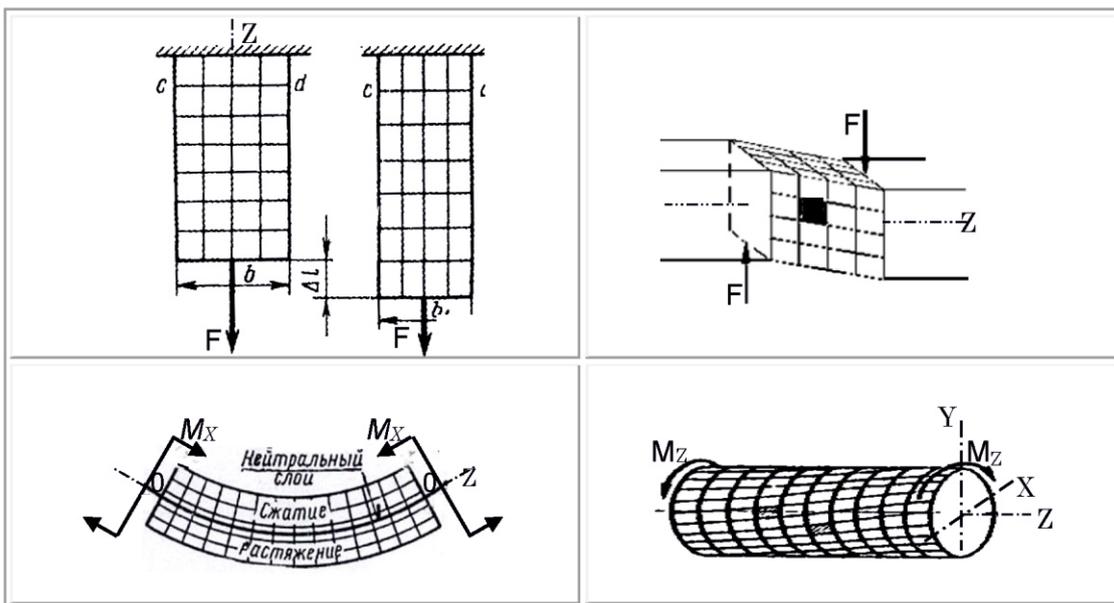


Караченцева Т. Г.

# ОСНОВЫ проектирования прочности деформируемых конструкций



Т. Г. Караченцева

**ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ  
ДЕФОРМИРУЕМЫХ КОНСТРУКЦИЙ  
(Сопротивление материалов)**

Учебник

Электронное текстовое издание

Санкт-Петербург  
Научные технологии  
2026

© Караченцева Т. Г., 2026  
© Караченцева Е. А., 2026  
ISBN 978-5-00271-108-6

УДК 539.3/6  
ББК 30.121  
К21

Рецензенты:

*Д. Л. Мерсон* – д.ф.-м.н., профессор, директор научно-исследовательского института прогрессивных технологий ТГУ;  
*Р. А. Турусов* – д.ф.-м.н., профессор кафедры сопротивления материалов МГСУ, заслуженный профессор МФТИ

К21 Караченцева Т. Г. Основы проектирования прочности деформируемых конструкций (Сопротивление материалов) [Электронный ресурс]: учебник / Т. Г. Караченцева. – СПб.: Научное издание, 2026. – 65 с. – URL: <https://publishing.intelgr.com/archive/Osnovi-proektirovaniya-prochnosti-deformiruemikh-konstruktsii.pdf>.

ISBN 978-5-00271-108-6

Учебник дисциплины «Сопротивление материалов» содержит объяснительные принципы установления параметров деформирования элементов нагруженных конструкций и деформации взаимосвязанных макрообъемов их материалов с целью обеспечения прочности проектируемых систем. Принципиально новое построение систематизированного содержания учебника от общего к частному способствовало уточнению понятий и уменьшению объема учебного издания до 65 страниц. Каждая глава предваряется страницей обобщения учебного материала предыдущих глав и страницей аннотаций Тем следующей главы. Текст каждой Темы расположен целиком на развороте двух страниц и не содержит ссылок на предыдущие Темы. Страницы информационно емких текстов Тем сопровождается видеоряд схем образов деформирования твердых тел и напряженности их среды. Учебник предназначен студентам высших и средних технических учебных заведений и инженерам, решающим задачи оценки прочности несущих систем.

Учебное издание

**Караченцева** Тамара Григорьевна

Основы проектирования прочности деформируемых конструкций  
(Сопротивление материалов)

Учебник

Электронное текстовое издание

Публикуется из оригинал-макета, подготовленного автором

Подписано к использованию 17.03.2026.  
Объем издания – 21,8 Мб.

Издательство «Научное издание»  
ООО «Корпорация «Интел Групп»  
<https://publishing.intelgr.com>  
E-mail: [publishing@intelgr.com](mailto:publishing@intelgr.com)  
Тел.: +7 (812) 945-50-63  
Интернет-магазин издательства  
<https://shop.intelgr.com/>

ISBN 978-5-00271-108-6



9 785002 711086 >

ISBN 978-5-00271-108-6

© Караченцева Т. Г., 2026  
© Караченцева Е. А., 2026

Сопротивление материалов представляет азбуку и грамматику расчётов на прочность. Это – введение в высокое общество прикладных наук прочностного цикла, дающих углублённую проработку вопросов, связанных с конкретными техническими направлениями.

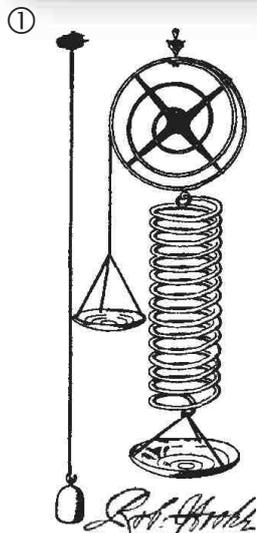
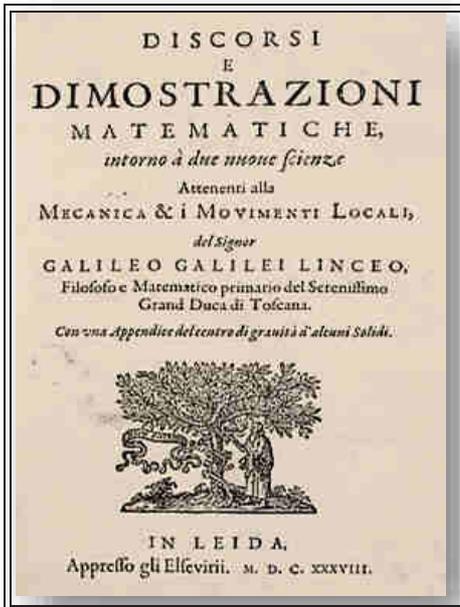
В. И. Феодосьев. «Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов»

## Оглавление

Предисловие. Об истоках науки о прочности и авторах учебников XX века	4
Введение. Основные понятия и методы оценки прочности несущих систем	6
Глава I. Деформированный объект ( $DO$ ) – нагруженное твёрдое тело	9
1. Представление моделей формы, состава тела и системы нагружения	10
2. Определение сил сопротивления растяжению (сжатию) материала $DO$	12
3. Смещения точек и геопараметры деформации среды $DO$ на макроуровне	14
4. Основные силовые параметры деформации. Окружность напряжений	16
5. Характеристики предельных состояний материала растягиваемых тел	18
Глава II. Определение параметров упруго деформируемых стержней	21
6. Представление соотношений смещений выражает напряжения изгиба	22
7. Определение геопараметров и напряжений сдвига при кручении	24
8. Изменение параметров изгиба по длине тела. Изгиб с кручением	26
9. Сжатый прямой стержень. Устойчивость исходной формы равновесия	30
10. Кручение тонкостенных стержней замкнутого и открытого профилей	32
Глава III. Объяснительные принципы силовой оценки прочности	35
11. Представление силовых параметров наиболее напряжённых мест $DO$	36
12. Расчёт напряжений в направлении наибольших растяжения и сдвига	38
13. Оценка прочности по критерию предельной напряжённости материала	40
14. Критерии выносливости повторно переменной деформации материала	42
Глава IV. Энергетические методы определения параметров $DO$	45
15. Основные принципы выражения параметров энергетическим методом	46
16. Энергетический метод определения смещений точек нагруженных тел	50
17. Методы расчёта сил, неопределимых только из уравнений равновесия	53
18. Оценка устойчивости. Энергетический метод выявления критических сил	60
Схема учёта динамики воздействий: сил инерции, удара, колебаний	64
Принятые обозначения	65

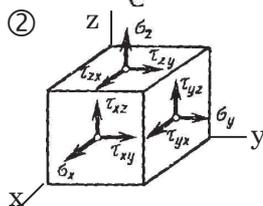
## Предисловие

В те времена, когда мысли о движении нашей планеты ещё считались крамольными, «еретик» Галилео Галилей был сослан на свою виллу в Арчетри. Лишённый возможности наблюдать движение небесных тел, Галилей обратился к телам земным. В 1638 году рукопись книги великого Галилео Галилея «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых наук, относящихся к механике и местному движению» была тайно переправлена в Лейден. С Бесед о «местном движении» началось развитие учения обеспечения прочности нагруженных твёрдых тел. Под действием нагрузки элементы конструкций *деформируются*, т. е. изменяют размеры и силы связи с сопряжёнными элементами. *Растяжение, сдвиг* – два рода *деформации* (от лат. deformation – *искажение*) состояния материала  $D0$ , выражаемой изменениями размеров макрообъёмов и напряжённостью сил сопротивления.



Роберт Гук (1635 – 1703), создавая регулятор точного хода часов, испытывал (1) проволоку и пружины на *растяжение-«разрежение»* и *сжатие-«уплотнение»*. Великий учёный установил, что изменение размера элемента конструкции пропорционально нагрузке, и опубликовал фундаментальную закономерность (справедливую до определённого уровня воздействия): «*Ut tensio sic vis*» (Каково *удлинение*, такова и сила). В книге «Лекции о восстановительной способности или об упругости» Гук писал: внутренние силы, характеризующие способность материала восстанавливать первоначальное состояние, всегда пропорциональны той мере, на которую оно выведено из этого состояния.

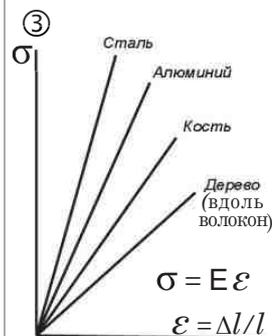
Огюстен Коши (1789 – 1857) первым ввёл понятие напряжения внутренних сил, описывая его как меру давления «кусочков» материала элемента друг на друга. Проекция вектора напряжения  $\mathbf{S}$  на нормаль к сечению тела – напряжение *растяжения*  $\sigma$ , проекция  $\mathbf{S}$  на плоскость сечения – напряжение *сдвига*  $\tau$  (2).



Модель пространства материала в границах  $D0$  (*деформируемый объект*) служит совокупность совместно *деформируемых* макро (греч. *μακρός* – большой) объёмов  $M$ -точек, которые много больше размеров микрочастиц структуры материала, но значительно меньше размеров  $D0$  в целом. Модель упругой *деформации* материала:  $\mathbf{S} = \zeta \mathbf{e}$  выражает пропорциональность напряжений  $\mathbf{S}$  сопротивления связей  $M$ -точек сплошной среды *геометрическим* параметрам  $\mathbf{e}$  макроединиц ( $\epsilon$  – *удлинение растяжения* (3),  $\gamma$  – *угол сдвига*),  $\zeta$  – это характеристика *деформации* материала ( $E$  – при *растяжении*,  $G$  – *сдвиге*).

В ошеломляющем разнообразии и многомерности природы все существа и предметы объединяет прочность как способность сохранения целостности и функционального соответствия на отведённое время-ресурс путём обустройства особых сред сопротивления росту повреждений *деформируемого* материала.

Владимир Иванович Даль (1801 – 1872) в толкование слова прочность: «впрок», «про запас» вкладывал смысл надёжности изделия «годного напредки».



*Растяжение.* Модель пропорциональности макропараметров.

Методология определения параметров *деформирования* типовых элементов конструкций и *деформации* их материалов с целью оценки прочности  $D0$  представляет содержание учебной дисциплины «Сопротивление материалов».

## Авторы классических учебников «Сопротивление материалов» двадцатого века

Степан Прокофьевич Тимошенко (1878 – 1972) в 1911 году опубликовал учебник «Сопротивление материалов», который издавался в течении всего двадцатого века на многих языках мира. Плодотворная научная деятельность Тимошенко, посвящённая расчётам несущих систем на прочность, была тесно связана с преподаванием учебных дисциплин механики деформируемого твёрдого тела. Яркий педагогический талант Степана Прокофьевича Тимошенко способствовал созданию классических учебников, на которых воспитаны многие поколения инженеров. Ему принадлежит монография «История сопротивления материалов с краткими сведениями из истории теорий упругости маши и сооружений». После революции 1917 года С.П. Тимошенко покинул Россию, с 1922 года он жил в США. На склоне лет Степан Прокофьевич писал: «Теперь, через сорок лет, обдумывая причину наших достижений в Америке, я прихожу к заключению, что немалую роль в этом деле сыграло образование, которое нам дали русские высшие инженерные школы.»



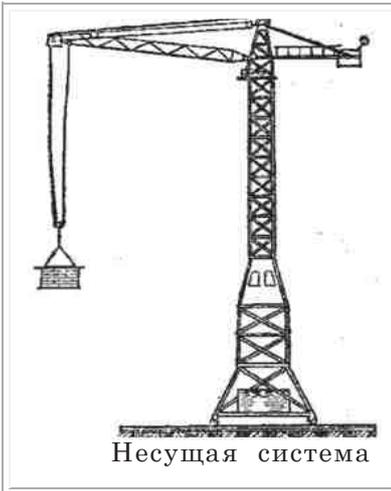
Всеволод Иванович Феодосьев (1916 – 1991) в 1935 году поступил на факультет «Приборостроение» московского механико-машиностроительного института им. Н.Э. Баумана. В 1941 он стал кандидатом технических наук, в 1945 году Феодосьев защитил докторскую диссертацию на тему: Гибкие оболочки в машиностроении. Работу профессора кафедры «Сопротивление материалов» МВТУ Всеволод Иванович совмещал с работой в конструкторском бюро, которым руководил академик Королёв, директором НИИ был академик Келдыш. С 1950 Феодосьев руководил кафедрой «Баллистические ракеты дальнего действия». Студентам этой специальности он читал лекции по сопротивлению материалов. В 1950 году были изданы «Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов». Учебник В.И. Феодосьева «Сопротивление материалов», впервые опубликованный в 1960 году, выдержал десятки изданий у нас и за рубежом. В 1969 году учебник «Сопротивление материалов» был дополнен книгой Всеволода Ивановича Феодосьева «Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов».



С именем Юрия Николаевича Работнова (1914 – 1985) связаны фундаментальные исследования во многих областях механики деформируемого тела. В.Д. Ключников в предисловии к книге Ю.Н. Работнова «Введение в механику разрушения» писал: «Юрий Николаевич Работнов был не только крупнейшим учёным, но и чутким педагогом, блестящим лектором, воспитавшим в стенах Московского университета целую плеяду учеников. Его перу принадлежат около двухсот научных работ, среди которых особое место занимают фундаментальные монографии «Ползучесть элементов конструкций» (1966), «Элементы наследственной механики твёрдых тел» (1977), учебники «Сопротивление материалов» (1966) и «Механика деформируемого твёрдого тела» (1979)». Юрий Николаевич большое внимание уделял языку научного сообщения: «Понятие механико-математической культуры трудно поддается точному определению, однако, ее отсутствие для специалиста всегда очевидно».



Содержание рассматриваемого издания: «Сопротивление материалов» опирается на выдающиеся учебники Феодосьева В.И., Работнова Ю.Н. и опорные схемы, опубликованные в репозитории ТГУ, в книге: Т.Г. Караченцева «Самостоятельная работа студентов по дисциплине сопротивление материалов».

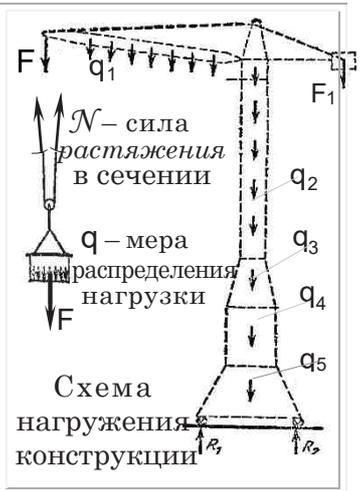


## Введение

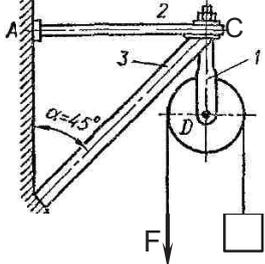
### Основополагающие понятия и методы оценки прочности деформируемого твёрдого тела

*Растяжение, изгиб, сдвиг, кручение* – четыре рода деформирования тела в целом.

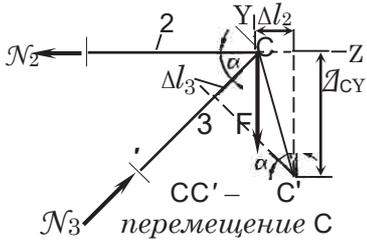
*Растяжение, сдвиг* – два рода деформации сплошной среды – неразрывно связанные макро объёмы материала в границах *DO*.



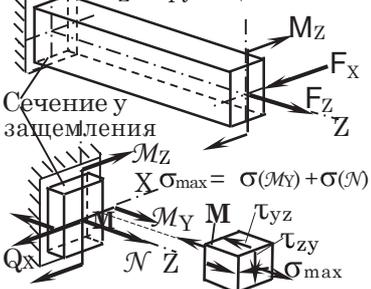
① Схема кронштейна



② Схема смещения узла С



③  $F_x$  искривляет стержень (длина  $L$ ) в плоскости  $XZ$   
 $F_y$  – растягивающая сила  
 $M_z$  – крутящий момент

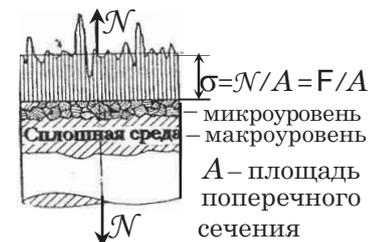


равнодействующие сил сопротивления по сечению:

$$M_y = F_x \cdot L - \text{момент изгиба,}$$

$$M_z = M_z - \text{момент кручения,}$$

$$N = F - \text{сила растяжения.}$$



И *растягиваемый* трос, и *искривляемая* весом груза стрела крана до определённого уровня нагрузки  $F_j$ , *деформируются* «линейно», то есть *перемещения* их точек пропорциональны  $F_j$ :  $\Delta_{ij} = \Lambda F_j$ ,  $\Lambda$  – *податливость*.

Воздействие  $F_j$ , осуществляемое постоянно или временно, статически или динамически, сосредоточенно или распределённо по длине тела  $l$ , площади  $A$ , объёму  $V$ , вызывает *перемещения*  $\Delta_{ij}$ : поступательные вдоль центральной оси тела  $Z$  –  $\Delta_z(w)$  или осей  $X$ ,  $Y$  поперечного ( $\perp$  оси  $Z$ )  $M$ -сечения –  $\Delta_y(v)$ ,  $\Delta_x(u)$  и вращательные:  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  и  $\theta_z$  – углы *поворота*  $M$ -сечения относительно взаимно перпендикулярных осей  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ .

Представление деформирования тел под действием нагрузки  
 Вообразим *деформирование* стержней кронштейна (①) в соответствии с закреплением, мысленно покачивая их силой  $F$ , приложенной в узле  $C$ . Изобразим схему узла  $C$  (②), показывая полагаемые изменения длин  $\Delta l_2$  и  $\Delta l_3$  стержней 2 и 3.  $N_2$  – сила *растяжения*,  $N_3$  – сила *сжатия*. Дуги малых  $\Delta$  заменяем прямыми (масштаб малых  $\Delta$  на схемах больше масштаба длин). Малое изменение угла наклона подкоса  $\alpha$  не учитываем.

Метод сечения тел *DO* выявляет напряжения сил сопротивления  
 Рассекаем тело в месте предполагаемой наибольшей *деформации*. Оставляем исследуемую часть элементов системы с нагрузкой (③). Заменяем силы рассечённого взаимодействия  $M$ -точек материала *DO* равнодействующими сил сопротивления, приведённых к центру тяжести сечения:  $N$  – сила *растяжения* (*сжатия*);  $M_y$  – момент *изгиба*;  $Q_x$  – сила *сдвига*;  $M_z$  – момент *кручения*, определяемые из уравнений равновесия сил. Мера распределения сил по сечению есть напряжение  $S$  сил сопротивления. Проекция  $S$  на нормаль к сечению – напряжение сил *растяжения*  $\sigma$ ,  $\tau$  – напряжение *сдвига*, касательно сечения *DO*.

Вычисляем параметры *деформирования*, моделируя материальное пространство в границах *DO* сплошной однородной изотропной средой, представляемой совокупностью неразрывно связанных макрообъёмов. Среда считается сплошной, если любой её малый объём имеет массу. Если равные макрообъёмы материала имеют одинаковые свойства, то его называют однородным (чугун, бетон принимаются однородными). Материал, свойства которого зависят от направления исследования, называется анизотропным. Древесина, например, анизотропна, её предел прочности *сжатия* вдоль волокон гораздо выше, чем поперек.

Плотина воспринимает собственный вес и давление удерживаемой ею воды и передаёт эти силы на основание. Стальные фермы моста воспринимают от колёс через рельсы вес поезда и передают его на каменные опоры; которые в свою очередь передают нагрузку на грунт основания. Давление пара в цилиндре паровой машины передаётся на шток поршня. Говоря, что к той или другой части конструкции приложена сила, мы понимаем под этим передачу давления (движения) на рассматриваемую часть от окружающей среды или от соседних частей системы. Н.М. Беляев. «Сопротивление материалов»

Выделим из заданной системы исследуемый элемент, представим схему его деформирования, выявим характеристики материала. Определим величину геометрических и силовых параметров деформирования элемента расчёта в целом и деформации его материала. Оцениваем прочность нагруженного твёрдого тела, сравнивая вычисленный параметр  $DO$  с допускаемой величиной.

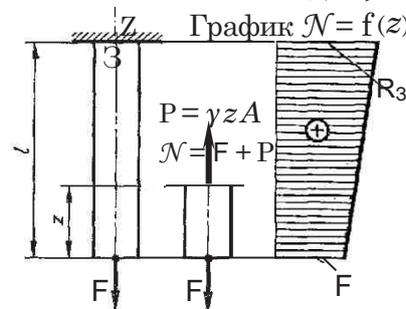
$S_{\text{большее}} \leq [S]$  – условие прочности по допускаемым напряжениям  
 Вообразим деформирование элемента расчёта под действием нагрузки, представим картину-схему изменений его геометрии. Рассечём тело в месте предполагаемой наибольшей деформации, Выразим равнодействующие внутренних сил ( $N$  на схеме ①,  $Q$  – ②). Вычислим наибольшие напряжения и сравним их с допустимым  $[S] = S_{\text{ПРЕД}} / n_3$ .  $S_{\text{ПРЕД}}$  – предельное напряжение материала  $DO$ ;  $n_3$  – коэффициент запаса прочности, зависящий от ответственности детали, типа нагрузки, культуры производства и эксплуатации.

$\Delta \leq [\Delta]$  – условие ограничения изменений размеров тела в целом  
 Чтобы прогибы  $v$  излишне податливых валов редуктора (③) не нарушали работу передачи и углы поворота  $\theta_x$  вала в местах его опор не могли вывести из строя подшипники, величина перемещений  $\Delta$  точек валов должна соответствовать условию ограничения податливости  $DO$ :  $\Delta \leq [\Delta]$ , то есть перемещение не должно превышать допускаемый уровень  $[\Delta]$ , устанавливаемый нормами отрасли, исходя из условий работы подобных систем. Например, прогиб шпинделя станка 0,1 мм недопустим, если при этом не обеспечивается точность обработки детали, а наибольший прогиб  $f$  пролёта моста, равный десяти сантиметрам, допускается, так как он много меньше десятков метров длины пролёта моста.

$F \leq F_{\text{кр}} / n_{\text{ус}}$  – условие устойчивости исходной конфигурации  $DO$   
 Полагаем, что первоначальная форма элемента расчёта устойчива, если нагрузка  $F$  меньше допускаемого значения  $[F] = F_{\text{кр}} / n_{\text{ус}}$ .  $F_{\text{кр}}$  – критическая нагрузка, при которой любое малое возмущение  $\delta$  (внецентренность сил, порыв ветра) вызывает переход к новой конфигурации;  $n_{\text{ус}}$  – коэффициент запаса устойчивости. Явление потери устойчивости исходной формы равновесия характеризует деформирование, не соответствующее оказанному воздействию. Например, груз сжимает прямой стержень, а он искривляется (④).

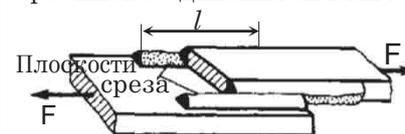
$K < K_c$  – условие трещиностойкости деформируемого материала  
 Острые трещины есть инструмент, способный малой силой рвать прочнейшие связи частиц материала. Трещина не продвигается, если  $K$ -параметр, определяющий напряжённость необратимо деформируемой локальной области (НЛО) у вершины трещины меньше  $K_c$  – характеристика критической вязкости материала.

Растяжение стержня от силы  $F$  и собственного веса  $P(z) = \gamma Az$  ①



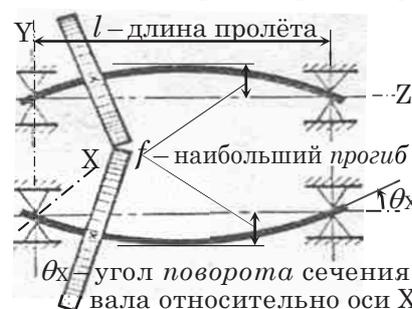
$N(z) = F + P(z)$  – сила растяжения  
 $\sigma_{\text{max}} = N_{\text{max}} / A = F / A + \gamma l \leq [\sigma]$

Срез швов соединения силами  $F$  ②



$\tau_{\text{max}} = Q / A = \frac{1}{2} F / 0,7hl \leq [\tau]$   
 $Q = \frac{1}{2} F$  – равнодействующая сил сдвига,  $h$  – высота шва.

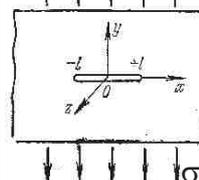
Схема нарушения зацепления передачи редуктора ③



Явление потери устойчивости прямолинейной формы равновесия ④

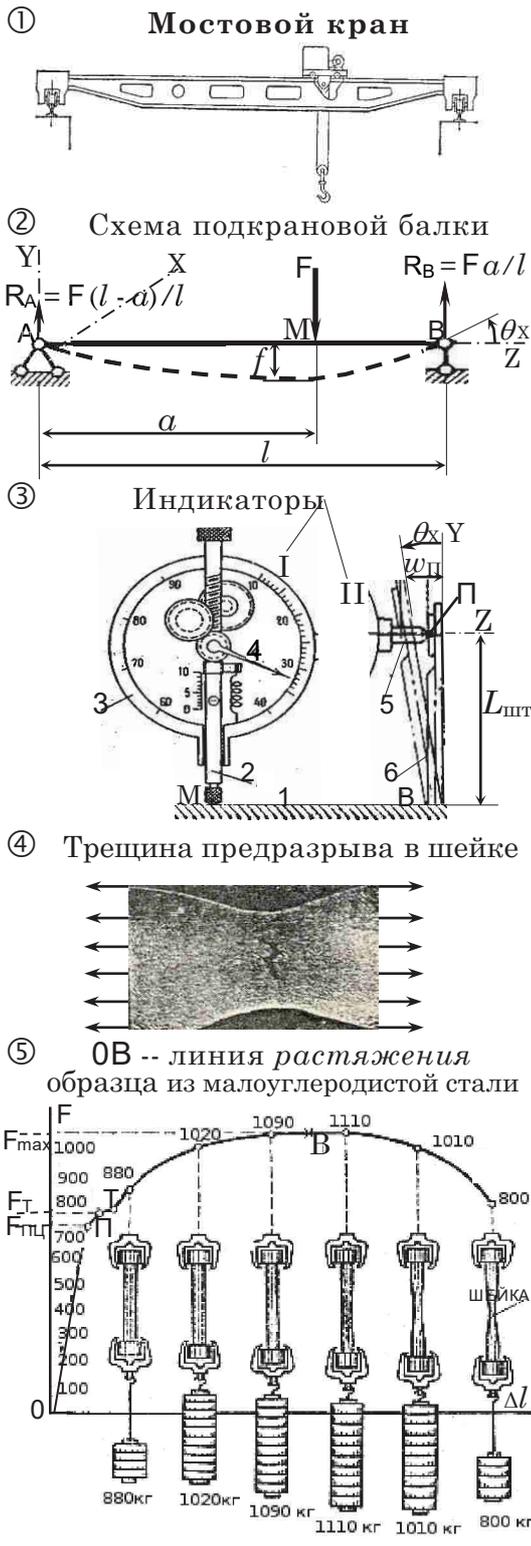


Модель трещины – разрез, способный распространяться,  $l$  – полудлина.



Трещина отрыва – тип I расхождения её поверхностей друг от друга при растяжении.

Следует измерять то, что измеримо, и делать измеримым то, что таковым не является.  
Галилео Галилей



Допустим, что требуется определить наибольшие параметры *деформирования* подкрановой балки пролётом  $l$  (①), моделью которой является шарнирно закреплённый стержень (②). Стержень АВ нагружен в плоскости ZY силой  $F$ , которая схематизирует вес крана и груза, расположенных в месте М на расстоянии  $a$  от опоры А.  $R_A$  и  $R_B$  – реакций опор. Представив *искривление* (пунктир) стержня АВ, полагаем, что  $u_M$  – *прогиб* в месте М,  $\parallel$  оси Y,  $\theta_{XB}$  – угол *поворота* опоры В относительно оси X есть его наибольшее *перемещение*.

Для измерения перемещений применяются индикаторы. При *изгибе* стержня штифт 2 (③) индикатора 1, прижатый в месте М к поверхности балки, *перемещается* и стрелка 4 отклоняется на соответствующее  $u_M$  число делений шкалы 3. Для измерения угла наклона касательной линии *прогибов* с осью Z в точке В крепится штанга 6, в пятку П которой упирается штифт 5 индикатора II, измеряющего *смещение* точки П вдоль оси Z –  $w_P$ .  $w_P/L_{шт} = \tan \theta_X \approx \theta_X$  – угол *поворота* относительно оси X М-сечения стержня 6 в месте опоры В.

Характеристики *деформации* материалов *растягиваемых* тел. Первые правила обязательных испытаний железа в России опубликованы в Регламенте Адмиралтейства при Петре I. Для оценки прочности *деформируемых* твёрдых тел нужны характеристики *деформации* материала, устанавливаемые *деформированием* образцов на испытательных стендах. Основной вид испытаний серий стандартных образцов есть *растяжение* под действием постепенного изменения сил  $F$ , сопровождаемое построением линии *растяжения*  $F = f(\Delta l)$ . Рассмотрим участки линии  $F = f(\Delta l)$ ,  $\Delta l$  – изменение базовой длины  $l_0$  образца под действием растягивающих сил  $F$  (⑤). Прямая ОП от начала координат 0 до точки П ( $\Delta l_{Пц}$ ,  $F_{Пц}$ ) – линия изменения длин:  $\Delta l = \Delta F$  пропорционально нагрузке  $F$ ,  $\Delta$  – постоянная *податливости*  $DO$  в целом. Линия упругого *растяжения* от силы  $F_{Пц}$  – уже не прямая. На уровне почти постоянной силы  $F_T$  материал «течёт», массово переходя в пластическое (необратимое) состояние. ТВ – кривая  $F = C_{пл} \Delta l$  равномерного *растяжения*.  $C_{пл} = 1/\Delta_{пл}$  – параметр сопротивляемости материала пластическому *растяжению* силами, возрастающими от  $F_T$  до  $F_{max}$ . Ордината 0В =  $F_{max}$  высшей точки В линии  $F = f(\Delta l)$  равна предельной нагрузке *растяжения* тела в целом. При дальнейшем увеличении нагрузки  $F > F_{max}$  происходит потеря несущей способности

образца. *Растяжение* локализуется в структурно слабом месте материала, появляется шейка (④) – местное *сужение*, в шейке развиваются трещины и самая способная из них разрывает образец. Затем части образца соединяют, измеряют *растянутую* длину базы  $l_p$  и  $d_{min}$  – наименьший размер поперечного ( $\perp$  оси образца Z) сечения и устанавливают параметры остаточного *деформирования*:  $\Delta l_{ост} = l_p - l_0$  – изменение длины базы измерения,  $\Delta A_{ост} = A_0 - A_{min}$  – наибольшее изменение площади. По линии *растяжения* образца  $F = C \Delta l$  (⑤) строят линию *растяжения* материала в координатах  $\epsilon = \Delta l/l_0$ ,  $\sigma = F/A_0$ . На стадии упругости определяют параметры *растяжения* материала:  $E = \sigma/\epsilon$  – характеристика сил сопротивления  $DO$  и  $\nu = |\epsilon_{поп}/\epsilon|$  – модуль поперечной *деформации* материала.

