5) выделяется объем сечениями  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S$  каналов, в которых параметры потока можно считать однородными. В пределах объема для каждой трубки тока составляются законы сохранения в интегральной форме, при этом предполагаются:

- плоскости осей двух трубок тока “1-0-X” и “2-0-X” пересекаются по линии “0-X” под углом  $\chi$ ;

- поток в каждой из трубок тока каналов “1” и “2” в сечении  $S$  займет неизвестную долю  $d_i S$ , где  $d_1 + d_2 = 1$ ;

- в зоне смешения потоки обмениваются импульсом и количеством тепла, обеспечивающих равенство скоростей, давлений и температур потоков в выходном сечении  $S$  зоны перестройки;

- поток в каждой трубке тока при входе в общий канал разворачивается на угол  $\mathcal{G}_i$  (в своей плоскости) под действием силы  $F_i$  со стороны стенок канала и расположенной в той же плоскости под углом  $\phi_i$ ;

- изменение параметров состояния и поворот потоков сопровождаются диссипативными потерями;

- линейные размеры зоны перестройки потока, от исходного состояния в конечном, в каждой трубке тока малы в сравнении с внешними участками соответствующих потоков, что позволяет считать зону перестройки сильным разрывом, или течение стационарное;

- и, наконец, понятие «трубки тока» в условиях смешения разных газов теряет смысл. Но каждая элементарная частица среды, подводимая через сечение  $S_i$  в зону смешения, испытывает изменение количества движения, полного теплосодержания, .... В этих условиях понятие трубки тока выступает как собирательный удобный образ массы газа, подводимой в узел через сечение  $S_i$  для описания всего происходящего с нею.

В итоге, для каждой трубки тока выполняются законы сохранения:

$$\int_{\sigma_i} \rho v_n dS = 0; \quad \int_{\sigma_i} (\rho v_n v + pn - \tau_n^*) dS - F_i - k_i = 0, \quad i = 1, 2; \quad (4.31)$$

$$\int_{\sigma_i} \left\{ \rho v_n (u + v^2 / 2) + pn \cdot v - \tau_n^* \cdot v + q_n^* \right\} dS + Q_i = 0,$$

где  $\sigma_i = S_i + \sigma_{ib} + d_i S$ ,  $\sigma_{ib}$  - боковая поверхность  $i$  - той трубки тока между сечениями  $S_i \div d_i S$ ;  $k_1 = -k_2$  - обмен импульсами в зоне смешения между потоками среды, обеспечивающих равенство скоростей потоков в выходном сечении  $S$ ;  $Q_1 = -Q_2$  - обмен количеством тепла между потоками, обеспечивающими равенство температур потоков в выходном сечении  $S$ ;  $\tau_n^*$ ,  $q_n^*$  - векторы напряжений и теплового потока (включая эффекты вязкости и турбулентности).

Граничные условия на характерных участках поверхности:  $v_{n/s_1} = -|v_1| < 0$ ,  $v_{n/s_2} = -|v_2| < 0$ ,  $v_{n/s} = |v_1^+| = |v_2^+| = |v^+| > 0$ ,  $v_{n/\sigma_b} = 0$ , где  $\sigma_b = \sigma_{1b} + \sigma_{2b}$ , и теорема о среднем сводят уравнения (4.31) к виду:

$$-(\rho S v)_i + d_i S (\rho v)_i^+ = 0, \quad i = 1, 2; \quad (4.32)$$

$$-(\alpha \rho S v - S p n)_i - F_i + p_{\sigma_i} \int_{\sigma_{ib}} n dS - \int_{\sigma_i} \tau_n^* dS - k_i + d_i S [(\alpha \rho v)_i^+ + p_i^+ n] = 0;$$

$$-(\rho S H)_i + d_i S (\rho H)_i^+ + \int_{\sigma_i} (q_n^* - \tau_n^* \cdot v) dS + Q_i = 0, \quad H = v^2 / 2 + u + p / \rho$$

Законы сохранения дополняются уравнениями состояния:

$$p_i = \rho_i RT_i / m_i, \quad u_i = p_i / (\gamma_i - 1) \rho_i; \quad (4.33)$$

здесь:  $m_i$  – молекулярный вес,  $\gamma_i = c_{pi} / c_{vi} = const_i$  – отношение теплоемкостей.

Далее, вводится декартова система координат, где плоскость (x,y) совмещена с плоскостью осей одного из потоков (здесь “1”-го, Рис. 1), а плоскость осей второго развернута на угол  $\chi$  вокруг оси x (на рис.1 плоскости обоих потоков условно совмещены в общую плоскость). Предполагается, что векторы  $k_i$ , обеспечивающие равенство скоростей двух потоков в сечении  $S$ , ориентированы вдоль оси общего канала. Ориентация сил, связанных с изменением площади поперечных сечений потоков в пределах рассматриваемого объема и величиной давления  $p_{\sigma i}$ , зависят от конструкции конкретного узла слияния и смещения потоков и здесь, без ущерба для общности излагаемого метода, приняты ориентированными по оси общего канала.

Следуя методологии метода [41, 43, Д7]: вводятся безразмерные характеристики течений

$$\Delta_{Si} = 1 - S_i / d_i S, \quad \Delta_{\tau i} = - \int_{\sigma i} |\tau_n^*| dS / (Gv)_i, \quad \Delta_{Qi} = - \int_{\sigma i} (q_n^* - \tau_n^* \cdot \mathbf{v}) dS / (Ga^2)_i, \quad (4.34)$$

где  $G_i = (\rho v S)_i$ ,  $a_i^2 = \gamma_i p_i / \rho_i$ ; сила давления на “скачке площади” поперечного сечения каждого потока приводится к виду

$$p_{\sigma i} \int_{\sigma_{ib}} \mathbf{n} dS = -p_{\sigma i} (d_i S - S_i) \cdot \mathbf{i} = -p_{\sigma i} d_i S \Delta_{Si} \cdot \mathbf{i}; \quad (4.35)$$

а уравнения движения в (4.32) преобразуются к виду

$$-J_i \cos \vartheta_i + d_i J - F_i \cos \phi_i - k_i = 0, \quad -J_i \sin \vartheta_i - F_i \sin \phi_i = 0, \quad i = 1, 2; \quad (4.36)$$

$$(-J_2 \sin \vartheta_2 - F_2 \sin \phi_2) \cos \chi = 0,$$

где  $J_i = (\alpha \rho v^2 S + pS)_i - (Gv)_i \Delta_{\tau i}$ ,  $d_i J = d_i S (\alpha \rho v^2 + p)_i^+ - d_i S p_{\sigma i} \Delta_{Si}$ .

В уравнениях (4.36) диссипативные потери нормированы параметрами входных потоков, уравнение движения второго потока в проекции на координату z рассматривается как линейно зависимое, что позволяет унифицировать схему решения системы уравнений для обоих потоков, а именно: исключается одно из неизвестных

$$F_i = -J_i \sin \vartheta_i / \sin \phi_i, \quad -J_i A_i + d_i J - k_i = 0, \quad A_i = \sin(\phi_i - \vartheta_i) / \sin \phi_i; \quad (4.37)$$

неизвестное давление на “скачке площади сечения” каждого потока распределяется весовым коэффициентом между параметрами на входе и выходе из зоны перестройки потока

$$p_{\sigma i} = \varphi_{pi} p_i^+ + (1 - \varphi_{pi}) p_i \quad (4.38)$$

В итоге, система уравнений для каждого потока приводится к виду:

$$d_i S (\rho v)_i^+ = (\rho v S)_i, \quad (4.39)$$

$$d_i S [\rho v (\beta v^2 / 2 + \gamma p / (\gamma - 1) \rho)]_i^+ = [\rho v S (\beta v^2 / 2 + \gamma p / (\gamma - 1) \rho)]_i + (Ga^2)_i \Delta_{Q_i} - (Ga^2)_i \bar{Q}_i,$$

$$d_i S (\alpha \rho v^2)_i^+ + d_i S_{\sigma i} p_i^+ = (\alpha \rho v^2 SA)_i + d_i p_i S_{\sigma i} - (\rho v^2 S)_i (A_i \Delta_{\tau_i} - \bar{k}_i) + S_i (A_i - 1) p_i,$$

$$\text{где: } S_{\sigma i} = (1 - \varphi_{pi} \Delta_{S_i}) S, \quad \bar{Q}_i = Q_i / (Ga^2)_i, \quad \bar{k}_i = k_i / (Gv)_i, \quad G_i = (\rho v S)_i.$$

В уравнениях (4.39) в качестве неизвестных величин выступают: параметры состояния потока в выходном сечении  $p, \rho, v$ ; величины  $A_i(\phi_i), d_i, \varphi_{pi}, \bar{Q}_i, \bar{k}_i$ . Величины  $\Delta_{Q_i}, \Delta_{\tau_i}$  - рассматриваются как внешние задаваемые параметры, используемые для управления параметрами состояния потока в сечении  $S$ , или с иными целями, и частично зависящими от конструкции узла смешения потоков.

Соотношения (4.39) позволяют установить связи между гидродинамическими параметрами на входе и выходе из зоны перестройки потока:

$$1. \frac{v_i^+}{v_i} = \frac{K_i \pm v_i N_i}{(n_i + 1) M_i^2}; \quad 2. \frac{\rho_i^+}{\rho_i} = \frac{(1 - \Delta_{S_i})(n_i + 1) M_i^2}{K_i \pm v_i N_i}; \quad (4.40)$$

$$3. \frac{p_i^+}{p_i} = \frac{K_i \mp v_i n_i N_i}{I_i (n_i + 1)}; \quad 4. \frac{T_i^+}{T_i} = \frac{(K_i \mp v_i n_i N_i)(K_i \pm v_i N_i)}{(1 - \Delta_{S_i}) I_i (n_i + 1)^2 M_i^2};$$

$$5. (M_i^+)^2 = (1 - \Delta_{S_i}) I_i \frac{K_i \pm v_i N_i}{K_i \mp v_i n_i N_i}; \quad 6. \frac{p_{\sigma i}}{p_i} = 1 + \varphi_{pi} \left( \frac{p_i^+}{p_i} - 1 \right).$$

Здесь:  $v_i = \text{sign}(M_i - 1), \quad M_i = (v/a)_i, \quad M_i^+ = (v/a)_i^+; \quad i = 1, 2;$

$$\begin{aligned}
1. \quad K_i &= I_i + n_i M_i^2 (\alpha_i - \Delta_{\tau i}) A_i + n_i M_i^2 \bar{k}_i + n_i (A_i - 1) / \gamma_i, & (4.41) \\
2. \quad N_i &= \left\{ K_i^2 - 2 \frac{n_i^2 - 1}{\gamma_i - 1} M_i^2 \cdot \left[ \left( 1 + \frac{\gamma_i - 1}{2} M_i^2 \beta_i \right) + (\gamma_i - 1) (\Delta_{Q_i} - \bar{Q}_i) \right] \right\}^{1/2}, \\
3. \quad n_i &= \frac{\gamma_i}{1 + (\gamma_i - 1) \varphi_{pi} \Delta_{Si}}, \quad I_i = \frac{n_i - 1}{(\gamma_i - 1)(1 - \Delta_{Si})}, \quad A_i = \frac{\sin(\phi_i - \vartheta_i)}{\sin \phi_i}.
\end{aligned}$$

При отсутствии каких-либо воздействий на поток выбор верхнего знака в соотношениях (4.40) соответствует непрерывным течениям, нижнего – приводит к соотношениям Гюгонио на прямом скачке уплотнения; функция  $v_i$  – определяет реакцию потока на воздействия в области до – и сверхзвуковых течений; кроме того в соотношениях (4.40, 4.41) использовано предположение  $\alpha = \beta = 1$  однородности потока в сечении  $S$ .