# Глава I. Деформирование тела и деформация материала

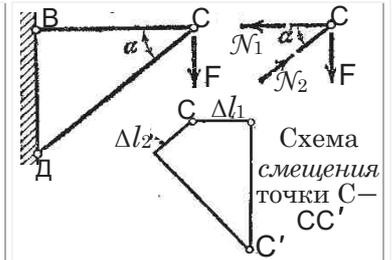
## 1. Представление моделей формы, состава тела и системы нагружения

Решение задачи оценки прочности элемента системы начинается с осмысления его взаимодействия с сопряжёнными элементами, с замены связей, нарушенных при выделении тела, реакциями и схематизации: формы (стержень, тонкостенное тело, массив); класса нагружения (силовое, температурное, агрессивные среды), характера воздействия (статическое, переменное, динамическое), по способу приложения (сосредоточенно, распределённо). Деформирование тела в целом представляем совместной деформацией М-точек или волокон, или М-сечений сплошной среды, моделирующей материал.

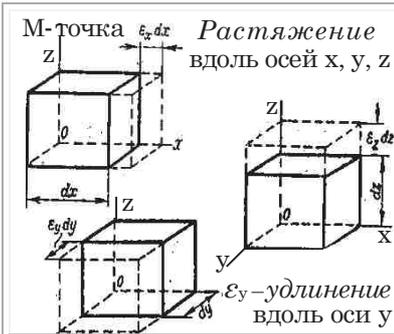


## 2. Определение внутренних сил материала ДО, вызываемых растяжением

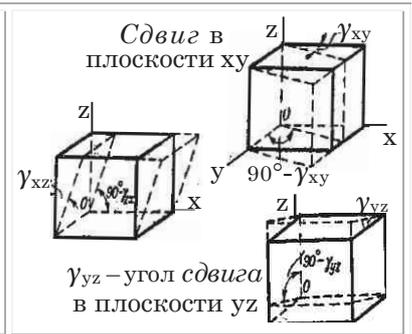
Представим деформирование кронштейна ВСД под действием силы  $F$ . Полагаем, что длина стержня  $BC$  — 1 увеличивается на  $\Delta l_1$ , длина  $DC$  — 2 уменьшается на  $\Delta l_2$  и их узел  $C$  перемещается в точку  $C'$ . Методом рассечения стержней 1, 2 выделим узел  $C$ .  $N_1, N_2$  — равнодействующие сил взаимодействия с отсечёнными частями. Силу растяжения  $N_1$  направляем от сечения, силу сжатия  $N_2$  — к сечению. Из уравнений:  $N_2 - N_1 \cos \alpha = 0, N_2 \sin \alpha - F = 0$  выразим  $N_1 = 2F/\sin 2\alpha, N_2 = F/\sin \alpha$ .



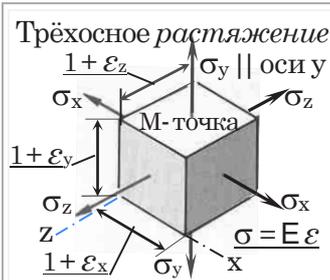
## 3. Смещения точек и геопараметры деформации среды ДО на макроуровне



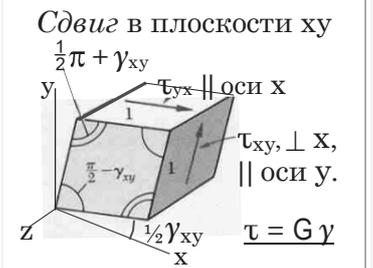
$u, v, w$  — перемещения точек вдоль  $x, y, z$ .  
 $e$  — геометрический параметр упругой деформации макрообъёма материала.  
 $\epsilon = \Delta l/l$  — удлинение есть мера изменения длины  $l$  отрезка, растянутого на  $\Delta l, \epsilon_{\perp} = \Delta b/b$  — сужение отрезка —  $b, \perp$ -го отрезку —  $l$ .  
 $\gamma$  — угол сдвига отрезков, составляющих прямой угол ( $\gamma - \oplus$ , если  $\perp$  угол стал острым).



## 4. Основные силовые параметры деформации. Окружность напряжений.

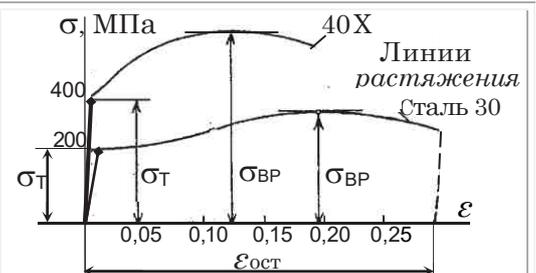


$s$  — напряжение сил сопротивления М-точек, вызываемое деформацией материала, есть мера распределения внутренних сил по сечению ДО.  
 $\sigma$  — проекция вектора  $s$  на нормаль к сечению обозначает напряжение растянутых связей.  
 $\tau$  — проекция  $s$  на плоскость сечения означает напряжение сил связи макроединиц при сдвиге.



## 5. Характеристики предельных состояний растягиваемого материала

Силовые характеристики материала при растяжении:  
 $\sigma_{пц}$  — напряжение предела пропорциональности:  $\sigma = E \epsilon$ ;  
 $\sigma_T$  — предел текучести,  $\sigma_T = \sigma_{0,2}$ , при условии  $\epsilon_{пл} = 0,2\%$ .  
 $\sigma_{вР} = F_B/A$  — высшее напряжение равномерного растяжения,  
 $\sigma_{пчс}$  — предел прочности при сжатии материала образца.  
Геопараметры остаточного растяжения (после разрыва):  
 $\epsilon_{ост} = (l_{ост} - l_0)/l_0$  — удлинение,  $\psi = (A - A_{ост \min})/A$  — сужение.



Аппарата для прогноза любых свойств в любых структурах при любых условиях нет и не будет. В столь многомерной многосвязной системе нельзя надеяться найти универсальное уравнение, предсказывающее процессы деформации вплоть до микросвойств. Всякая физическая модель – результат ранжирования и компромиссного отбора наименьшего числа факторов, при котором ещё сохраняются главнейшие черты явления.

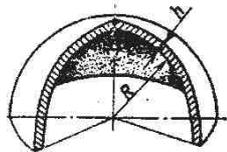
М.А. Штремель. Прочность сплавов

## 1. Представление моделей формы, состава тела и системы нагружения

<p>Схемы несущих систем</p>	<p>Под действием нагрузки <math>F</math> элементы кинематически неизменяемой системы <i>деформируются</i>. Стержень ВС (①) <i>искривляется</i> (пунктир), стойки АВ и DC <i>сжимаются</i>; у рамы (②) <i>изгибаются</i> и ригель, и стойки (считаем, что углы В, С остаются прямыми). Выделяя предмет оценки прочности, заменяем реакциями связи с сопряжёнными элементами и вычисляем их из уравнений равновесия. Если неизвестных сил больше уравнений равновесия, добавляем уравнения, исходя из соотношений <i>смещений</i>. Кинематически изменяемая система (③, ④), если даже у неё есть необходимое для закрепления число связей (три связи на плоскости, шесть – в пространстве) при нагружении не деформируется, она просто катится (③) или складывается как «карточный домик» (④).</p>	<p>Кинематически изменяемые системы</p>
-----------------------------	--	---

Классификация формы тела: стержень, тонкостенное тело (оболочка, пластина), массив

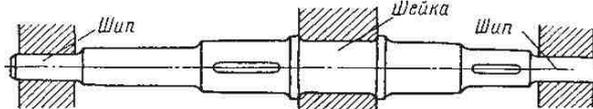
Тонкостенное тело (толщина  $h$  стенки много меньше других размеров),



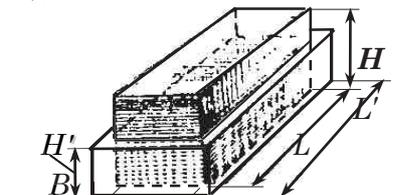
ограниченное криволинейной поверхностью, относится к классу оболочек. Пластина – плоское тонкостенное тело.



Стержнем называется тело, длина  $L$  которого значительно больше размеров  $B, H$  поперечного (перпендикулярного оси  $Z$ ) сечения. Ось – стержень, несущий вращающиеся детали, а вращающаяся ось – вал.



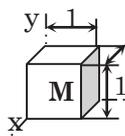
Массив



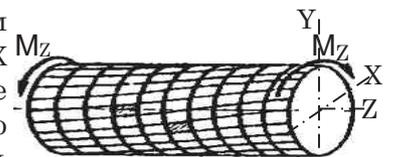
Размеры массива  $L, B, H$  соизмеримы.  $L', B', H'$  – размеры после нагружения.

Деформирование тела представляет совместная деформация макрообъемов сплошной среды

Вообразив *деформацию* сплошной среды, которая схематизирует материал нагруженного тела, определяем наиболее *деформированное* место и в нём наиболее напряжённую М-точку (М подчёркивает материальность макроединицы  $DO$ ). Размеры М-точки много больше размеров микрочастиц и значительно меньше размеров тела (они бесконечно малы при вычислении параметров *деформации* с применением аппарата бесконечно малых).



Представим *изгиб* стержня под действием моментов  $M_x$  относительно главной оси  $X$  сечения: нижний слой волокон наиболее *растянут* вдоль оси  $Z$ , волокна верхнего слоя наиболее *сжаты*, а волокна 0-0 при



*искривлении* в плоскости  $ZY$  не изменяют длину, поэтому их называют нейтральными. Полагаем, что М-сечения, схематизирующие совокупность М-точек, распределённых по поперечному сечению, *поворачиваясь* на угол  $\theta_x$  или  $\theta_y$  в плоскости  $ZY$  или  $ZX$ , остаются плоскими и перпендикулярными центральной оси тела  $Z$ . Под действием крутящих моментов  $M_z$  волокна *сдвигаются*, М-сечения, *поворачиваясь* вокруг  $Z$  на  $\theta_z$ , *искривляются* (круглые сечения – исключение, они не искажаются).

... при формулировке задач всегда следует иметь в виду реальное осуществление заданной нагрузки и быть крайне осторожным в упрощении силовых схем. Только в том случае, когда сила является результатом непосредственного соприкосновения двух тел и площадка контакта весьма мала по сравнению с размерами тел, мы не будем вводить в рассмотрение величины этой площадки, говоря, что на тело действует сосредоточенная сила, равная равнодействующей давлений на площадке контакта. Делая такое упрощение, мы можем достаточно точно определить деформацию в частях тела, удалённых от площадки контакта.

Ю.Н. Работнов

### Основные положения схематизации системы воздействия на исследуемое тело

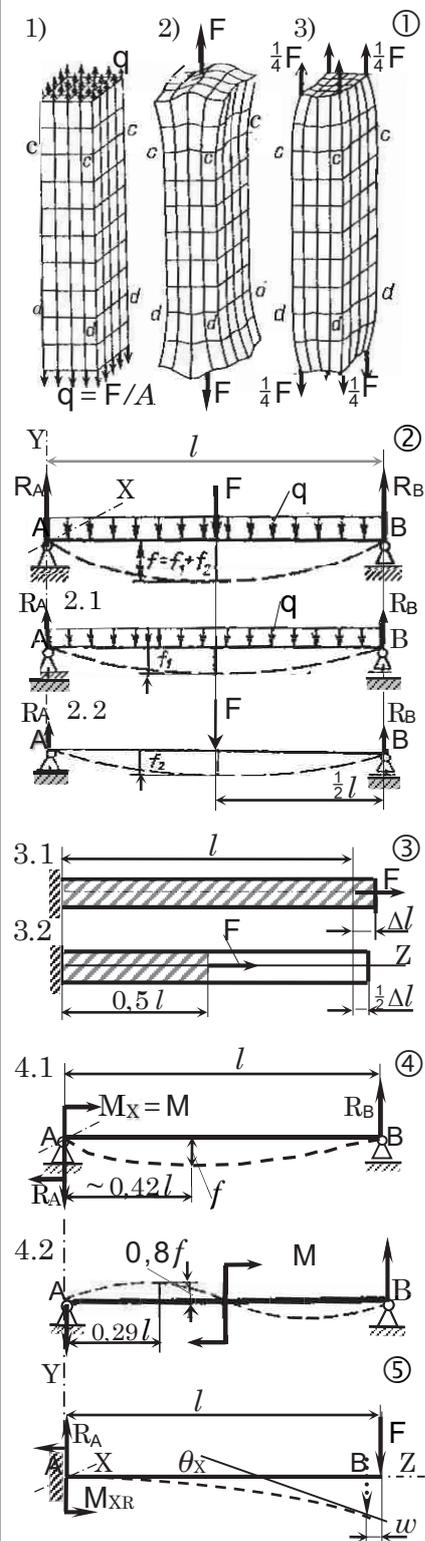
Принцип невлияния способа приложения эквивалентных нагрузок Барре де Сен-Венан (1797 – 1886) в работах по теории *изгиба* и *кручения* тел обосновал «принцип равнозначности статически эквивалентных систем воздействия»: если силы, действующие на небольшую часть поверхности твёрдого тела, заменить статически эквивалентной системой сил, приложенной на этой же поверхности, то перераспределение нагрузки вызовет локальные изменения параметров *деформации*, а на расстояниях, превышающих больший размер поверхности нагружения, изменения пренебрежимо малы.

На рисунке ① одинаковых стержней, *растянутых* эквивалентной силой  $F$  нагрузкой, приложенной по торцам площадью  $A$  различными способами: 1) равномерное распределение интенсивностью  $q$ ,  $F = qA$ ; 2) сосредоточенная сила  $F$  в центре; 3) четыре силы по  $\frac{1}{4} F$ . Можно заметить разное по торцам стержня *удлинение* волокон одинаково на участке  $cd$ , достаточно удалённом от поверхностей воздействия.

Принцип независимости действия сил от порядка их приложения Для элементов несущих систем, *перемещения* точек  $Z$  которых пропорциональны обобщённой силе  $F$ :  $Z = \Lambda F$ , применим принцип независимости механического эффекта воздействия от порядка приложения каждого из факторов нагружения в отдельности. Принцип позволяет выражать параметры *деформации* от группы сил как сумму параметров от каждой силы в отдельности. Например, наибольший *прогиб*  $f$  посередине симметрично нагруженной балки пролётом  $l$  (②) равен сумме наибольших *прогибов* от равномерно распределённых сил интенсивностью  $q$ :  $f_1$  (2.1) и  $f_2$  (2.2) от силы  $F$ , приложенной посередине шарнирно закреплённого стержня

Недопустимость изменения способа и места приложения нагрузки Если распределённую по пролёту  $l$  нагрузку интенсивностью  $q$  (②) заменить силой  $ql$  посередине балки, то её *прогиб*  $f$  увеличится в 1,6 раза. При переносе силы  $F$  по линии действия с торца (3.1) консоли (стержень, закреплённый одним концом) на её середину (3.2) изменение  $\Delta l$  длины  $l$  уменьшается вдвое (участки *растяжения* стержня заштрихованы). В случае переноса пары сил  $M$  с опоры  $A$  балки (4.1) на середину (4.2) *прогиб*  $f$  уменьшается в восемь раз.

Изменения положения сил вследствие деформации не учитываются При выражении моментов внешних сил малое изменение длин  $l$  от места их приложения, вызываемое *деформированием* тела, в уравнениях равновесия не учитывается. Например, уравнения суммы моментов относительно точки  $A$  балки  $AB$  (②) и консоли  $AB$  (⑤) имеют вид:  $\sum M_X = R_B l - F \cdot \frac{1}{2} l - ql \cdot \frac{1}{2} l = 0$  и  $\sum M_X = M_{XR} - Fl = 0$ .



## 2. Определение внутренних сил материала, вызываемых растяжением DO

Под действием нагрузки происходит *деформирование: растяжение (сжатие), изгиб, сдвиг, кручение* элементов конструкций. Рассмотрим силы *растяжения*  $\mathcal{N}$  статически нагруженных твёрдых тел.

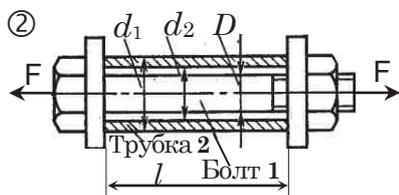
Параметры *растяжения*: удлинение  $\varepsilon = \Delta l/l$ ; напряжение  $\sigma = \mathcal{N}/A$ ;  $\sigma = E \varepsilon$ ;  $\mathcal{N}/A = E \Delta l/l$ , изменение длины  $\Delta l = \mathcal{N}l/(EA) = \Lambda \mathcal{N}$ ,  $\Lambda = l/(EA)$  – *податливость*,  $C = 1/\Lambda$  – характеристика сопротивления DO.

### ① Схема растяжения



Силу *растяжения*  $\mathcal{N}$  направляем от сечения.

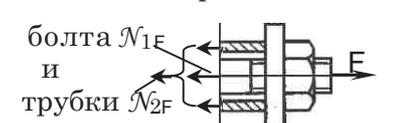
$$\sum F_z = \mathcal{N} - F = 0. \quad \mathcal{N} = F. \quad \sigma = F/A$$



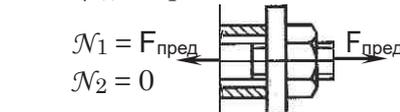
### ③ После затяжки соединения

Сила *растяжения* болта  $\mathcal{N}_{13}$  равна силе  $\mathcal{N}_{23}$  *сжатия* трубки

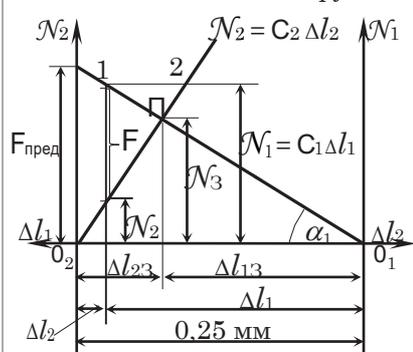
### ④ Схема сил растяжения



### ⑤ F<sub>пред</sub> – предельная сила



### ⑥ Прямые зависимостей $\mathcal{N} = C \Delta l$ болта 1 и трубки 2



Стержень (длина  $L$  значительно больше ширины  $B$ , высоты  $H$ ), жёстко закреплённый одним концом 3 (ⓐ), *растягивается* вдоль центральной оси тела  $Z$  силой  $F$ , приложенной к свободному концу  $K$ . Допущения: волокна ( $l$  – длина) *растягиваются* на  $\Delta l$ , оставаясь прямыми; М-сечения ( $\perp$  оси  $Z$ ) *сдвигаются* на  $\Delta z$  ( $w$ ), не искажаясь. Разделим стержень плоскостью I-I ( $\perp$  оси  $Z$ ) на расстоянии  $z$  от торца  $K$ ; рассечённое взаимодействие М-точек заменим равнодействующей сил *растяжения* по М-сечению:  $\mathcal{N} = F$ . Считаем, что напряжения *растяжения*  $\sigma$  равномерно распределены по площади  $A$  сечения:  $\sigma = \mathcal{N}/A$ . Напряжения пропорциональны *удлинениям*  $\varepsilon = \Delta l/l$ :  $\sigma = E \varepsilon$ .  $E$  – экспериментальная характеристика сопротивления материала *растяжению*.  $\Delta l = (\sigma/E)l = \mathcal{N}l/(EA) = \Lambda \mathcal{N}$ .  $\Lambda = l/(EA)$  – *податливость*, Рассмотрим системы стержней,  $\mathcal{N}$  – равнодействующие внутренних сил по М-сечению неопределимы только из уравнений равновесия.

**Определение параметров деформирования соединения болт-трубка**  
Соединение (ⓐ), затянутое поворотом гайки на  $\frac{1}{4}$  оборота (шаг резьбы  $h = 1$  мм), *растянуто* силами  $F$ . Болт из стали  $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $l_1 = 0,2$  м,  $d_1 = 1 \cdot 10^{-2}$  м,  $A_1 = 0,78 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>, *податливость*  $\Lambda_1 = l/(E_{ст} A_1) = 12,74 \cdot 10^{-3}$  м/МН. Трубка из меди  $E_m = 1 \cdot 10^5$  МПа,  $l_2 = 0,2$  м,  $d_2 = 1,2 \cdot 10^{-2}$  м,  $D = 2,4 \cdot 10^{-2}$  м,  $A_2 = \frac{1}{4}\pi(D^2 - d_2^2) = 3,39 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,  $\Lambda_2 = l/(E_m A_2) = 5,9 \cdot 10^{-3}$  м/МН,  $\Lambda_2 = 0,46 \Lambda_1$ . *Податливость* резьбы болта и трубки не учитывается.

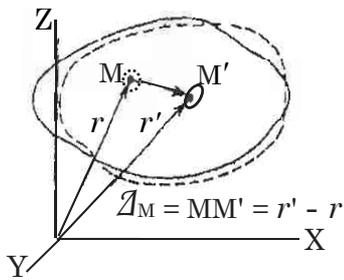
**Установление параметров растяжения от затяжки соединения**  
Затяжка на  $2,5 \cdot 10^{-4}$  м *растягивает* болт на  $\Delta l_{13} = \Lambda_1 \mathcal{N}_{13}$ , *сжимает* трубку на  $\Delta l_{23} = 0,46 \Lambda_1 \mathcal{N}_{23}$ . Рассечём соединение, оставим правую часть (ⓐ), покажем силы *растяжения* болта  $\mathcal{N}_{13}$  и *сжатия* трубки  $\mathcal{N}_{23}$  (направлена к сечению). Для раскрытия неопределённости  $\mathcal{N}_{13}$ ,  $\mathcal{N}_{23}$  из уравнения равновесия:  $\sum F_z = \mathcal{N}_{23} - \mathcal{N}_{13} = 0$  покажем уравнение совместности изменений длин болта и трубки, равных величине затяжки:  $\Lambda_1 \mathcal{N}_{13} + 0,46 \Lambda_1 \mathcal{N}_{23} = 2,5 \cdot 10^{-4}$ . Решая уравнения, вычислим  $\mathcal{N}_{13} = |\mathcal{N}_{23}| = 13,4$  кН.  $\Delta l_{13} = 0,17 \cdot 10^{-3}$  м,  $\Delta l_{23} = 0,08 \cdot 10^{-3}$  м.

**Выражение параметров растяжения деталей (ⓐ) под действием сил F**  
Из уравнения равновесия:  $F - \mathcal{N}_{1F} - \mathcal{N}_{2F} = 0$  (ⓐ) и равенства:  $\Delta l_{1F} = \Delta l_{2F}$ , выразим силы *растяжения* болта  $\mathcal{N}_{1F} = 0,68 F$  и трубки  $\mathcal{N}_{2F} = 0,32 F$ .

**Графическое определение параметров деформирования соединения**  
От начала  $O_2$  (ⓐ) системы координат  $\Delta l_2$ ,  $\mathcal{N}_2$  проведём прямую  $\mathcal{N}_2 = C_2 \Delta l_2$  *деформирования* трубки 2 под углом  $\alpha_2$  [ $\text{tg } \alpha_2 = \mathcal{N}_2/\Delta l_2 = C_2 = 1/\Lambda_2 = 1/(0,46 \Lambda_1) = 2,17/\Lambda_1$ ]. На расстоянии  $\frac{1}{4}h$  от  $O_2$  проведём прямую 1 *растяжения* болта  $\mathcal{N}_1 = C_1 \Delta l_1$  в левой системе осей  $\Delta l_1$ ,  $\mathcal{N}_1$ . Абсциссы точки П пересечения прямых 1, 2 равны изменениям длин  $\Delta l_{13}$  болта, трубки  $\Delta l_{23}$ , ордината точки П означает силу  $\mathcal{N}_{13} = \mathcal{N}_{23} = \mathcal{N}_3$

от затяжки соединения. При увеличении  $F$  увеличивается сила *растяжения* болта  $\mathcal{N}_1$ , уменьшая при этом силу *сжатия* трубки  $\mathcal{N}_2$ .  $F_{пред} = 19,6$  кН ( $\mathcal{N}_1 = 19,6$  кН,  $\mathcal{N}_2 = 0$ ) – предельная сила, при которой нарушается соединение (ⓐ), дальнейшее увеличение силы воспринимает только болт.



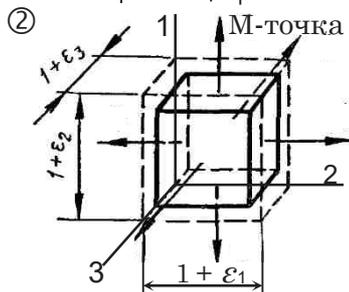
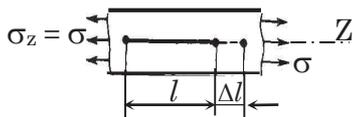


Будем рассматривать точечное преобразование евклидова пространства, в результате которого точка  $M(r)$  сопоставляется точке  $M'(r')$ . Будем говорить, что материальная точка  $M$  переместилась из точки пространства  $M$  с радиусом-вектором  $r$  в точку  $M'$  с радиусом-вектором  $r'$ , хотя для кинематической теории деформации вводить понятие материальной точки не обязательно. Положение области пространства задано, если величины  $r_i'$  заданы как функции от  $r_i \in V$ .

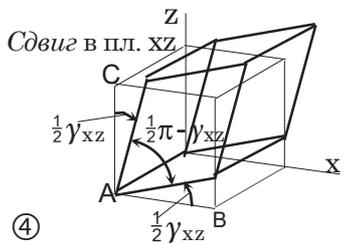
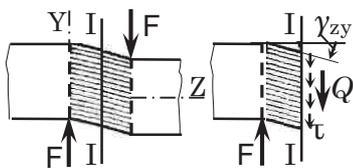
Ю.Н. Работнов «Механика деформируемого твёрдого тела»

### 3. Смещения точек и геопараметры деформации макрообъёмов среды $DO$

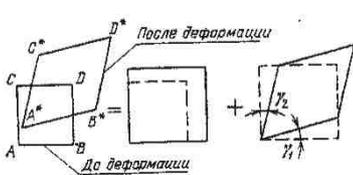
① Одноосная растяжение



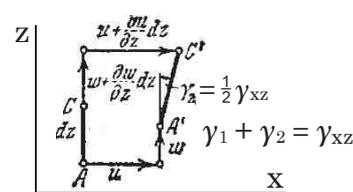
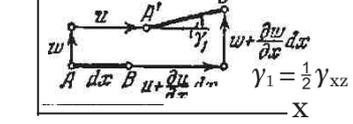
③ Сдвиг в плоскости ZY



④



⑤



Под воздействием растягивающих (сжимающих) сил вдоль оси тела  $Z$  длина  $l$  отрезка (①) увеличивается (уменьшается) на  $\Delta l = l' - l$ . Удлинение (укорочение)  $\varepsilon = \Delta l/l$  – геопараметр растяжения (сжатия). Рассматриваем малые деформации, для которых тождество:  $\varepsilon = (l' - l)/l \equiv (l' - l)/l'$  считается справедливым. Размеры отрезков  $b$  поперёк оси  $Z$  растягиваемого тела уменьшаются на  $\Delta b = b - b'$ ,  $\nu = |\varepsilon_{\perp}/\varepsilon|$  – отношение сужения  $\varepsilon_{\perp} = \Delta b/b$  к удлинению суть модуль поперечной деформации. Взаимно перпендикулярные оси 1, 2, 3, удлинения  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$  вдоль которых экстремальны, называются главными. Признаком главных осей является отсутствие сдвигов в главных плоскостях  $M$ -точки. На схеме ② показано трёхосное растяжение главного единичного куба  $M$ -точки в направлении главных осей 1, 2, 3. Длина рёбер единичного куба *растянута* на  $\Delta l = \varepsilon \cdot l$ , объём  $V$  увеличился на  $\Delta V = V' - V = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  (произведения малых удлинений  $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \varepsilon_{\min}$  не учитываем, так как они пренебрежимо малы по сравнению с единицей). Изменение объёма куба  $\Delta V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  не может зависеть от ориентации системы осей  $x, y, z$ , следовательно, сумма удлинений  $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  не зависит от направления осей координат.

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  – сумма удлинений по направлениям взаимно перпендикулярных осей не изменяется при их повороте.

Под действием близко расположенных противоположно направленных сил (③) одна часть тела *сдвигается* относительно другой на угол  $\gamma$ .

Углы сдвига перпендикулярных отрезков равны по величине, противоположны по знаку:  $\frac{1}{2} \gamma_{xy} = -\frac{1}{2} \gamma_{yx}, \frac{1}{2} \gamma_{yz} = -\frac{1}{2} \gamma_{zy}, \frac{1}{2} \gamma_{zx} = -\frac{1}{2} \gamma_{xz}$ .

На схеме ④ представлено *смещение*  $AA'$ , *растяжение* и *сдвиг* взаимно перпендикулярных отрезков. Составляющие *смещения* точки  $A$  –  $u$  вдоль оси  $x$ ,  $w$  вдоль  $z$ ; *деформация* отрезков  $AB = dx$ ,  $AC = dz$  показаны отдельно на схеме ⑤. Длина  $dx$  отрезка  $AB$  *растянется* на  $(\partial u/\partial x) dx$ ,  $\partial u/\partial x = \varepsilon_x$  – *удлинение*. Длина  $dz$  отрезка  $AC$  *растянется* на  $(\partial w/\partial z) dz$ ,  $\partial w/\partial z = \varepsilon_z$ . При *сдвиге* отрезка  $AB$  ординату  $w$  точки  $B$  увеличит на  $(\partial w/\partial x) dx$ ,  $\gamma_1 \approx [(\partial w/\partial x) dx]/dx = \partial w/\partial x$  – *угол сдвига*. *Сдвиг* отрезка  $AC$  изменит абсциссу точки  $C$  на  $(\partial u/\partial z) dz$ ,  $\gamma_2 \approx [(\partial u/\partial z) dz]/dz$ ,  $\partial u/\partial z$  – *угол сдвига*.  $\gamma_1 + \gamma_2 = (\partial w/\partial x) + (\partial u/\partial z) = \gamma_{xz}$  – *угол сдвига*  $\perp$ -ных отрезков в пл.  $xz$ .

Выражения зависимости геопараметров деформации и смещений.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Эксперимент – это вопрос, который наука ставит природе. Измерение – это запись ответа, который природа дает на этот вопрос. Макс Планк

### Электротензоизмерение изменений размеров вследствие деформации

Электротензометр, называемый также: датчик, сенсор, тензорезистор, ТР, приклеивается в исследуемом месте поверхности детали по направлению искомого *удлинения*  $\varepsilon = \Delta l / l_0$  базы (длина  $l_0$ ) проводника и подключается к одному из четырёх плечей мостовой схемы электроустановки (1).

Для устранения основной погрешности измерений *гео*параметров при изменения температур в мостовую схему включается  $R_k$  – компенсационное сопротивление, которое не нарушает баланс моста, потому что оно не прикреплено к поверхности измерения.

Длина базы проводника, *деформируемого* совместно с деталью, изменяется на  $\Delta l = l - l_0$ , соответственно изменяется на  $\Delta R_a = R_a' - R_a$  величина активного сопротивления  $R_a = \rho \cdot l / A_{пр}$ .  $A_{пр}$  – площадь сечения проволоки,  $\rho$  – удельное сопротивление материала датчика.

Прибор электроустановки показывает относительное изменение сопротивления  $\Delta R / R$  проволоки, пропорциональное *удлинению*:  $\Delta R / R = k_{пр} \Delta l / l_0$ . Коэффициент пропорциональности  $k_{пр}$  зависит от «чувствительности» материала тензометра. Для датчика из элинвара  $k_{пр}$  изменяется в пределах 3,2 ... 3,5, из нихрома – 2,1 ... 2,3, из константана – 2,0 ... 2,1. У датчиков из фольги  $k_{пр} = 2,1 \pm 0,2$ . Монокристаллы полупроводников значительно чувствительнее, их  $k_{пр}$  изменяется в пределах от -100 до +200.

Размер базы  $l_0$  тензометра, его тип, шаг присоединения зависят от рода *деформации* (*растяжение, сдвиг*) материала; её вида (одно-, двух-, трёхосная) равномерности распределения *деформации*.

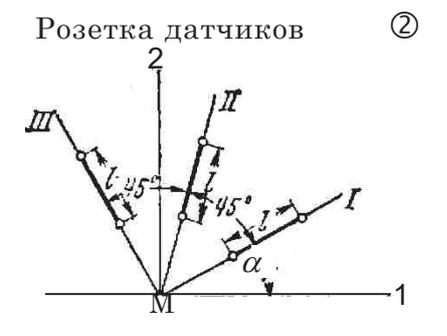
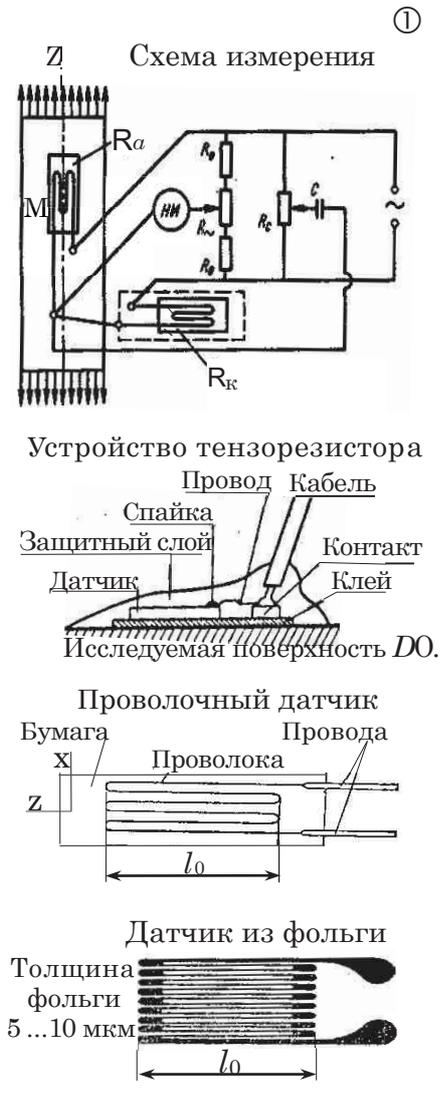
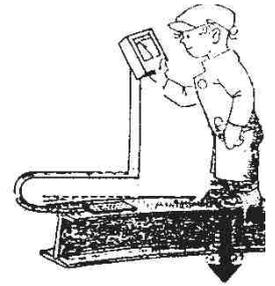
Искомое *удлинение* определяет произведение цены деления  $\Delta F$  шкалы и среднего числа делений:  $\Delta F_{ср} = (\sum \Delta F) / n$  ( $n$  – число ступеней нагрузки  $\Delta F$ ). Нагрузка  $\Delta F \times n$  не должна превышать предельную.

Единицей измерения малых величин *удлинений*, составляющих сотые, редко десятые доли процента, является число  $10^{-6}$ , которое почти на порядок перекрывает точность инженерных расчётов.

При определении *удлинения*  $\varepsilon = \Delta l / l_0$  образца, *растянутого* силой  $F$  вдоль оси  $Z$  (1), к поверхности крепится датчик в направлении  $Z$ . Измерив  $\Delta l$ , вычислим  $\varepsilon = \Delta l / l$ ,  $\sigma = F / A$ , определим параметр  $E = \sigma / \varepsilon$ . Для измерения *сужения*  $\varepsilon_1 = \nu \varepsilon$  ТР крепится поперёк оси  $Z$  образца.

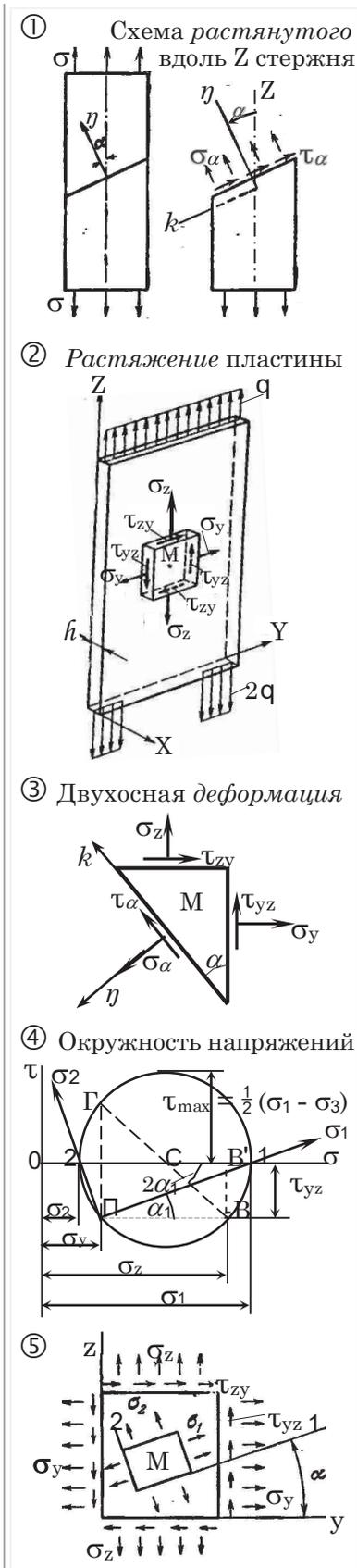
Определение главных *удлинений*  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  по измеренным  $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$

При двухосной *деформации* применяются розетки датчиков. На схеме (2) показана система трёх датчиков, прикрепляемых в месте  $M$  к поверхности детали для измерения *удлинений*  $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$  по направлениям I, II, III, которые составляют с главной осью 1 углы  $\alpha, \alpha + 45^\circ, \alpha + 90^\circ$ . После преобразований выражений *удлинений*:  $\varepsilon_I = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha$ ,  $\varepsilon_{II} = \varepsilon_1 \cos^2 (\alpha + 45^\circ) + \varepsilon_2 \sin^2 (\alpha + 45^\circ)$ ,  $\varepsilon_{III} = \varepsilon_1 \cos^2 (\alpha + 90^\circ) + \varepsilon_2 \sin^2 (\alpha + 90^\circ)$  получим формулы определения положения главных осей 1, 2:  $\operatorname{tg} 2\alpha = (\varepsilon_I - 2\varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}) / (\varepsilon_I - \varepsilon_{III})$  и главные *удлинения*:  $\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2} [(\varepsilon_I + \varepsilon_{III}) \pm \sqrt{(\varepsilon_I - \varepsilon_{III})^2 + (\varepsilon_{II} - 2\varepsilon_{II} + \varepsilon_{III})^2}]$ .



Какую пищу нашему уму даёт созерцание сил сцепления! Как много новых явлений открывается здесь! Именно эти силы обеспечивают прочность всего того, что сооружаем мы на земле, используя железо, камни и другие прочные материалы. Майкл Фарадей

#### 4. Основные силовые параметры деформации. Окружность напряжений



Рассматриваем малые *растяжения* и *сдвиги* материала элемента ①), напряжения сил ( $\sigma$ ,  $\tau$ ) которых пропорциональны *геопараметрам* ( $\epsilon$ ,  $\gamma$ ). Допущения: совместно *деформируемые* прямые волокна не давят друг на друга и остаются прямыми; плоскости поперечных ( $\perp$  оси  $Z$ )  $M$ -сечений не искажаются и остаются перпендикулярными оси тела  $Z$ .

Одноосная деформация под действием растягивающих сил ①). Считаем, что напряжения *растяжения* пропорциональны *удлинением* вдоль оси  $Z$ :  $\sigma = E \epsilon$  ( $E$  – характеристика сил сопротивления материала *растяжению*).  $\sigma_z = \sigma$  равномерно распределены по площади  $A$  сечения,  $\sigma_x = \sigma_y = 0$  (соответственно допущению о ненадавливании волокон).

Выражение напряжений  $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$  на  $\alpha$ -площадке ( $\alpha$  – угол нормали  $\eta$  с осью  $Z$ ) По напряжению *растяжения*  $\sigma$  и площади  $A$  можно выразить  $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$  из уравнений суммы проекций сил на  $\eta$ :  $\sigma_\alpha A_\alpha - \sigma A \cos \alpha = 0$  и касательную  $k$ :  $\tau_\alpha A_\alpha - \sigma A \sin \alpha = 0$  ( $A_\alpha = A / \cos \alpha$ ).  $\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha$ . При  $\alpha = 45^\circ$ :  $\sigma_{\alpha=45^\circ} = \frac{1}{2} \sigma, \tau_{\alpha=45^\circ} = \frac{1}{2} \sigma$  – это наибольшее напряжение *сдвига*.

Двухосная деформация ②). Выражение напряжений на  $\alpha$ -направлении По напряжениям ③) *растяжения*  $\sigma_z$  и *сдвига*  $\tau_{zy}$  (первый индекс  $\tau$  обозначает направление  $\eta$  к площадке, второй указывает направление касательной  $k$ ) на горизонтальной площадке ( $A_\Gamma = A \sin \alpha$ ) и  $\sigma_y, \tau_{yz}$  на вертикальной ( $A_B = A \cos \alpha$ ) определим напряжения на площадке, заданной углом  $\alpha$  к оси  $z$ . Проецируя силы на нормаль  $\eta$  к  $\alpha$ -площадке:  $\sigma_\alpha A - (\sigma_y A_B + \tau_{yz} A_\Gamma) \cos \alpha - (\sigma_z A_\Gamma - \tau_{zy} A_B) \sin \alpha = 0$  и касательную  $k$ :  $\tau_\alpha A - (\sigma_y A_B + \tau_{yz} A_\Gamma) \sin \alpha + (\sigma_z A_\Gamma - \tau_{zy} A_B) \cos \alpha = 0$ , получим:  $\sigma_\alpha = \sigma_y \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha + \tau_{yz} \sin 2\alpha, \tau_\alpha = \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_z) \sin 2\alpha - \tau_{yz} \cos 2\alpha$ . Напряжения на  $\alpha$ -направлении к главным площадкам ( $\tau = 0, \sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2$ ) имеют вид:  $\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha, \tau_\alpha = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha$ . На направлении  $\alpha = 45^\circ$  к главным осям:  $\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2), \tau = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \tau_{\max}$ .

Графическое представление напряжённости двухосной *деформации* Отто Мор показал (1882), что координаты точек окружности, построенной по известным напряжениям на плоскости  $\sigma$ - $\tau$ , являются напряжениями на множестве направлений осей  $M$ -точки. На плоскость ④), заданную системой осей  $\sigma, \tau$ , нанесём точки  $B$  ( $\sigma_z, \tau_{zy} = -\tau$ ) и  $\Gamma$  ( $\sigma_y < \sigma_z, \tau_{yz} = \tau$ ), соответствующие напряжениям на вертикальной и горизонтальной площадках ③). Окружность 2-1, построенная на прямой  $\Gamma B$  как на диаметре, отсекает на оси абсцисс отрезки  $01$  и  $02$  равные главным напряжениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  ( $\sigma_3 = 0$ ).  $OC = \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_y)$  – абсцисса центра  $C$  окружности напряжений 2-1,  $CB = \sqrt{CB'^2 + B'B^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$  – её радиус  $R_x = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \tau_{\max}$  – ордината высшей точки окружности 2-1 равна наибольшему напряжению *сдвига*. Луч из полюса  $\Pi$  ( $\sigma_y, \tau$ ) через точку  $1$  ( $\sigma_1, 0$ ) указывает направление  $\sigma_1$  наибольшего напряжения *растяжения*, составляющего с осью  $\sigma$  угол  $\alpha_1$ . Угол  $1CB$  равен  $2\alpha_1$ . главных напряжений:  $\sigma_{1,2} = OC \pm R = \frac{1}{2} [(\sigma_y + \sigma_z) \pm \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau^2}]$  ⑤) и положения главной осей 1, 2:  $\text{tg } 2\alpha_{1,2} = B'B/CB' = 2\tau/(\sigma_z - \sigma_y)$ .

Двухосная упругая деформация материала, вызываемая сдвигом. Воздействие близко расположенных противоположно направленных поперечных сил, вызывает *сдвиг*, которому сопутствуют *изгиб*, *смятие*. *Сдвиг* при *кручении* тонкостенного стержня называется чистым, так как сопровождающие его *деформации* незначительны. Рассмотрим тонкостенную трубу (①), по торцам которой приложены крутящие моменты  $M_z = m \pi D$ . Выделим из трубы макроэлемент (②) и покажем напряжения *сдвига*  $|\tau_{xz}| = |\tau_{zx}| = \tau$ , направляя  $\tau$  к линии пересечения площадок или от неё. Равенство нулю напряжений *сдвига*  $\tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha$  при  $\alpha = 45^\circ$  есть признак главных площадок:  $\sigma_1 = \tau$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\tau$ .

Нанесём на плоскость  $\sigma, \tau$  (③) точки В ( $\sigma_x = 0, \tau_{xz} = -\tau$ ), Г ( $\sigma_z = 0, \tau_{zx} = \tau$ ), соответствующие напряжениям (②) на вертикальных, горизонтальных площадках, и проведём окружность диаметром ГВ, которая отсекает на оси  $\sigma$  отрезки, равные главным напряжениям *растяжения*  $\sigma_1 = \tau$ , *сжатия*  $\sigma_3 = -\tau$  ( $\sigma_2 = 0$ ). Лучи из полюса П ( $\sigma_x, -\tau$ ) через точки 1 ( $\sigma_1, 0$ ), 3 ( $\sigma_3, 0$ ) указывают направление главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_3$ , которое составляет с напряжениями *сдвига* на исходных площадках угол  $45^\circ$ .

Выражение связи характеристик сдвига и растяжения материала. Представив *сдвиг* элемента ABCD ( $a \times a$ ) в плоскости  $zy$  (④), заметим, что точка С верхней плоскости  $zx$  М-точки *переместилась* на  $CC' = w = a \gamma$  ( $\text{tg } \gamma \approx \gamma$ ) относительно закреплённой нижней плоскости  $zx$ . Длина AC ( $l = a / \cos 45^\circ$ ) *растягивается* в направлении главной оси 1 от *растяжения*  $-\epsilon_{11}$  и  $\epsilon_{13} = -\nu \epsilon_{33} = \nu \epsilon_{11}$  – поперечное *расширение* вдоль оси 1 от *сжатия* вдоль оси 3. В уравнение совместности *деформации* отрезков BC и AC:  $\Delta l / w = \cos 45^\circ$  или  $\epsilon_1 (1 + \nu) = \frac{1}{2} \gamma$  подставим  $\epsilon_1 = \sigma_1 / E$ ,  $\gamma = \tau / G$  и  $\sigma_1 = \tau$ , получим формулу связи характеристик упругой *деформации* материала:  $G = \frac{1}{2} E / (1 + \nu)$ .

Оценка прочности элементов соединения деталей из условия:  $s \leq [s]$ . Вычисляя напряжения  $\sigma = N/A$ ,  $\tau = Q/A$ , принимаем грубое допущение равномерности их распределения по поверхности контакта с деталью.  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение *растяжения*,  $[\tau] \approx 0,8 [\sigma]$ ,  $[\sigma_{\text{смятия}}] \approx 2[\sigma]$ .

Из условий прочности:  $\sigma \leq [\sigma]$  и  $\tau \leq [\tau]$  решаем три типа задач (⑤).

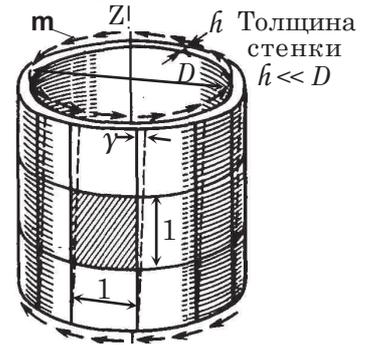
Подбор размеров. Из равенства  $\sigma = F/A$  и допускаемого напряжения  $[\sigma]$  определим диаметр болта, *растянутого* силой  $F$ :  $d = \sqrt{4F / (\pi[\sigma])}$ .

Оценка допустимой нагрузки. Допустимую растягивающую силу  $[F]$  выразим из условия *сдвига* головки болта:  $F/A_{cd} \leq [\tau]$ .  $[F] \leq [\tau] \pi d h$ .

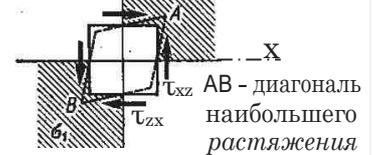
Проверочный расчёт.  $\sigma_{cm} = F/A_{cm}$  – напряжение *смятия* поверхности под головкой болта,  $A_{cm} = \frac{1}{4} \pi [D^2 - (d+1)^2]$  должно быть меньше  $[\sigma_{cm}]$ .

Задача (⑥). Подбор сечения шпонки ( $l$  – длина) через которую на вал передаётся крутящий момент  $M_z$ . Поперечная сила  $Q_x = F = M_z / 0,5 d$  вызывает *сдвиг* шпонки в плоскости  $zx$  ( $A = bl$ ) м-н.  $F/(bl) \leq [\tau]$  – условие прочности при *сдвиге*. Шпонка, утопленная наполовину в вал, *сминается* по поверхности контакта со шпоночной канавкой ( $A_{cm} = \frac{1}{2} hl$ ).  $2F/(hl) \leq [\sigma]_{cm}$  – условие прочности при *смятии*. Из условия равнопрочности шпонки при *сдвиге* и *смятии* выразим отношение высоты к ширине шпонки:  $h/b = 2 [\tau] / [\sigma]_{cm} \approx 0,8$  и из условий прочности установим допустимые размеры сечения шпонки.

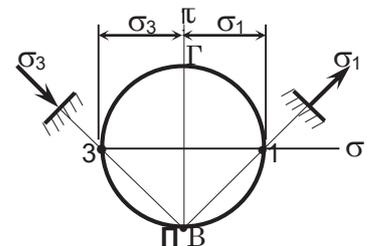
Кручение тонкостенного стержня ①



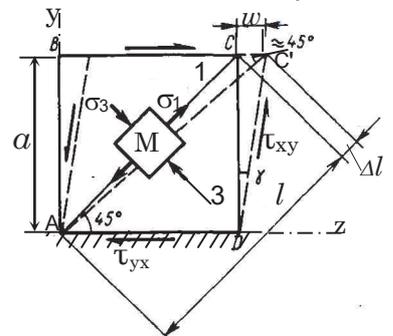
Сдвиг в пл. XZ ②



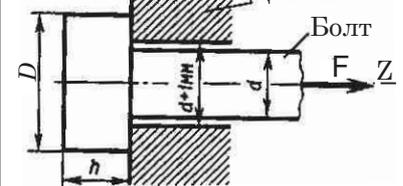
Окружность напряжений ③



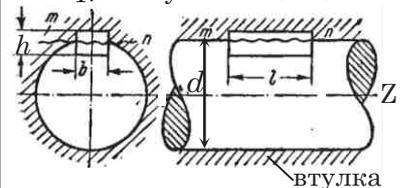
Сдвиг в плоскости xy ④



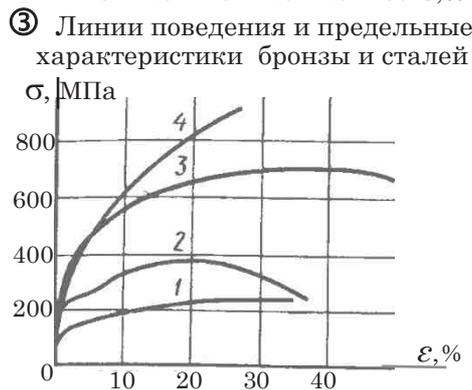
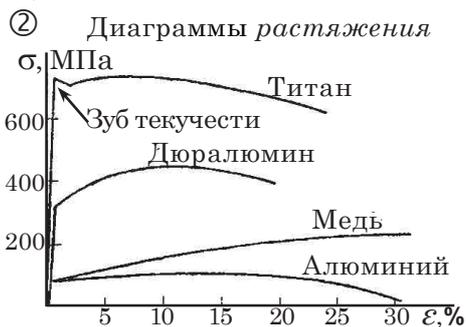
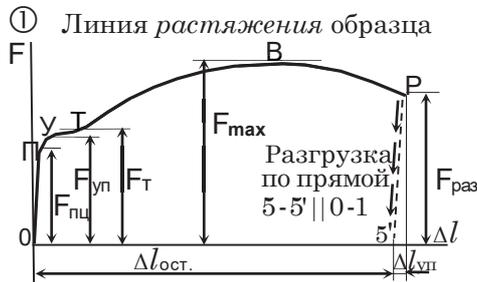
⑤



⑥



## 5. Характеристики предельных состояний растягиваемого материала



1 – бронза  $\sigma_{ВР} = 247$ ,  $\epsilon_{ПР} = 36$ . Стали:  
 2 – углеродистая  $\sigma_{ВР} = 358$ ,  $\epsilon_{ПР} = 38$ ;  
 3 – никелевая  $\sigma_{ВР} = 715$ ,  $\epsilon_{ПР} = 54$ ; 4 – марганцовистая  $\sigma_{ВР} = 916$ ,  $\epsilon_{ПР} = 30$ .  
 Напряжение в МПа,  $\epsilon_{ПР}$  в процентах.



Параметры, необходимые для оценки прочности материала  $D_0$ , устанавливаются в основном при *растяжении* стандартных образцов на испытательных стендах, оснащённых устройством записи графика изменения длины  $\Delta l$  базы измерения  $l_0$  при увеличении растягивающей силы  $F$ . Рассмотрим участки линии *растяжения*  $F = f(\Delta l)$  образца из малоуглеродистой стали (①). 0–П–прямая  $F = C \Delta l$  ( $C = 1/\Delta$ ) до уровня силы  $F_{пц}$ , означающей предел пропорциональности изменения длин  $\Delta l = l - l_0$  силе  $F$ . П–У – кривая упругого *растяжения* ( $\Delta l$  не пропорционально  $F$ ). У–Т – линия массовой разупорядоченности структуры (текучести) соответствует переходу материала в пластическое состояние. Т–В – кривая сопротивления материала *разрушению* при ещё равномерном до  $F_{max}$ , но уже необратимом *деформировании*. В–Р – линия локального *растяжения* участка пластической неустойчивости-шейки образца, разрывающейся на уровне  $F_{раз}$ .

Характеристики *деформации* материала устанавливаются по диаграмме *растяжения*  $\sigma = f(\epsilon)$ , построенной по характерным точкам кривой *растяжения*  $F = f(\Delta l)$ . При перестройке линии  $F = f(\Delta l)$  абсциссы  $\Delta l$  уменьшаются в  $l_0$  раз, ординаты  $F$  – в  $A_0$  раз. Диаграммы некоторых металлов в координатах *удлинение*  $\epsilon = \Delta l/l_0$ , напряжение  $\sigma = F/A_0$  приведены на графиках ②, ③.

Предельные характеристики растягиваемого материала  $\sigma_{пц}$  – предел пропорциональности параметров *растяжения*;  $\sigma_{уп}$  – предел упругости материала;  $\sigma_{т}$  – предел текучести.  $\sigma_{0,2}$  –  $\sigma_{т}$  при фиксированном остаточном *удлинении*  $\epsilon_{ост} = 0,002$  (0,2%).  $\sigma_{ВР} = F_{max}/A_0$  – высшее напряжение равномерного *растяжения*.

Результаты испытаний на *сжатие* менее достоверны, потому что на *сжатие* испытывают короткие образцы во избежание их *искривления*, и нет участков, удалённых от сжимающих плит настолько, чтобы *сжатие* можно было считать равномерным.

Предел прочности *сжатия* –  $\sigma_{пчс}$  пластичного материала установить невозможно, так как образец просто сплющивается (④). У хрупкого материала предел сопротивления *разрушению* при *сжатии* существенно выше, чем при *растяжении*. Предел прочности *сжатия* анизотропной древесины вдоль волокон почти на порядок выше, чем при *сжатии* поперёк волокон.

Предельные характеристики пластичности материала при *растяжении*: наибольшее остаточное *удлинение* после разрыва образца  $\epsilon_{ост ПР} = \Delta l_{ост}/l_0 = (l_p - l_0)/l_0$  ( $l_p$  – длина базы  $l_0$  после разрыва) и наибольшее *сужение* площад  $\psi_{ост ПР} = (A_0 - A_{min})/A_0$ . Малоуглеродистая сталь, алюминий, титан – пластичны, их остаточное *удлинение* после разрыва более 20 %; дюралюмин легированная сталь, бронза – ограничено пластичны; чугун, керамика, закалённая сталь относятся к хрупким материалам. Характеристики некоторых материалов приведены в таблице.

Материал Параметры	Сталь Ст. 3	Сталь 45	Сталь 30ХГСА	Чугун СЧ15-32	Медь прутковая	Дюралю- мин Д16	Тексто- лит
Е, ГПа	200	200	200	150	110	75	30
$\sigma_T$ , МПа	240/240	340/340	950/950	–	250	240/240	75/115
$\sigma_{ВР}$ , МПа	450/–	610/–	1200/–	150/640	320	420	127/168
$\epsilon_{ост.ПР}$ , %	26	24	13	0,6	15	18	1,5
$\psi_{ост.ПР}$ , %	50	45	50	–	45	–	–
Число в знаменателе соответствует предельному напряжению сжатия.							



... если при определении характера разрушения выделяется степень пластичности, реализованная к финалу разрушения, то разрушение разделяют на хрупкое, квазихрупкое и вязкое; если же его связывают с условиями нагружения, то подразумевают усталостное разрушение, разрушение при ползучести и т. п.; если выделяют структурный фактор, то различают внутризеренное (транс-кристаллитное), межзеренное (интеркристаллитное) или смешанное разрушение; если разрушение связывают с деформированным состоянием, то имеют в виду разрушение отрывом и разрушение сдвигом; а если хотят сказать о кинетике процесса, то различают стабильное (задержанное) и нестабильное разрушение.

В.С. Иванова

Деформации материала твёрдого тела сопутствует разрушение как процесс зарождения и развития повреждений. Дефекты структуры, рассеянные по телу случайным образом, распространяются, образуют микротрещины, которые продвигаются, сливаются в макротрещины. Природа разрушения разных материалов неодинакова: элементы структуры металлов сдвигаются по кинематически возможным системам скольжения; макромолекулярные цепи полимеров вытягиваются в направлении главных удлинений; армированные материалы расслаиваются по поверхностям соединений. Механизм хрупкого разрушения – растрескивание. Однако, следы первичных пластических сдвигов наблюдаются и у весьма хрупких материалов.

$K_{IC}$  – характеристика критической вязкости разрушения материала  $D_0$  В окрестности вершины трещин, возникающих в местах концентрации деформации, формируются необратимо деформированные локальные образования (НЛО) материала новой структуры, сдерживающие рост трещин. Характеристика вязкости разрушения  $K_{IC}$  устанавливается испытаниями на растяжение образцов (1) с инициирующим надрезом ( $l_H$ ) и макротрещиной ( $l_0$ ) отрыва, выращиваемой при циклически изменяемой деформации, фиксируется сила страгивания трещины  $F_C$ . Критическая вязкость материала растягиваемого тела с трещиной (тип I) определяет отношение:  $K_{IC} = F_C / (\Phi)$ ,  $\Phi$  – функция размеров трещины и образца. Деформация среды НЛО считается двухосной, если толщина образца значительно больше, чем у НЛО. Применение низких температур, уменьшающих пластическое пространство НЛО, даёт возможность установления характеристики критической вязкости разрушения материала  $K_{IC}$  при испытании образцов малых размеров. параметр. По кривым графика 2 зависимости  $K_{IC} = f(\sigma_T)$  можно проследить, как повышение силовых возможностей (предел текучести  $\sigma_T$ ) металла снижает характеристику вязкости разрушения. Высокую напряжённость необратимо деформированного локального макрообъёма материала у вершины трещины  $D_0$  характеризует  $K$ -параметр.  $K = K_{IC}$  – условие предельной трещиностойкости  $D_0$ .

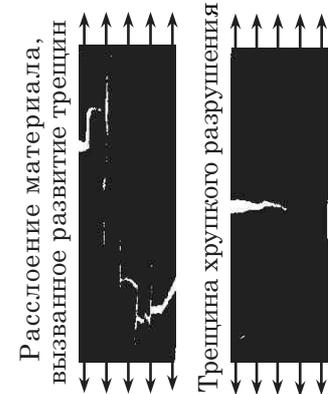
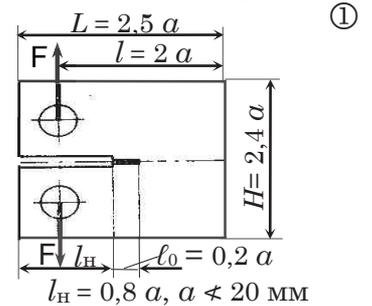
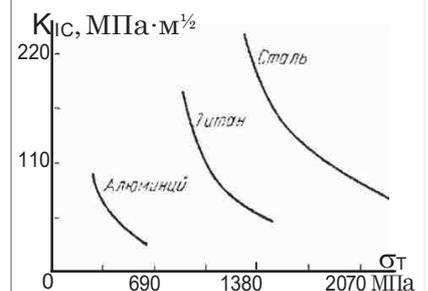


Схема прямоугольного компактного образца



Кривые зависимости предельных параметров  $K_{IC}$  и  $\sigma_T$



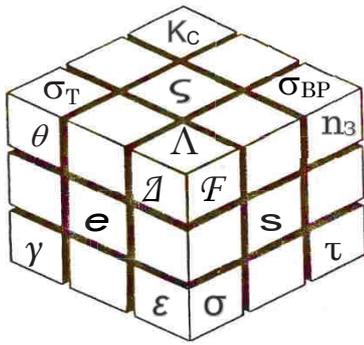


Схема – целенаправленное обобщение материала, она позволяет обозреть суть исследования, отбросить затемняющие мелочи. Схему усвоить легко – значит остаются силы на то, чтобы продвинуться дальше, т. е. поставить гипотезы и организовать их проверки. Схема – скелет работы, без которого она превращается в медузу.

Л.Н. Гумилёв

### Схематизация предмета оценки прочности. Параметры

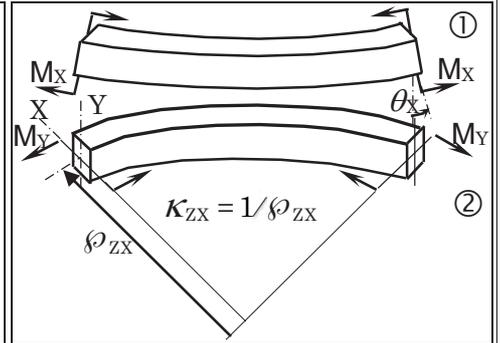
<b>Форма</b>	Классификация форм твёрдого тела Стержень Тонкостенное тело Массив	Макроединицы сплошной среды – модели материального пространства $DO$ М-точка – макрообъём вокруг точки М Волокно – струна из М-точек вдоль Z, М-сечение – пластина М-точек поперёк Z	Модели предмета расчёта Тело в целом Макроединица Макротрещина
<b>Опоры</b>	Для закрепления тела необходимо три связи на плоскости, шесть в пространстве.		Кинематически неизменяемая система при нагружении деформируется
<b>Нагрузка</b>		Растягивающие силы $N$ , параллельные оси тела Z, <i>изменяют</i> длину волокон. Изгибающие моменты $M_x, M_y$ <i>искривляют</i> волокна, <i>поворачивают</i> М-сечения тела. Сдвигающие силы $Q_y, Q_x$ <i>смещают</i> одну макроединицу тела относительно другой. Крутящие моменты $M_z$ <i>сдвигают</i> волокна, <i>поворачивают</i> М-сечения вокруг оси Z.	
<b><math>e</math> – параметр кинематики деформации материала</b>	Геопараметры деформации: $\epsilon$ – удлинение, $\gamma$ – угол сдвига перпендикулярных отрезков.	Равнодействующие внутренних сил по площади $A$ поперечного сечения: 	$s = \zeta e$ – модель: напряжения $s$ материала $DO$ пропорциональны геопараметрам $e$
<b>Материал моделирует однородная изотропная сплошная среда</b>	Характеристики пластичности: $\epsilon_{ост пр} = (l_p - l) / l$ – остаточное удлинение, $\psi_{ост пр} = (A - A_p) / A$ – остаточное сужение.	Предельные силовые характеристики <i>растяжения-сжатия</i> материала $DO$ : $\sigma_{пц}$ – предел пропорциональности, $\sigma_{уп}$ – предел упругости, $\sigma_T$ – предел текучести, $\sigma_{вр}$ – высшее напряжение равномерной деформации означает предел прочности.	$\zeta$ – характеристика сил сопротивления материала <i>растяжению</i> – $E$ или/и <i>сдвигу</i> – $G$ .

Воображая деформирование нагруженного тела, представляя совместность растягивания, сдвига волокон, поворотов М-сечений, предугадываем наиболее деформированную часть; выделяем её методом сечения и выражаем напряжённость материала наиболее деформированного места. Объединяя гипотетические соотношения геопараметров с уравнениями равновесия внешних и внутренних сил, опираясь на сведения о характеристиках материала, вычисляем параметры в местах предполагаемых нарушений целостности или функционального несоответствия системы. На основе сравнения определённого параметра с нормируемой величиной, устанавливаемой из опыта проектирования подобных конструкции, решаем задачи проверки прочности элемента системы или обоснования размеров предмета расчёта, или определения допустимой нагрузки.

## Глава II. Определение параметров деформирования стержней

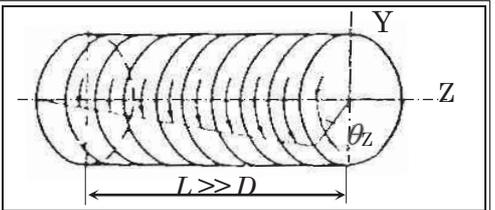
### 6. Представление соотношений геопараметров изгиба определяет напряжения

Воздействие момента  $M_x$  в плоскости  $ZY$  (①) или  $M_y - ZX$  (②) *искривляет* ( $K=1/\rho$  – кривизна) стержень в плоскости момента. От  $M_x$  нижние волокна *растягиваются*, верхние *сжимаются*; под действием  $M_y$  волокна, что дальше от нас, *растягиваются*, а те, что ближе к нам – *сжимаются*; М-сечения *поворачиваются* на  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  относительно главной центральной оси сечения  $X$ ,  $Y$ . Определяем параметры деформирования стержня: прогибы  $v$ ,  $u$ , углы поворота  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  и  $\sigma$  – напряжения сил *растяжения* (*сжатия*) материала, вызываемые изгибающими моментами.



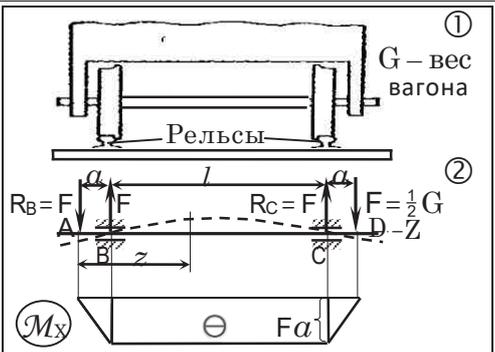
### 7. Определение геопараметров и напряжений сдвига при кручении

Крутящие моменты  $M_z$  *сдвигают* волокна на  $y$ , *поворачивают* сечения на угол  $\theta_z$  вокруг центральной оси тела  $Z$ .  $\Theta = \theta_z/l$  – геопараметр *закручивания* М-сечения относительно другого сечения, отстоящего от него на  $l$ .  $\tau$  есть мера распределения по сечению внутренних сил *сдвига* вследствие *кручения* стержня.