Соотношения (4.40) позволяют построить для потоков в каждой из трубок тока функции подобные коэффициентам восстановления давления:

$$f_i = \frac{p_{oi}^+}{p_{oi}} = \frac{\pi(M_i)}{\pi(M_i^+)} \frac{p_i^+}{p_i} = \pi(M_i) \frac{K_i \mp v_i n_i N_i}{I_i (n_i + 1)} \left\{ 1 + \frac{n_i - 1}{2} \frac{K_i \pm v_i N_i}{K_i \mp v_i n_i N_i} \right\}^{\left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)_i}, \quad (4.42)$$

аргументы, каждой из которых можно разделить на две группы:

$\Delta_{Si}(d_i)$ ,  $A_i(\phi_i)$  - геометрические и  $X_i = \{x_{ij}\} = \{\Delta_{\tau i}, \Delta_{Q_i}, \bar{k}_i, \bar{Q}_i\}$  - физические.

Функции  $\varphi_{pi}$  предполагаются, в общем случае, функциями всех возможных аргументов  $\varphi_{pi} = \varphi_{pi}(\Delta_{Si}, A_i, X_i)$ . Очевидно, в этом случае функции  $f_i$  будут функциями вполне определенной структуры всех перечисленных аргументов, которые впредь назовем «воздействиями», но большая часть, которых заранее неизвестна

$$f_i = f_i \left\{ \Delta_{Si}(d_i), A_i(\phi_i), X_i, \varphi_{pi}(\Delta_{Si}, A_i, X_i) \right\}. \quad (4.43)$$

Здесь, как и ранее [41, 43, Д7], анализ 1 – го и 2 – го начал термодинамики позволяет утверждать, что термодинамическая функция – коэффициент восстановления давления – не зависит явно от геометрических воздействий и определяется только физическими воздействиями, чем бы они не были вызваны. Это утверждение, применительно к соотношению (4.42), требует исключить из него геометрические воздействия, что может быть реализовано, например, принятием

$$\partial \sigma_{pi} / \partial \Delta_{Si} = 0, \quad \partial \sigma_{pi} / \partial \phi_i = 0, \quad (4.44)$$

или  $\Delta_{Si} = 0$ ,  $A_i = 1$ . Следствия обоих приемов равнозначны; ниже реализован второй, как менее трудоемкий.

$$\sigma_{pi} = \frac{p_{oi}^+}{p_{oi}} = f_{i|\Delta_{Si}=0, A_i=1} = \pi(M_i) \frac{K_{0i} \mp v_i \gamma_i N_{0i}}{\gamma_i + 1} \left\{ 1 + \frac{\gamma_i - 1}{2} \frac{K_{0i} \pm v_i N_{0i}}{K_{0i} \mp v_i \gamma_i N_{0i}} \right\}^{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)_i}, \quad (4.45)$$

где  $K_{0i} = 1 + \gamma_i M_i^2 (\alpha_i - \Delta_{\tau i} + \bar{k}_i)$ ,

$$N_{0i} = \left\{ K_{0i}^2 - 2(\gamma_i + 1) M_i^2 \left[ \left( 1 + \frac{\gamma_i - 1}{2} M_i^2 \beta_i \right) + (\gamma_i - 1)(\Delta_{Qi} - \bar{Q}_i) \right] \right\}^{1/2};$$

при этом в разности  $f_i - \sigma_{pi} = 0$  содержится комбинация частных интегралов дифференциальных условий [41, 43] вида (4.44); здесь для искомым функций:  $A_i(\phi_i)$ ,  $\varphi_{pi}(\Delta_{Si}, A_i, X_i)$ .

2. Вид и значение геометрических зависимостей  $\Delta_{Si}(d_i)$ ,  $A_i(\phi_i)$  могут быть определены независимо от проблемы нахождения функции  $\varphi_{pi}(\Delta_{Si}, A_i, X_i)$ . Независимость геометрических аргументов  $\Delta_{Si}$  и  $A_i(\mathcal{G}_i, \phi_i)$  друг от друга в функции  $f_i$  (4.42) и независимость коэффициента восстановления давления от геометрических аргументов позволяют составить разности

$$\left\{ f_{i|\Delta_{Si}=0} = \pi(M_i) \frac{K_{i|\Delta_{Si}=0} \mp v_i \gamma_i N_{i|\Delta_{Si}=0}}{(\gamma_i + 1)} \left\{ 1 + \frac{\gamma_i - 1}{2} \frac{K_{i|\Delta_{Si}=0} \pm v_i N_{i|\Delta_{Si}=0}}{K_{i|\Delta_{Si}=0} \mp v_i \gamma_i N_{i|\Delta_{Si}=0}} \right\}^{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)_i} \right\} - \sigma_{pi} = 0,$$

где, согласно (4.41)  $K_{i|\Delta_{Si}=0} = 1 + \gamma_i M_i^2 [(\alpha_i - \Delta_{\tau i}) A_i + \bar{k}_i] + A_i - 1$ ,

$$N_{i|\Delta_{Si}=0} = \left( K_{i|\Delta_{Si}=0}^2 - 2(\gamma_i + 1) M_i^2 \left[ \left( 1 + \frac{\gamma_i - 1}{2} M_i^2 \beta_i \right) + (\gamma_i - 1)(\Delta_{Qi} - \bar{Q}_i) \right] \right)^{1/2}.$$

Отсюда, с очевидностью следует  $A_i = 1$ ; к тому же результату приводит «дифференциальный» подход на основе уравнения подобного (4.10)

$$A_i = \frac{\sin(\phi_i - \mathcal{G}_i)}{\sin \phi_i} = 1, \quad \text{tg } \phi_i = \frac{\sin \mathcal{G}_i}{\cos \mathcal{G}_i - 1}, \quad \mathcal{G}_i \in [0, \pi). \quad (4.46)$$

Далее, условия равенства скоростей  $v_1^+ = v_2^+$  и давлений  $p_1^+ = p_2^+$  (4.40) обоих потоков в сечении  $S$  после смешения:

$$v_1 \frac{K_1 \pm v_1 N_1}{(n_1 + 1)M_1^2} = v_2 \frac{K_2 \pm v_2 N_2}{(n_2 + 1)M_2^2}, \quad p_1 \frac{K_1 \mp v_1 n_1 N_1}{I_1(n_1 + 1)} = p_2 \frac{K_2 \mp v_2 n_2 N_2}{I_2(n_2 + 1)}$$

и равенство температур  $T_1^+ = T_2^+$ , как результат завершения процесса теплообмена между потоками,

$$T_1 \frac{(K_1 \mp v_1 n_1 N_1)(K_1 \pm v_1 N_1)}{(1 - \Delta_{S1})I_1(n_1 + 1)^2 M_1^2} = T_2 \frac{(K_2 \mp v_2 n_2 N_2)(K_2 \pm v_2 N_2)}{(1 - \Delta_{S2})I_2(n_2 + 1)^2 M_2^2},$$

независимо от величин  $A_i$ ,  $v_i = \text{sign}(M_i - 1)$ , приводят к уравнению

$$\frac{p_2 v_2 T_1}{p_1 v_1 T_2} = \frac{1 - \Delta_{S1}}{1 - \Delta_{S2}}, \quad (4.47)$$

которое, вместе с условием  $d_1 + d_2 = 1$ , позволяет определить доли каждого потока в сечении  $S$  и геометрические воздействия  $\Delta_{Si}$

$$d_1 = \left(1 + \frac{m_1 G_2}{m_2 G_1}\right)^{-1}, \quad d_2 = \frac{m_1 G_2}{m_2 G_1} \left(1 + \frac{m_1 G_2}{m_2 G_1}\right)^{-1}; \quad (4.48)$$

$$\Delta_{S1} = 1 - \frac{S_1}{S} \left(1 + \frac{m_1 G_2}{m_2 G_1}\right), \quad \Delta_{S2} = 1 - \frac{S_2}{S} \left(1 + \frac{m_2 G_1}{m_1 G_2}\right), \quad (4.49)$$

значениям  $\Delta_{Si} > 0$  отвечает расширение  $i$ -го потока,  $\Delta_{Si} < 0$  - уменьшение поперечного сечения в процессе слияния и смешения.

Проблема определения шести неизвестных функций:

$$\varphi_{pi} = \varphi_{pi}(\Delta_{Si}, X_i), \quad \bar{k}_i, \quad \bar{Q}_i, \quad i = 1, 2,$$

условиями равенства обмена количествами движения и тепла, смешивающихся потоков

$$\bar{k}_2 = -\bar{k}_1 \frac{G_1 v_1}{G_2 v_2} = -\bar{k}_1 \bar{K}_{12}, \quad \bar{Q}_2 = -\bar{Q}_1 \frac{G_1 a_1^2}{G_2 a_2^2} = -\bar{Q}_1 \frac{G_1 T_1 m_2 \gamma_1}{G_2 T_2 m_1 \gamma_2} = -\bar{Q}_1 \bar{q}_{12}, \quad (4.50)$$

сводится к необходимости решения системы четырех нелинейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ f_{i|A=1} = \pi(M_i) \frac{K_{i|A=1} \mp v_i n_i N_{i|A=1}}{I_i(n_i + 1)} \left\{ 1 + \frac{n_i - 1}{2} \frac{K_{i|A=1} \pm v_i N_{i|A=1}}{K_{i|A=1} \mp v_i n_i N_{i|A=1}} \right\}^{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)_i} \right\} - \sigma_{pi} = 0, \quad (4.51)$$

$$v_1 \frac{K_{1|A=1} \pm v_1 N_{1|A=1}}{(n_1 + 1)M_1^2} - v_2 \frac{K_{2|A=1} \pm v_2 N_{2|A=1}}{(n_2 + 1)M_2^2} = 0,$$

$$p_1 \frac{K_{1|A=1} \mp v_1 n_1 N_{1|A=1}}{I_1(n_1 + 1)} - p_2 \frac{K_{2|A=1} \mp v_2 n_2 N_{2|A=1}}{I_2(n_2 + 1)} = 0.$$

Здесь: (4.41, 4.46) дают  $K_{i|A=1} = I_i + n_i M_i^2 (\alpha_i - \Delta_{\tau i}) + n_i \bar{k}_i / \gamma_i$ ,

$$N_{i|A=1} = \left\{ K_{i|A=1}^2 - 2 \frac{n_i^2 - 1}{\gamma_i - 1} M_i^2 \left[ \left( 1 + \frac{\gamma_i - 1}{2} M_i^2 \beta_i \right) + (\gamma_i - 1) (\Delta_{Q_i} - Q_{ib}) \right] \right\}^{1/2}; \quad \Delta_{S_i}, \text{ в составе}$$

величин  $I_i, n_i$ , определены соотношением (4.49);  $\sigma_{pi}$  – описаны в (4.45); величины  $\alpha_i - \Delta_{\tau i} = 1 - \zeta_i / 2$  могут быть связаны с гидравлическими потерями  $\zeta_i$ , отнесенными к параметрам потока в сечении  $S_i$  (см. (1.32, 1.33)). При этом использование данных по потерям вследствие поворота потока ([7] – на основе «теории удара», см. п. 1.5.3.), изменения площади поперечного сечения одиночного потока (например [1, 2, 103]) в условиях смешения 2 – х потоков могут быть использованы с некоторой(!) долей условности. И, наконец, ниже, для сокращения записей используются обозначения  $\xi_i = (\gamma_i - 1) \Delta_{Q_i}$ .

Результатом решения уравнений (4.51) являются функции

$$\bar{k}_i = \bar{k}_i [M_2 / M_1, T_2 / T_1, p_2 / p_1, S_2 / S_1, \zeta_1, \zeta_2, \xi_1, \xi_2], \quad i = 1, 2$$

$$\bar{Q}_i = \bar{Q}_i [M_2 / M_1, T_2 / T_1, p_2 / p_1, S_2 / S_1, \zeta_1, \zeta_2, \xi_1, \xi_2],$$

обеспечивающие равенство скоростей, давлений и температур в результате смешения потоков; в свою очередь, каждая из функции

$$\varphi_{pi} = \varphi_{pi} [\Delta_{S_i} (G_2 / G_1, m_2 / m_1), \zeta_i (G_i, \Delta_{S_i}), \bar{k}_i, \bar{Q}_i, \Delta_{Q_i}, M_i]$$

обеспечивают независимость изменения механической энергии потока от геометрических воздействий при сохранении их влияния на гидродинамические параметры (4.40) от любых воздействий.