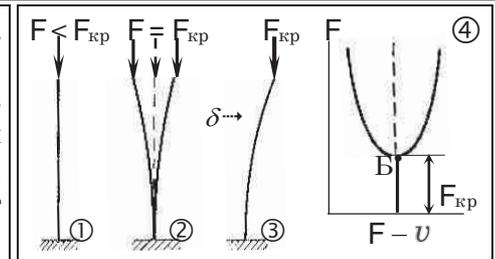
### 8. Изменение параметров изгиба и изгиба с кручением по длине стержня

На схеме ② пунктиром показано предполагаемое *искривление* в плоскости  $ZY$  оси вагона (①), представленной стержнем  $AD$ . Момент внутренних сил относительно оси  $X$  сечения, заданный координатой  $z$ , равен сумме моментов по одну сторону (левую) от сечения:  $-F \cdot z + R_B(z - a)$ . На участке  $BC$  ( $a \leq z \leq a + l$ ) сила *сдвига*  $Q_y = -F + R_B$  равна нулю,  $M_x = -Fa$  – момент *изгиба*. *Изгиб* при  $Q_y = 0$ ,  $M_x = \text{const}$  называют чистым. График (эпюра) изменения момента *изгиба*  $M_x$  вдоль оси  $Z$  обозначается  $(M_x)$ . Ординаты графика  $M_x$  отложены со стороны *сжатых* волокон.



### 9. Сжатый прямой стержень. Устойчивость исходной формы равновесия

Какова величина силы, сжимающей прямой стержень-стойку, вдоль  $Z$  (①), при которой возможен переход к смежной форме равновесия (②) от случайного малого возмущения  $\delta$ ? Ответить на этот вопрос – значит определить критическую силу  $F_{кр}$ . При  $F < F_{кр}$  прямолинейная форма равновесия стержня устойчива, точка  $B(v_B, F_{кр})$  на диаграмме бифуркации  $F - v$  (④) означает возможность перехода к искривлённой форме равновесия (③).



### 10. Кручение тонкостенных стержней замкнутого и открытого профилей

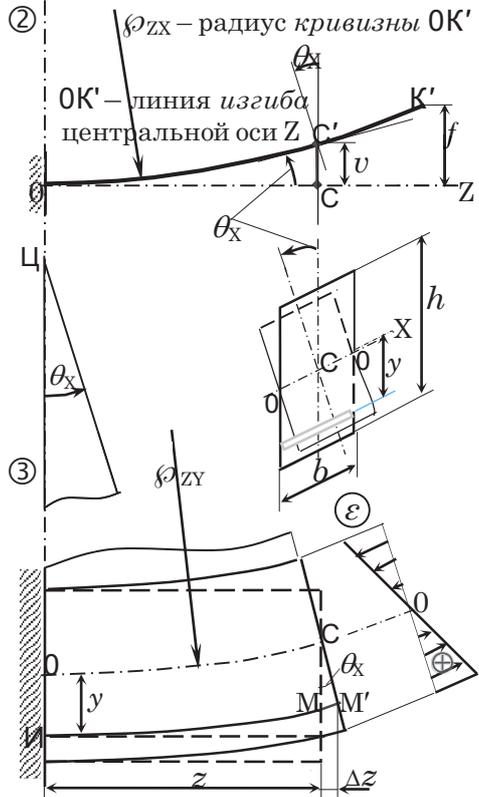
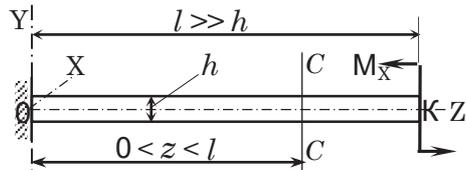
Стержень называется тонкостенным, если толщина стенки  $h$  профиля существенно меньше других размеров сечения ( $d$ ,  $b$ ,  $h$ ). Тонкостенные профили могут быть открытыми и замкнутыми. Стержни открытого профиля весьма *податливы кручению*, поэтому в случае необходимости их применения добавляются элементы жёсткости. Например, свободное *кручение* сварной тонкостенной конструкции открытого профиля, показанной на схеме справа, сдерживается защемлением и двумя рёбрами жёсткости. *Кручение* в таких условиях называется *стеснённым*.



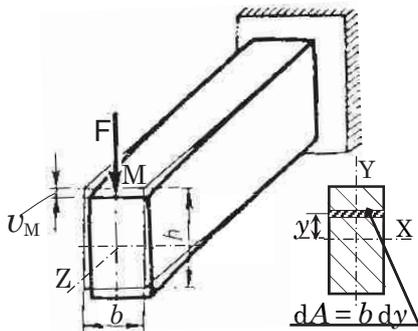
## 6. Представление соотношений геопараметров изгиба определяет напряжения

Растяжение, изгиб, сдвиг, кручение – виды деформирования стержня под действием нагрузки.

① Изгиб стержня в плоскости ZY.

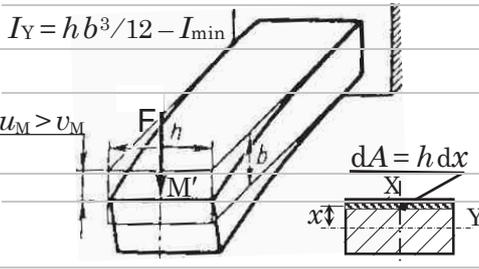


④ Изгиб в главной плоскости ZY наибольшей жёсткости (h > b)



$$I_x = \int_A y^2 dA = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = bh^3/12.$$

⑤ Изгиб в главной плоскости ZX наибольшей податливости



$$I_y = hb^3/12 - I_{min}$$

К концу К консоли (①) прямоугольного сечения  $b \times h$  приложен изгибающий момент  $M_x$  в главной плоскости  $ZY$  (если хотя бы одна из центральных осей  $X, Y$  сечения есть ось симметрии, то оси  $X, Y$  являются главными). Под действием момента  $M_x$  стержень *искривляется* (②) в плоскости  $ZY$ , нижние волокна *растягиваются*, верхние – *сжимаются*, а длина нейтрального слоя волокон между ними в главной плоскости не изменяется.

Допущение: М-сечения, перпендикулярные оси  $Z$  стержня, не искажаясь при *повороте* на угол  $\theta_x$  относительно главной оси  $X$ , остаются перпендикулярными *искривлённой* оси  $Z - OK'$  (②).

Дуги  $CC'$  *смещений*  $v$  центров тяжести М-сечений – точек  $C(z, 0)$  заменяем прямыми (масштаб малых по сравнению с размерами консоли *прогибов*  $v$  на схеме ② для наглядности значительно преувеличен). Формула *кривизны*  $K$  применительно к линии  $OK'$  имеет вид:  $K_{ZY} = 1/\rho_{ZY} = v''/[1 + (v')^2]^{3/2}$  (квадрат малого угла  $\theta_x = v'$  наклона касательной к  $OK'$  мал по сравнению с единицей).  $K_{ZY} = v'' = \theta'_x$  – выражение соотношения *геопараметров изгиба*.

Полагая, что *удлинения*  $\epsilon = \Delta l/l$  волокон по ширине  $b$  сечения стержня одинаковы, выразим изменение *удлинений* по высоте  $h$ . Вообразим схему *изгиба* левой части консоли длиной  $z$  (③) и представим *изменение*  $\Delta z$  длины  $z$  волокна ИМ в зависимости от расстояния  $y$  до оси  $Z$  стержня. В равенство углов *поворота*  $OЦС$  и  $МСМ'$ :  $z/\rho_{ZY} = \Delta z/y$  подставим  $K_{ZY} = 1/\rho_{ZY}$  и  $\epsilon = \Delta z/z$ , получим:  $K_{ZY} = \epsilon/y$ . Отсюда:  $\epsilon = K_{ZY} \cdot y = \theta'_x \cdot y = v'' \cdot y$  – выражение связи *изменений удлинений*  $\epsilon = f(y)$  с *геопараметрами изгиба*. При *изгибе* в плоскости  $ZX$  зависимость функции *удлинений*  $\epsilon = f(x)$  от параметров *изгиба* имеет вид:  $\epsilon = K_{ZX} \cdot x = \theta'_y \cdot x = u'' \cdot x$ .

*Кинематику* точек на *повороте* сечения относительно осей  $X, Y$  характеризуют интегралы:  $I_x = \int_A y^2 dA$ ,  $I_y = \int_A x^2 dA$  и  $I_{xy} = \int_A xy dA$ , которые по аналогии с моментами инерции тела относительно оси в механике называются моментами инерции М-сечений. Представляя *повороты* М-сечений при *покачивании* консоли силой  $F$  в плоскости  $ZY$  (④), а затем – в плоскости  $ZX$  (⑤), можно почувствовать, что момент инерции относительно оси  $X$  больше, чем  $I_y$ , то есть чем дальше от оси *поворота* разнесено сечение, тем больше момент инерции или момент инерции минимален относительно той оси, вдоль которой вытянуто М-сечение.

$$I_{max} = bh^3/12 \text{ (④)} \quad \text{Главные моменты инерции} \quad I_{min} = hb^3/12 \text{ (⑤)}$$

прямоугольного М-сечения

$I/\xi$  ( $\xi$  – координата точки, наиболее удалённой от оси *поворота* М-сечения – наименьший *геопараметр* сечения при *изгибе*). Признаком главных осей  $V, U$  сечения является равенство нулю двусосного момента инерции:  $I_{VU} = I_{XY} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\alpha = 0$ . По известным моментам  $I_x, I_y, I_{xy}$  относительно неглавных осей  $X, Y$  можно определить угол наклона главных осей:  $\tan 2\alpha_{гл.} = -2I_{xy}/(I_x - I_y)$  и моменты инерции относительно главных осей:

$$I_{\min}^{\max} = \frac{1}{2} [(I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}]. \quad I_x + I_y = I_{max} + I_{min} - \text{const.}$$

## Выражение напряжений сил материала при изгибе стержня

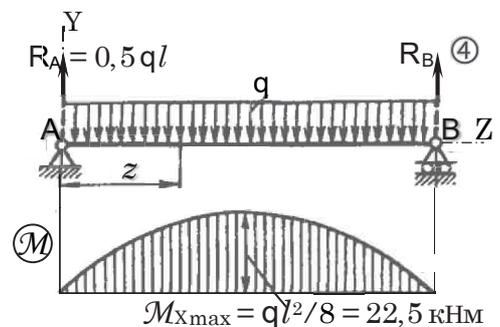
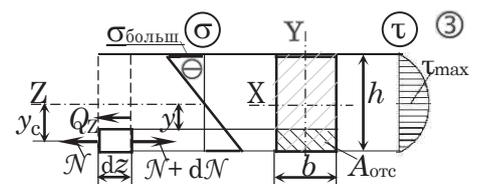
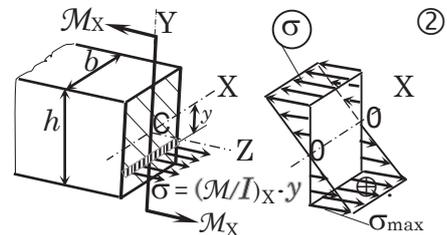
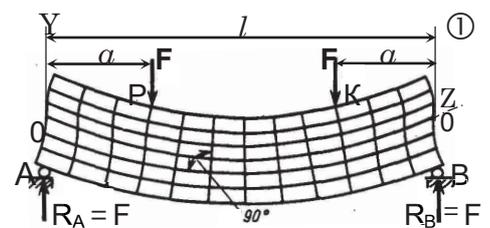
Стержень АВ прямоугольного сечения  $b \times h$  пролётом  $l$  искривлён в главной плоскости ZY силами F (1): верхние волокна сжаты, нижние – растянуты, между ними – слой нейтральных волокон. Допущения: деформированные волокна не дают друг на друга ( $\sigma_y = 0$ ); М-сечения на повороте относительно нейтральной оси X не искажаются и остаются  $\perp$ -ми искривлённому слою 0-0. Считаем, что напряжения растяжения  $\sigma$  (2) не изменяются по ширине  $b$  сечения. Подставив в формулу пропорциональности параметров:  $\sigma = E \varepsilon$  выражение связи  $\varepsilon = v'' \cdot y$ , получим:  $\sigma = E v'' \cdot y$ . Интегрируя по высоте  $h$  сечения моменты  $dM_x$  сил растяжения  $dN = \sigma \cdot b \cdot dy$  волокон, выразим момент изгиба относительно оси X:  $M_x = \int_{-h/2}^{h/2} dN \cdot y = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma \cdot y \cdot dy = E v'' \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot dy = v'' E I_x$ ,  $b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot dy = bh^3/12 = I_x$ .  $v'' = \theta_x' = (M/I)_x / E$  – соотношение параметров изгиба в главной плоскости ZY.  $\sigma = (M/I)_x \cdot y$  – напряжение растяжения (сжатия)  $\sigma_{\max} = (M/I)_x \cdot y_{\max} \leq [\sigma]$  – условие прочности при изгибе стержня.

Для выявления напряжений сдвига  $\tau_{yz} = -\tau_{zy} = \tau$  от силы F (1) на участке AP (3) выделим на расстоянии  $z$  ( $0 < z < a$ ) от А часть балки длиной  $dz$  и отсечём от неё нижнюю часть на расстоянии  $y$  от X. Из уравнения суммы проекций на Z равнодействующих сил межслойного сдвига волокон  $Q_z = \tau \cdot A_{cd}$  ( $A_{cd} = dz \cdot b$ ) и сил растяжения по отсечённым частям сечения  $N_{отс} = \sigma \cdot A_{отс}$ ,  $dN_{отс} = d\sigma \cdot A_{отс}$  [ $A_{отс} = b (\frac{1}{2}h - y)$ ]:  $-N_{отс} - Q_z + N_{отс} + dN_{отс} = 0$ , получим равенство:  $dN_{отс} = Q_z$  или  $d\sigma \cdot A_{отс} = \tau \cdot dz \cdot b$ . Отсюда напряжение сдвига имеет вид:  $\tau = Q_{отс} \cdot y_c / (I_x \cdot b)$  [ $y_c = \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}h - y)$  – ордината центра тяжести отсечённой части сечения,  $I_x = bh^3/12$ ]. При  $y = 0$ ,  $\tau_{\max} = \frac{3}{2} F / bh$ ,  $\sigma = 0$ ; при  $y = \frac{1}{2}h$ ,  $\sigma_{\text{большее}} = 6Fl / bh^2$ ,  $\tau = 0$ . При изгибе стержня ( $l \gg h$ ):  $\sigma / \tau \sim l / h$ , напряжения сдвига  $\tau$  не учитывают, так как они, как правило, много меньше напряжений растяжения  $\sigma$ .

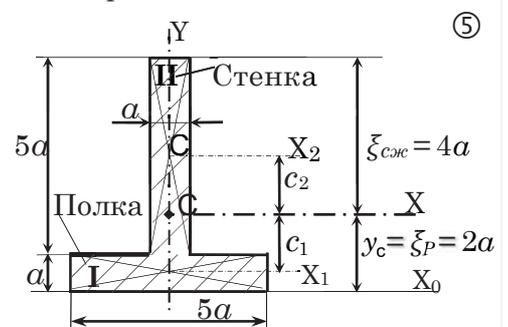
**Задача.** Требуется определить размеры Т-образного сечения (5) чугунной балки, нагруженной по пролёту  $l = 3$  м распределённой нагрузкой  $q = 20$  кН/м (4). Допускаемые напряжения чугуна:  $[\sigma_p] = 150$  МПа – при растяжении,  $[\sigma_{сж}] = 640$  МПа – при сжатии. Момент изгиба  $M_x = \frac{1}{2} q l \cdot z - q z \cdot \frac{1}{2} z$ , при  $z = \frac{1}{2} l$ :  $M_{\max} = ql^2/8 = 22,5$  кНм.

Определим геопараметры тавра, представляя его состоящим из прямоугольников I ( $5a \times a$ ), II ( $a \times 5a$ ).  $y_c = 2a$  – ордината центра тяжести С сечения относительно оси  $X_0$  (5). Момент инерции сечения относительно главной центральной оси X равен сумме моментов инерции  $I_x^I, I_x^{II}$  фигур I, II.  $I_x^I = I_{x_1}^I + c_1^2 A_1$  – момент инерции фигуры I относительно оси сечения X,  $I_{x_1}^I$  – это момент инерции относительно центральной оси полки  $X_1$ , параллельной оси X;  $c_1 (1,5a)$  – расстояние от оси  $X_1$  до оси X.  $I_x = 33,3 a^4$ .

Расположение тавра полкой вниз является рациональным, так как более высокому уровню напряжений сжатых верхних волокон  $\sigma_{\max} = (M/I)_x \cdot y_{\max сж}$  соответствует  $[\sigma]_{сж} > 4 [\sigma]_p$ . Из условия:  $\sigma = (M/I)_x \cdot y_{\max} \leq [\sigma]_p$  или  $22,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2a / (33,3 a^4) = 150$  МПа определим  $a = \sqrt[3]{45 \cdot 10^{-3} / (33,3 \cdot 150)} = 2,08 \cdot 10^{-2}$  м.  $I_x = 6,48 \cdot 10^{-6}$  м<sup>4</sup>.  $(M/I)_x \cdot y_{\max сж} = 22,5 \cdot 10^{-3} \cdot 8,40 \cdot 10^{-2} / 6,48 \cdot 10^{-6} = 291,67$  МПа  $< [\sigma]_{сж}$ .



Ординаты  $M_x$  отложены со стороны сжатых волокон.

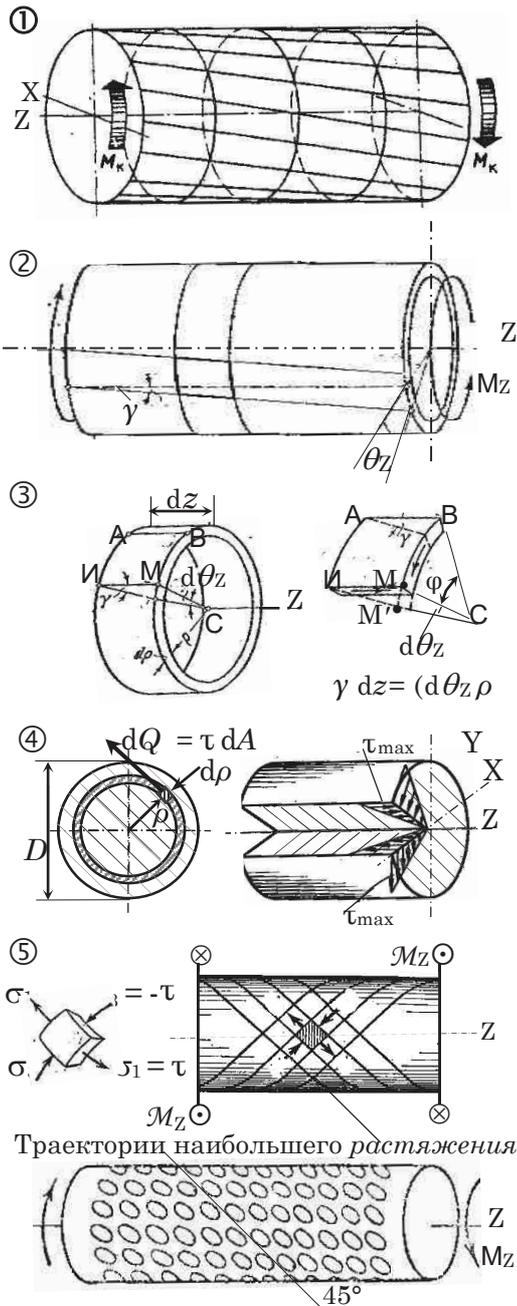


$$y_c = (A_I \cdot y_1 + A_{II} \cdot y_2) / A = (5a^2 \cdot 0,5a + 5a^2 \cdot 3,5a) / 10a^2 = 2a.$$

$$I_x = I_{x^I} + I_{x^{II}} = h_1 b_1^3 / 12 + c_1^2 A_1 + h_2 b_2^3 / 12 + c_2^2 A_2 = 5a \cdot a^3 / 12 + (1,5a)^2 5a^2 + a(5a)^3 / 12 + (1,5a)^2 5a^2 = 33,3 a^4.$$

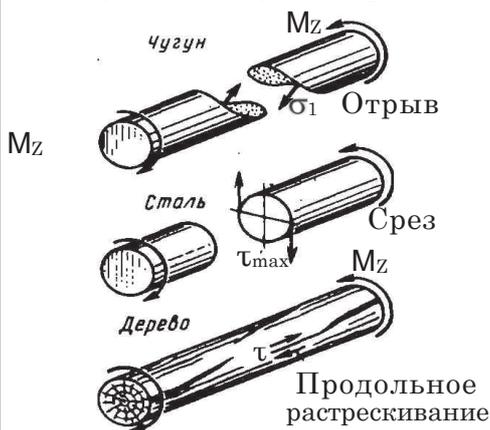


## 7. Определение геопараметров и напряжений сдвига при кручении



Окружности, нарисованные на стержне из пластического материала, под действием  $M_z$  вытягиваются по направлению  $\sigma_1$ .

⑥ Разрушение стержней при кручении



Рассмотрим *кручение* цилиндрического стержня ( $L \gg D$ ) под воздействием равных противоположно направленных крутящих моментов  $M_z$ , приложенных по его торцам (①).

Допущения: волокна цилиндрических тел *сдвигаются* при *кручении* на  $\gamma$ , оставаясь прямыми; круглые М-сечения при *повороте* относительно оси Z на угол  $\theta_z$  не искажаются и остаются перпендикулярными центральной оси Z стержня.

Двумя цилиндрическими поверхностями радиусов  $\rho, \rho + d\rho$  выделим (②) трубку (толщина стенки  $d\rho$ ) и М-сечение-кольцо ( $dz \times 2\pi\rho \times d\rho$ ) из неё (③). Вообразим *деформацию* материала элемента ИАВМ ( $dz \times \rho\phi \times d\rho$ ) под действием моментов  $M_z$ . Представляя совместность *перемещения* точки М ( $dz, \rho \cdot d\theta_z$ ) при *сдвиге* волокна  $dz$  на  $\gamma - MM' = \gamma \cdot dz$  и при *повороте* М-сечения на  $d\theta_z - MM' = d\theta_z \cdot \rho$ , выразим:  $\gamma = (d\theta_z/dz)\rho = \Theta\rho$ . Подставив  $\gamma = \Theta\rho$  в принятую модель пропорциональности параметров *сдвига*:  $\tau = G\gamma$ , получим зависимость:  $\tau = G\Theta\rho$ .

Интегрируя по радиусу  $\rho$  моменты  $dQ \cdot \rho$  (④) элементарных сил *сдвига*  $dQ = \tau dA$  кольца ( $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$ ), определим момент внутренних сил в сечении, вызванный *кручением* стержня:

$$M_z = \int_0^{D/2} dQ \cdot \rho = 2\pi G \Theta \int_0^{D/2} \rho^2 \cdot \rho d\rho = G I_z \Theta, \quad 2\pi \int_0^{D/2} \rho^3 \cdot d\rho = \pi D^4/32 = I_z$$

$\Theta = M_z/(G I_z)$  – параметр *закручивания* М-сечения вокруг Z. Подставив в зависимость  $\tau = G\Theta\rho$  параметр *закручивания*  $\Theta = M_z/(G I_z)$ , получим выражение напряжений *сдвига* при *кручении* цилиндрического стержня:  $\tau = (M/I)_z \cdot \rho$ , которые при  $\rho_{\max} = \frac{1}{2}D$  максимальны:  $\tau_{\max} = (M/I)_z \cdot \frac{1}{2}D = 16 M_z/(\pi D^3)$ .

Интегрируя по радиусу  $\rho$  момент инерции  $dI_z = \rho^2 \cdot dA$  кольца  $dA = 2\pi\rho d\rho$  (④), выразим момент инерции круглого сечения на *повороте* вокруг оси Z:  $I_z = \int_0^{D/2} \rho^2 \cdot dA = \int_0^{D/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho d\rho = \pi D^4/32$

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad I_z = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA = I_x + I_y, \quad I_x = I_y = 2I_z = \pi D^4/64.$$

Момент инерции сечения полого вала выражается разностью моментов сечений наружного диаметра  $D$  и внутреннего  $d$ :  $I_x = I_y = \pi D^4/64 [1 - (d/D)^4] = \pi D^4/64 (1 - a^4)$ ,  $I_z = \pi D^4/32 (1 - a^4)$ .

Согласно зависимостям:  $\sigma_\alpha = \sigma_y \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha + \tau_{yz} \sin 2\alpha$  и  $\tau_\alpha = \frac{1}{2} (\sigma_z - \sigma_y) \sin 2\alpha - \tau_{yz} \cos 2\alpha$  напряжения на  $\alpha$ -площадке при *сдвиге* ( $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ) имеют вид:  $\tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha$ ,  $\sigma_\alpha = -\tau \sin 2\alpha$ . Угол  $\alpha = 45^\circ$  ( $\tau = 0$ ,  $\sigma_1 = \tau$ ) соответствует главным площадкам (⑤) наибольших напряжений *растяжения* ( $\sigma_3 = \tau$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = -\tau$ ).

Слабо сопротивляющиеся *растяжению* хрупкие материалы, например, чугун (⑥) разрываются по винтовой поверхности согласно траекториям главных напряжений *растяжения*  $\sigma_1$  при *кручении*. Образец из пластичной стали срезается по плоскости наибольших напряжений *сдвига*  $\tau_{\max}$  ( $\perp$  оси Z). Напряжения *сдвига* максимальны и в продольных сечениях (④), поэтому деревянные стержни при *кручении* расщепляются вдоль волокон; композиционные материалы, армированные пластики растрескиваются по межслойным поверхностям.

Определение параметров кручения цилиндрических тел  
Рассмотрим изменение параметров *кручения*  $M_z$ ,  $\tau$ ,  $\theta_z$  по длине консоли 3Т круглого сечения, которая нагружена как показано на схеме ①. Момент *кручения*  $M_z$  в сечениях, отстоящих на  $z$  от торца Т, представляет сумма крутящих моментов  $M_z$ , приложенных к отсечённой части стержня.

① – график изменения момента *кручения*  $M_z$  вдоль оси Z.

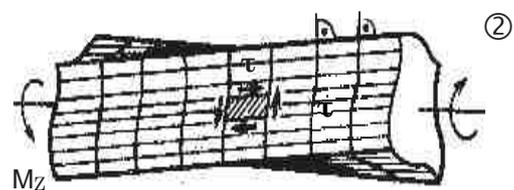
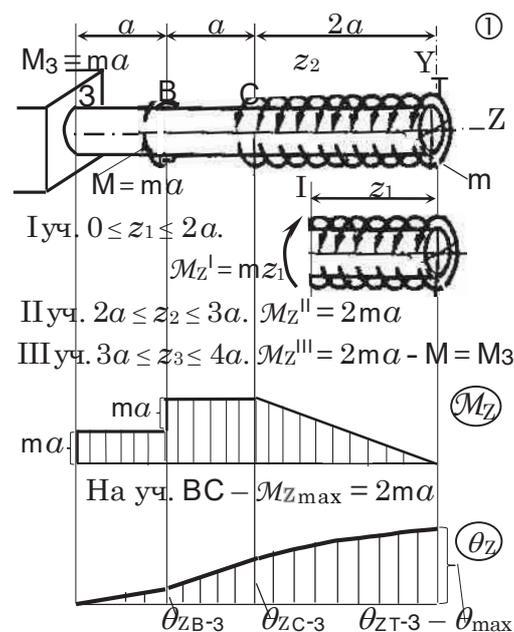
Выразим изменение угла *поворота* М-сечений консоли 3Т (①) относительно защемления 3.  $\theta_{zB-3} = ma \cdot a / (GI_z) = ma \cdot \Lambda$  – угол *поворота* М-сечения на расстоянии  $a$  от защемления 3;  $\theta_{zC-B} = 2ma \cdot \Lambda$ ,  $\theta_{zC-3} = \theta_{zB-3} + \theta_{zC-B} = (1 + 2) ma \cdot \Lambda$ ,  $\Lambda = a / (GI_z)$ ;  $\theta_{zT-C} = [m / (GI_z)] \int_0^{2a} z_1 dz = 2ma \cdot \Lambda$ . Угол *поворота* торца  $\theta_{zT-3}$  равен сумме углов:  $\theta_{zC-3} + \theta_{zT-C} = (3 + 2) ma \cdot \Lambda = 5ma^2 / (GI_z)$ .

Формула напряжений *сдвига* при *кручении* стержня круглого М-сечения имеет вид:  $\tau = (M/I_z) \cdot \rho$ ;  $\tau_{\text{больш}} = (M_{\text{больш}}/I_z) \cdot \rho_{\text{max}} = (2ma^2/I_z) \cdot \frac{1}{2}d$  – выражение наибольшего напряжения *сдвига*. Допускаемые параметры при *кручении* определяем из условия прочности материала:  $\tau_{\text{больш}} = (M_{\text{больш}}/I_z) \cdot \rho_{\text{max}} \leq [\tau]$ .

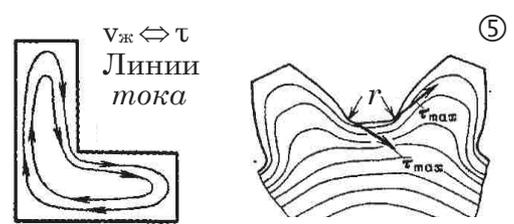
Параметры *кручения* стержней прямоугольного сечения  
При *кручении* стержней некруглого профиля наблюдается *искривление* плоскостей М-сечений (③). Для решения более сложной задачи выражения параметров *кручения* стержней некруглого сечения применяются методы теории упругости. Формулы угла *закручивания* М-сечения и напряжения *сдвига* материала, имеющие вид параметров *кручения* тел круглого сечения, приведены в справочниках.  $\Theta = \theta_z / l = M_z / (G \cdot \beta hb^2)$  – параметр *закручивания* относительно отстоящего на  $l$  сечения;  $\tau_d = M_z / (\alpha \cdot hb^3)$  – наибольшее напряжение *сдвига* по серединам длинных сторон  $h$  прямоугольного сечения стержня (④),  $\tau_k = k \tau_{\text{max}}$  – напряжение по серединам коротких сторон  $b$ . коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k$  для ряда отношений размеров  $h/b$  прямоугольного профиля приведены ниже в таблице.

$h/b$	1	1,5	2,0	3	4	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta$	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$k$	1,000	0,858	0,796	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743

Оценка  $\tau$  при *кручении* методом гидродинамической аналогии  
Линии *тока* жидкости – траектории её частиц, вращающихся с постоянной скоростью в плоском сосуде, имеющем форму профиля DO (⑤), подобны замкнутым линиям, касательные к которым уподобляются равным напряжениям *сдвига*  $\tau$  при *кручении*. Сгущение линий *тока* вблизи входящих углов показывает места концентрации напряжения *сдвига*. И чем меньше радиус скругления, тем выше уровень напряжений.

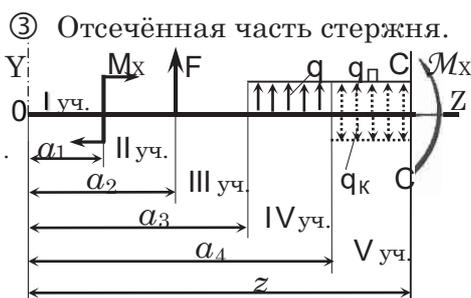
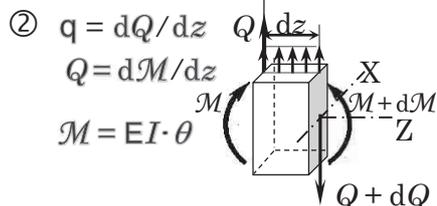
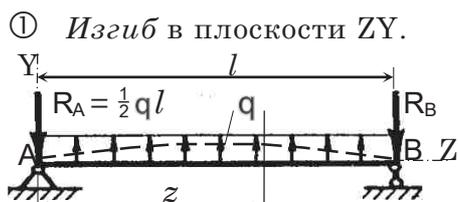


③ – график *смещений*  $w$  точек контура прямоугольного М-сечения вдоль оси Z.  $w = f(x, y)$  – Перемещения  $w = f(x, y)$  точек оси симметрии сечения равны нулю. Если в чётных квадрантах *перемещения*  $w$  положительны, то в нечётных квадрантах  $w$  отрицательны. Объём между выпукловогнутой плоскостью сечения и исходной поверхностью:  $V = \int w dA$ , равен нулю.

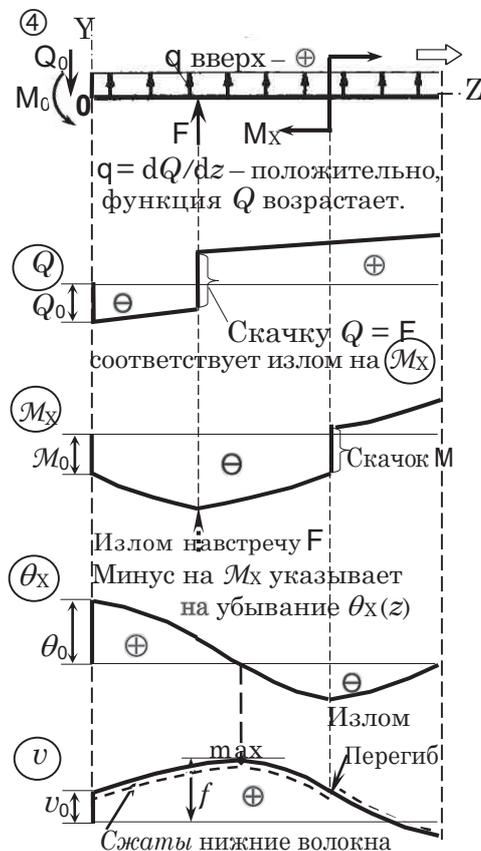


Для выступающего угла ( $\alpha < 180^\circ$ )  $\tau = 0$ . Для входящего угла ( $\alpha > 180^\circ$ )  $\tau = \infty$ .

## 8. Изменение параметров изгиба и изгиба с кручением по длине стержня



Опираясь на дифференциальные зависимости:  $Q' \rightarrow M_X'' \rightarrow \theta_X''' \rightarrow v^{IV}$ , проверяем соответствие графиков  $Q(z)$ ,  $M_X(z)$ ,  $\theta_X(z)$ ,  $v(z)$  слева направо; по построенным графикам  $Q$ ,  $M_X$  предугадываем линии  $\theta_X(z)$ ,  $v(z)$ .



Зависимости силовых и геометрических параметров изгиба. Рассмотрим изменение параметров *изгиба*:  $Q_Y$ ,  $M_X$ ,  $\theta_X$ ,  $v$ , вдоль оси  $Z$  двухопорной балки пролётом  $l$ , нагруженной в главной плоскости  $ZY$  распределёнными силами интенсивностью  $q$  (①).

Дифференциальные зависимости параметров изгиба стержня. Двумя близкими сечениями на расстоянии  $z$  от опоры  $A$  выделим часть стержня (②) малой длины и покажем равнодействующие внутренних сил в сечениях: слева – сила *сдвига*  $Q_Y = -\frac{1}{2}ql + qz$  и момент *изгиба*  $M_X = -\frac{1}{2}ql \cdot z + \frac{1}{2}qz^2$ , справа –  $Q_Y + dQ_Y$  и  $M_X + dM_X$ . Из уравнений:  $\sum F_Y = Q_Y + q dz - (Q_Y + dQ_Y) = 0$ ,  $\sum M_X = M_X + Q_Y dz + q dz \cdot \frac{1}{2} dz - (M_X + dM_X) = 0$ , представим зависимости силовых параметров:  $q = dQ_Y/dz$ ,  $Q_Y = dM_X/dz$ , которые совместно с уравнением:  $v'' = \theta_X' = (M/I)_X/E$  выражают дифференциальные зависимости *изгиба* в плоскости  $ZY$ :  $Q_Y' = M_X'' = EI_X \cdot \theta_X''' = EI_X \cdot v^{IV}$ .

Представление изменения функций параметров изгиба  $M_X$ ,  $\theta_X$ ,  $v$ . Выразим функцию момента *изгиба*  $M_X(z)$  выделенной сечением С-С части стержня (③) на расстоянии  $z$  от начала отсчёта 0:  $M_X(z) = 0 \cdot \downarrow^I + M_X(z - a_1) \cdot \downarrow^{II} + F(z - a_2) \cdot \downarrow^{III} + q(z - a_3)^2/2 \cdot \downarrow^{IV} - q_K(z - a_4)^2/2 \cdot \downarrow^V$ . Обозначения:  $\downarrow^I, \downarrow^{II}, \dots$ , указывают на неприменимость стоящих за ними слагаемых на участках II, III, ... соответственно. Интегрируя функцию  $M_X(z)$ , определим угол *поворота*:  $EI_X \theta_X(z) = C_1 \cdot \downarrow^I + M_X(z - a_1) \cdot \downarrow^{II} + F(z - a_2)^2/2! \cdot \downarrow^{III} + q(z - a_3)^3/3! \cdot \downarrow^{IV} - q_K(z - a_4)^3/3! \cdot \downarrow^V$ . Интегрируя  $EI_X \theta_X(z)$ , выразим *прогиб*:  $EI_X v(z) = C_2 + C_1 z \cdot \downarrow^I + M_X(z - a_1)^2/2! \cdot \downarrow^{II} + F(z - a_2)^3/3! \cdot \downarrow^{III} + q(z - a_3)^4/4! \cdot \downarrow^{IV} - q_K(z - a_4)^4/4! \cdot \downarrow^V$ . Постоянные интегрирования в начале отсчёта 0:  $C_1 = EI_X \cdot \theta_{X0}$  и  $C_2 = EI_X \cdot v_0$  определяем из граничных условий. Постоянные на границах участков I-II, II-III, ... выравниваем, соблюдая правила: Начало координат 0, располагаем на левом конце стержня. Интегрируем, не раскрывая скобки сомножителей  $(z - a_i)$ . К *изгибающему* моменту  $M$  добавляем множитель  $(z - a_i)^0 = 1$ .

А если распределённая нагрузка  $q$  не доходит до исследуемого сечения, продолжаем нагрузку ( $q_n$  на V уч. схемы ③) до сечения, компенсируя действие  $q_n$  противоположно направленной  $-q_k$ . Для обозначения графиков изменения параметров *изгиба*  $Q$ ,  $M_X$ ,  $\theta_X$ ,  $v$  (④) применяются окружности:  $\odot Q$ ,  $\odot M_X$ ,  $\odot \theta_X$ ,  $\odot v$ .

Проверка соответствия графиков параметров  $Q$ ,  $M_X$ ,  $\theta_X$  и  $v$ . В месте приложения сил  $F$  ( $M$ ) на графике  $Q$  ( $M$ ) – скачок на  $F$  ( $M$ ) по их направлению, а на графике  $M$  ( $\theta$ ) – излом навстречу  $F$  ( $M$ ). При  $q = \text{const}$ , график  $Q(z)$  – наклонная прямая,  $M(z)$  – парабола,  $\theta(z)$  – график функция 3-го порядка, кривая  $v(z)$  на порядок выше. Соответственно свойствам второй производной выпуклость линий  $M_X(z)$ ,  $\theta_X(z)$ ,  $v(z)$  и их изломы обращены навстречу  $q$ ,  $Q$ ,  $M_X$ . Точка перехода линий графиков  $q$ ,  $Q(z)$ ,  $M(z)$ ,  $\theta(z)$  через ноль – место экстремума соответствующих функций  $Q$ ,  $M$ ,  $\theta$ ,  $v$  (от  $\oplus$  к  $\ominus$  –  $\text{max}$ ). Положительный знак графика функций  $Q_Y$ ,  $M_X$ ,  $\theta_X$  указывает на возрастание соответствующих им функций  $M_X$ ,  $\theta_X$ ,  $v$ .

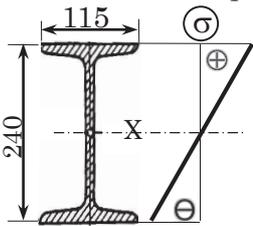
Рассмотрим балку (①) из стали:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $[\sigma] = 160$  МПа, пролёт  $l = 3$  м. Допускаемый прогиб:  $l/150 = 2$  см. Вычислим реакции:  $\sum M_A = -20 - 20 \cdot 4 - 40 \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot 1 + R_B \cdot 3 = 0$ ,  $R_B = 73,3$  кН,  $\sum M_B = -20 \cdot 2 \cdot 1 + 40 \cdot 1 + 20 \cdot 2 \cdot 2 - R_A \cdot 3 = 0$ ,  $R_A = 26,7$  кН.

Определение места наибольшего момента изгиба  $M_{\text{больш}}$

Выделим участки одинаковых функций:  $Q(z)$  и  $M_X(z)$ .  
 I уч.  $0 \leq z_1 \leq 2$  м,  $M(z_1) = 26,7 \cdot z_1 - 20 \cdot z_1^2/2$ ; II уч.  $-2 \leq z_2 \leq 3$  м,  $M(z_2) = 26,7 \cdot z_2 - 20 \cdot 2(z_2 - 1) - 40(z_2 - 2)$ ; III уч.  $-0 \leq z_3 \leq 1$  м,  $M(z_3) = 20 \cdot z_2$ . Вычислим  $Q(z)$ ,  $M(z)$  на границах участков, построим графики (②, ③). Приравняв  $Q(z_1) = 26,7 - 20 \cdot z_1$  нулю, определим абсциссу  $z_1 = 1,33$  м точки экстремума момента изгиба  $M_{\text{max}} = 17,78$  кНм на I уч..  $M_{\text{больш}} = 40$  кНм – наибольший момент изгиба при  $z_2 = 3$  м, слева от опоры В.

Подбор профиля балки с наименьшей затратой материала  $\sigma_{\text{больш}} = (M_{\text{больш}}/I_X) y_{\text{max}} \leq [\sigma]$  – условие прочности при изгибе.

Сравнение профилей равнопрочных стержней при изгибе (⑥) показывает, что при равном геопараметре М-сечения  $I/y_{\text{max}}$  (в сортамента прокатной стали он обозначен  $W$ ) у двутавра наименьшая площадь  $A$ , определяющая расход материала. Вычислим параметр  $I_X/y_{\text{max}} = 40 \cdot 10^{-3}/160 = 250 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ . Выберем двутавр № 22,  $W_X = I_X/y_{\text{max}} = 232 \text{ см}^3$ .



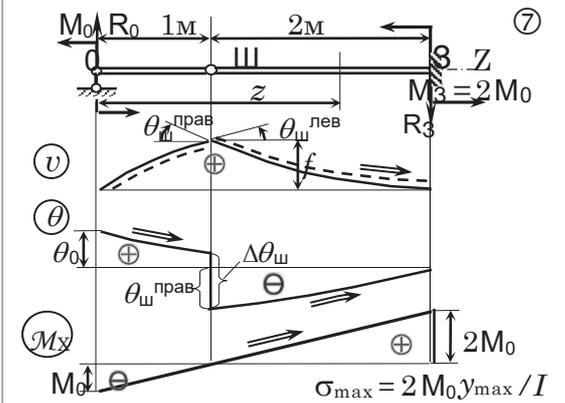
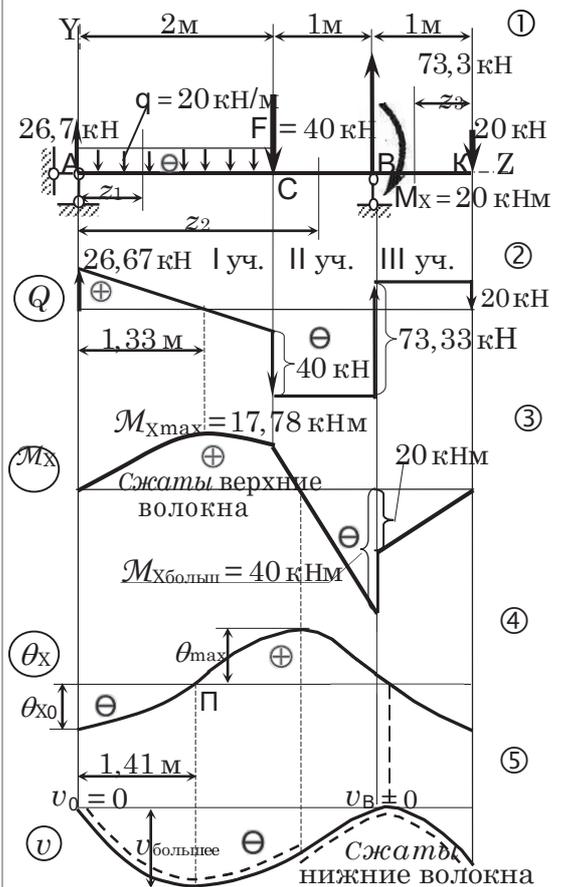
Определим наибольшее напряжение:  $\sigma = 40 \cdot 10^{-3}/(232 \cdot 10^{-6}) = 172$  МПа.  $\Delta\sigma = (172 - 160) 100\%/160 = 7,5\%$ . Допускаемое перенапряжение 5%. Выбираем двутавр № 24,  $I_X = 3460 \text{ см}^4$ ,  $I_X/y_{\text{max}} = 289 \text{ см}^3$ .  
 $\sigma_{\text{больш}} = 40 \cdot 10^{-3}/(289 \cdot 10^{-6}) = 138$  МПа.

Установление наибольшего прогиба  $f$  (стрела прогиба)

Выразим функцию прогибов точек стержня АК:  $EI v(z) = EI v_0 + EI \theta_0 \cdot z + 26,67 \cdot z^3/6 - 20 \cdot z^4/24 + 20(z-2)^4/24 - 40(z-2)^3/6 + 20(z-3)^2/2 + 73,33(z-3)^3/6$ .  $v_0 = v_A = 0$ .  $\theta_0$  определим, приравняв нулю прогиб на опоре В ( $z = 3$  м):  $EI \cdot v_B = EI \theta_0 \cdot 3 + 26,67 \cdot 3^3/6 - 20 \cdot 3^4/24 + 20 \cdot 1^4/24 - 40 \cdot 1^3/6 = 0$ ;  $EI \cdot \theta_0 = -15,56 \text{ кНм}^2$ . Построим графики углов поворота (④) и прогибов (⑤), опираясь на дифференциальные зависимости:  $M_X'' \rightarrow \theta_X''' \rightarrow v^{IV}$ . Определим абсциссу точки П пересечения на участке I оси Z линией графика  $\theta(z)$  и вычислим при  $z = 1,41$  м наибольший прогиб  $v_{\text{П}} = v_{\text{больш}}$ :  $EI \cdot v_{\text{больш}} = -15,56 \cdot 1,41 + 26,67 \cdot 1,41^3/6 - 20 \cdot 1,41^4/24 = 12,7 \text{ кНм}^3$ ,  $EI = 2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^{-8} = 6,92 \text{ МНм}^2 = 1,84 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ . Наибольший прогиб  $f = 0,18$  см.

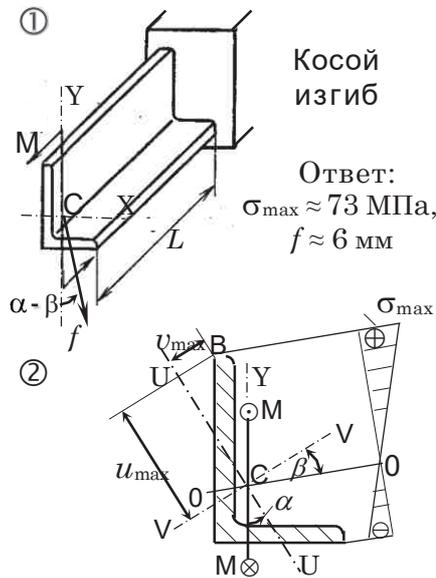
Выражение прогиба балки с промежуточным шарниром (⑦)

$\sum M_{\text{ш}}^{\text{слева}} = R_0 \cdot 1 - M_0 = 0$ ,  $R_0 = M_0/1 = -R_3$ .  $\sum M_3^{\text{справа}} = R_3 \cdot 2 - M_R = 0$ .  $M(z) = M_0 - R_0 \cdot z$ ;  $EI \cdot \theta(z) = EI \theta_0 - M_0 \cdot z + R_0 \cdot z^2/2 + EI \cdot \Delta\theta_{\text{ш}}$ ,  $EI \cdot v(z) = EI \cdot \theta_0 \cdot z - M_0 \cdot z^2/2 + R_0 \cdot z^3/6 + EI \cdot \Delta\theta_{\text{ш}}(z-1)$ ,  $\Delta\theta_{\text{ш}}$  – скачок угла поворота в шарнире. Приравнявая нулю угол поворота и прогиб в защемлении 3 ( $z = 3$  м), выразим углы поворота:  $EI \theta_0 = 3M_0$ ,  $EI \cdot \Delta\theta_{\text{ш}} = 4,5 M_0$  и наибольший прогиб в точке Ш ( $z = 1$  м):  $EI \cdot v_{\text{max}} = 3M_0 - M_0/2 + M_0/6$ ,  $f = 2,67 M_0/EI$ .



<p>Растяжение</p> $\varepsilon = \sigma / E$ $\sigma = N/A$	<p>Изгиб в пл. ZY</p> $v'' = \theta_X' = (M/I)_X / E$ $\sigma = (M/I)_X \cdot y$	<p>Сдвиг в пл. ZY</p> $\gamma = \tau / G$ $\tau = Q/A$	<p>Кручение</p> $\Theta = \theta_Z / l = (M/I)_Z / G$ $\tau = (M/I)_Z \cdot \rho$
---	--	--	---

Определение параметров изгиба от момента, приложенного не в главной плоскости стержня



К свободному концу закреплённого неравнополочного уголка (1)  $75 \times 50 \times 5$  ( $L = 1 \text{ м}$ ,  $I_X = 34,8 \text{ см}^4$ ,  $I_Y = 12,5 \text{ см}^4$ ) приложен момент  $M = 0,4 \text{ кНм}$  в центральной плоскости ZY, составляющей угол  $\alpha$  ( $\text{tg } \alpha = 0,436$ ) с главной осью U ( $I_U = 7,24 \text{ см}^4$ ,  $I_V = I_X + I_Y - I_U$ ). Напряжения  $\sigma_z = \sigma$  представляем суммой напряжений от составляющих момента M относительно главных осей U, V:  $M_U = M \sin \alpha$  и  $M_V = M \cos \alpha$ .

$$\sigma = (M/I)_V u + (M/I)_U v \text{ или } \sigma = M (u \cos \alpha / I_V + v \sin \alpha / I_U).$$

Из уравнения  $\sigma = 0$  выразим угол нейтральной линии 0-0 с осью V:  $\text{tg } \beta = u/v = -(I_U/I_V) \text{ctg } \alpha$  и покажем 0-0 на схеме (2) сечения уголка. Установив графически или аналитически координаты  $u_{\max}$ ,  $v_{\max}$  самой удалённой точки В сечения от нейтральной 0-0, определим наибольшее напряжение *растяжения*  $\sigma_B = M_U \cdot u_{\max} / I_U + M_V \cdot v_{\max} / I_V$  и *прогиб* торца консоли:  $f = \sqrt{f_U^2 + f_V^2} = (\frac{1}{2} ML^2/E) / \sqrt{(\cos \alpha / I_V)^2 + (\sin \alpha / I_U)^2}$ . Перпендикулярный нейтральной вектор *прогиба*  $f$  (1) отклоняется от плоскости нагрузки ZY к плоскости наименьшей жёсткости уголка ZU (*искривление* не в плоскости нагрузки называют «косой изгиб»).

При совместном воздействии растягивающих сил  $F_z$  и изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$  в главных плоскостях ZY, ZX упруго деформированного стержня напряжения материала определяются суммой напряжений от каждого силового фактора в отдельности:  $\sigma_z = \pm N/A \pm (M/I)_X \cdot y \pm (M/I)_Y \cdot x$ .

Выражение напряжений, вызванных совместным действием изгибающих и крутящих моментов



Закреплённая одним концом конструкция (1) перпендикулярных стержней I ( $l$ ), II ( $2l$ ) прямоугольного сечения ( $b \times 2b$ ) нагружена на свободном конце силами вдоль оси Z –  $F_z = F$  и поперёк Z –  $F_y = 2F$ . Стержень I *растянут* силой  $F$ :  $N = F$ ,  $A = 2b^2$ ,  $\sigma_z = \sigma = N/A = \frac{1}{2} F/b^2$  и *изогнут* в плоскости ZY силой  $2F$  (2):  $M_{X\max} = 2Fl$ ,  $I_X/y_{\max} = bh^2/6$ ,  $\sigma_{\max} = (M_{\max}/I)_X / y_{\max} = 2Fl / (\frac{2}{3} b^3) = 3Fl/b^3$  (*сжаты* нижние волокна).  $\sigma_{\max}^I = \frac{1}{2} F/b^2 + 3Fl/b^3$  – наибольшие напряжения стержня I у узла С. Стержень II *искривлён* в плоскости ZY силой  $2F$  (2):  $M_{X\max} = 2F \cdot 2l$  (*сжаты* нижние волокна),  $\sigma_{\max} (M_x) = 6Fl/b^3$  и силой  $F$  в плоскости ZX:  $M_{Y\max} = F \cdot 2l$  (*сжаты* правые волокна),  $I_Y/x_{\max} = hb^2/6 = b^3/3$ ,  $\sigma_{\max} (M_y) = 6Fl/b^3$ . В М-точке угла четвертой четверти сечения М+ (3) близ заземления напряжение *растяжения*  $\sigma_{M\max} = 6Fl/b^3 + 6Fl/b^3 = 12Fl/b^3$  максимально, наибольшее *сжатие* в М-точке М-. Напряжения *сдвига*  $\tau$  от поперечных сил  $Q_y = 2F$  и  $Q_x = F$  (II) не учитываем, потому что они существенно меньше  $\sigma$ :  $\tau/\sigma \approx b/l$ ,  $a \ll l$ . Напряжения *сдвига* от крутящего момента  $M_z = 2F \cdot l$  максимальны посередине длинных сторон прямоугольного сечения стержня II  $\tau_{\max Д} = M_z / (\beta hb^2) = 2Fl / (0,246 \cdot 2b^3) = 4,07 Fl/b^3$  (при  $h/b = 2$ ,  $\beta \approx 0,256$ ,  $k = 0,796$ ), посередине коротких сторон они меньше:  $\tau_K = k\tau_{\max} = 3,24 Fl/b^3$ . Главные напряжения макро областей точек Д:  $\sigma_{1,3 Д} = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} (M_y) \pm \sqrt{\sigma_{\text{больш}}^2 + 4\tau_{\max}^2}) = \frac{1}{2} Fl/b^3 [6 \pm \sqrt{6^2 + 4(4,07)^2}] = (3 \pm 5,1) Fl/b^3$  меньше напряжений *растяжения-сжатия* точек М  $\sigma_M = |12Fl/b^3|$  ( $\tau_M = 0$ ). Из условия:  $\sigma_{M\text{больш}} \leq [\sigma]$  можно подобрать размеры сечения ( $b$ ) или определить допускаемую нагрузку  $[F]$ .

Наибольшие напряжения	Растяжение и изгиб в пл. ZY, ZX $\sigma_z = N/A + (M/I)_X y_{\max} + (M/I)_Y x_{\max}$	$\sigma = (M/I)_X \cdot y_{\max} \rightarrow$ изгиб и кручение $\leftarrow \tau = (M/I)_Z \cdot \rho_{\max}$ Главные напряжения $\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} [\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}]$
-----------------------	---	--

Представление силовых параметров наиболее напряжённых мест вала редуктора (1)

Схематизируя нагружение (2), приводим силы в зацеплении косозубой шестерни ( $D = 280$  мм) к центру тяжести С вала AD редуктора:  $F_{ок} = F$  – окружная сила,  $F_{ос} = 0,15 F$  – осевая сила,  $M_Z = F_{ок} \cdot \frac{1}{2} D = 0,14 F$  – крутящий момент,  $M_X = F_{ос} \cdot \frac{1}{2} D = 0,02 F$  – изгибающий момент и  $F_r = 0,4 F$  – радиальная сила. Силы натяжения ветвей ременной передачи  $F_1, \frac{1}{2} F_1$  в месте С посадки шкива ( $D_1 = 0,5$  м) перенесём к центру вала А с моментом  $M_Z = \frac{1}{2} F_1 \cdot \frac{1}{2} D_1 = 0,14 F$ . Следовательно сила натяжения  $F_1$  равна 1,1 F.

Рассмотрим изгиб вала AD в плоскости ZX (3). Определим реакции опор:  $R_{ВХ} = 0,62 F$ ,  $R_{DХ} = 0,38 F$ . Выразим момент изгиба на участке ВС:  $M_Y = 0,62 F \cdot z$ , при  $z = 0,25$  м,  $M_{YС} = 0,62 F \cdot 0,25 = 0,15 F$ . Строим график изменений момента изгиба  $M_Y$  по пролёту BD, откладывая  $M_Y$  со стороны сжатых волокон.

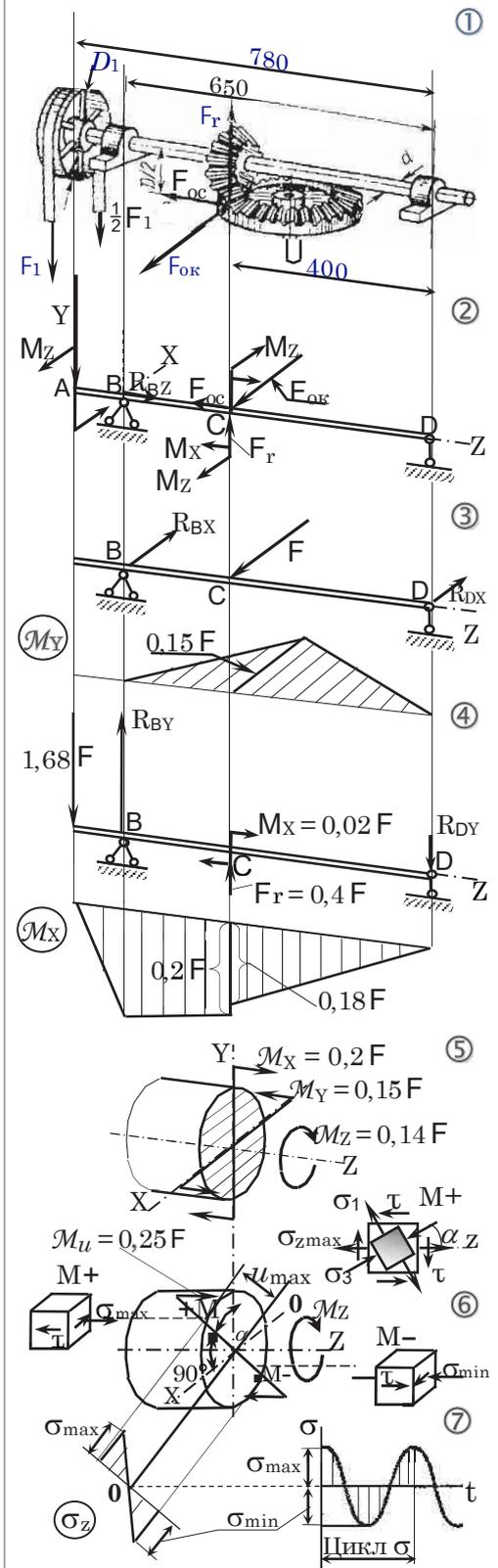
Определим реакции в плоскости ZY (4):  $R_{ВУ} = 1,74 F$ ;  $R_{DУ} = 0,46 F$ . Выразим моменты изгиба близ опоры В:  $M_X = 1,68 F \cdot 0,13 = 0,22 F$  и возле шестерни С:  $M_{X\text{слева}} = -1,68 F \cdot 0,38 + 1,74 F \cdot 0,25 = -0,2 F$ ;  $M_{X\text{справа}} = -0,46 F \cdot 0,4 = -0,18 F$ . Наиболее нагруженным местом вала является область слева от сечения С:  $M_Z = 0,14 F$  – момент кручения;  $M_{XС} = 0,2 F$ ,  $M_{YС} = 0,15 F$ . Максимальный суммарный момент изгиба:  $M_{из\max} = \sqrt{(0,20 F)^2 + (0,15 F)^2} = 0,25 F$  (5).

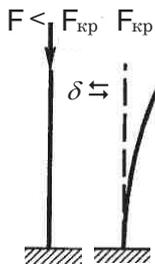
Перпендикулярная плоскости  $M_{из\max}$  нейтральная линия 0-0 составляет с осью Y угол  $\alpha$  ( $\sin \alpha = M_Y / M_{из}$ ). Самые удалённые от 0-0 М-точки сечения наиболее нагруженной области С вала (6) – это места наибольших напряжений растяжения в М+ и сжатия в М- при изгибе:  $\sigma_{z M+} = |\sigma_{z M-}| = \sigma_{из\max} = (M/I) \cdot \xi = 0,25 F \cdot \frac{1}{2} d / (3,14 d^4 / 64) = 2,55 F / d^3$  и  $\tau_{\max} = M / I_Z = 0,71 F / d^3$  – максимальные напряжения сдвига материала при кручении.

Напряжения  $\sigma_z$  от сжимающих сил  $F_{ос}$  участка вала ВС много меньше, чем от изгиба;  $\tau$  от поперечных сил  $F_r, F_{ок}$  существенно меньше, чем от  $M_Z$ , поэтому  $\sigma_z$  от  $F_z$  и  $\tau$  от  $F_x, F_y$  не учитываются.

В месте наибольшей напряжённости двухосной деформации найдём главные напряжения  $\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} (\sigma_{из\max} \pm \sqrt{\sigma_{из\max}^2 + 4\tau_{\max}^2}) = (2,55 \pm \sqrt{2,55^2 + 4 \cdot 0,71^2}) \cdot F / 2d^3$ ,  $\sigma_1 = 2,73 F / 2d^3$ ,  $\sigma_3 = -0,18 F / 2d^3$ ,  $\sigma_2 = 0$  и их направление:  $\text{tg } 2\alpha = 2\tau_{\max} / \sigma_{из\max} = 2 \cdot 0,71 / 2,55 = 0,56$ .

При повороте вала на  $180^\circ$  (7) растянутые изгибом нижние волокна окажутся вверху сжатыми и напряжение изменится от  $\sigma_{\max} = 2,55 F / d^3$  до  $\sigma_{\min} = -2,55 F / d^3$ . Циклическое изменение напряжений во времени  $t$  эксплуатации существенно снижает характеристики сопротивления материала разрушению.  $\sigma_{-1}$  ( $R_\sigma = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = -1$ ) означает предел выносливости материала при симметричном цикле изменения напряжения растяжения.

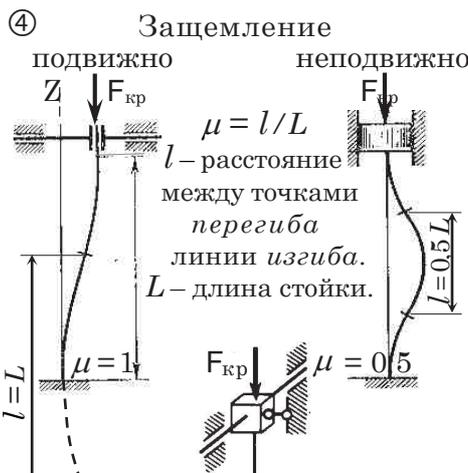
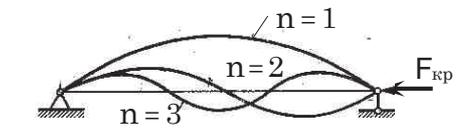
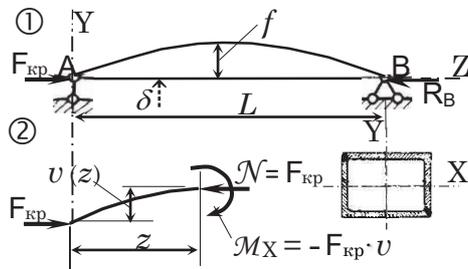




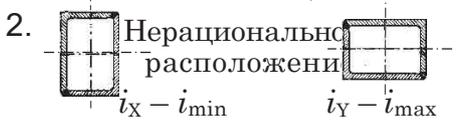
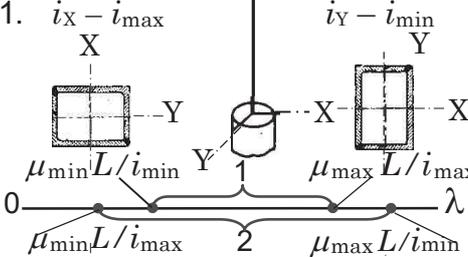
Если груз  $F$  меньше, чем его критическое значение, то стержень остаётся прямым и испытывает лишь осевое сжатие. Эта прямая форма равновесия устойчива, т. е. если приложить поперечную силу и вызвать малый прогиб, то прогиб исчезает, когда поперечная сила будет удалена, и стержень снова становится прямым. Увеличивая  $F$  постепенно, мы приходим к условию, при котором прямая форма равновесия становится неустойчивой и незначительная поперечная нагрузка вызывает поперечный прогиб, который не исчезает после удаления нагрузки.

С. П. Тимошенко

## 9. Сжатый прямой стержень. Устойчивость исходной формы равновесия



⑤ Пл. YZ  $\lambda_{YZ} = \mu_{YZ} L / i_X$   
 $\mu_{YZ} - \mu_{max} = 1$   
 Пл. XZ  $\lambda_{XZ} = \mu_{XZ} L / i_Y$   
 $\mu_{XZ} - \mu_{min} = 0,7$



Для сжатого прямого стержня коробчатого сечения ( $I_X < I_Y$ ), искривлённого малым возмущением  $\delta$  в плоскости ZY (①) наибольшей податливости ( $L/EI_X$ ), установим величину  $F_{кр}$  – критическая сила. При  $F > F_{кр}$  прямой стержень искривляется.

Выразим момент изгиба в сечении с координатой  $z$ :  $M_X = -F_{кр} \cdot v$  (момент, увеличивающий кривизну, считаем отрицательным), и, подставив его в уравнение прогибов  $EI_X \cdot v'' = M_X$ , получим:  $EI_X \cdot v'' + F_{кр} \cdot v = 0$ . Общее решение уравнения:  $v'' + k^2 v = 0$  [ $k^2 = F_{кр} / (EI_X)$ ] имеет вид:  $v(z) = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz$ . Из граничных условий шарнирно закреплённого по концам стержня:  $z = 0, v_0 = C_2 \cos 0 = 0$  и  $z = L, v = C_1 \sin kL = 0$ , выразим постоянные:  $C_2 = 0$  и  $C_1 \sin kL = 0$ . При  $C_1 = 0, v = 0$  – решение не соответствует постановке задачи. Если  $C_1 \neq 0$ , то  $\sin kL = 0$ , следовательно,  $kL = \pi n, n = 1, 2, \dots$  означает число полуволн (②) синусоиды  $v(z) = C_1 \sin(\pi n z / L)$ . Из равенства:  $F_{кр} / (EI_X) = k^2 = n^2 \pi^2 / L^2$  выразим  $F_{кр} = n^2 \pi^2 EI_{min} / L^2$ . Реальный смысл имеет только первая критическая сила:  $F_{кр} = \pi^2 EI_{min} / L^2$ , при которой возможна изогнутая форма прямого сжатого стержня.  $\sigma_{кр} = F_{кр} / A = \pi^2 EI_{min} / (L^2 A)$  – критическое напряжение материала.