**3.** Ниже, на ряде примеров до- и сверхзвуковых течений, приводится качественный и количественный анализ решения задачи о смешении потоков, при

этом воздействия  $\Delta_{Qi}$  рассматриваются как внешние задаваемые параметры. Для характеристики различий начальных состояний потоков используются отношения температур и скоростей

$$t_{21} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{m_{21} p_{21}^2 s_2^2}{G_{21}^2 s_1^2}, \quad v_{21} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{p_{21}}{G_{21}} \frac{s_2}{s_1},$$

где  $m_{21} = m_2 / m_1$ ,  $p_{21} = p_2 / p_1$ ,  $G_{21} = G_2 / G_1$ ,  $s_i = S_i / S$ .

При этом крайние участки всех кривых на графиках, отличающиеся, в различной степени, от значений  $t_{21} = 1$ ,  $v_{21} = 1$  могут оказаться недостоверными по ряду причин: значительных отличий теплофизических свойств и состояний сред от прогнозируемых за счет межфазовых переходов, явлений рекомбинации, диссоциации и т. п. Границы достоверности прогноза предлагаемого метода устанавливаются в конкретных ситуациях с учетом всех существенных факторов (давлений, температуры, отличия состояний сред от термодинамических равновесных состояний и т. д.).

**N.b.!** Во всех приведенных ниже иллюстрациях для величин  $k_1 = -k_2$  использован отличный от (4.50) способ перехода к безразмерным величинам, а именно:  $\bar{k}_2 = -\bar{k}_1(pS)_1 / (pS)_2$ .

На **Рис. 6** приведены результаты смешения двух соосных ( $\mathcal{G}_i = 0$ ) дозвуковых потоков ( $v_i = -1$ ) с исходными параметрами:  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.3$ ,  $m_{21} = p_{21} = G_{21} = 1$  в условиях незначительного расширения потоков -  $s_1 = s_2 = 0.45$ ,  $\Delta_{Si} = 0.1$ , без дополнительного внешнего теплового воздействия ( $\Delta_{Qi} = 0$  здесь и ниже во всех примерах). Входные параметры одного из потоков фиксированы ( $M_2 = 0.5$ ), другого варьируются. В области состояний:  $v_{21} \approx t_{21} \approx 1$  и  $M_1 \approx 0.5$  - значения весовых коэффициентов давлений на «скачке площади канала» каждого потока группируются в окрестности значений  $\varphi_{pi} \approx 0.5$ , а значения импульсов и количеств тепла мало отличаются от нуля ( $\bar{k}_i \approx 0$ ,  $\bar{Q}_i \approx 0$ ). С ростом различия начальных состояний потоков необходимые воздействия становятся конечными по величине, а значения величин  $\varphi_{pi}$ , в условиях течения в мало расширяющихся потоках ( $\Delta_{Si} = 0.1$ ), приближаются к единице. Некоторое их различие объясняется разными знаками воздействий, которыми обмениваются потоки при смешении. Полученная картина в отношении величин  $\varphi_{pi}$  полностью согласуется с известными закономерностями их поведения по отношению к каждому отдельно взятому потоку [41, 43].

При смешении меняются запасы механической энергии потоков. В области  $M_1 > 0.5$  более медленный ( $v_{21} < 1$ ) и более холодный ( $t_{21} < 1$ ) второй поток получает от первого: количество движения ( $\bar{k}_2 > 0$ ,  $\bar{k}_1 < 0$ ) и ускоряется (значения  $v/v_2 < 1$  объясняются дополнительным торможением потока в расширяющейся трубке тока) и количество тепла ( $Q_{2b} < 0$ ,  $Q_{1b} > 0$ ) и разогревается;

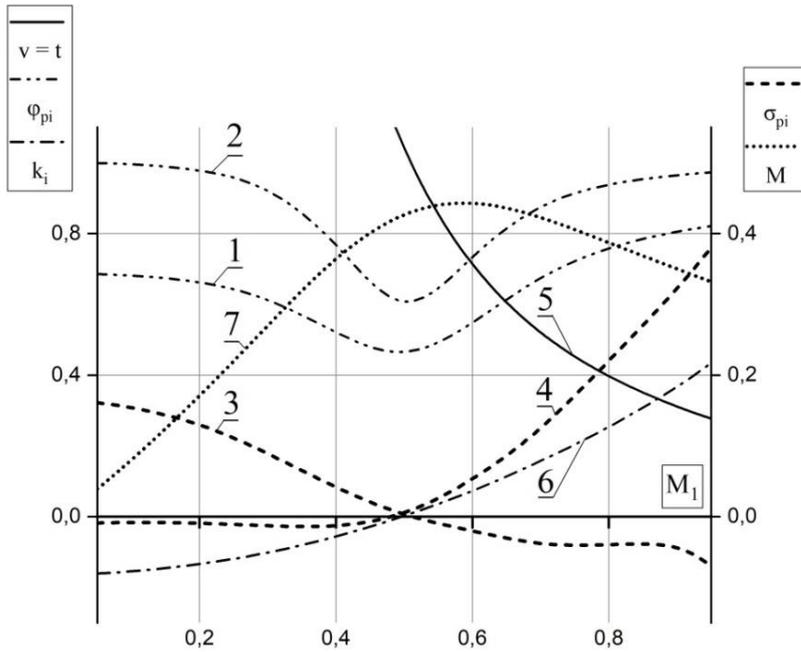


Рис. 6.а:

- 1 -  $\phi_{p1}$ , 2 -  $\phi_{p2}$ ,
- 3 -  $\Delta\sigma_{p1}$ , 4 -  $\Delta\sigma_{p2}$ ,
- 5 -  $t_{21} = v_{21}$ ,
- 6 -  $\bar{k}_2$ , 7 -  $M_1$ ;

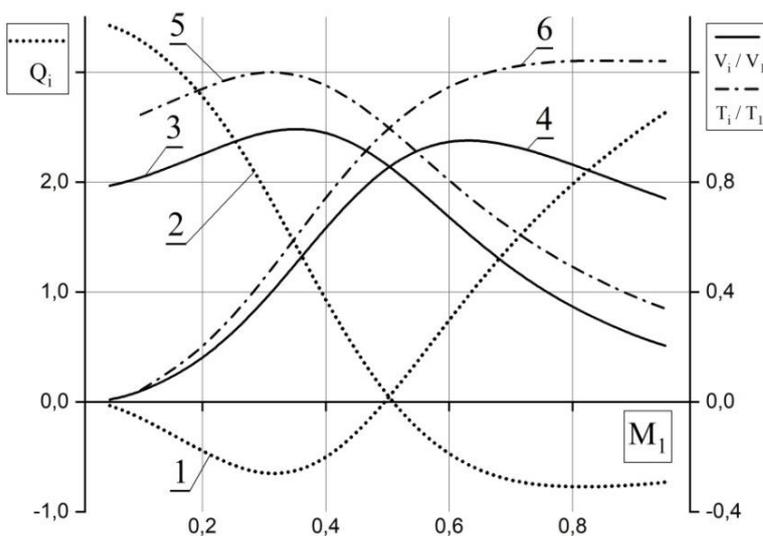


Рис. 6.б: 1 -  $\bar{Q}_2$ , 2 -  $\bar{Q}_1$ , 3 -  $\Delta v_1^+ / v_1$ , 4 -  $\Delta v_2^+ / v_2$ , 5 -  $\Delta T_1^+ / T_1$ , 6 -  $\Delta T_2^+ / T_2$ ;

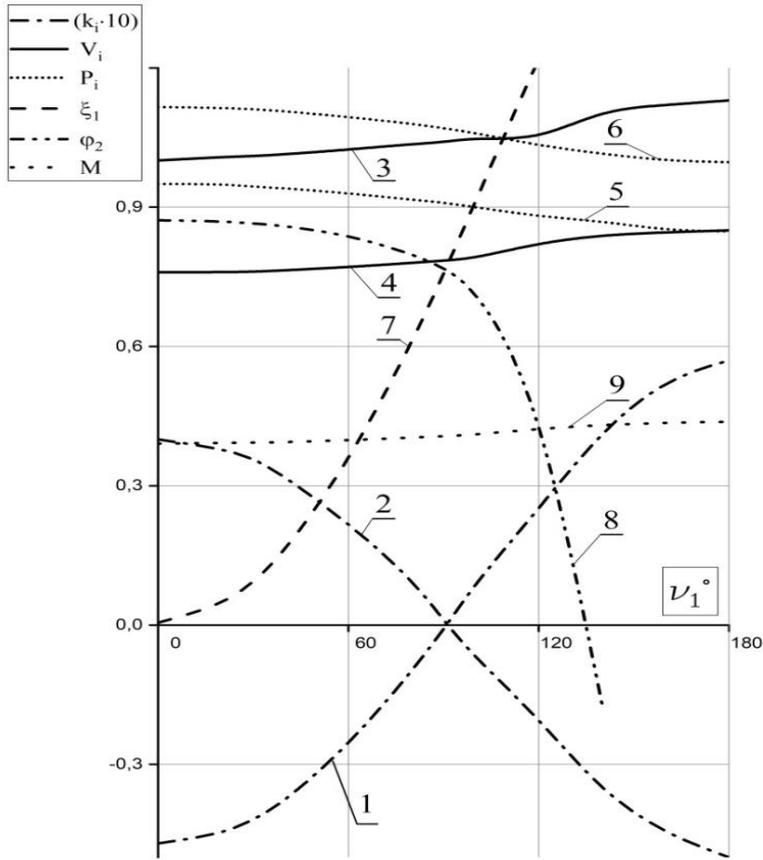


Рис. 7.а:

- $1 - \bar{k}_1, 2 - \bar{k}_2,$   
 $3 - v_2^+ / v_2, 4 - v_1^+ / v_1,$   
 $5 - p_2^+ / p_2, 6 - p_1^+ / p_1,$   
 $7 - \xi_1, 8 - \varphi_{p2},$   
 $9 - M_1 = M_2;$

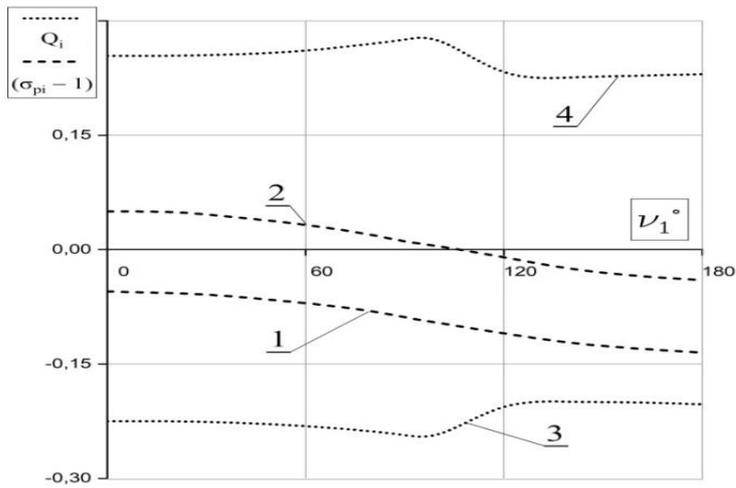


Рис. 7.б:

- $1 - \Delta\sigma_{p1}, 2 - \Delta\sigma_{p2},$   
 $3 - \bar{Q}_2, 4 - \bar{Q}_1.$

Рис. 7:  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.3, m_{21} = G_{21} = 1, p_{21} = 0.85, M_1 = 0.4, M_2 = 0.5, \nu_i = -1,$   
 $s_1 = s_2 = 0.45, \Delta_{Si} = 0.1, \mathcal{G}_2 = 0; v_{21} = 1.328, t_{21} = 1.129.$

первый поток, наоборот, тормозится и охлаждается. Эти явления сопровождаются здесь приращением  $\sigma_2$  (за счет преимущественного влияния притока количества движения над ростом связанной энергии) и падением  $\sigma_1$ . В области  $M_1 < 0.5$  все закономерности противоположны.