Влияние способа крепления стойки (③, ④, ⑤) на величину  $F_{кр}$  оценивает мера отношения длин  $\mu = l/L$ , показывающая сколько длин  $L$  стержня укладывается в длине  $l$  полуволны синусоиды.  $F_{кр} = \pi^2 EI_{min} / (\mu L)^2$  – формула критической силы сжатия стойки. Введём геохарактеристику изгиба сжатого стержня  $\lambda = \mu L / i$  ( $i = \sqrt{I/A}$  – параметр инерции сечения), именуемую гибкостью. Формула критических напряжений имеет вид:  $\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2$ .

При различном креплении стержня в главных плоскостях ZY, ZX (⑤), его располагают так, чтобы  $\mu_{max} = l_{max} / L$  соответствовала  $i_{max}$ . Вариант 1 шарнирного закрепления в плоскости ZX ( $i_{min}^2 = I_{min} / A$ ) верхнего конца закреплённой стойки ( $\mu_{min}$ ) ближе к условию равноустойчивости:  $\lambda_{ZY} = \lambda_{ZX}$ , чем вариант 2.

Уровень  $\sigma_{кр} = E \pi^2 / \lambda^2$  тем выше, чем меньше гибкость стержня  $\lambda = \mu L / i$ , а она тем меньше, чем больше параметр  $i = \sqrt{I/A}$ . При равной площади сечений сплошных и полых стоек (трубы, коробчатые профили) полые стержни экономичнее, их параметр  $i = \sqrt{I/A}$  больше. Критические напряжения сжатых стержней почти не зависят от предела прочности материала  $\sigma_T$  ( $\sigma_{bc}$ ). Например, стойки равной гибкости из стали 3 ( $\sigma_T = 240$  МПа) и из более дорогостоящей стали 30 ХГСА ( $\sigma_T = 950$  МПа) теряют устойчивость практически на одном уровне напряжений  $\sigma_{кр}$ .

Формула критических напряжений  $\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2$  применима при условии:  $\sigma < \sigma_{пц}$  (предел пропорциональности  $\sigma_{пц}$  на схеме ① отмечен точкой П). Из равенства  $\sigma_{кр} = \sigma_{пц}$  выразим  $\lambda_{пц} = \pi \sqrt{E / \sigma_{пц}}$  меньшая *гибкость*, соответствующая пропорциональности  $\varepsilon$  и  $\sigma$ . Для гибких стоек из малоуглеродистой стали ( $\sigma_{пц} = 200$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа)  $\lambda_{пц} \approx 100$ . Функции  $\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2$  стержней большой *гибкости*  $\lambda > \lambda_{пц}$  соответствует участок III (②) кривой  $\sigma = f(\lambda)$ .

Если уровень напряжений выше, чем  $\sigma_{пц}$ , непропорциональное *сжатие* материала характеризует «касательный модуль»  $E_K = d\sigma/d\varepsilon$ . Трудоемкое построение кривой II (②)  $\sigma_{кр} = \pi^2 E_K / \lambda^2$  с сопутствующим построением диаграммы *сжатия*  $\sigma = E_K \varepsilon$  (①) на практике заменяется прямой:  $\sigma_{кр} = a - b\lambda$ ,  $a$  и  $b$  – опытные характеристики материала (для стали  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа).

Участок стержней малой *гибкости*  $\lambda < \lambda_{пр}$  на графике  $\sigma_{кр} = f(\lambda)$  ограничен сверху прямой I (②) на уровне предела прочности  $\sigma_{пч}$  (для пластичного –  $\sigma_T$ , для хрупкого –  $\sigma_{вс}$ ) материала стойки.

$\sigma = N/A \leq [\sigma]_{сж} \varphi$  – условие устойчивости сжатого стержня.

Коэффициент уменьшения допускаемого напряжения *сжатия*  $\varphi = \sigma_{расч} / [\sigma]_{сж}$  с изменением гибкости  $\lambda$  приводится в справочной литературе в виде таблиц (③) и графиков (④). Сравнивая расчётное  $\sigma = N / (A \cdot \varphi)$  и допускаемое  $[\sigma]_{сж}$  напряжения, проверяем стержень из условия устойчивости:  $\sigma_{расч} = N/A \leq [\sigma]_{сж} \varphi$  или устанавливаем допускаемую нагрузку  $[F] \leq A \cdot [\sigma]_{сж} \varphi$ . Задача определения размеров сечения стержня  $A \geq N / ([\sigma]_{сж} \varphi)$  при заданной нагрузке сложнее, потому что от размеров сечения зависит и неизвестная величина коэффициента  $\varphi$  снижения  $[\sigma]$ . При подборе сечения применяется способ последовательных приближений.

Задаём площадь сечения  $A_1$  большую, чем площадь  $A = N / [\sigma]$ , вычисленная из условия прочности. По  $A_1$  задаём размеры сечения и определяем момент инерции  $I_1$ , параметр  $i_1 = \sqrt{I_1 / A_1}$  и *гибкость*  $\lambda_1 = \mu L / i_1$ . По  $\lambda_1$  найдём  $\varphi_1$  и сравним с вычисленным  $\varphi = N / (A_1 \cdot [\sigma])$ . Затем задаём  $\varphi_2 = \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_1)$  и по  $\varphi_2$  определяем  $A_2 = N / (\varphi_2 [\sigma]) \rightarrow I_2 \rightarrow i_2 \rightarrow \lambda_2 \rightarrow \varphi_3, \dots$ . При  $[(\varphi_{n-1} - \varphi_n) 100\% / \varphi_{n-1}] < 3\%$  считаем, что размеры сечения определены. Можно задать коэффициент  $\varphi = 0,5 \rightarrow A = N / (\varphi [\sigma]) \rightarrow I \rightarrow i = \sqrt{I/A} \rightarrow \lambda = \mu L / i \rightarrow \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 = \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_1) \dots$

Если *сжатая* стойка малой гибкости нагружена поперечными силами, то напряжения *сжатия*  $\sigma = N/A$  и напряжения *изгиба*  $\sigma = (M/I)_X \cdot y$ , вызванных поперечными силами, суммируются.

Если же стержень *гибкий*, то при выражении момента *изгиба* учитывается не только момент от поперечных сил:  $M_{п} = EI \cdot v''$ , но и момент от сжимающих сил:  $F \cdot v$  на *искривлении* стержня. Решение дифференциального уравнения:  $EI v'' = EI \cdot v'' - F \cdot v$ ,

приводит к громоздким выкладкам. При оценке величин параметров применяется приближённый метод. Полагая, что линия *изгиба* близка к синусоиде, подставим *смещения*  $v = f \sin \pi z / L$ ,  $v_{п} = f_{п} \sin \pi z / L$  в уравнение *прогибов*:  $EI \cdot f \cdot (\pi/L)^2 = EI \cdot f_{п} (\pi/L)^2 + F \cdot f$ . Определим наибольший *прогиб*, заменяя  $\pi^2 EI / L^2$  на  $F_{кр}$ :  $f = f_{п} / (1 - F/F_{кр})$ . Поперечное нагружение *сжатых гибких* стержней допустимо, если отношение  $F/F_{кр}$  мало. При  $F/F_{кр} = 0,75$ , например,  $f_{п}$  увеличивается вчетверо.

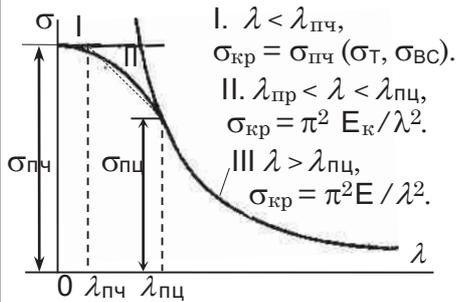
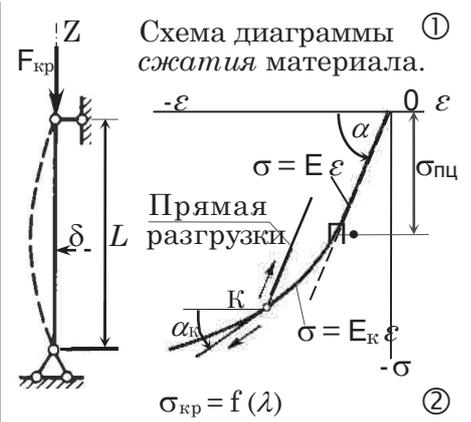
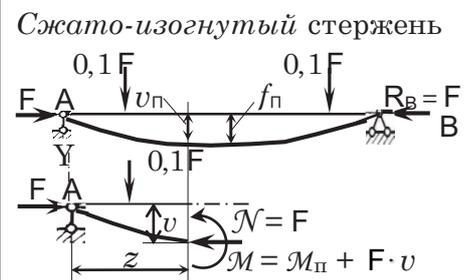
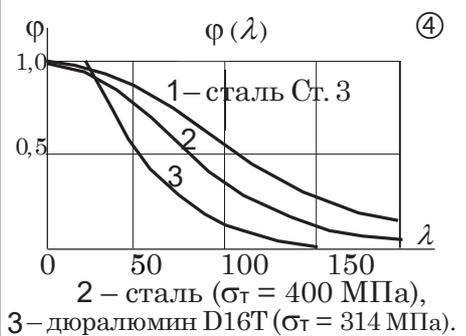


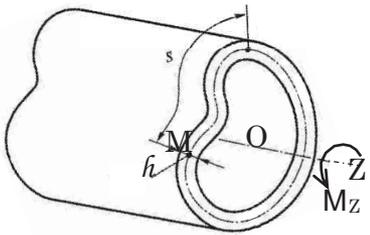
Таблица  $\varphi(\lambda)$  для стоек из чугуна СЧ 24-44 и СЧ 28-48

$\lambda$	10	20	30	40	50
$\varphi$	0,95	0,87	0,75	0,60	0,43
$\lambda$	60	70	80	90	100
$\varphi$	0,32	0,23	0,18	0,14	0,12

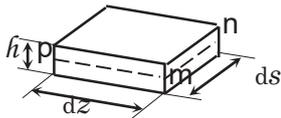


## 10. Кручения тонкостенных стержней замкнутого и открытого профилей

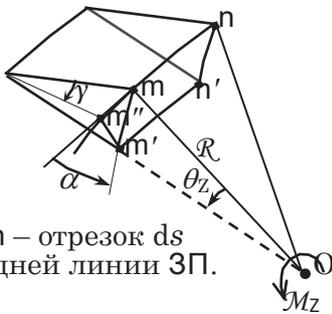
- ① Тонкостенный стержень замкнутого профиля.



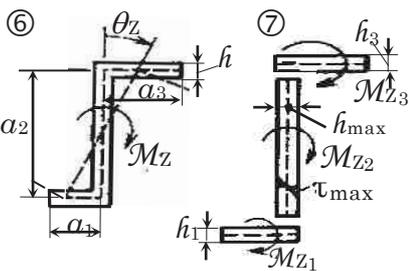
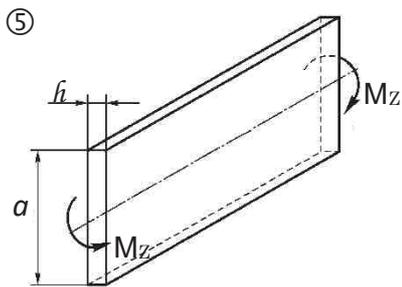
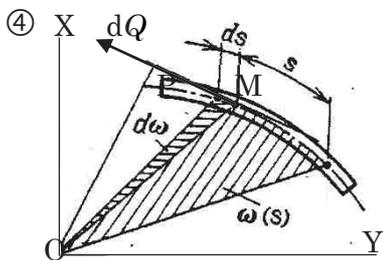
- ②



- ③ Схема сдвига отрезка mn при повороте M-сечения на  $\theta_z$ .



mn – отрезок ds средней линии ЗП.



Тонкостенные стержни замкнутого и открытого профиля отличаются малой по сравнению с другими размерами сечения толщиной стенки.

Выражение параметров кручения стержня замкнутого профиля

Рассмотрим *кручение* тонкостенного стержня замкнутого профиля (①), толщина стенки  $h$  которого есть функция дуги средней линии  $s$  сечения. Полагаем, что напряжение *сдвига*  $\tau_{zs} = \tau$ , вызванное крутящими моментами  $M_z$ , по толщине стенки  $h(s)$  не изменяется.

Произведение напряжения  $\tau$  *сдвига* материала стержня ЗП при *кручении* на толщину тонкой стенки  $h$  – величина постоянная. В точке  $M(z, s)$  стержня ЗП (①) выделим элемент (②) с размерами  $dz, ds, h$ , представим *смещение* точки  $m$  его срединной поверхности (③) и выразим уравнение совместности *смещений* точки  $m$  волокна и сечения:

$mm'' = dz \cdot \gamma$  – *перемещение*  $m$  при *сдвиге* на  $\gamma$  с отрезком волокна  $dz$ ;  $mm' = R \cdot \theta_z$  – *перемещение* точки  $m$  с сечением при *повороте* на  $\theta_z$ ,  $R$  – расстояние от  $m$  до оси  $Z$  *поворота* M-сечения;  $\alpha$  – угол между отрезком  $mm'$  и касательной к средней линии сечения в точке  $m$ .

угол *сдвига*  $\gamma = \theta_z R \cos \alpha$ , выраженный из уравнения *перемещений*,

подставим в формулу пропорциональности параметров *сдвига*  $\tau = G\gamma$ :  $\tau = G\theta_z R \cos \alpha$ , умножим на  $ds$  и проинтегрируем по контуру  $s$ :

$\oint \tau ds = G\theta_z \oint R \cos \alpha ds$ .  $R \cos \alpha$  – перпендикуляр  $OP$  на касательную к средней линии (④),  $R \cos \alpha ds = 2dA$ , а  $\oint R \cos \alpha ds = 2A$ ,  $A$  здесь означает площадь, ограниченную средней линией сечения ЗП.

$\theta_z = [1/(2GA)] \oint \tau ds$  – угол *закручивания* M-сечения стержня ЗП.

Интегрируя  $dM_z = dQ \cdot OP$  – момент внутренних сил  $dQ = \tau \cdot h ds$  (④)

по контуру, определим момент *кручения*:  $M_z = \tau h \oint ds \cdot OP = \tau h 2A$  и из него выразим напряжения *сдвига* материала при *кручении*

стержня замкнутого профиля:  $\tau = M_z / (2Ah)$ . После подстановки  $\tau$

в формулу  $\theta_z$  угол *закручивания* имеет вид:  $\theta_z = [M_z / (4GA^2)] \oint ds / h$ .

Определение параметров кручения стержня открытого профиля

Параметры *кручения* тонкостенного стержня (⑤) прямоугольного

открытого профиля (ОП) определяем по формулам:  $\tau_{\max} = M_z / W_z^2$ ,

$\theta_z = M_z / (GI_z^2)$ .  $W_z^2 = \beta \cdot a h^2$ ,  $I_z^2 = \alpha \cdot a h^3$  – *геохарактеристики* прямо-

угольного сечения. При большой величине отношения длины стороны сечения  $a$  к толщине  $h$  стенки,  $\beta = \alpha = \frac{1}{3}$ . Момент *кручения*

из формулы угла *закручивания*  $\theta_z = M_z / (\frac{1}{3} G \alpha_i h_i^3)$  сечения ОП имеет вид:  $M_z = \frac{1}{3} G \alpha_i h_i^3 \theta_z$ . Момент *кручения* профиля ОП (⑤), который

составлен из прямоугольников разной длины  $a_i$  и толщины стенок  $h_i$ , представляем суммой моментов *кручения* прямоугольников,

составляющих сечение стержня:  $M_z = \frac{1}{3} G \Sigma a_i h_i^3 \theta_z$ . Выразив момент, приходящийся на  $k$ -элемент:  $M_z k = M_z a_k h_k^3 / (\Sigma a_i h_i^3)$ , определим

напряжение:  $\tau_{\max k} = 3M_z h_k / (\Sigma a_i h_i^3)$ . Напряжения материала стенки наибольшей толщины максимальны:  $\tau_{\max} = 3M_z h_{\max} / (\Sigma a_i h_i^3)$ .

$\theta_z = 3M_z / (G \Sigma a_i h_i^3)$ . Параметры *кручения* зетового профиля (⑥):

$\tau_{\max} = 3M_z / [(a_1 + a_2 + a_3) h^2]$ ,  $\theta_z = \theta_z / l = 3M_z / [G(a_1 + a_2 + a_3) h^3]$ .

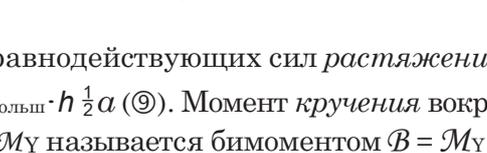
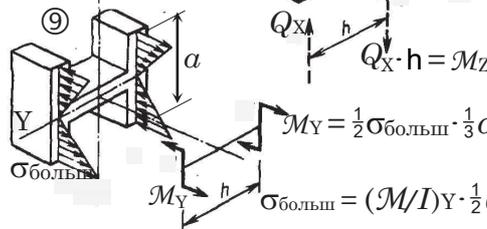
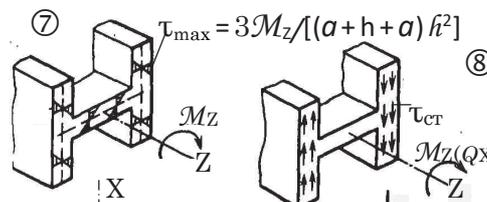
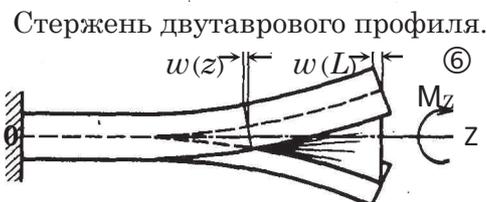
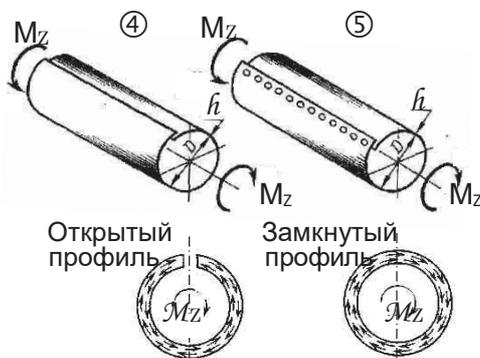
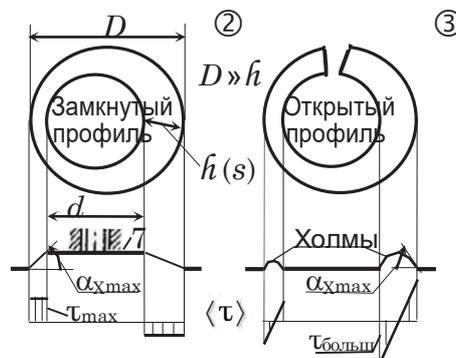
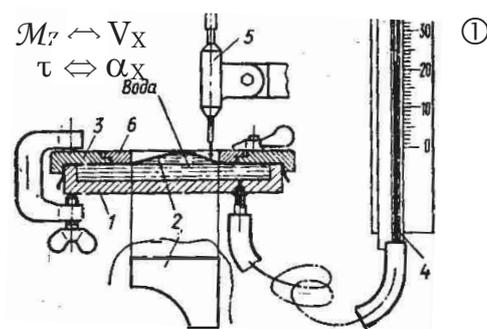
## Оценка параметров кручения методом плёночной аналогии

На схеме ① показан фрагмент установки для определения параметров сдвига при кручении тонкостенных стержней способом мембранной аналогии. Поднятие трубки 4 повышает давление жидкости в корпусе 1 установки ① и мембрана-плёнка 2, натянутая на крышку 3 с отверстием в форме сечения  $DO$ , *выпучивается*.  $V_{\text{холма}}$  – объём холма вытесненной давлением жидкости, фиксируемый пробкой 6 крышки 3, уподоблен моменту кручения  $M_z$ . Угол наклона касательной к поверхности холма –  $\alpha_x$  подобен напряжению сдвига  $\tau = K_{\text{пр}} \text{tg } \alpha$ ,  $\text{tg } \alpha$  определяется высотой холма, измеряемой микрометром 5 ( $K_{\text{пр}}$  – коэффициент пропорциональности). Представляя *искривление* мембраны давлением, можно предугадать место наибольшей напряжённости материала. При повышении давления внутренний контур плёнки в форме сечения тонкостенного стержня ЗП (②) поднимается вместе с диском 7, образуя угол холма  $\alpha_x$ , который тем больше, чем меньше толщина  $h$  стенки ЗП ( $\tau h = \text{const}$ ), и тем больше, следовательно,  $\tau_{\text{ЗП}} = \tau$  – напряжение сдвига при кручении.

$\alpha_x$  – угол наклона касательной к выпученной плёнке в форме сечения ОП (③) больше там, где стенка шире.  $\tau_{\text{ОП}}$  – напряжения сдвига при кручении стержня ОП существенно больше, чем  $\tau_{\text{ЗП}}$ . Сравнение параметров кручения тонкостенных ЗП и ОП. Формулы наибольших напряжений и угла закручивания трубы ОП (④), свёрнутой из листа толщиной  $h$  ( $\alpha = \pi D$ ,  $D$  – диаметр), имеют вид:  $\tau_{\text{ОП}} = 3M_z / (\pi D h^2)$  и  $\theta_{\text{ОП}} = 3M_z / (G \pi D h^3)$ . Формулы параметров кручения трубы со скреплёнными краями листа – ЗП (⑤):  $\tau = M_z / (2A h)$ ,  $\theta = [M_z / (4G A^2)] \int ds / h$ , при  $A = \pi D^2 / 4$  и  $\int ds = \pi D$ , имеют вид:  $\tau = M_z / (\frac{1}{2} \pi D^2 h)$ ,  $\theta = 4M_z / (G \pi D^3 h)$ . Из отношения:  $\tau_{\text{ОП}} / \tau = \frac{3}{2} (D/h)$  видно, что  $\tau_{\text{ОП}}$  на порядок больше напряжений ЗП, а из отношения:  $\theta_{\text{ОП}} / \theta = \frac{3}{4} (D/h)^2$  следует, что  $\theta_{\text{ОП}}$  на два порядка превышает угол закручивания стержня ЗП.

Стержень двутаврового профиля. Несвободное кручение тонкостенного тела открытого профиля. Несвободное кручение стержней ОП рассмотрим на примере консоли двутаврового профиля, нагруженной моментом  $M_z$  (⑥). При свободном кручении точки М-сечения на повороте вокруг  $Z$  неравномерно *смещаются*  $w = f(x, y)$ . На схеме ⑦ показаны графики изменения напряжений  $\tau$  по толщине  $h$ . Защемление сдерживает свободное *искривление* М-сечений при кручении стержня. Полки двутавра *сдвигаются*: левая – вверх, правая – вниз и *изгибаются*: левая полка выпуклостью вниз (нижние волокна ОП *растянуты*), правая – выпуклостью вверх (верхние – *растянуты*), изменяя *смещения*  $w$  по длине.  $M_z(Q_x) = Q_y \cdot h$  – момент кручения от сил сдвига  $Q_x = \tau_{\text{ст}} a$  (⑧),  $\tau_{\text{ст}}$  – напряжения сдвига, вызванные стеснением кручения ОП.

$M_y = N \frac{2}{3} a$  – момент *изгиба* от противоположно направленных равнодействующих сил *растяжения-сжатия* в сечении *изогнутого* стеснением элемента ОП:  $N = \frac{1}{2} \sigma_{\text{больш}} \cdot h \frac{1}{2} a$  (⑨). Момент кручения вокруг оси  $Y$  сечения ОП от равнопротивоположных моментов *изгиба*  $M_y$  называется бимоментом  $B = M_y h$ .



**Принятые допущения**

Перемещения точек деформируемого тела на стадии упругой деформации материала пропорциональны воздействию.

Макрообъёмы сплошной среды, моделирующей материал *DO*, совместно деформируются; волокна после сдвига остаются прямыми; М-сечения при повороте относительно осей X, Y, Z не искажаются, остаются перпендикулярными Z.



Схема поля напряжений  
Дано:  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_x = \tau_y$



Типы расхождения берегов трещин относительно фронта.



$K_I, K_{II}, K_{III}$  – параметры напряжённости НЛО

**Зависимости параметров двухосной деформации в плоскости XY**

Выражение связи удлинений  $\epsilon_x + \epsilon_y = \epsilon_1 + \epsilon_2$  и углов сдвига  $|\gamma_{xy}| = |\gamma_{yx}|$  со смещениями  $u, v$  М-точек:  $\epsilon_x = \partial u / \partial x, \epsilon_y = \partial v / \partial y; \gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$ .

Геопараметры деформации пропорциональны напряжениям

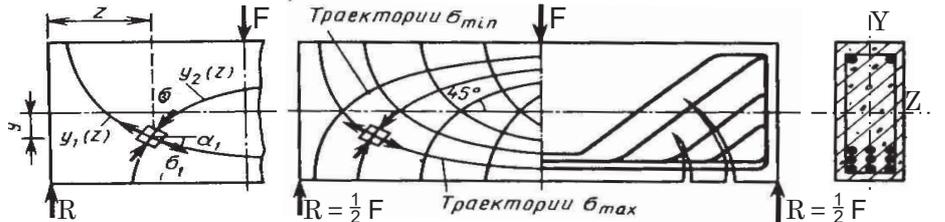
$$\epsilon_x = 1/E (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \epsilon_y = 1/E (\sigma_y - \nu \sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \tau_{xy} / G \quad \text{или}$$

$$\sigma_x = [E / (1 - \nu^2)] (\epsilon_x + \nu \epsilon_y), \quad \sigma_y = [E / (1 - \nu^2)] (\epsilon_y + \nu \epsilon_x); \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy}.$$

Формулы напряжений на  $\alpha$ -направлении к исходной x-площадке

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.$$

Выражения экстремальных напряжения *растяжения* и *сдвига*:  $\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} [(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}]$  и  $\tau_{1,2} = \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$ . Траектории главных напряжений, касательные в точках которой имеют направление наибольших напряжений *растяжения*  $\sigma_{max}$  (*сжатия*  $\sigma_{min}$ ), служат линиями укладки упрочняющей арматуры.



На схеме *изгиба* стержня, нагруженного поперечной силой  $F$ , показаны траектории главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_3$  ( $\sigma_2 = 0$ ) и схема армирования бетона. Если *растянутую* стальную арматуру залить бетоном, и после затвердения разгрузить, то бетон, предел прочности которого при *сжатии* существенно выше, чем при *растяжении*, *сожмётся*, снижая уровень *растягивающих* напряжений при *изгибе* стержня. Трещины, выявляемые при контроле конструкции, классифицируют по типу расхождения берегов относительно линии их смыкания: I – при отрыве, II – при сдвиге поперёк, III – вдоль. Поле напряжений необратимо *деформированного* локального объёма (НЛО) у вершины трещины на макроуровне характеризует К-параметр интенсивности напряжений.  $K \leq K_c / n_3$  – условие трещиностойкости материала *DO*.

## Глава III. Методы оценки прочности. Силовой подход

### 11. Представление силовых параметров высоконапряжённых мест DO

Представляя *деформирование* исследуемой системы, выделяем предмет расчёта вместе с нагрузкой (силовая, температурная, агрессивная среда) и реакциями нарушенных связей с не рассматриваемыми элементами. Определяем реакции, *перемещения* точек тела в целом в местах их ограничения, проверяем устойчивость исходной конфигурации DO. Предугадываем наиболее *деформированное* место предмета расчёта, устанавливаем наибольшие напряжения внутренних сил в сечении DO, вычисляем параметр высшей напряжённости совместно деформируемых макроединиц сплошной среды и сверяем его с силовой характеристикой прочности материала. Осмысление изменений структуры материала DO в процессе *разрушения* опирается на методологию физики твёрдого тела, исследующей развитие повреждений на микро и мезоуровнях.

Уровни масштаба моделей материального пространства DO

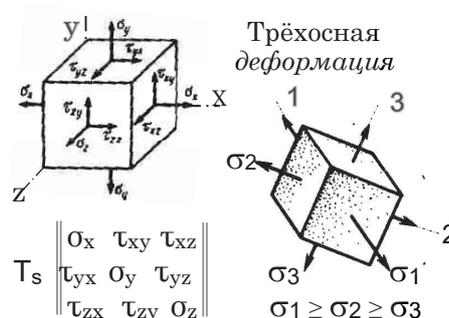
Макроуровень – силовая среда  
Размеры макро объёмов зависят от равномерности *деформации*

Мезо (между макро и микро) уровень – ансамбли атомов и молекул  
Зерно

Микроуровень – атомы, молекулы

### 12. Расчёт напряжений в направлении наибольшего растяжения и сдвига

Проекция вектора напряжения  $S_{ij}$  внутренних сил на нормаль к сечению есть напряжение *растяжения (сжатия)*  $\sigma$ , проекции  $S_{ij}$  на плоскость сечения – напряжение *сдвига*  $\tau$ . Поле напряжений (напряжённость) трёхосной *деформации* сплошной среды DO характеризует векторный оператор – тензор напряжений  $T_s$ , определяемый матрицей компонент:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, |\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|, |\tau_{xz}| = |\tau_{zx}|, |\tau_{yz}| = |\tau_{zy}|$ . В любой M-точке DO есть перпендикулярные направления осей 1, 2, 3 экстремального *растяжения-сжатия* при отсутствии *сдвигов* ( $\tau = 0$ ).  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения.



### 13. Оценка прочности DO по критерию предельной напряжённости материала

Со времён Галилео Галилея оценка прочности нагруженного тела методом сравнения вычисленного параметра *деформации* с его экспериментально установленной величиной принципиально не изменилась. Соответственно условию силовой оценки прочности DO наибольший параметр напряжённости материала, вычисленный по определённому критерию, должен быть меньше опытной характеристики предельного напряжения сил материала DO.  $K < K_c$  – условие устойчивости трещины, обнаруженной в теле: K-параметр напряжённости у вершины трещины должен быть меньше характеристики критической вязкости материала  $K_c$ .

Оценка прочности DO основана на сопоставлении допускаемых напряжений с S-функцией напряжённости по критерию: наибольшего *сдвига*

$$S_{\tau_{max}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma];$$

октаэдрических напряжений

$$S_{\tau_{окт}} = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{\sqrt{3}} \leq [\sigma];$$

предельной главных окружностей

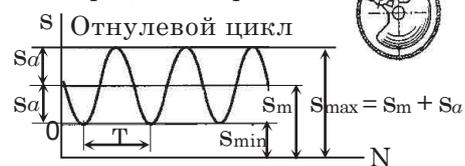
$$S_{IP} = \sigma_1 - (\sigma_{BP}/\sigma_{BC}) \sigma_3 \leq [\sigma]$$

### 14. Критерии выносливости повторно переменной деформации материала

Многokrатно (тысячи и миллионы раз) меняющееся воздействие сужает возможности вязкого *разрушения* материала. Процесс *разрушения* среды DO при периодическом изменении нагрузки называется *усталостью*. Циклы изменения напряжений могут быть симметричными и несимметричными, знакопостоянными и знакопеременными.  $R_s = S_{min}/S_{max}$  – коэффициент асимметрии цикла (для симметричного цикла *растяжения-сжатия*  $R_\sigma = -1$ ; при постоянной нагрузке  $R_\sigma = +1$ ). Сопротивление материалов *усталости* характеризует предел выносливости  $S_R$ .  $\sigma_{-1}$  – предел выносливости материала, определяемый испытаниями образцов при симметричном цикле напряжений *растяжения-сжатия*.

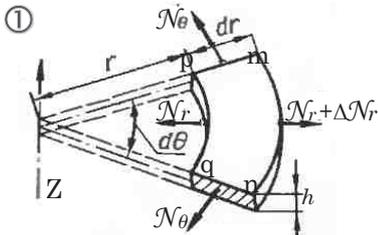
Напряжение материала деталей кривошипно-шатунного механизма циклически изменяется во времени:  $s_\omega = s_a \sin \omega t$ .

N – число циклов.  
 $s_a$  – амплитуда напряжений  
 $s_m$  – среднее напряжение.



# 11. Представление силовых параметров высоконапряжённых мест DO

**Задача.** Выражение предельных параметров деформации вращающегося диска ( $\omega, h - \text{const}$ ). Допущения: полагая, что диск не деформируется в направлении оси вращения Z, рассматриваем его двухосную деформацию; удлинения вдоль окружности  $\varepsilon_\theta$  ( $\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{\theta r}$ ) и радиуса  $\varepsilon_r$  ( $\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{r\theta}$ ) пропорциональны окружным  $\sigma_\theta$  и радиальным  $\sigma_r$  напряжениям *растяжения*  $\varepsilon_\theta = (\sigma_\theta - \nu\sigma_r)/E$ ,  $\varepsilon_r = (\sigma_r - \nu\sigma_\theta)/E$  (1). Из диска единичной толщины двумя радиальными сечениями, образующими угол  $d\theta$ , и поверхностями радиуса  $r$  и  $r + dr$  выделим элемент  $pmnq$  (1). Приравнявая нулю сумму проекций на биссектрису угла  $d\theta$  равнодействующих центробежных сил  $F_{цб} = r d\theta dr \rho \omega^2 r$  и внутренних сил



окружных  $N_\theta = \sigma_\theta dr r d\theta$ , радиальных  $N_r = \sigma_r r d\theta$  и  $N_r$ , увеличенной на  $\frac{d}{dr}(\sigma_r r d\theta) dr$ , после сокращения получим:  $\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho \omega^2 r = 0$ . (2)

Для выражения параметров представим деформацию элемента  $pmnq$  после радиального смещения на  $u(r)$ : длина  $r d\theta$  дуги  $pq$  растянется на  $(r+u) d\theta - r d\theta = u d\theta$ ; длина  $dr$  отрезка  $pm$  получит приращение  $\frac{du}{dr} dr$ .

Из формул удлинений  $\varepsilon_\theta = u/r$ ,  $\varepsilon_r = du/dr$  исключим функцию смещений  $u(r)$ , дифференцируя  $\varepsilon_\theta r = u$ :  $du = \varepsilon_r dr$  и подставляя в  $\varepsilon_r$ , выразим совместность удлинений:  $\frac{d}{dr} dr (\varepsilon_\theta - \varepsilon_r) = 0$  или  $\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0$  (3)

В выражение пропорциональности (1) введём функцию напряжений  $\Phi$  ( $\sigma_r = \Phi/r$ ,  $\sigma_\theta = \Phi' + \rho \omega^2 r^2$ ), удовлетворяющую уравнение равновесия (2):  $E \varepsilon_r = \frac{\Phi}{r} - \nu \Phi' - \rho \omega^2 r^2$ ,  $E \varepsilon_\theta = \Phi' - \nu \frac{\Phi}{r} + \rho \omega^2 r^2$ . Выражения  $E \varepsilon_r$  и  $E \varepsilon_\theta$

введём в уравнение совместной деформации (3) и, упрощая, получим:  $\Phi'' + \frac{1}{r} \Phi' - \frac{1}{r^2} \Phi = -8C(3+\nu)r^2$ ,  $C = \frac{1}{8} \rho \omega^2$ .  $\Phi = C_1 r + \frac{C_2}{r} - C(3+\nu)r^2$  – общий интеграл дифференциального уравнения, равный сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

$\sigma_\theta = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - C(1+3\nu)r^2$ ;  $\sigma_r = C_1 + \frac{C_2}{r^2} - C(3+\nu)r^2$  (4) – напряжения в сплошном диске малой толщины по сравнению с его диаметром. Постоянная  $C_2$  равна нулю, так как напряжения в центре диска должны быть конечны.  $C_1$  определяем из условия  $\sigma_r = 0$  (4) при  $r = b$ .  $C_1 = C(3+\nu)$ .  $\sigma_r = C(3+\nu)(b^2 - r^2)$ ,  $\sigma_\theta = C(3+\nu)b^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2$ .  $r = a$ ,  $\sigma_{\theta\max} = \sigma_r = C(1-\nu)b^2$  (5).

Формулы напряжений диска с центральным отверстием радиуса  $a$  имеют вид:  $\sigma_r = C(3+\nu)b^2(1 - \frac{a^2}{r^2} - \frac{r^2}{b^2})$ ;  $\sigma_\theta = C(3+\nu)b^2(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \frac{r^2}{b^2})$ . При  $r = b$   $\sigma_r = 0$ ;  $\sigma_\theta = 2C(1-\nu)b^2$ ; при  $r = a$   $\sigma_r = 0$ ;  $\sigma_\theta = 2C(3+\nu)b^2 - \sigma_{\max}$  (3). Если  $a \rightarrow 0$ ,  $\sigma_{\theta\max} \rightarrow 2C(3+\nu)b^2$  – вдвое больше, чем в сплошном диске (5).  $\alpha_\sigma = 2$  – коэффициент концентрации напряжений  $\sigma$  у малого отверстия.

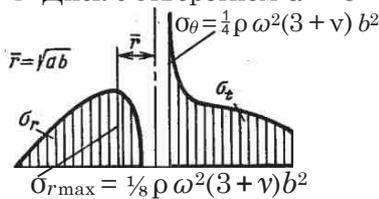
Графики изменения  $\sigma_\theta, \sigma_r$  вдоль радиуса вращающегося диска.

2 Сплошной диск

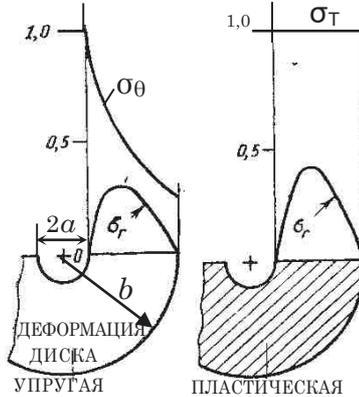
$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{1}{8} \rho \omega^2 (3 + \nu) b^2 = \sigma_{\max}$$



3 Диск с отверстием  $a \ll b$



4  $\sigma/\sigma_T$   $\sigma/\sigma_T$



На скорости  $\omega_{пр}$  материал наиболее напряжённой внутренней части диска с отверстием переходит в состояние текучести (4). Испытания показывают, что для перехода всего материала диска в пластическое состояние достаточно повысить скорость на 11%. Первые трещины распространяются путём сдвига ( $\sigma_2 = \sigma_r$ ,  $\sigma_3 = 0$ ) в радиальном направлении, перпендикулярном  $\sigma_\theta = \sigma_1 = \sigma_T$ .  $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$  – наибольшие напряжения сдвига ( $\tau = \frac{1}{2} \sigma_T$ ). Предельное условие сдвига в виде:  $\sigma_\theta = \sigma_T$  внесём в уравнение равновесия (2), перенесём вправо второе, третье слагаемое и, интегрируя от  $r = a$  до  $r = b$ , получим:  $h r \sigma_r \Big|_a^b = \sigma_\theta \int_a^b h dr - \rho \omega^2 \int_a^b h r^2 dr$ . Отсюда:  $\omega^2_{пр} = \frac{\sigma_T A - [b h_b (\sigma_r)_b - a h_a (\sigma_r)_a]}{\rho I}$ .  $A$  – площадь

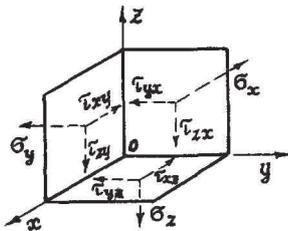
половины сечения,  $I$  – момент инерции половины сечения относительно оси Z. Для сплошного диска постоянной толщины  $h$ ,  $A = hb$ ,  $I = \frac{1}{3} hb^3$ ,  $v_{пр}$  – предельная окружная скорость:  $b^2 \omega^2_{пр} = v^2_{пр} = 3 \sigma_T / \rho$ .



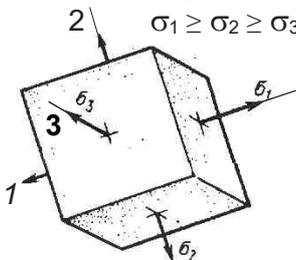
Пластический сдвиг зарождается в зонах максимальных концентраторов напряжений как локальное кинетическое структурное превращение и распространяется в пределах определённого структурного элемента деформации путём движения дефектов как фрагментов другой структуры. Панин В.Е.

## 12. Расчёт напряжений в направлении наибольшего растяжения и сдвига

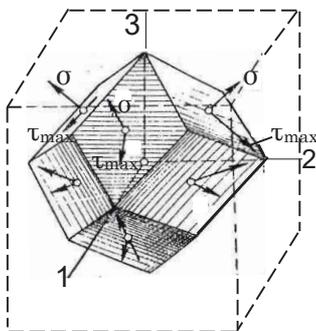
- ① М-точка – модель макрообъёма материала  $D0$



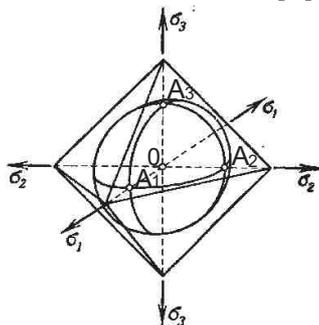
- ② Площадки главных напряжений  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$



- ③ Площадки максимальных напряжений сдвига



- ④ Площадки октаэдра касаются единичной сферы



Рассматриваем макрообъёмы сплошной среды  $D0$  в условиях трёхосной упругой деформации, напряжения  $S$  ( $\sigma$ ,  $\tau$ ) которой пропорциональны геопараметрам  $e$  ( $\epsilon$ ,  $\gamma$ ). Правила преобразования вектора напряжения  $S_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) М-точки при переходе от  $i$ -того к  $j$ -тому базису осей прямоугольной системы координат задаёт тензор напряжений –  $T_s$ .

$$T_e = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \sigma_x = [E/(1 - \nu^2)] (\epsilon_x + \nu\epsilon_y + \nu\epsilon_z), \tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y = [E/(1 - \nu^2)] (\epsilon_y + \nu\epsilon_z + \nu\epsilon_x), \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z = [E/(1 - \nu^2)] (\epsilon_z + \nu\epsilon_x + \nu\epsilon_y), \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \end{matrix} \quad T_s = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

В местах установленных наибольших напряжений М-точки, заданной координатами  $x, y, z$ , определяем семейство площадок, ориентированное соответственно гипотетическим направлениям наиболее интенсивного процесса разрушения высоко напряжённого реального материала  $D0$ .

Описание экстремальных напряжений растяжения вдоль главных осей 1, 2, 3. Около любой точки  $D0$  (①) можно выделить взаимно перпендикулярные главные площадки (②), на которых напряжения сдвига  $\tau$  равны нулю, а напряжения растяжения экстремальны. Главные напряжения  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  трёхосной деформации являются корнями кубического уравнения:  $\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$ .  $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ ,  $I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$  и  $I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$  – это линейный, квадратичный и кубический инварианты тензора  $T_s$ .

Сумма напряжений растяжения на перпендикулярных площадках:  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_{cp}$  не изменяется при повороте осей М-точки.

Совокупность напряжений на площадках максимального сдвига Из уравнений равенства нулю суммы моментов сил относительно осей  $x, y, z$  (①) следует, что  $|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$ ,  $|\tau_{xz}| = |\tau_{zx}|$ ,  $|\tau_{yz}| = |\tau_{zy}|$ . Равные по модулю напряжения сдвига на взаимно перпендикулярных площадках М-точки направлены к линии пересечения площадок или от неё.

Перпендикулярные площадки максимальных напряжений сдвига  $\tau_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ ,  $\tau_{23} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$ ,  $\tau_{31} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ , параллельные одной из главных осей, а с двумя другими составляющие угол  $45^\circ$ , образуют додекаэдр (от греч. δωδεκα – двенадцать, εδρον – грань), вписанный в главный куб (③).

Напряжения растяжения и сдвига на октаэдрических площадках Если от начала 0 главных полуосей отложить отрезки, равные главным напряжениям (④), то восемь плоскостей, соединяющих концы этих отрезков, образуют октаэдр, вершины которого лежат на главных осях. Напряжения растяжения на равнонаклонённых к главным осям площадках октаэдра:  $\sigma_{окт} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  равны средним напряжениям  $\sigma_{cp}$ , а значения равных октаэдрических напряжений сдвига  $\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}$ , сравнимы с максимальными напряжениями сдвига:  $0,816 \leq |\tau_{окт}/\tau_{max}| \leq 0,941$ .

## Графическое представление напряжений М-точки

Выражение напряжений на  $\alpha$ -площадке по известным  $\sigma_1, \sigma_2$

Проведём перпендикулярные оси  $\sigma, \tau$  (1) и отложим по оси  $\sigma$  отрезки  $01, 02$ , равные главным напряжениям  $\sigma_1, \sigma_2$ . Из середины  $C$  отрезка  $12 = \sigma_1 - \sigma_2$  проведём окружность напряжений 2-1. Луч, проведённый из точки 2 ( $\sigma_2, 0$ ) под заданным углом  $\alpha$  к оси  $\sigma$ , пересекает окружность 2-1 в точке  $I(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ , изображающей искомые напряжения:

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2} [(\sigma_1 + \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha]; \tau_\alpha = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha.$$

Определение главных напряжений по заданным  $\sigma, \tau$  (2)

Так как напряжения сдвига в плоскостях  $xy, xz$  равны нулю,  $\sigma_x$  является одним из главных напряжений. Два других главных напряжения определим графически по известным напряжениям  $\sigma_y, \sigma_z, |\tau_{yz}| = |\tau_{zy}| = \tau$  в плоскости  $zy$  (3). Нанесём точку  $B(\sigma_z, \tau_{zy})$  вертикальной площадки и точку  $\Gamma(\sigma_y, \tau_{yz})$  горизонтальной на плоскость  $\sigma, \tau$  (4), откладывая  $\sigma_z$  (сжатие  $\ominus$ ) влево от оси  $\tau$ , напряжение сдвига  $\tau$  ( $\ominus$ , если момент пары  $\tau$  – по часовой стрелке) – вниз от оси  $\sigma$ . Через точки  $B, \Gamma$  проведём окружность 3-2, которая отсекает на оси  $\sigma$  отрезки равные главным напряжениям.  $\sigma_1 = \sigma_x, 02 = \sigma_2 = 0C + R, 03 = \sigma_3 = 0C - R, 0C = \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z)$ . Из треугольника  $BB'C$  выразим радиус:  $R = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}$ .

$$\text{Главные напряжения: } \sigma_{2,3} = \frac{1}{2} [(\sigma_y + \sigma_z) \pm \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}].$$

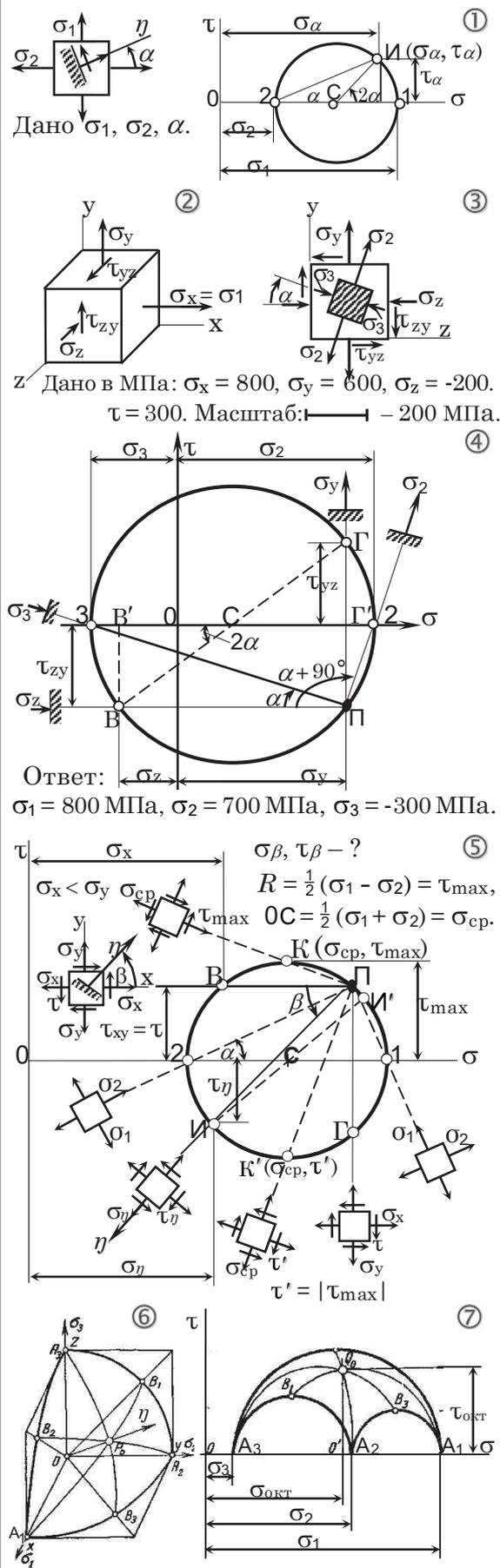
Прямая, проведённая из точки  $B$  параллельно оси  $\sigma$ , пересекает 3-2 в точке  $\Pi(\sigma_y, \tau_{zy})$ , называемой полюсом. Лучи из полюса  $\Pi(\sigma_y, \tau_{zy})$ , проходящие через точки 3 и 2, показывают направление  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Положение главных осей выражает зависимость:  $\operatorname{tg} 2\alpha = BB'/B'C = -2\tau/(\sigma_z - \sigma_y)$ .

Напряжений на площадке, составляющей угол  $\beta$  с осью  $x$ . Координаты точки  $B(\sigma_x, \tau)$  на плоскости  $\sigma, \tau$  соответствуют вертикальной  $x$ -площадке (5), а  $\Gamma(\sigma_y, -\tau)$  – горизонтальной  $y$ -площадке. Окружность 2-1 диаметром  $B\Gamma$  отсекает на оси  $\sigma$  отрезки  $02 = \sigma_2$  и  $01 = \sigma_1$ . Из полюса  $\Pi$  (точка пересечения 2-1 прямой из точки  $B, \parallel$  оси  $\sigma$ ) проведём прямую под заданным углом  $\beta$  к  $\Pi B$  до пересечения с окружностью 2-1. Координаты точки  $I(\sigma_\eta, \tau_\eta)$  равны искомым напряжениям.

$$\sigma_\beta = \sigma_x \cos^2 \beta + \sigma_y \sin^2 \beta - \tau_{xy} \sin 2\beta; \tau_\beta = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\beta + \tau_{xy} \cos 2\beta$$

Изображение напряжённости трёхосной деформации

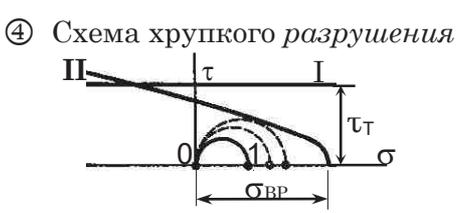
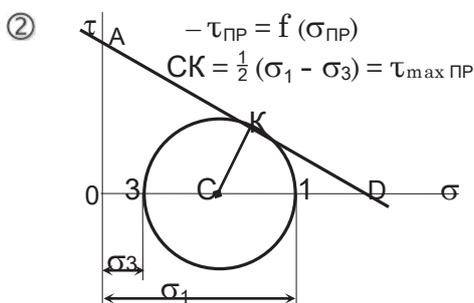
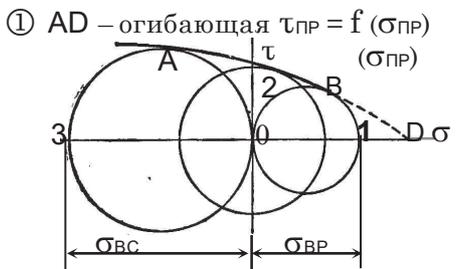
Координаты точек плоскости  $\sigma, \tau$  (7) между меньшими окружностями напряжений двухосной деформации  $A_3A_2, A_2A_1$  и большей –  $A_3A_1$  определяют напряжения трёхосной деформации на множестве  $\eta$ -площадок М-точки. Точка  $\Pi_0(\sigma_{окт}, \tau_{окт})$  на плоскости  $\sigma, \tau$  (7) является отображением точки  $P_0$  касания сферы октаэдрической плоскостью (6).



### 13. Оценка прочности DO по критерию предельной напряжённости материала

Высшую напряжённость сил взаимодействия макрообъёмов среды DO представляет S-функция совокупности напряжений, вычисленная по определённому критерию в наиболее деформируемом месте элемента конструкции на гипотетических направлениях интенсивного разрушения материала.

Оценка прочности пластичных материалов по критерию напряжений наибольшего сдвига. Соответственно критерию наибольших напряжений сдвига увеличение  $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$  до предела текучести  $\tau_T \approx \frac{1}{2}\sigma_T$  ( $\tau_T/\sigma_T$  изменяется от 0,55 до 0,6) вызывает массовый переход всего материала DO к необратимой деформации.  $S_{\tau_{max}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] = \sigma_T/n_3$  – условие прочности DO по критерию  $\tau_{max}$ .



Согласно критерию октаэдрических напряжений сдвига  $\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$  повышение уровня  $\tau_{окт}$  до предела текучести  $\tau_{T окт} = \frac{1}{3} \sqrt{2} \sigma_T$  означает массовый переход упруго деформированного материала в пластическое состояние.

$$S_{\tau_{окт}} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sqrt{2} \sigma_T / n_3$$

– условие сохранения упругости материала DO по критерию  $\tau_{окт}$ .

Геометрическая интерпретация предельной напряжённости Отто Мора, представляя окружности предельных напряжений и касающуюся их кривую (①), выразил соотношение предельных напряжений:  $\sigma_1 - (\sigma_{BP}/\sigma_{BC}) \sigma_3 = \sigma_{BP}$ . Кривая AB  $\tau_{ПР} = f(\sigma_{ПР})$  (①) огибает окружности предельных напряжений растяжения, сжатия и сдвига. Продолжение огибающей вправо (пунктир) пересекает ось  $\sigma$  в точке D, её абсцисса  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  – напряжения ещё неосуществлённого всестороннего растяжения. Построив окружность 31 (②) предельных главных напряжений двусосного растяжения, проведём касающуюся её прямую AD (огибающая выпуклая, поэтому её замена прямой идёт в запас прочности). Из подобия треугольников OAD и KCD выразим пропорцию:  $CK : AO = CD : AD$ . Подставив  $CK = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$  и  $CD = OD - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ , получим отношение:  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) : AO = [OD - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)] : AD$ , которое можно выразить в виде:  $\sigma_1 = a + m\sigma_3$  (1). Из условия предельного растяжения:  $\sigma_1 = \sigma_{BP}$ ,  $\sigma_3 = 0$ , получим  $a = \sigma_{BP}$ , при предельном сжатии:  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\sigma_{BC} - a = m\sigma_{BC}$ ,  $m = \sigma_{BP}/\sigma_{BC}$ . Подставив  $a$  и  $m$  в уравнение (1), выразим параметр напряжённости:  $\sigma_1 - (\sigma_{BP}/\sigma_{BC}) \sigma_3$ .  $S_{ПР} = \sigma_1 - (\sigma_{BP}/\sigma_{BC}) \sigma_3 \leq [\sigma]$  – условие прочности, применимое и для хрупких материалов. Условие прочности по критерию предельной напряжённости материала при  $\sigma_{BP} = \sigma_{BC}$  совпадает с условием по критерию наибольшего сдвига  $S_{\tau_{max}}$ .

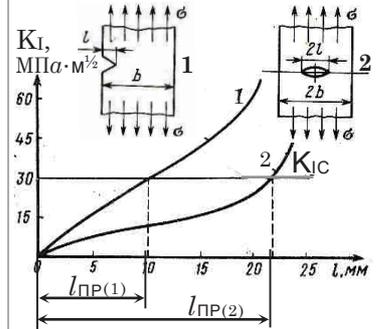
Графическое представление параметров напряжённости DO позволяет осмыслить условность деления разрушения материала на пластичное и хрупкое. Для одного материала можно построить две огибающие (③), (④). При повышении напряжения  $\sigma_1$  одноосного растяжения материала больших пластических возможностей окружность 01 (③) прежде коснётся предельной прямой I, характеризующей массовый переход в пластическое состояние. Но в условиях трёхосного растяжения повышение напряжения  $\sigma_1$  смещает окружность вправо и она касается кривой II, которая означает предельную напряжённость материала хрупкого разрушения. Увеличение напряжённости малопластичного материала ( $\sigma_{BP} < \sigma_{BC}$ ) смещает окружность 01 (④) к огибающей II и повышение напряжений до предела прочности происходит потеря сплошности отрывом, а наложение высокого всестороннего давления смещает окружность напряжений влево. «... в процессах образования рельефа земной коры граниты и базальты, хрупкие в обычных условиях, текут, находясь под действием колоссального давления в глубинных слоях Земли.» Ю.Н. Работнов

Пластическая деформация является коллективным эффектом, охватывающим самосогласованное поведение большого числа структурных дефектов разного типа и происхождения. При этом особенно существенно, что процесс пластического течения протекает одновременно или последовательно на различных структурных уровнях, масштаб которых определяется геометрией образца и размерами структурной неоднородностей, характерных для каждой стадии деформирования. Панин В.Е.

$K = K_C$  – условие предельной трещиностойкости материала  $DO$ . В окрестности вершины макротрещин, возникающих в теле  $DO$  ещё на стадии упругости пластичного материала, формируются локальные образования изменённой структуры, сдерживающие рост трещин.

Согласно условию трещиностойкости:  $K \leq K_C / \sqrt{3}$  трещина не растёт, если  $K$ -параметр напряжённости НЛО у её вершины меньше, чем  $K_C$  – характеристика критической вязкости сопротивления материала разрушению, устанавливаемой при испытании образцов с трещиной на растяжение.  $K_I = \sigma \sqrt{\pi l_{TP}} = K_{IC}$  – условие критической вязкости материала образца с макротрещиной (1) отрыва (тип I). По графикам  $K_I = f(l)$  можно видеть увеличение предельной длины  $l_{TP}$  трещины при изменении длины, расположения трещины более широкого образца.

Кривые  $K_I = f(l)$  1. и 2. (1) испытания образцов 1 и 2



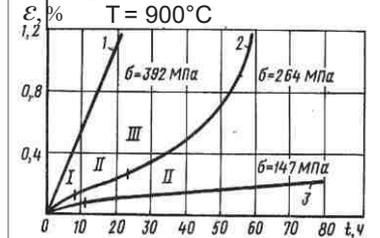
**Предельные параметры высокотемпературной ползучести металла**  
 При длительном действии нагрузок в условиях высоких температур  $T$  (температура считается высокой, если  $T > 0,5 T_{\text{плав}}$  металла) материал *ползёт*. Ползучесть (процесс деформации при постоянной нагрузке и  $T = \text{const}$ ) в основном необратима, её геопараметры  $e$  не пропорциональны напряжениям  $\sigma$ . Рассматриваем малые изменения размеров ( $e \neq 1\%$ ) и так как допускаемые  $e$  не более 1–2%, и изменение площади сечения  $DO$  при ползучести невелико, постоянство нагрузки отождествляется с постоянством напряжений. Падение напряжений во времени  $t$  при неизменяющихся размерах ( $e = \text{const}$ ), например, в затянутом соединении, называется релаксацией напряжений (2, 2.).

Модели ползучести (2)



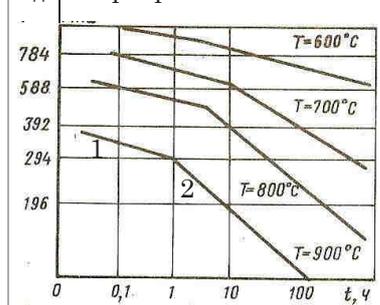
Результаты испытаний образцов на постоянном уровне напряжений  $\sigma$  и температуры  $T$  представляет кривая  $\epsilon = f(t)$  ползучести (модель 2, 1.), имеющая три участка: I – линия убывающей скорости ползучести  $v_\epsilon = d\epsilon/dt$ , начинается от  $\epsilon_0$  – удлинение при нагружении; II – участок установившейся скорости  $v_{\epsilon \text{ min}} = \text{const}$ ; III – ускоренная ползучесть, завершаемая изломом образца, предельное время ползучести –  $t_{TP}$  фиксируется. Вид кривой  $\epsilon = f(t)$  при изменении уровня  $\sigma$  меняется (3).

Кривые ползучести (3) жаропрочного сплава



Если по оси абсцисс откладывать  $t_{TP}$ , установленное на разных уровнях  $\sigma$  (3) при  $T = \text{const}$ , по оси ординат – напряжение, соответствующее предельной  $t_{TP}$  длительности  $\sigma_{дл}$  (4), и провести через эти точки линию  $\sigma_{дл} = f(t_{TP})$ , получим кривую пределов сопротивления ползучести (4), имеющую в логарифмических координатах вид двух прямых. Прямая 1 с меньшим наклоном соответствует существенным удлинениям вязкого разрушения; прямая 2 – большим длительностям хрупкого разрушения. По кривым  $\sigma_{дл} = f(t_{TP})$  на заданном уровне температуры  $T = \text{const}$  можно определить предельные сроки службы изделия и напряжения или устанавливать предел длительной прочности  $\sigma_{дл}$  материала  $DO$ .

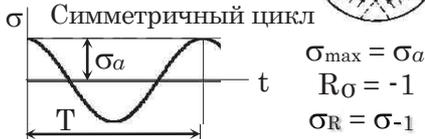
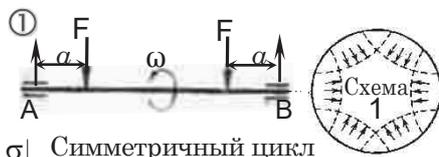
Линии  $\sigma_{дл} = f(t_{TP})$  (4) жаропрочного сплава



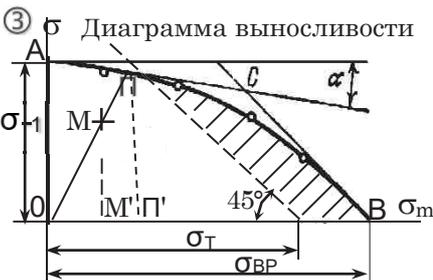
Данные экспериментов, на основании которых выстраивается семейство кривых ползучести (3) на разных уровнях напряжений, можно изобразить изохронными кривыми, соответствующими разным моментам времени  $t_1, t_2$  (2 3.). Изохронные кривые  $\sigma = f(\epsilon, t)$  многих материалов подобны и могут быть представлены в виде:  $\sigma = f(\epsilon) / (1 + at^\beta)$ ,  $a$  и  $\beta$  определяются при обработке кривой  $\epsilon = f(t)$  ( $\beta \approx 0,3$ ).

## 14. Критерии выносливости повторно переменной деформации материала

Процесс разрушения материала  $DO$  в условиях периодического изменения деформации называется усталостью, а сопротивление усталости – выносливостью. При повороте вала (1) на  $180^\circ$  верхние, сжатые изгибом волокна окажутся внизу растянутыми. Трещины, возникающие чаще всего на поверхности тела, раскрываются растяжением, смыкаются сжатием (1 схема 1), поэтому наружная кольцевая поверхность мелкозернистая, а внутренняя часть хрупкого долома крупнозернистая.



(стрелками отмечены образцы 6, 7, 8, выдержавшие базовое число циклов  $N_B = 10^7$  без поломки).