Заметное различие давлений смешивающихся потоков, даже при умеренной разнице начальных скоростей и температур, может привести к появлению иных, в сравнении с описанными выше (Рис. 6.), закономерностей.

На **Рис.7.** представлены результаты смешения потоков с исходными параметрами:  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.3$ ,  $m_{21} = G_{21} = 1$ ,  $p_{21} = 0.85$ ,  $M_1 = 0.4$ ,  $M_2 = 0.5$ ,  $v_i = -1$ ,  $s_1 = s_2 = 0.45$ ,  $\Delta_{s_i} = 0.1$ ,  $\mathcal{G}_2 = 0$ . При этих условиях  $v_{21} = 1.328$ ,  $t_{21} = 1.129$  более быстрый, но с меньшим начальным давлением поток «2» получает количество движения ( $\bar{k}_2 > 0$ ) от более медленного ( $\bar{k}_1 < 0$ ). Направление обмена количеством движения может измениться с падением давления за счет гидравлических потерь при увеличении угла подвода потока «1» в зону смешения. Для определения потерь использованы данные [7]:

$$\zeta_i = a_i [2,5 \sin^2(\mathcal{G}_i / 2) + \sin^4(\mathcal{G}_i / 2)] + \left. \begin{array}{l} b_i \Delta_{s_i}^2, \quad \Delta_s \geq 0; \\ c_i [((1 - \varepsilon) / \varepsilon)_i^2, \quad \varepsilon_i = (0,57 + 0,043(1 - \Delta_{s_i})) / (0,1 - 1,1\Delta_{s_i})], \quad \Delta_s < 0 \end{array} \right\},$$

$a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  – поправочные коэффициенты, учитывающие реальную протяженность и возможную кривизну трубки тока  $i$  – го потока. В первом потоке: отвод количества движения ( $k_1 < 0$ ) при умеренных углах поворота потока  $\mathcal{G}_1$ , возрастающие гидравлические потери с увеличением этого угла, подвод тепла к нему ( $\bar{Q}_1 \approx const < 0$ ) от более «горячего» второго потока – привели в результате к  $\sigma_{p1} < \sigma_{p2}$  с общей тенденцией уменьшения  $\sigma_{p1}$ . Тенденция не изменилась и при больших углах  $\mathcal{G}_1$ , где ( $k_1 > 0$ ) за счет преобладающего здесь влияния подвода тепла на величину  $\sigma_p$ . И, наконец, в отношении второго потока проявилась еще одна особенность поведения функции  $\varphi_p$ : если сумма воздействий не меняет величины начального давления ( $p_2^+ / p_2 = 1$ ), функция  $\varphi_{p2}$  испытывает разрыв 2-го рода (здесь при  $\mathcal{G}_2 \approx 170^\circ$ ); способы преодоления вычислительных проблем рассмотрены в [41], при этом функция  $p_\sigma$  остается непрерывной.

На Рис. 8, 9 представлены результаты смешения сверхзвуковых потоков. При гипотетическом безударном смешении (без скачков уплотнения **Рис.8.**) может проявиться эффект ускорения смеси в целом за счет перераспределения между свободной и связанной энергиями в пользу первой при существенном понижении температуры одной из составляющей смеси (здесь  $T/T_1 < 1$  при  $M_1 > M_2$ ). Полные условия расчета:  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.3$ ,  $m_{21} = G_{21} = p_{21} = 1$ ,  $v_i = 1$ ;  $s_1 = s_2 = 0.45$ ,  $\Delta_{Si} = 0.1$ ,  $\mathcal{Q}_i = 0$  – соосные потоки; без подвода тепла извне и гидравлических потерь -  $\Delta_{Qi} = \zeta_i = 0$ ;  $M_1 \in (1.65, 2.5)$ ,  $M_2 = 2$ ; при этом -  $v_{21} = t_{21} \in (1.47, 0.64)$ . Здесь, в области  $M_1 > M_2$ , когда  $v_{21} = t_{21} < 1$ , более медленный и более холодный поток «2» получает от «1» количества движения и тепла ( $\bar{k}_2 > 0$ ,  $Q_{2b} < 0$ ), что обеспечивает заметное увеличение скорости второго потока, в сравнении с падением скорости первого, значительное падение температуры первого. В итоге, значительно улучшилось качество потока «2» ( $\sigma_{p2} > 1$ ) при незначительном изменении первого ( $\sigma_{p1} \approx 1$ ), что отразилось на увеличении числа Маха смеси в сравнении с аналогичными параметрами потоков до смешения. Аналогичный эффект отмечался ранее в [50].

Реальный эффект может оказаться меньше прогнозируемого за счет появления системы слабых косых скачков уплотнения на границах смешивающихся потоков, подобных тем, что возникают на пограничном слое начальных участков труб, сверхзвуковых диффузоров, но, в любом случае, длина участка смешения предполагается здесь меньшей критической длины перевода потока в критическое или дозвуковое состояния [7, Д14].

Сверхзвуковые потоки в сужающихся каналах тормозятся с переходом через скачок уплотнения и последующим ускорением дозвукового потока в сужающемся канале вплоть до возможного предельного значения  $M = 1$ . Причиной появления скачка уплотнения может быть и поворот оси канала. Ниже предполагается, что в силу тех или иных, но достаточных по величине, причин, оба потока пересекают прямые скачки уплотнения (в соотношениях (4.40, 4.42, 4.45, 4.51) выбирается нижний знак); разворачиваются, если  $\mathcal{Q}_i \neq 0$ , и смешиваются; собственно гидравлические потери при этом не учитываются. Условия расчета на **Рис. 9.** воспроизводят эту картину на примере смешения двух потоков:  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.3$ ,  $m_{21} = G_{21} = p_{21} = 1$ ,  $v_i = 1$ ;  $s_1 = s_2 = 0.65$ ,  $\Delta_{Si} = -0.3$ ;  $\Delta_{Qi} = \zeta_i = 0$ ;  $M_1 \in (2.23, 3.0)$ ,  $M_2 = 2$ ; при этом -  $v_{21} = t_{21} \in (0.80, 0.44)$ . В области  $M_1 > M_2$ , по мере увеличения разности между ними, возрастает интенсивность скачка уплотнения в потоке «1», увеличивается разность скоростей,

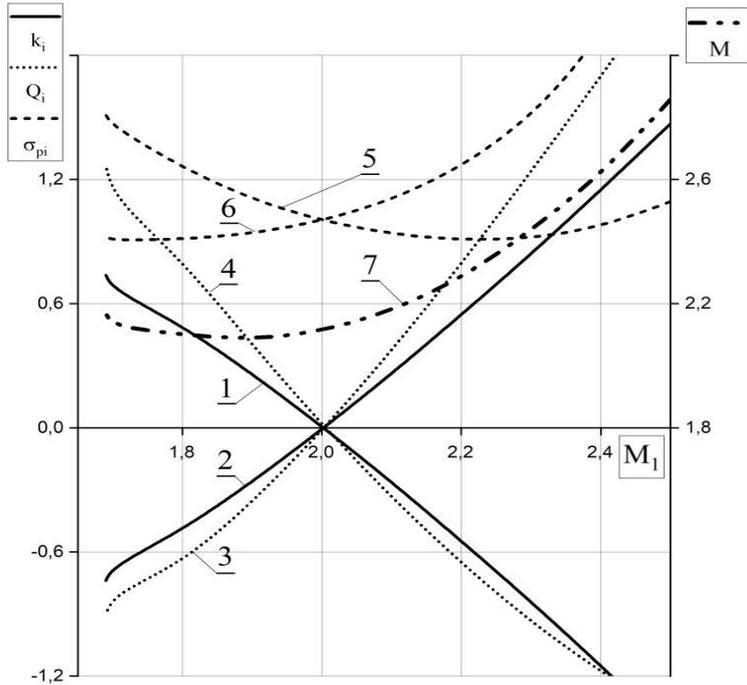


Рис. 8.а:

- 1 -  $\bar{k}_1$ , 2 -  $\bar{k}_2$ ,
- 3 -  $\bar{Q}_2$ , 4 -  $\bar{Q}_1$ ,
- 5 -  $\sigma_{p1}$ , 6 -  $\sigma_{p2}$ ,
- 7 -  $M_1^+ = M_2^+$ ;

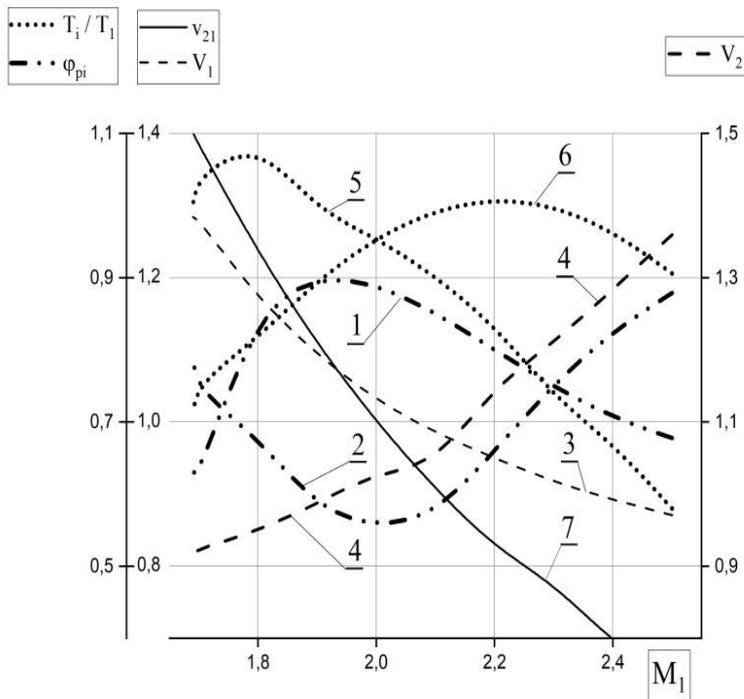


Рис. 8.б

- 1 -  $\varphi_{p1}$ , 2 -  $\varphi_{p2}$ ,
- 3 -  $v_1^+ / v_1$ , 4 -  $v_2^+ / v_2$ ,
- 5 -  $T_1^+ / T_1$ , 6 -  $T_2^+ / T_2$ ,
- 7 -  $v_{21} = t_{21}$ .

Рис. 8:  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.3$ ,  
 $m_{21} = G_{21} = p_{21} = 1$ ,  
 $s_1 = s_2 = 0.45$ ,  
 $\Delta_{Si} = 0.1$ ,  $\vartheta_i = 0$ ,  
 $\Delta_{Qi} = \zeta_i = 0$ ,  $M_2 = 2$ .

давлений и температур после скачка между ними. Очевидно, при этом для чисел Маха за скачками уплотнения знак неравенства становится противоположным с увеличивающейся разностью между ними.

В этих условиях возрастают значения количеств движения и тепла, необходимых для выравнивания гидродинамических параметров смеси, а последние все более удаляются от значений обеспечивающих достижения критических состояний в сужающемся канале ( $\Delta_{Si} = -0.3$ ). При уменьшении разности между числами Маха потоков на входе в зону смешения параметры смеси достигают критических значений (здесь при  $M_1 = 2.23$ ). Уменьшению  $M_1$  ниже этого значения отвечает отсутствие решения системы уравнений (4.51), что является признаком неадекватности исходных параметров или конкретной математической модели. Следует отметить, что учет гидравлических потерь в дозвуковой области потоков связан с некоторым усложнением математической модели, не принципиальным с позиций излагаемого метода, но в любом случае будет величиной второго порядка малости по отношению к существенным характеристикам смеси.

4. Решение системы уравнений (4.51) и, как следствие, возможность определения всех гидродинамических параметров (4.36) позволяют, вместе с (4.35, 4.46), определить величину и направление всех сил действующих на поток и на конструкцию узла смешения в целом. Разворот  $i$ -го потока на угол  $\mathcal{G}_i$  обеспечивается силой  $F_i$  с линией действия, определяемой углом  $\phi_i$  (4.52)

$$\bar{F}_i = F_i / (Gv)_i = -\frac{J_i \sin \mathcal{G}_i}{(Gv)_i \sin \phi_i} = -\left(1 - \frac{\zeta_i}{2} + \frac{1}{\gamma M_i^2}\right) \frac{\sin \mathcal{G}_i}{\sin \phi_i}. \quad (4.52)$$

Сила давления на «скачке» площади сечения  $i$ -го потока в пределах зоны перестройки потока. (Здесь, предположительно, ориентирована по оси общего потока. Специфика конструкции узла смешения может внести не принципиальные изменения в математическую модель и некоторую корректировку значений параметров состояния среды).

$$P_i = (d_i S - S_i) p_{\sigma i} \mathbf{i}. \quad (4.53)$$

Сумма всех внешних сил, действующих на поток, взятая с обратным знаком, определит главный вектор сил действия потока на элементы конструкции узла смешения

$$N = -\sum_i (P_i + F_i). \quad (4.54)$$

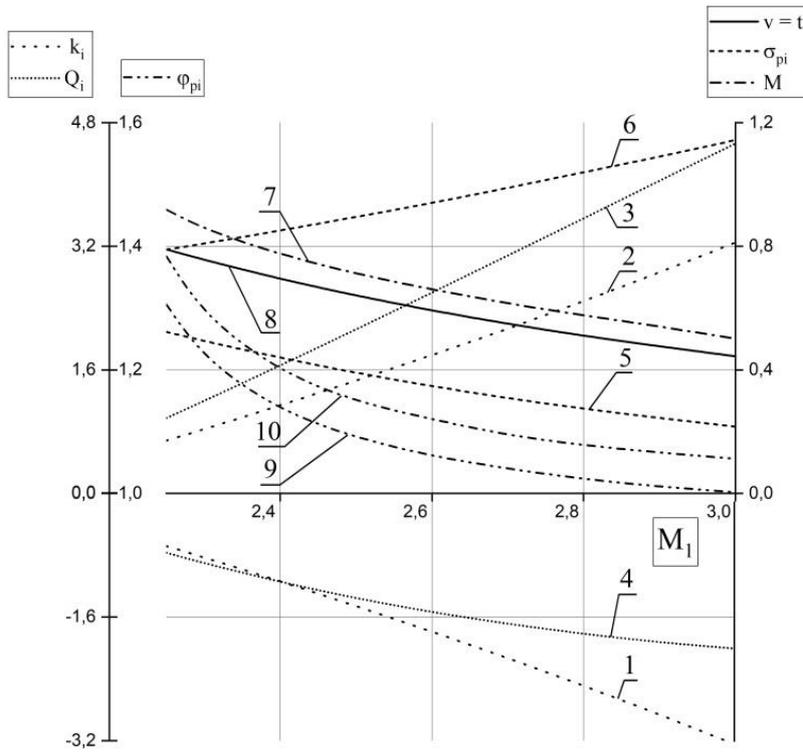


Рис.9. Условия:

$\gamma_1 = \gamma_2 = 1.3,$   
 $m_{21} = G_{21} = p_{21} = 1,$   
 $s_1 = s_2 = 0.65, \Delta_{Si} = -0.3;$   
 $\Delta_{Qi} = \zeta_i = 0; M_2 = 2;$   
 $v_{21} = t_{21} \in (0.80, 0.44).$

- 1 -  $\bar{k}_1,$  2 -  $\bar{k}_2,$
- 3 -  $\bar{Q}_2,$  4 -  $\bar{Q}_1,$
- 5 -  $\sigma_{p1},$  6 -  $\sigma_{p2},$
- 7 -  $M_1^+,$  8 -  $v_{21} = t_{21},$
- 9 -  $\phi_{p1},$  10 -  $\phi_{p2}.$

### 4.2.2. Смесь малосжимаемых сред

Процедура перехода от общих соотношений к варианту малой сжимаемости среды, как и раньше (Главы 1, 2), связан с разложением всех функций в ряды по степеням чисел Маха и удержание в них величин линейных относительно чисел  $M_i^2$ ; считается, также, доказанным результат  $A_i = 1$ . В итоге:

$$K_i = I_i + n_i M_i^2 \delta_i, \quad N_i = K_i - (n_i + 1)(1 - \Delta_{Si}) M_i^2 C_i,$$

$$\delta_i = \alpha_i - \Delta_{Si} + \bar{k}_i, \quad C_i = 1 + (\gamma_i - 1)(\Delta_{Qi} - \bar{Q}_i).$$

$$1. \frac{v_i^+}{v_i} = (1 - \Delta_{Si}) C_i, \quad 2. \frac{\rho_i^+}{\rho_i} = \frac{1}{C_i}, \quad 3. \frac{p_i^+}{p_i} = 1 + \frac{n_i}{I_i} M_i^2 [\delta_i - (1 - \Delta_{Si}) C_i], \quad (4.55)$$

$$4. \frac{T_i^+}{T_i} = C_i \left( 1 + \frac{n_i}{I_i} M_i^2 [\delta_i - (1 - \Delta_{si}) C_i] \right), \quad 5. (M_i^+)^2 = \frac{(1 - \Delta_{si})^2 M_i^2 C_i}{1 + n_i M_i^2 [\delta_i - (1 - \Delta_{si}) C_i] / I_i}.$$

Аналоги функций (4.42) и (4.45):

$$1. f_i = \frac{2Eu_i}{1 + 2Eu_i} \left\{ 1 + \frac{1}{2Eu_i} \left[ \frac{2(1 - \Delta_{si}) [\delta_i - (1 - \Delta_{si}) C_i]}{1 - \varphi_{pi} \Delta_{si}} + (1 - \Delta_{si})^2 C_i \right] \right\}, \quad (4.56)$$

$$2. \sigma_{pi} = \frac{p_{oi}^+}{p_{oi}} = \frac{2Eu_i + 2\delta_i - C_i}{1 + 2Eu_i}, \quad Eu_i = 1 / \gamma_i M_i^2;$$

их разность приводит к определению функции  $\varphi_{pi}$

$$\begin{aligned} \varphi_{pi} &= \frac{2(\delta_i - C_i) + \Delta_{si} C_i}{2(\delta_i - C_i) + \Delta_{si} (2 - \Delta_{si}) C_i} = \\ &= \frac{2[\alpha_i - \Delta_{\tau i} + \bar{k}_i - 1 - (\gamma_i - 1)(\Delta_{Qi} - \bar{Q}_i)] + \Delta_{si} [1 + (\gamma_i - 1)(\Delta_{Qi} - \bar{Q}_i)]}{2[\alpha_i - \Delta_{\tau i} + \bar{k}_i - 1 - (\gamma_i - 1)(\Delta_{Qi} - \bar{Q}_i)] + \Delta_{si} (2 - \Delta_{si}) [1 + (\gamma_i - 1)(\Delta_{Qi} - \bar{Q}_i)]}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

зависящей от всех физических  $\alpha_i - 1$ ,  $\Delta_{\tau i}$ ,  $\bar{k}_i$ ,  $\Delta_{Qi}$ ,  $\bar{Q}_i$  и геометрического  $\Delta_{si}$  воздействий. В силу специфики задачи последнее предопределено возможностью реализации условий на входе в узел смешения (см. (4.49)).

Соотношение (4.57) позволяет получить вариант уравнений (4.55) с явной зависимостью гидродинамических параметров потоков на выходе из узла от всех воздействий на каждый из них:

$$1. \frac{V_i^+}{V_i} = (1 - \Delta_{si}) [1 + \xi_i - (\gamma_i - 1) \bar{Q}_i], \quad (4.58)$$

$$2. \frac{p_i^+}{p_i} = 1 + \frac{2\bar{k}_i + 2(\gamma_i - 1)\bar{Q}_i - \zeta_i - 2\xi_i + \Delta_{si} (2 - \Delta_{si}) [1 + \xi_i - (\gamma_i - 1)\bar{Q}_i]}{2Eu_i},$$

$$3. (M_i^+)^2 = \frac{2(1 - \Delta_{si})^2 [1 + \xi_i - (\gamma_i - 1)\bar{Q}_i]}{\gamma_i \{ 2Eu_i + 2\bar{k}_i + 2(\gamma_i - 1)\bar{Q}_i - \zeta_i - 2\xi_i + \Delta_{si} (2 - \Delta_{si}) [1 + \xi_i - (\gamma_i - 1)\bar{Q}_i] \}},$$

$$\text{где } \Delta_{s1} = 1 - \frac{S_1}{S} \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \frac{G_2}{G_1} \right), \quad \Delta_{s2} = 1 - \frac{S_2}{S} \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \frac{G_1}{G_2} \right).$$

Последнее из соотношений (4.58) служит для оценки приемлемых, с позиций малой сжимаемости среды, воздействий на смешивающиеся потоки газа.

Далее, из условий равенства скоростей  $v_1^+ = v_2^+$ , соотношений 1. (4.58), (4.47) следует выражение

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{m_2 \rho_1}{m_1 \rho_2} = \frac{1 + (\gamma_1 - 1)(\Delta_{Q1} - \bar{Q}_1)}{1 + (\gamma_2 - 1)(\Delta_{Q2} - \bar{Q}_2)}, \text{ которое, вместе с (4.50), составит систему}$$

уравнений для определения величин обмена теплом смешивающихся потоков:

$$\bar{Q}_1 = \frac{1 + (\gamma_1 - 1)\Delta_{Q1} - m_2 \rho_1 [1 + (\gamma_2 - 1)\Delta_{Q2}] / m_1 \rho_2}{(\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 1)m_2 \rho_1 \bar{q}_{12} / m_1 \rho_2} = \frac{1 + \xi_1 - m_2 \rho_1 [1 + \xi_2] / m_1 \rho_2}{(\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 1)m_2 \rho_1 \bar{q}_{12} / m_1 \rho_2},$$

$$\bar{Q}_2 = -\bar{Q}_1 \bar{q}_{12} = \frac{m_2 \rho_1 \bar{q}_{12} (1 + \xi_2) / m_1 \rho_2 - (1 + \xi_1) \bar{q}_{12}}{(\gamma_1 - 1) + (\gamma_2 - 1)m_2 \rho_1 \bar{q}_{12} / m_1 \rho_2}; \quad \bar{q}_{12} = \frac{G_1 a_1^2}{G_2 a_2^2}. \quad (4.59)$$

Здесь:  $\xi_i = (\gamma_i - 1)\Delta_{Q_i}$  – приток тепла извне к каждой трубке тока – внешний, задаваемый, как и гидравлические потери, параметр.

Аналогично, условие равенства давлений, соотношения 2. (4.58) и (4.50) составят систему уравнений для определения величин обмена импульсом между смешивающимися потоками:

$$\frac{P_1}{Eu_1} \cdot (2Eu_1 + 2\bar{k}_1 + 2(\gamma_1 - 1)\bar{Q}_1 - \zeta_1 - 2\xi_1 + \Delta_{s1}(2 - \Delta_{s1})[1 + \xi_1 - (\gamma_1 - 1)\bar{Q}_1]) =$$

$$= \frac{P_2}{Eu_2} \cdot (2Eu_2 + 2\bar{k}_2 + 2(\gamma_2 - 1)\bar{Q}_2 - \zeta_2 - 2\xi_2 + \Delta_{s2}(2 - \Delta_{s2})[1 + \xi_2 - (\gamma_2 - 1)\bar{Q}_2]),$$

$$\bar{k}_2 = -\bar{k}_1 \frac{G_1 v_1}{G_2 v_2} = -\bar{k}_1 \bar{K}_{12} -$$

с решениями

$$1. \bar{k}_1 = \left\{ 2 \left( \frac{p_2}{p_1} - 1 \right) Eu_1 + \frac{\rho_2 v_2^2}{\rho_1 v_1^2} \Theta_2 - \Theta_1 \right\} / 2(1 + S_1 / S_2), \quad (4.60)$$

$$2. \bar{k}_2 = \left\{ 2 \left( \frac{p_1}{p_2} - 1 \right) Eu_2 + \frac{\rho_1 v_1^2}{\rho_2 v_2^2} \Theta_1 - \Theta_2 \right\} / 2(1 + S_2 / S_1).$$

$$\Theta_i = 2(\gamma_i - 1)\bar{Q}_i - \zeta_i - 2\xi_i + \Delta_{s_i}(2 - \Delta_{s_i})[1 + \xi_i - (\gamma_i - 1)\bar{Q}_i],$$

Здесь:

$$\Delta_{s_1}(2 - \Delta_{s_1}) = 1 - \frac{S_1^2}{S^2} \left( 1 + \frac{m_1 G_2}{m_2 G_1} \right)^2, \quad \Delta_{s_2}(2 - \Delta_{s_2}) = 1 - \frac{S_2^2}{S^2} \left( 1 + \frac{m_2 G_1}{m_1 G_2} \right)^2.$$

Очевидно, также, что формулы (4.52 – 4.54) сохраняют свой смысл и назначение для модели малой сжимаемости среды.

**5.** Смесь газов на выходе из узла смешения удобно трактовать как газ с иными термодинамическими свойствами и уравнениями состояния. Предполагая однородность термодинамических функций  $\Omega_i$  относительно масс и следуя [95, гл. 5], впредь считаем, что все термодинамические функции смеси теперь зависят не только от двух термодинамических аргументов, но и от массовой концентрации  $c_i = G_i / (G_1 + G_2)$  компонент, например  $\Omega^+ = \sum c_i \Omega_i^+$ . Определение массовой концентрации смеси по расходам на входе в узел смешения, предполагает отсутствие в зоне смешения химических реакций, эффектов диссоциации или рекомбинации. Эти допущения, в свою очередь, позволяют упростить расчет термодинамических свойств смеси.

Ниже, удобно перейти от истинной плотности компонент смеси  $\rho_i^+$  к плотности компоненты, отнесенной ко всему объему смеси  $\tilde{\rho}_i^+ = d_i \rho_i^+$ , тогда плотность смеси  $\tilde{\rho}^+ = d_1 \rho_1^+ + d_2 \rho_2^+$ . Далее, используя понятие парциального давления, уравнение состояния (4.33) можно записать в виде  $p_i^+ d_i = \tilde{p}_i^+ = \tilde{\rho}_i^+ RT_i^+ / m_i$ . Теперь, закон Дальтона, условия равенства давлений и температур на выходе из узла – позволяют определить молекулярный вес

смеси:

$$\tilde{p}^+ = p_1^+ d_1 + p_2^+ d_2 = \sum \frac{\tilde{p}_i^+}{m_i} RT_i^+ = \frac{\tilde{\rho}^+}{m^+} RT^+.$$

Отсюда:  $\frac{1}{m^+} = \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}$ , а вслед за тем газовую постоянную смеси, теплоемкости и их отношение. К сказанному остается лишь добавить, что принцип долевой суперпозиции для определения термодинамических функций смеси не распространяется на энтропию и связанную энергию, т. к. исходная постановка задачи предполагает наличие необратимых эффектов диффузии всех возможных видов.

**6.** Предложенная математическая модель смешения потоков газа в области  $\gamma_i = (c_p / c_v)_i = const_i$  достаточно универсальна:

- охватывает области до- и сверхзвуковых течений;
- обеспечивает независимость термодинамической функции  $\sigma_p$  от геометрических аргументов задачи, сохраняя зависимость от них всех прочих параметров состояния потоков при соблюдении всех законов сохранения и второго начала термодинамики;
- дополнительные соотношения (например, (4.46, 4.57)), замыкающие систему законов сохранения, «возвращают» им свойство замкнутости, «утраченное» в результате применения процедуры осреднения;
- существенно то, что дополнительные соотношения – следствия метода ТДС – уже содержатся в самих законах сохранения в интегральной форме и, следовательно, любые иные гипотезы относительно характеристик потока (кроме прямого целевого эксперимента), замыкающих систему законов сохранения, - излишни;
- допускает целевое – для определения диссипативных потерь ( $\Delta_{\zeta_i} \sim \zeta_i$ ) - использование экспериментальных данных гидравлики и прикладной гидрогазодинамики;
- предложенная модель позволяет прогнозировать «цену вопроса -  $\bar{k}_i, \bar{Q}_i$ » при смешении различных газов, строить модели оптимизации на основе различных целей (прочности узла, заданных параметров смеси, экономических затрат и т.д.);
- и, наконец, в последней математической модели присутствуют величины  $k_i$ , обеспечивающие обмен импульсами для выравнивания скоростей потоков на выходе из узла. В предложенном варианте модели величины  $k_i$  играют роль «эффективного коэффициента трения» (см. п. 2.2.3.) и, вместе с величинами  $Q_i$ , обеспечивают неизэнтропичность процессов смешения (см. п.2.4. и рис. 7 для величин  $k_i, \Delta\sigma_{pi}$ ). И кроме того, величины  $k_i$ , по существу, носят массовый (объемный) характер и присутствуют в модели в виде равнодействующих величин. По-видимому, в таком же виде, при решении проблем незамкнутости моделей, могут использоваться объемные силы иной физической природы; о том же говорят соотношения (1.33, 1.37).

## Заключение

Предложенный аппарат – метод ТДС – оперирует интегральными характеристиками узлов каналов (площади сечений, углы ориентации осей, ...) и течений газов в них (расходы, скорости, давления, температуры, ...), содержит дополнительные инструменты воздействия на потоки в узлах (подвод-отвод массы и тепла, гидравлические потери).

Метод: устанавливает связи между перечисленными параметрами на входе и на выходе из узла; обеспечивает единственность решения; гарантирует выполнение всех законов сохранения и второго начала термодинамики; позволяет формулировать прямые и обратные задачи проектирования и оптимизации.

Метод ориентирован на два типа задач гидрогазодинамики внутренних течений с конечными по величине воздействиями на потоки: стационарные течения с распределенными воздействиями и без ограничения продольных размеров потоков; локальные воздействия, допускающих трактовку течения как сильного разрыва. Первые являются следствием частных интегралов дифференциальных уравнений гиперболического типа (вида (2.44, 4.10, 4.11)) и при сопоставимых условиях приводят к известным решениям на основе дифференциальных уравнений газодинамики (интеграла Бернулли и адиабаты Пуассона, п. 1.5.1, (4.24<sub>1</sub>), ...). Вторые, помимо собственной значимости, являются удобным инструментом для «сшивания» в узел нескольких одномерных потоков с пересекающимися осями, или решения задач распада произвольного разрыва в подобных узлах с возможностью, в определенной степени, управления интенсивностью волн при РПР.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика М.: Наука, 1991, 824 с.
2. Альтшуль А.Д., Киселев П.Г. Гидравлика и аэродинамика. М.: Стройиздат. 1975, 274 с.
3. Богомолов Е.Н. О боковом истечении жидкости из потока через отверстие конечной глубины// Прикл. мех. 1968. Т.4, вып. 10.
4. Богомолов Е.Н. Безвихревое истечение жидкости из потока через боковое отверстие конечной глубины// Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, N 1. С.162-164.
5. Булеев Н. И. Пространственная модель турбулентного обмена. М.: Наука, 1989
6. Ваграменко Я.А., Пучков А.Ф. К определению донного давления при истечении осесимметричной сверхзвуковой струи в канал// Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. N 6. С.125-129.
7. Гинзбург И.П. Прикладная гидрогазодинамика. Л.: Изд. ЛГУ, 1958, 338с.
8. Гинзбург И.П. Теория сопротивления и теплопередачи. Л.: Изд. ЛГУ, 1970, 375с.
9. Глотов Г.Ф., Мороз Э.К. Исследование течения газа в цилиндрическом канале при внезапном расширении звукового потока// Труды ЦАГИ, 1970, вып. 1281.
10. Гогиш Л.В., Дашевская С.Г. Расчет сверхзвукового отрывного течения в круглых соплах с внезапным расширением// Изв. АН СССР. МЖГ. 1979, N 4. С.119-125.
11. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 391с.
12. Горлин С.М., Слезингер И.И. Аэромеханические измерения/ Методы и приборы. М.: Наука. 1964.
13. Горлин С.М. Экспериментальная аэромеханика. М.: Высшая школа. 1970. 423с.
14. Горшенин Д.С., Мартынов А.К. Руководство к практическим занятиям в аэродинамической лаборатории. М.: Машиностроение. 1967. 224с.

15. Грабовский А.М., Иванов К.Ф. и др. Кинематическая структура потока при движении его с отделением и присоединением массы вдоль трубопровода// Тр. метролог. ин-тов СССР. 1986. С.9-13.
16. Гродзовский Г.П., Кузнецов Ю.Е. К теории камеры для вихревого охлаждения газового потока// Изв. АН СССР. ОТН. 1954, N 10.
17. Давидсон В.Е., Нещерет П.А., Глинкин Б.А. Об истечении недорасширенной звуковой воздушной струи в трубу// Гидроаэромеханика и теория упругости. Донецк: Изд-во ДГУ, вып. 15, 1972. С.54-57.
18. Деденко Л.Г., Керженцев В.В. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента. М.: Изд-во МГУ, 1977.
19. Дейли Дж., Харлеман Д. Механика жидкости. М.: Энергия. 1971. 480с.
20. Дубинский М.Г. О вращающихся потоках газа// Изв. АН СССР, ОТН, 1954. N 8. С.75-78.
21. Дубинский М.Г. Течение вращающихся потоков газа в кольцевых каналах// Изв. АН СССР. ОТН, 1955. N11. С.125-128.
22. Дубравин Ю.А. Газодинамические уравнения двухфазной внутренней баллистики// Уч. записки (механика). Пермь: Изд-во ПГУ, 1975. С.124-141.
23. Дубравин Ю.А. Динамика и гидравлический расчет гидротормозов артиллерийских систем с учетом двухфазности рабочей смеси// Проблемы механики управляемого движения/ Межвуз. сб. Пермь: ПГУ, 1979. С. 45-49.
24. Дубравин Ю. А. , Ландик Л. В., Улитин М. В. Истечение газа из канала через патрубков в среду с заданным давлением// Проблемы механики и управления/ Межвуз. сб. Пермь: ПГУ, 2003. С. 24-34.
25. Дубравин Ю.А., Липин И.В. Динамика наката и расчет гидродинамических характеристик гидротормозов артиллерийских систем// Проблемы механики управляемого движения/ Межвуз. сб. Пермь: ПГУ, 1979, С.50-54.
26. Дубравин Ю.А., Никифоров Ю.И. Решение задачи о гидровыстреле методами двухфазной газодинамики// Проблемы механики управляемого движения/ Межвуз.сб. Пермь: ПГУ, 1979.

27. Дубравин Ю.А. Приложение обобщенных соотношений на сильных разрывах к расчету дульных тормозов АС// Проблемы механики управляемого движения/ Межвуз. сб. Пермь: ПГУ, 1980. С.238-247.
28. Дубравин Ю.А., Никифоров Ю.И., Сергеев О.Б. О затекании газа в зазор между гильзой и поверхностью камеры// Проблемы механики управляемого движения/ Межвуз. сб. Пермь: ПГУ, 1986. С.255-262.
29. Дубравин Ю.А., Симакина Н.И. Упругопластический расчет гильзы в жестком стволе// Проблемы механики управляемого движения. Межвуз. сб. Пермь: ПГУ, 1980. С.287-293.
30. Дубравин Ю.А., Сергеев О.Б. К расчету эффективности дульных тормозов АС// Проблемы механики управляемого движения/ Межвуз. сб. Пермь: ПГУ, 1980. С.248-255.
31. Дубравин Ю.А., Липин И.В. Об уравнениях состояния газожидкостной смеси// Материалы XVII НТК. Тезисы докл. Пенза: ПВАИУ, 1983.
32. Дубравин Ю.А., Савченко В.А. Механизм теплообмена в гильзе// Проблемы механики управляемого движения/ Межвуз. сб. разд. III. Пермь: ПГУ, 1984. С.126-135.
33. Дубравин Ю.А., Сергеев О.Б., Сергеева В.Ф. Решение задачи о затекании газов в деформируемый зазор между гильзой и камерой// Проблемы механики управляемого движения/ Межвуз. сб. разд. III. Пермь: ПГУ, 1984. С.114-125.
34. Дубравин Ю.А., Симакина Н.И. Расчет усилия защемления гильз// Проблемы механики управляемого движения/ Межвуз. сб. Пермь: ПГУ, 1984. С.71-81.
35. Дубравин Ю.А. Исследование и численное моделирование сложных течений в перфорированных каналах./ Межвуз. сб. Пермь: ПГУ 1985.
36. Дубравин Ю.А. Условия в узле одномерных течений жидкости// Деп. ВИНТИ, N 4323-B86, 12.06.86, 20с.
37. Дубравин Ю.А. О построении замкнутой системы уравнений гидродинамики внутренних течений в зонах локальных воздействий на поток// Деп. ВИНТИ, N1554-B87, 03.03.87, 19с.
38. Дубравин Ю.А., Козлов А.И., Симакина Н.И. Расчет усилия защемления и обеспечение обтюрации гильз// Тезисы докл. НТК. Тула: ТВАИУ, 1987.

39. Дубравин Ю.А., Сергеев О.Б. Методика расчета расходных характеристик дульных тормозов// Материалы XXI НТК. Тезисы докл. Пенза: ПВАИУ, 1987.
40. Дубравин Ю.А., Симакина Н.И. Определение параметров НДС и теплового состояния гильзы// Тезисы докл. НТС. Л.: ЛАА им. Калинина, 1987.
41. Дубравин Ю.А. О связи гидродинамических параметров в зонах локальных воздействий на поток// ПМТФ, 1989, N3. С.60-69.
42. Дубравин Ю.А. Математическое моделирование зон локальных воздействий на поток в канале и некоторые приложения к задачам гидродинамики внутренних течений// Вестник Пермского ун-та. Сер. Математика. 1994, вып.1. С.115-136.
43. Дубравин Ю.А. Условия в узле одномерных течений газа// ПМТФ, 1995, N4. С.98-109.
44. Дубравин Ю.А. Моделирование течений жидкости и газа в узлах одномерных течений// Математические модели и численные методы механики сплошных сред. Тезисы докл. междунар. конф. Новосибирск: СО РАН, 1996. С.324.
45. Дубравин Ю.А. Условия в узлах одномерных течений жидкостей и газов// Всесибирские чтения по математике и механике. Тезисы докл. междунар. конф. Томск: Изд-во ТГУ, 1997. С.141-142.
46. Дубравин Ю.А. Условия в узлах одномерных течений жидкостей и газов// 11-я Междунар. зимняя школа по механике сплошных сред. Тезисы докл. Пермь: ИМСС УрО РАН, 1997. С.118.
47. Дубравин Ю.А. Локальные воздействия на закрученный поток в канале с частично-свободной поверхностью// Вестник Пермского ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика, 1997, вып.1. С.106-125.
48. Дубравин Ю.А. Моделирование зон локальных воздействий на закрученный поток в канале// Проблемы механики и управления/ Межвуз. сб., Пермь: Изд-во ПГУ, 1997. С.151-164.
49. Дубравин Ю.А. О сопротивлении тел в ограниченном потоке несжимаемой жидкости.//Проблемы механики и управления/ Межвуз. сб., Пермь, 1997,
50. Дубравин Ю.А., Ландик Л.В. К вопросу об эффективной организации вдува массы в канал// Изв. ВУЗов/ Авиационная техника, 1997, N1. С.90-95.

51. Дулов В.Г. Неустановившееся движение газа в трубах с разрывом площади поперечного сечения/ Диссерт. на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н. Л.: ЛГУ, 1955.
52. Дулов В.Г. Распад произвольного разрыва параметров газа на скачке площади сечения// Вестник ЛГУ. Сер. Математика. Механика. Астрономия. Л.: Изд-во ЛГУ, 1958, N19, вып.4. С.76-99.
53. Дулов В.Г., Павлов С.В., Яушев И.К. Обобщенная задача о распаде разрыва и ее приложение// Препр. N10-85. Новосиб.: ИТиПМ СО АН СССР. 1985. 28с.
54. Ерошенко В.М., Зайчик Л.И. Гидродинамика и тепломассообмен на пронизываемых поверхностях. М.: Наука. 1984. 274с.
55. Ефремов Н.Л., Тагиров Р.К. Расчет донного давления в эжекторных соплах различной длины при нулевом коэффициенте эжекции// Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, N6. С.164-166.
56. Идельчик И.Е. Гидравлические сопротивления. М.-Л. Госэнергоиздат, 1954. 316с.
57. Идельчик И.Е. Аэродинамика промышленных аппаратов. М.: Энергия. 1964. 287с.
58. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1975. 464с.
59. Идельчик И.Е. Аэрогидродинамика технологических аппаратов. М.: Машиностроение. 1983. 351с.
60. Карев В.Н. Потери напора при внезапном сужении трубопровода// Нефтяное хозяйство, 1953, N8.
61. Комаровский Л.В., Шабловский О.Н. Аналитическое исследование некоторых внутренних задач нестационарной газовой динамики и переноса тепла// Томск: Изд-во Томского ун-та, 1981. 208с.
62. Коровин Е.П. Удар газа при внезапном расширении канала и течение в диффузорах при больших дозвуковых скоростях// Отчет СибНИА, 1951.
63. Коровин Е.П. Исследование удара газа при внезапном расширении// Труды СибНИА, 1954.
64. Корст Г. Теория определения донного давления в околозвуковом и сверхзвуковом потоках// Механика. 1957. N5. С.49-63.

65. Космачев П.П., Скобельцин Ю.А. Боковое истечение жидкости из потока через насадок// Изв. АН СССР. МЖГ. 1975, N2. С.156-159.
66. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.1,2. м.: Физматгиз, 1963.
67. Коул Р. Подводные взрывы. М.: ИЛ. 1950.
68. Крокко Л. Одномерное рассмотрение газовой динамики установившихся течений/ Основы газовой динамики. Ред. Эммонс Г. М.: ИЛ, 1963, 702с.
69. Козлов В.В., Левченко В.Я., Максимов В.П. и др. Исследование течения вязкой жидкости в окрестности щели при отсосе// Ученые записки ЦАГИ. 1977, т.VIII, N1. С.130-135.
70. Кэхейн А., Уоррен В., Гриффит В.Г., Марино А. Теоретическое и экспериментальное изучение распространения волн конечной амплитуды в каналах переменного сечения// Механика. 1955, N4. С.12-38.
71. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 2001, С. 736.
72. Липин И.В., Никифоров Ю.И. Влияние неизэнтропичности течения жидкости на параметры гидровыстрела// Проблемы механики управляемого движения. Межвуз. сб./ Пермь: ПГУ, 1979. С.93-98.
73. Любимов Д.В., Тарунин Е.Л., Ямшина Ю.А. Теоретическая модель эффекта Ранка-Хилша// Вестник Пермского ун-та. Сер. Математика, вып. 1, 1994. С.162-177.
74. Маккавеев В.М., Коновалов И.И. Гидравлика. Л.-М.: Речиздат, 1940.
75. Мартынов А.К. Экспериментальная аэродинамика. М.: Оборонгиз, 1958, 348с.
76. Михеев М.А. Основы теплопередачи. М.-Л.: Госиздат, 1949, 346с.
77. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосиб.: Наука. 1977. 424 с.
78. Нейланд В.Я., Куканова Н.И. Исследование течений со срывными зонами// Обзоры. Переводы. Рефераты. БНИ ЦАГИ. 1965, N129, 176с.
79. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. С.336.

80. Никулин В.В. Аналог уравнений вихревой мелкой воды для полых и торнадоподобных вихрей// ПМТФ. 1992, N2. С.47-52.
81. Никулин В.В. Полый вихрь с осевой скоростью в трубе переменного сечения// ПММ, т.58, вып.2, 1994. С.49-53.
82. Орлов Б.В., Мазинг Г.Ю. Термодинамические и баллистические основы проектирования ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Машиностроение. 1979.
- 83 Павлов С.В. Алгоритм решения задачи о распаде произвольного разрыва для разветвленных каналов и модульная структура программы// Модульный анализ/ Сб. научный трудов. Новосибир.: ИТиПМ СО АН СССР, 1978, N8, вып.2. С.62-72.
84. Павлов С.В., Яушев И.К. Задача о распаде произвольного разрыва параметров газа в разветвленных каналах// Численный анализ: Сб. научн. тр./ АН СССР. Сиб. отд. ИТиПМ, 1978. С.75-82.
85. Пензин В. И. Влияние газодинамических и геометрических параметров течения в ступенчатой трубе на донное давление.//Уч. Записки ЦАГИ, 1983, т.XIV, № 6.
86. Петров Г.А. Движение жидкости с изменением расхода вдоль пути. М.-Л.: Стройиздат, 1951, 201с.
87. Проектирование ракетных и ствольных систем. Под ред. Орлова Б.В. М.: Машиностроение, 1974.
88. Промежуточная баллистика артиллерийских орудий// М.: ЦНИИ информации, 1982. 288с.
89. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред// ПММ, 1956, 20, N2. С.184-195.
90. Рахматулин Х.А., Сагомоян А.Я., Бунимович А.И., Зверев И.Н. Газовая динамика. М.: Высшая школа, 1965.
91. Родэ Л.Э. Гидравлические сопротивления трубопроводной арматуры/ Автореф. диссерт. на соиск. уч. ст. к.т.н. Л.: ЛПИ, 1959.
92. Рэнни У. Исследование методом возмущений одномерного гетерогенного течения в ракетных соплах. Сб. переводов. Детонация и двухфазное течение. М.:

Мир, 1966.

93. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука. 1980. 448с.

94. Седов Л. И. Об обтекании тела идеальной жидкостью со встречной струей.//ДАН СССР. 1972, т. 206, № 1

95. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. М.: Наука, 1994, 528с.

96. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2. СПб.: Изд-во «Лань», 2004, 560с.

97. Симакина Н.И. Диссерт. на соиск. уч. ст. к.т.н. Л.: ЛМИ 1989. 216 с.

98. Соркин Р.Е. Теория внутрикамерных процессов в ракетных системах на твердом топливе. М.: Наука. 1983.

99. Справочник по гидравлическим расчетам/ Под ред. П.Г.Киселева. М.: Энергия, 1972, 312с.

100. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971, С. 856.

101. Степанов И.Р., Чудинов В.И. Некоторые задачи движения газа и жидкости в каналах и трубопроводах энергоустановок. Л.: Наука, 1977, 200с.

102. Талиев В.Н. Аэродинамика вентиляции. М.: Госстройиздат. 1954.

103. Ульянов И.Е., Крумина Н.Н. Вакар Н.В. Проектирование воздухопроводов самолетных силовых установок. М.: Машиностроение. 1979.

104. Фукс Н.А. Механика аэрозолей. М.: Изд. АН СССР. 1955.

105. Харлоу Ф.Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики/ Вычислительные методы в гидродинамике/ М.: Мир, 1967.

106. Хескестэд Д. Схема отсоса потока применительно к течению с внезапным расширением//Теорет. основы инженерных расчетов. 1968, №4. С.115-133.

107. Честер У. Распространение ударных волн в каналах переменного сечения// Проблемы механики. М.: ИЛ.1963, вып.4. С.100-127.

108. Чугаев Р.Р. Гидравлика. Л.: Энергоиздат, 1982, 671с.

109. Яушев И.К. Распад произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения// Изв. СО АН СССР. Техн. науки, 1967. №8, вып.2. С.109-120.
110. Яушев И.К. К анализу одного семейства решений задачи о распаде произвольного разрыва на скачке площади сечения// Численные методы в механике жидкости и газа/ Сб. научных трудов. Новосиб.: ИТиПМ СО АН СССР, 1980. С.140-147.
111. Ascher H., Shapiro. The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow. v.1. New York: 1953, 648p.
112. Busemann A. Gasdynamik//Handbuch der Experimental Physc. Leipzig: 1931, v.4, p.403-407.
113. Tayler G.J. The boundary layer in the Converging Nozzle of Swirl atomizer// Quart. J. Mech. and Appl. Wath. 1950, v.30, pt.26 p.129-139.
114. Wick R.S. The effect of boundary layer on sonic flow through on abrupt cross-sectional area change// J. Aeronaut. Sci., 20. 1953, N10, p.675-682

### ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК

- Д1<sup>\*)</sup>. Беклемишев Н.Н., Дубравин Ю.А. Прикладная гидрогазодинамика внутренних течений: Специальные задачи. М.: Изд-во МАИ, 2016.-196 с.
- Д2. Белов В.М. Учет второго закона термодинамики в задании параметрической структуры решения задачи о распаде произвольного разрыва на скачке площади сечения//Аэродинамика. Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 1992. С. 38-44.
- Д3. Белов В.М. Параметрическое исследование решений и построение алгоритмов и программ расчета некоторых обобщенных задач о распаде произвольного разрыва: Дис. ...канд. физ.-мат. наук. Томск, 2006.
- Д4. Дубравин Ю.А. Математическое моделирование течений жидкости и газа в каналах с локальными конечными по величине воздействиями: Дис. ...д-ра техн. наук, спец. 01-02-05. Пермь, 1998.

---

<sup>\*)</sup> К сожалению, монография содержит множество опечаток, не только, при наборе формул. Устранение их и изложение нового материала явилось целью настоящего издания.

Д5. Дубравин Ю.А., Никифоров Ю.И. Численное решение задачи нестационарного квазиодномерного течения гетерогенной смеси при наличии: твердых тел в потоке, силового и тепло-массообмена компонент смеси. Свид-во о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2015617454. РФ, 10.07.2015.

Д6. Дубравин Ю.А. Сравнительный анализ эффективности локального подвода массы с закруткой и без нее// Неоднородные конструкции. Труды XIX Российской школы и XXIX Уральского семинара. Екатеринбург: Уральское отд-е РАН, 1999. С. 119-122.

Д7. Дубравин Ю.А. Термодинамическая согласованность как метод моделирования течений газа в узлах каналов// ПМТФ. 2021. Т. 62, № 6. С. 8-19.

Д8. Дубравин Ю.А., Улитин М.В. К вопросу о моделировании квазиодномерных течений в каналах// Вестник Пермского ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005, вып.2. С.147-150.

Д9. Зарипов Д.И. Колебания потока в разветвленных каналах: Автореф. дис...канд. физ.-мат. наук. Казань: Изд-во КазНЦ РАН, 2014.

Д10. Кочин Н.Е. К теории разрывов жидкости/ Собр. сочин. М.-Л.: 1949, Т. 2.

Д11. Кузнецов В.И., Макаров В.В., Яковлев А.Б. Математическая модель течения газа с закруткой части потока в выхлопном канале энергетических установок// Математические модели и численные методы механики сплошных сред/ Тез. докл. междун. конф. 1996.С. 544.

Д12. Остренко С.А., Пермьяков В.В. Гидравлические и пневматические системы транспортировки и транспортно-технологических машин и оборудования. Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2010.

Д13. Сергеев О.Б. Численное моделирование истечения газа из плоского канала через боковой патрубков// Неоднородные конструкции. Труды XIX Российской школы и XXIX Уральского семинара. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. С. 113-118.

Д14. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Изд-во Наука, 1974, 712.

Д15. Башкин В.А., Егоров И.В. Семинары по теоретической гидродинамике. Ч.1. Учебное пос. М.: Изд-во МФТИ, 2003, 133с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	4
<b>Глава 1. Течения в каналах со скачком площади сечения .....</b>	<b>7</b>
<b>1.1. Система законов сохранения в интегральной форме.....</b>	<b>7</b>
1.1.1. Основные допущения и условия на границах.....	7
1.1.2. Система уравнений.....	8
1.1.3. Замечание о роли теоремы о среднем в незамкнутости законов сохранения.....	11
1.1.4. Краткий обзор существующих приемов построения замкнутой системы уравнений.....	12
<b>1.2. Первое и второе начала термодинамики и их следствия.....</b>	<b>14</b>
1.2.1. Начала термодинамики для зоны перестройки потока в канале.....	14
1.2.2. Формулировка дополнительного условия.....	16
<b>1.3. Модель несжимаемой жидкости.....</b>	<b>18</b>
1.3.1. Линеаризованный вариант законов сохранения.....	18
1.3.2. Альтернативные методы определения $\varphi_p(\Delta_S, X)$ .....	19
1.3.3. О связи гидравлических потерь с воздействиями.....	20
<b>1.4. Модель сжимаемой жидкости.....</b>	<b>23</b>
1.4.1. Дополнительное условие в дифференциальной форме; особые точки.....	23
1.4.2. Альтернативные методы определения $\varphi_p(\Delta_S, X)$ .....	26
1.4.3. Замкнутая система уравнений для течения в канале со скачком площади.....	27
<b>1.5. Тестирование полученных решений.....</b>	<b>27</b>
1.5.1. Несжимаемая жидкость; эксперимент автора.....	27
1.5.2. Сжимаемая жидкость; некоторые выводы.....	35
1.5.3. К вопросу о «теории удара».....	38

<b>1.6.</b>	Распад произвольного разрыва на скачке площади сечения канала..	39
1.6.1.	Постановка задачи. Соотношения на скачке площади.....	40
1.6.2.	Конфигурации распада разрыва и соотношения на них.....	42
1.6.3.	Возможные варианты реализации распада разрыва.....	44
1.6.4.	Решение и анализ.....	45
<b>Глава 2.</b>	<b>Течения в каналах с локальным подводом – отводом массы...</b>	<b>50</b>
<b>2.1.</b>	Существующие подходы к схематизации и описанию течений в каналах с раздочей и слиянием потоков.....	50
<b>2.2.</b>	Законы сохранения и схемы течения жидкости в боковых патрубках.....	52
2.2.1.	Возможные схемы течения жидкости в боковых патрубках....	52
2.2.2.	Уравнение движения при истечении из канала.....	56
2.2.3.	Уравнение движения при подводе массы.....	67
2.2.4.	Вывод уравнения энергии.....	68
2.2.5.	Законы сохранения.....	70
2.2.6.	Связь гидродинамических параметров состояния до и после воздействий.....	71
<b>2.3.</b>	Второе начало термодинамики и дополнительные условия.....	73
<b>2.4.</b>	О различиях в постановке задач отвода и подвода массы в канал....	77
<b>2.5.</b>	Отвод массы из канала: течение с отрывом струи в боковом патрубке.....	78
2.5.1.	Случай несжимаемой жидкости.....	78
2.5.2.	Дозвуковые течения сжимаемой жидкости.....	82
2.5.3.	Замечание об истечении сверхзвукового потока из канала через боковой патрубков.....	82
<b>2.6.</b>	Общее решение задачи о течении несжимаемой жидкости в канале. Подвод-отвод массы.....	83
2.6.1.	Истечение жидкости из канала через боковые патрубки (схемы 1, 2).....	83
2.6.2.	Анализ схемы истечения 1, 2 .....	88
2.6.3.	Другие возможные схемы истечения из канала через боковые ответвления.....	90
2.6.4.	Локальный подвод массы в канал.....	92

<b>2.7. Общее решение задачи о течении сжимаемой жидкости в канале.</b>	
Подвод-отвод массы.....	93
2.7.1. Задачи истечения (схемы 1, 2).....	93
2.7.2. Задачи подвода массы в канал.....	95
2.7.3. О поведении функции в окрестности $\Delta_s = 0$ .....	96
<b>2.8. Моделирование затекания газа в узкий зазор</b>	
между соосными цилиндрами.....	98
2.8.1. Специфика задачи.....	98
2.8.2. Определение $\varphi_p$ при малом расходе $\Delta_G$	
и геометрическом $\Delta_s$ воздействиях.....	100
<b>2.9. Выводы к Главе 2 .....</b>	<b>104</b>
<b>2.10. Приложение к Главе 2.....</b>	<b>106</b>
<b>Глава 3. Математические модели некоторых задач</b>	
<b>прикладной гидрогазодинамики внутренних течений.....</b>	<b>110</b>
<b>3.1. Истечение несжимаемой жидкости из канала</b>	
через боковые патрубки в среду с заданным давлением.....	110
3.1.1. Истечение через "короткий" патрубок.....	110
3.1.2. Истечение через "длинный" патрубок.....	119
3.1.3. Истечение несжимаемой жидкости из канала	
через произвольное число различных патрубков	
(гидродинамическая интерференция).....	124
<b>3.2. Перетекание несжимаемой жидкости между</b>	
перекрещивающимися каналами через соединительный патрубок.....	128
<b>3.3. Истечение сжимаемой жидкости из канала</b>	
через патрубки в среду с заданным давлением.....	134
3.3.1. Истечение дозвукового потока.....	134
3.3.2. Специфика решения задач сжимаемой жидкости.....	140
<b>3.4. Истечение сжимаемой жидкости из камеры</b>	
конечных размеров.....	144
<b>3.5. Задача о вдуве газа в канал из камеры.....</b>	<b>146</b>
3.5.1. Математическая модель.....	146
3.5.2. К вопросу об эффективности подвода массы в канал.....	149

<b>3.6. Некоторые обобщения решений на основе законов сохранения в интегральной форме.....</b>	<b>151</b>
3.6.1. Среды, подчиняющиеся уравнению состояния Тэта.....	151
3.6.2. Двухфазные смеси.....	153
3.6.3. Уточнение смысла и записи уравнений квазиодномерных течений в каналах с распределенными расходными воздействиями.....	154
3.6.4. Закрученные течения в каналах с локальными воздействиями.....	158
3.6.5. О сопротивлении тел в ограниченном потоке (постановка проблемы).....	162
<b>Глава 4. Течения в каналах с изломом оси.....</b>	<b>166</b>
<b>4.1. Раздача потока в веер каналов.....</b>	<b>166</b>
4.1.1. Учет сжимаемости среды.....	167
4.1.2. Истечение малосжимаемой среды.....	172
4.1.3. Истечение с произвольным числом ветвей. Анализ результатов.....	174
4.1.4. Истечение при условии $p_i = p_1$ .....	178
<b>4.2. Слияние и смешение потоков совершенного газа.....</b>	<b>180</b>
4.2.1. Смесь сжимаемых сред.....	180
4.2.2. Смесь малосжимаемых сред.....	195
<b>Заключение.....</b>	<b>200</b>
<b>Библиографический список.....</b>	<b>201</b>