Совокупность изменений напряжения  $s$  за период  $T$  есть цикл  $s$

Параметры цикла $s$	Амплитуда $s$	Среднее $s$	Коэффициент асимметрии
		$s_a = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2}$	$s_m = \frac{s_{\max} + s_{\min}}{2}$

Оценка выносливости при циклическом изменении напряжений  
 Характеристики выносливости определяется при симметричном цикле изгиба вращающихся образцов, амплитуда  $s_a = \sigma_{\max}$  которого при равных  $s_{\max} = s_m + s_a$  выше, чем у несимметричного цикла. Первую партию образцов испытывают на высокой амплитуде  $\sigma_a \approx (0,65 \dots 0,75) \sigma_T$ , фиксируя величину нагрузки и соответствующее предельное число циклов  $N_{пр}$  до полного разрушения образца. При испытании следующих партий образцов нагрузка уменьшается. По результатам испытаний строится график в координатах  $N, \sigma$  (2). Ордината асимптоты почти горизонтального участка кривой  $\sigma = f(N)$  означает предел выносливости симметричного цикла  $\sigma_{-1}$

При несимметричном цикле изменения напряжений величина предельных напряжений  $\sigma_{пр}$  устанавливается на разных уровнях среднего напряжения  $\sigma_m$ . По точкам с координатами  $\sigma_m, \sigma_{пр}$  строится предельная кривая  $AB$  (3), которую схематизируют прямые  $AC$  и  $CB$ . Координаты точек прямой  $AC$ :  $\sigma_m$  и  $\sigma_{пр} = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \cdot \sigma_m$  (для углеродистой стали  $\psi_\sigma = \tan \alpha = 0,1 - 0,2$ ), угол наклона прямой  $CB - 45^\circ$ . Заштрихованная часть диаграммы (3) между штриховой прямой, ограничивающей текучесть, и предельной кривой выносливости –

это область недопустимых пластических деформаций материала. Если на диаграмму выносливости (3) нанести точку  $M$  с координатами  $\sigma_m, \sigma_a$ , соответствующими напряжениям цикла исследуемой детали, и через неё провести прямую  $OP$  до пересечения с прямой  $AC$ , то отношение  $OP/OM = PP'/MM' = (\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m) / \sigma_a$  выразит коэффициент запаса выносливости:  $n_3(\sigma) = \sigma_{-1} / (\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m)$ .  $\sigma_{\max} \leq \sigma_R / n_3$  – условие выносливости материала  $DO$ . Коэффициент запаса выносливости материала имеет вид:

$$n_{зд} = s_{-1} / (K_d s_a + \psi_s s_m). \quad K_d = \left[ \frac{K_{RS}}{K_d} + \frac{1}{K_F} - 1 \right] / K_V - \text{параметр, учитывающий особенности детали.}$$

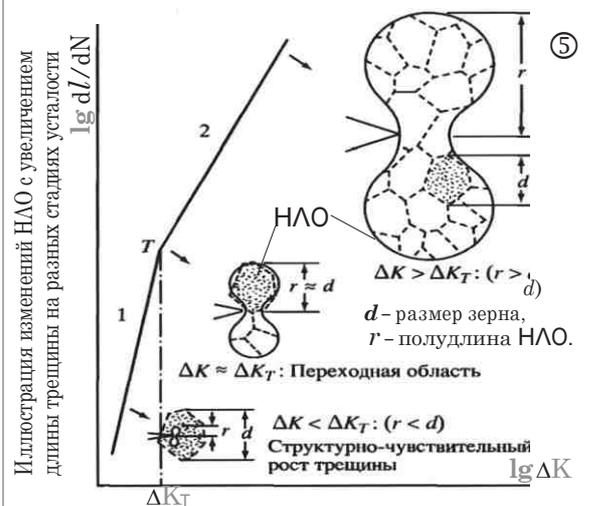
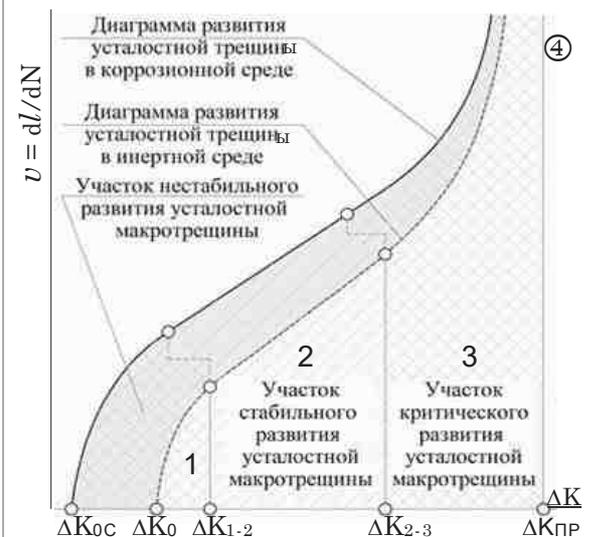
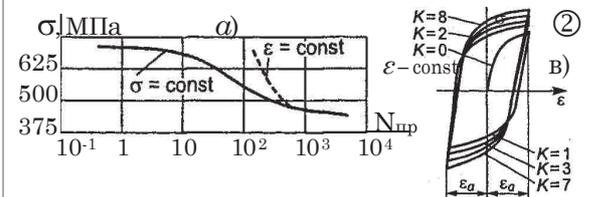
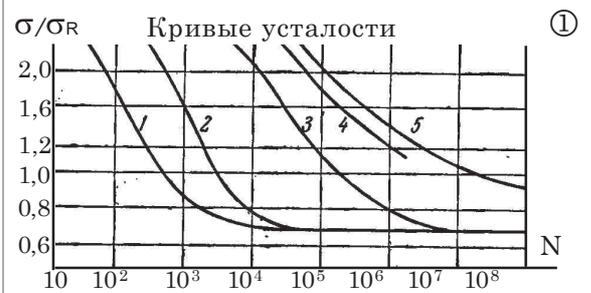
$K$  – коэффициенты:  $K_{RS} = s_R / s_{RK}$  учитывает концентрацию напряжений у мест изменений детали;  $K_d = s_{Rd} / s_R$  оценивает снижение предела выносливости, вызываемое большими размерами  $DO$ . Увеличение диаметра стального образца с 10 до 100 мм уменьшает  $\sigma_{-1}$  на 40%. Предел выносливости при растяжении ниже, чем при изгибе, потому что при растяжении максимально деформируется весь образец, а при изгибе только часть, наиболее удалённая от оси тела. Галилео Галилей, о влиянии размеров писал: если мы, отвлекаясь от несовершенства материи и полагая её неизменной, построим большую машину из материала меньшей, точно сохранив их пропорции, то получим машину, соответствующую меньшей во всех отношениях, кроме деформируемости и прочности.  $K_F = s_{RF} / s_R$  учитывает качество поверхности детали, так как именно на поверхности в основном зарождаются трещины, и чем прочнее материал, тем он чувствительнее к состоянию поверхности;  $K_V$  учитывает упрочнение поверхности. Коэффициенты приводятся в справочной литературе.

Кривые 1-5 (①), построенные по результатам испытаний алюминиевого сплава на разных уровнях напряжений  $\sigma_a/\sigma_{RN}$ ,  $\sigma_a$  – амплитуда симметричного цикла,  $\sigma_{RN}$  – предел выносливости при  $N_B = 2 \cdot 10^7$  (для цветных металлов, стали при высокой температуре, у кривых  $\sigma = f(N)$  которых горизонтального участка нет, задаётся база числа циклов). Кривые графика ① соответствуют: возникновению полос скольжения – 1, микротрещин – 2, слиянию микротрещин – 3, появлению макротрещин – 4, разрыву образца – 5.

Выносливость материала до  $10^5$  циклов называется малоцикловой (③). При *растяжении-сжатии* образцов ( $N < 10$ ) применяют мягкий режим нагружения (②) на высоком уровне напряжений ( $\sigma/\sigma_T \approx 1 - \text{const}$ ) и жёсткий – на постоянном уровне упругопластических удлинений ( $\Delta\varepsilon = \text{const}$ ), например, в условиях «запуск-работа-остановка». Заметим (②, а), что при  $N > 10^3$  кривые  $\sigma = f(N)$  мягкого и жёсткого режимов практически совпадают. На графике  $\sigma = f(\varepsilon)$  показаны (②, в) петли гистерезиса (ширина петли  $\Delta\varepsilon = 2\varepsilon_a - \text{const}$ ,  $K$  – номер полуцикла *растяжения, сжатия* упрочняющегося материала ( $\sigma_{K=2} < \sigma_{K=4}$ ). Предельное число циклов  $N_{пр}$  до излома образца можно определить из выражения:  $N_{пр}^m \varepsilon_a = C$ ,  $m$  и  $C$  – постоянные материала.

Исследованиям сверхмногоцикловой выносливости высокопрочных сталей способствовало создание высоко частотного оборудования испытаний. При увеличении числа циклов ( $N > 10^{10}$ ) у кривой (③)  $\sigma = f(N)$  возможно появление ещё одной ниспадающей ветви. Зарождение микротрещин сверхмногоциклового ( $N > 10^8$ ) *разрушения* происходит под поверхностью тела, поэтому при оценке *усталости* состояние поверхности можно не учитывать.

В процессе *усталости* скрытая стадия накопления микро повреждений сменяется продвижением макротрещин. Скорость роста длины трещин  $v = dl/dN$  определяет размах  $K$ -параметра напряжений цикла:  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ . На кривых  $dl/dN = f(\Delta K)$  диаграмм ④, ⑤ выделены участки: 1 – линия замедленной скорости трещины начинается от исходного размаха  $\Delta K_0$  или  $\Delta K_{0c}$ , называемого пороговым. 2 – прямая постоянной скорости трещины  $v = C (\Delta K)^m$ ,  $C$  и  $m$  – постоянные материала,  $m$  изменяется от 2 до 6. На схеме ⑤ показано развитие необратимо *деформированной* локальной области (НЛО) близ вершины макротрещины. 3 – участок ускоренного роста магистральной трещины, разрывающей  $D0$  на уровне предельного параметра  $\Delta K_{пр}$ . Линии  $dl/dN = f(\Delta K)$  роста трещин *усталости* напоминают картину, наблюдаемую при длительном *разрушении* в условиях высоких температур. Отличие в том, что микро трещины появляются при попеременных пластических сдвигах в теле зерна, а при *ползучести* на их границах.

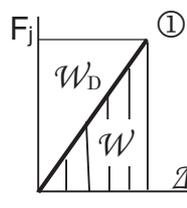


Существует факт, или, если угодно, закон, управляющий всеми явлениями природы, всем, что было известно до сих пор. Исключений из этого закона не существует; насколько мы знаем, он абсолютно точен. Название его – сохранение энергии. Он утверждает, что существует определённая величина, называемая энергией, которая не меняется ни при каких превращениях, происходящих в природе. Само это утверждение весьма и весьма отвлечённо. Это по существу математический принцип, утверждающий, что существует некоторая численная величина, которая не изменяется ни при каких обстоятельствах. Это отнюдь не описание механизма явления или чего-то конкретного, просто-напросто отмечается то странное обстоятельство, что можно подсчитать какое-то число и затем спокойно следить, как природа будет выкидывать любые свои трюки, а потом опять подсчитать это число – и оно останется прежним.

Фейнмановские лекции по физике

## Потенциальная энергия деформирования элементов конструкций

Любое воздействие: сила  $F$ , момент  $M$ , давление  $p$ , температура  $T$ , агрессивные среды, деформируя элементы системы, совершает работу  $\mathcal{W}$ . Часть работы, затрачиваемая на деформирование тела, накапливается в виде потенциальной энергии  $\mathcal{U}$ , другая – кинетическая энергия  $\mathcal{K}$ , расходуется на изменение деформации во времени  $t$ .

 ① Рассматриваем деформирование статически нагруженных тел:  $\mathcal{A} = \mathcal{A} F$ , перемещения точек которых пропорциональны воздействию. Скорость упругой деформации  $de/dt$  и соответственно кинетическая энергия пренебрежимо малы. Полагаем, что работа сил на вызванных ими перемещениях равна потенциальной энергии деформирования  $\mathcal{U} = \frac{1}{2} F_j \mathcal{A}_{ij}$ .

$F_i$  – обобщённая  $i$ -сила, обозначающая любое воздействие.  $F_j$  – равнодействующая внутренних сил по сечению  $D0$ : силы, вызванные растяжением (сжатием) –  $\mathcal{N}$ , изгибом – моменты  $M_x, M_y$ ;  $Q_x, Q_y$  – силы вследствие сдвига и  $M_z$  – момент кручения.

$\mathcal{A}_{ij}$  – обобщённое перемещение точки в  $i$ -направлении, означающее поступательные перемещения, параллельные осям  $X, Y$  сечения –  $\mathcal{A}_x(u), \mathcal{A}_y(v)$ , вдоль центральной оси  $Z$  –  $\mathcal{A}_z(w)$  и углы поворота  $M$ -сечения относительно осей  $X, Y$  –  $\theta_x, \theta_y$ , относительно  $Z$  –  $\theta_z$ .

Работа статически приложенной обобщённой силы  $F_i$  на обобщённом перемещении  $\mathcal{A}_{ij}$  равна половине их произведения (на схеме ① площадь треугольника заштрихован):  $\mathcal{W} = \frac{1}{2} F_i \mathcal{A}_{ij} = \mathcal{U}$ . Площадь  $\frac{1}{2} \mathcal{A}_i F_i$ , дополняющая заштрихованный треугольник (①) до прямоугольника, соответствует модели дополнительной работы:  $\mathcal{W}_D = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{ij} F_j = \mathcal{U}$ .

На основании принципа независимости действия сил представляем потенциальную энергию суммой работ равнодействующих внутренних сил на соответствующих им перемещениях:  $\mathcal{W} = \mathcal{U} = \sum \frac{1}{2} (\mathcal{N} \times \mathcal{A}_z), \mathcal{U} = \sum \frac{1}{2} (\mathcal{M} \times \theta)$ . Слагаемые энергии сил сдвига  $Q$  не учитываются, так как они, как правило, значительно меньше. Подставив выражения

перемещений:  $\mathcal{A}_z = \int_0^l \mathcal{N} l / (EA), \theta_x = \int_0^l M_x dz / (EI_x), \theta_y = \int_0^l M_y dz / (EI_y), \theta_z = \int_0^l M_z dz / (GI_z),$

получим формулы потенциальной энергии изгиба и кручения системы стержней:

$$\text{для рам } \mathcal{U} = \sum \int_0^l \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \sum \int_0^l \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \sum \int_0^l \frac{M_z^2 dz}{2GI_z}, \text{ для ферм } \mathcal{U} = \sum \frac{\mathcal{N}^2 l}{2EA}.$$

Вариационное исчисление есть раздел математики, в котором изучается свойство стационарности функции от функции, то есть функционала. Таким образом, целью вариационного исчисления является не поиск экстремума функции конечного числа переменных, а нахождение среди множества допустимых функций такой, которая придаёт заданному функционалу стационарное значение.

Кюнтиро Васидзу «Вариационные методы в теории упругости и пластичности».

## Глава IV. Энергетические методы определения параметров DO

### 15. Основные принципы выражения параметров энергетическим методом 46

Вариация  $\delta$  означает возможное бесконечно малое изменение функции  $y = f(x)$  при фиксированном значении переменной  $x$ , не принимающей участия в варьировании.

Принцип виртуальной работы: система находится в равновесии, если вариация работы  $\delta W$  обобщённой силы  $F_i$  на возможном *перемещении*  $\delta A_i$  равна нулю:  $\delta W = \delta U = 0$ .

$F_i = \partial U / \partial A_i$  – обобщённая сила  $\longleftrightarrow$  ПАРАМЕТРЫ  $\longleftrightarrow$  обобщённое *перемещение* –  $A_i = \partial U / \partial F_i$ .

Положение равновесия тела на стадии упругой *деформации* материала есть положение, в котором сумма работ всех сил (внутренних и внешних) имеет минимальное значение.

### 16. Энергетический метод определения перемещений точек нагруженных тел 50

Определяя искомое *перемещение*  $A_{iM}$ , выражаем функции равнодействующих сил по сечению от нагрузки  $N = f(z)$ ,  $M = f(z)$ ; прикладываем в месте М. по  $i$ -направлению *единичный* силовой фактор  $F_i = 1$  и выражаем функции от единичного фактора:  $\bar{N}_i = f(z)$ ,  $\bar{M}_i = f(z)$ .

$$A_i = \partial U / \partial F_i = \sum \frac{N \bar{N}_i l}{EA} + \sum \int \frac{M_X \bar{M}_{Xi} dz}{EI_X} + \sum \int \frac{M_Y \bar{M}_{Yi} dz}{EI_Y} + \sum \int \frac{M_Z \bar{M}_{Zi} dz}{GI_Z} \Big|$$

### 17. Методы расчёта сил DO, неопределимых только из уравнений равновесия 53

Число «избыточных» (для кинематической неизменяемости)

связей, обозначаемых символом  $S$ , определяется разностью неизвестных сил и независимых уравнений равновесия сил.

Применяя метод сил. отбрасываем  $S$  связей. прикладываем по их направлению силы  $X_1, X_2, \dots, X_S$  и из уравнений, выражающих отсутствие *перемещений* в местах удалённых связей. определяем силы. Применяя метод *перемещений*. в жёсткие узлы вводим  $K$  связей и из уравнений, выражающих отсутствие реакций по направлению введённых в узлы  $K$  связей, определим искомые *перемещения*  $Z_1, Z_2, \dots, Z_K$  и неизвестные параметры *деформирования* элементов систем.

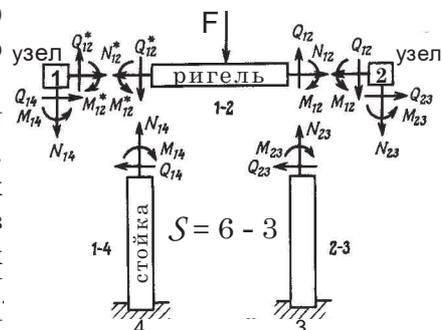


Схема рамы с отсечёнными узлами.

### 18. Оценка устойчивости. Энергетический метод выявления критических сил 60

Наименьшая сила, при которой возможны близкие к исходной смежные формы равновесия называется критической  $F_{кр}$ . При  $F > F_{кр}$  первоначальной форма неустойчива. При оценке устойчивости исходной конфигурации применим приближённый метод определения  $F_{кр}$ , основанный на балансе изменения потенциальной энергии  $\Delta U$  под действием возмущений и работы  $W$  нагрузки на *перемещении*, приведённом *деформированием* элемента системы.

Первоначальная конфигурация *деформируемого* гибкого или тонкостенного тела при потере устойчивости может перейти к *движению*. Для оценки устойчивости элемента конструкции, *деформируемого* неконсервативной нагрузкой, например, «следящей» силой, направленной по касательной к *изогнутой* оси стержня, применим только динамический подход к определению критического параметра перехода твёрдого тела в режим *колебаний*.

Схема учёта динамики воздействий: сил инерции, удара, колебаний 64

... пусть механическая система, на которую наложены заданные геометрические связи находится в равновесии под действием приложенных сил. Тогда сумма всех виртуальных работ  $\delta W$  всех внутренних и внешних сил, действующих на эту систему, на любых бесконечно малых виртуальных перемещениях, удовлетворяющих заданным геометрическим связям, равна нулю:  $\delta W = 0$ .

Кюнтиро Васидзу «Вариационные методы в теории упругости и пластичности».

## 15. Основные принципы выражения параметров энергетическим методом

Воображаемое соответственно условиям равновесия системы произвольное возможное малое *перемещение* называется вариацией  $\delta A$ . Символ  $\delta$  для обозначения вариации впервые ввёл Жозеф Луи Лагранж (1736 – 1813), чтобы отличать вариацию  $\delta$  от другой бесконечно малой – дифференциала, обозначающего действительные изменения.

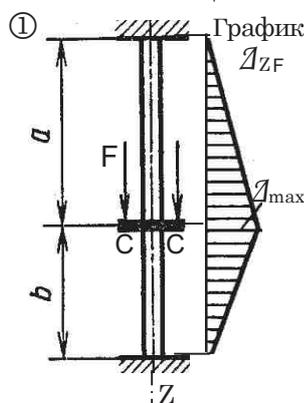
Вариационные методы определения потенциальной энергии  $U$  деформируемых тел базируются на принципе виртуальной работы: деформируемая система находится в равновесии, если виртуальная работа  $\delta W$  всех внешних и внутренних сил  $F_i$  на любых кинематически возможных бесконечно малых *перемещениях*  $\delta A_i$  равна нулю или среди допустимых *перемещений* точек  $DO$  действительные *перемещения* сообщают функционалу работы  $W = f(A_i = f(F_i))$  стационарное значение ( $\delta W = 0 = \delta U$ ).

Условие стационарности энергии *деформирования* эквивалентно уравнениям равновесия, однако, поле приложения вариационного принципа значительно шире. Варьирование функции *перемещений*  $A_i = f(F_i)$  есть способ выявления среди множества её допустимых значений таких, которые придают энергии стационарное значение.

Необходимым и достаточным условием стационарности функционала  $W$  является равенство нулю его частных производных. После подстановки  $\delta W = \sum (\partial W / \partial A_i) \delta A_i$  в условие стационарности  $\delta W = \sum F_i \delta A_i = 0$ , получим выражение:  $\{F_i - (\partial W / \partial A_i)\} \delta A_i = 0$ , из которого следует наиболее общая формула механики *деформируемого* твёрдого тела:

$$F_i = \partial U / \partial A_{ij}.$$

Производная потенциальной энергии  $U$  в положении равновесия *деформированного* тела по обобщённому *перемещению* равна обобщённой силе – это теорема Лагранжа.



Пример применения выражения:  $F_i = \partial U / \partial A_{ij}$  для определения  $A_{ij}$

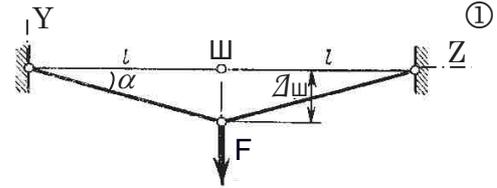
Требуется выразить наибольшее *перемещение*  $A_{\max}$  стержня (ⓐ), закреплённого с двух концов, на который действует сила  $F$ , приложенная на расстоянии  $a$  от верхней опоры (площадь  $A$  сечения и характеристика сопротивления материала  $E$  известны).

Силы  $F$  *растягивают* верхнюю часть стержня на  $\Delta a$ , и так как длина  $a + b$  закреплённого стержня измениться не может, то его нижняя часть *сжимается* на  $\Delta b = \Delta a = A_{\max}$ . Подставив  $\varepsilon_a = A_{\max}/a$  – удлинение верхней части и *укорочение* нижней части стержня  $\varepsilon_b = A_{\max}/b$  в выражение потенциальной энергии его

*растяжения*  $U = \frac{1}{2} \sum N \cdot \Delta l = \frac{1}{2} \sum N \cdot Nl / (EA) = \frac{1}{2} \sum A l \sigma^2 / E = \frac{1}{2} \sum E \varepsilon^2 A l$ , получим:  $U = \frac{1}{2} EA (A_{\max}^2/a + A_{\max}^2/b) = A_{\max}^2 \cdot \frac{1}{2} EA (a+b)/ab$ . Применяя формулу Лагранжа  $F = \partial U / \partial A = A_{\max} EA (a+b)/ab$ , выразим наибольшее *перемещение*:  $A_{\text{наибольшее}} = F ab / [EA (a+b)]$ .

Формула представления обобщённой силы производной энергии по *перемещению*:  $F_i = \partial U / \partial A_i$  применима при геометрически и физически нелинейном деформировании. Непропорциональность *перемещений*  $A_i = f(F_i)$  точек тела оказанному воздействию  $F_i$  означает геометрическую нелинейность *деформирования* элемента конструкции, а непропорциональность изменений напряжения внутренних сил материала  $s = f(e)$  параметрам изменения размеров  $e$  совместно *деформируемых* макрообъёмов сплошной среды выражает физическую нелинейность параметров *деформации*.

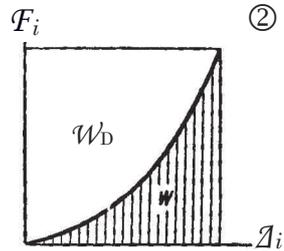
Пример. Для системы (1) двух стержней ( $l$  – длина,  $C = EA/l$  – параметр сопротивления), соединённых шарниром Ш, требуется определить *перемещение*  $A_{\text{ш}}$  точки Ш под действием силы  $F$ .



Представим, что под действием перпендикулярной оси  $Z$  стержней силы  $F$ , точка Ш приложения силы опустится на  $A_{\text{ш}}$ , стержни *повернутся* на угол  $\alpha$  ( $\text{tg } \alpha = A_{\text{ш}}/l$ ) и их длина *растянется* на  $\Delta l = (l/\cos \alpha) - l$ .

Так как рассматриваемые *деформации* малы, то можно принять:  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2(\alpha/2) \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ ,  $A_{\text{ш}}/l = \text{tg } \alpha \approx \alpha$ . Подставив в формулу потенциальной энергии *растяжения-сжатия* стержня  $U = \frac{1}{2} N \Delta l = EA (\Delta l)^2 / 2l$  изменение длины  $l$ :  $\Delta l = l[(1/\cos \alpha) - 1] \approx \frac{1}{2} l \alpha^2 \approx (A_{\text{ш}})^2 / 2l$ ; выразим энергию *деформирования* двух стержней:  $U = EA/l (A_{\text{ш}}^2 / 2l)^2 = EA (A_{\text{ш}})^4 / 4l^3$ . Исходя из формулы Лагранжа:  $F = \partial U / \partial A = EA (A_{\text{ш}})^3 / l^3$ , получим:  $A_{\text{ш}} = l^3 \sqrt[3]{F/EA}$ . Очевидно, что *перемещение* промежуточного шарнира  $A_{\text{ш}}$  не пропорционально силе  $F$ , то есть стержневая система *деформируется* нелинейно.

Площадь заштрихованной на графике (2) фигуры нелинейной зависимости между обобщённой силой  $F_i$  и *перемещением*  $A_i$ , представляет работу нагрузки на соответствующем *перемещении*  $W = \int F_i dA_i$ . Площадь, дополняющая заштрихованную фигуру до прямоугольника, соответствует дополнительной работе  $W_D$ .



Представим, что потенциальная энергия *деформирования*  $U$  выражена через обобщённые силы. Варьируя функцию дополнительной работы  $W_D = \sum F_i A_i - U$ , получим выражение:  $\delta W_D = \sum F_i \delta A_i + \sum \delta F_i A_i - \sum (\partial U / \partial A_i) \delta A_i$ , которое после подстановки  $\partial U / \partial A_i = F_i$  имеет вид:  $\delta W_D = \sum \delta F_i A_i$  (1). Вариация функции дополнительной работы  $W_D$ , представленной через внешние силы:  $W_D(F_1, F_2, \dots, F_n)$ , имеет вид:  $\delta W_D = \sum (\partial W_D / \partial F_i) \delta F_i$  (2). Из равенства выражений вариации функции дополнительной работы  $W_D$  (1) и (2) выразим формулу обобщённого *перемещения*:

$$A_i = \partial W_D / \partial F_i$$

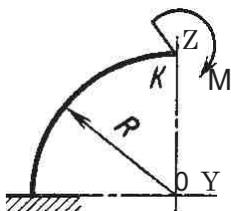
Рассматриваем упруго *деформированные* элементы конструкций, обобщённые силы  $F_i = C A_j$  которых пропорциональны *перемещениям* точек их приложения  $A_i = \Lambda F_j$ .  $C = 1/\Lambda$  ( $EA/l, EI/l, GA/l, GI/l$ ) – параметр сопротивления  $DO$ ,  $\Lambda$  – *податливость*.

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \sum C A_i \cdot A_j \leftarrow \text{ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ} \rightarrow U_{ji} = \frac{1}{2} \sum \Lambda F_i \cdot F_j$$

Подставив  $W = \frac{1}{2} \sum F_i A_i$  в формулу дополнительной работы  $W_D = \sum F_i A_i - W$ , получим  $W_D = W$ . Из выражения  $A_i = \partial W_D / \partial F_i$  представим формулу *перемещений*:  $A_i = \partial U / \partial F_i$ . Производная потенциальной энергии *деформирования* по силе равна *перемещению*.

Примеры применения формулы перемещений точек линейно деформированных тел

1. Защемлённый стержень ( $EI_x$  – характеристика сечения) в форме  $\frac{1}{4}$  окружности

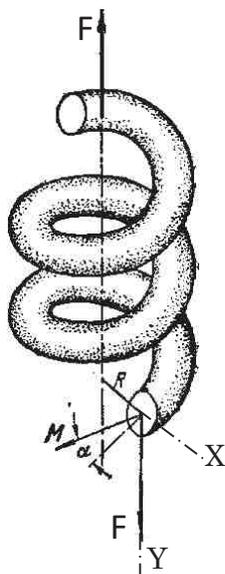


радиуса  $R$  искривлён в плоскости  $YZ$  моментом  $M$ , приложенным к свободному концу  $K$ . Требуется определить угол поворота  $\theta_{xK}$  конца консоли.  $M_x = M$  – момент изгиба в сечении, отстоящем на  $\varphi$  от точки  $K$ .

Выразим энергию изгиба:  $U = \frac{1}{2} M_x \theta_{xK} = [\frac{1}{2} M^2 / (EI_x)] \int_0^{\pi/2} R d\varphi = \frac{1}{4} M^2 \pi R / (EI_x)$

и по формуле перемещений:  $\Delta_i = \partial U / \partial F_i$  определим угол поворота относительно оси  $X$  сечения, на конце  $K$  криволинейного стержня:  $\theta_{xK} = \partial U / \partial M = \frac{1}{2} MR\pi / (EI_x)$ .

2. Определение параметров деформации цилиндрической пружины растяжения.



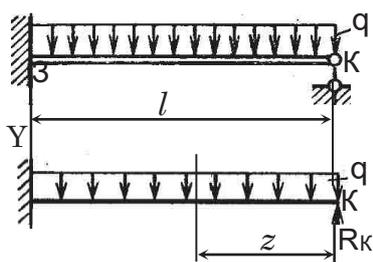
Пружина растянута вдоль оси  $Y$  равнопротивоположными силами  $F$ . Параметры пружины:  $R$  – средний радиус,  $l = 2\pi R \cdot n$  – длина проволоки,  $n$  – число витков,  $\alpha$  – угол подъёма витка,  $d$  – диаметр проволоки.  $M = F \cdot R$  – момент силы  $F$ , приведённой к центру сечения  $XY$  проволоки. Выразим равнодействующие внутренних сил в сечении:  $N = F \cdot \sin \alpha$  – сила растяжения,  $Q_Y = F \cdot \cos \alpha$  – сила сдвига,  $M_x = FR \cdot \sin \alpha$  – момент изгиба,  $M_z = FR \cdot \cos \alpha$  – момент кручения. Так как угол  $\alpha$  мал ( $5 - 10^\circ$ ), полагаем, что  $\sin \alpha \approx 0$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ . Отсюда  $N = 0$ ,  $M_x = 0$ ,  $\sigma = M_x \cdot \rho / I_x = 0$ ;  $Q_Y = F$ ,  $M_z = FR$ . Определим максимальные напряжения сдвига:

$\tau_{\max} = M_z / W_z + Q / A = 16FR / (\pi d^3) + 4F / (\pi d^2) = [16FR / (\pi d^3)] (1 + d / 4R)$ . Так как величина  $d / 4R$ , изменяющаяся от  $1 / 20$  до  $1 / 40$ , мала по сравнению с единицей,  $1 + d / 4R$  не учитывается.  $\tau_{\max} = 16FR / (\pi d^3)$ .

Дифференцируя по силе  $F$  потенциальную энергию деформации  $U = \frac{1}{2} (M_z \cdot \theta_z) = \frac{1}{2} M_z^2 l / (GI_z) = \frac{1}{2} F^2 R^2 l / (GI_z)$ , определим наибольшее

перемещение-вытяжку пружины:  $\Delta_F = \partial U / \partial F = FR^2 l / (GI_z) = 64FRn / (Gd^4) = 8FD^3 n / (Gd^4)$ .

3. Стержень пролётом  $l$ , защемлённый одним концом  $3$  (реакции  $R_Y, M_X$ ) и шарнирно



закреплённый другим концом  $K$  (реакция  $R_K$ ), нагружен равномерно распределёнными силами интенсивностью  $q$ . Для определения трёх неизвестных  $R_Y, M_X, R_K$  плоской системы параллельных сил есть только два независимых уравнения равновесия. Если число неизвестных сил  $X_i$  больше, чем число независимых уравнений равновесия, система называется статически неопределимой. Раскрывая

неопределимость, мысленно отбрасываем опору  $K$ , заменяя её реакцией  $R_K$ ; выражаем вертикальное перемещение  $\Delta_K$  конца  $K$  консоли от нагрузки  $q$  и силы  $R_K$  составляем уравнение, отрицающее перемещение  $\Delta_K$  в месте опоры. Представим момент изгиба в сечении на расстоянии  $z$  от точки  $K$ :  $M_x = R_K \cdot z - \frac{1}{2} qz^2$ . Определим

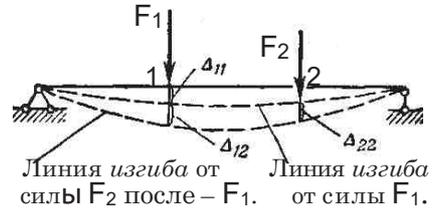
потенциальную энергию изгиба:  $U = \int_0^l M_x^2 dz / (2EI_x) = [1 / (2EI_x)] \int_0^l (R_K \cdot z - \frac{1}{2} qz^2)^2 dz = [l^3 / (2EI_x)] (\frac{1}{2} R_K^2 - \frac{1}{4} R_K \cdot ql + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} q^2 l^2)$ . По формуле  $\Delta_i = \partial U / \partial F_i$  выразим вертикальное

перемещение точки  $K$ :  $v_K = \partial U / \partial R_K = (l^3 / 2EI_x) (2R_K / 3 - ql / 4)$ , приравняем его нулю:  $2R_K / 3 - ql / 4 = 0$ , отсюда выразим  $R_K = \frac{3}{8} ql$ .  $R_Y = \frac{5}{8} ql$ ,  $M_X = \frac{1}{8} ql^2$  – реакции защемления.

Теорема о взаимности работ:  $W_{ij} = W_{ji}$

При воздействии на линейно деформированное тело поочерёдно двух систем нагрузок  $F_i, F_j$  работа  $W_{ij}$  сил первого состояния ( $F_1$ ) на соответствующих им перемещениях ( $A_{12}$ ), вызванных действием сил второго состояния ( $F_2$ ), равна работе ( $W_{ji}$ ) сил второго состояния на перемещениях ( $A_{21}$ ), вызванных действием сил первого состояния.

Представим изгиб шарнирно закреплённого стержня от сил  $F_1$  и  $F_2$  при изменении порядка приложения сил.



1. Пусть на стержень действует сила  $F_1$ , приложенная в точке 1.  $W_{11} = \frac{1}{2} F_1 A_{11}$  – работа силы  $F_1$  на перемещении  $A_{11}$ . Затем в точке 2 изогнутой балки приложим силу  $F_2$ , от которой точка 2 опустится на  $A_{22}$ ,  $W_{22} = \frac{1}{2} F_2 A_{22}$  – работа силы  $F_2$  на перемещении  $A_{22}$ . При этом прогиб точки 1 изменится на  $A_{12}$ ,  $W_{12} = F_1 A_{12}$  – работа силы  $F_2$  на перемещении  $A_{12}$ . Заметим, что работа  $W_{12}$  силы  $F_1$  на перемещении  $A_{12}$  точки 1 от силы  $F_2$  не изменяется, поэтому в выражении работы  $W_{12}$  коэффициент  $\frac{1}{2}$  отсутствует:

$$W(1) = \frac{1}{2} F_1 \cdot A_{11} + \frac{1}{2} F_2 \cdot A_{22} + F_1 \cdot A_{12}.$$

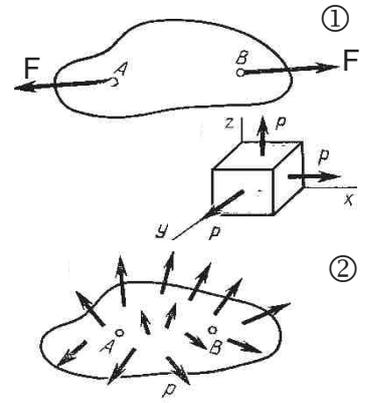
2. Приложим силу  $F_2$ , а затем  $F_1$ , и выразим работу сил  $F_1$  на прогибе  $A_{11}$  и  $F_2$  на  $-A_{22}, A_{21}$ :

$$W(2) = \frac{1}{2} F_2 \cdot A_{22} + \frac{1}{2} F_1 \cdot A_{11} + F_2 \cdot A_{21}.$$

На основе применимого для линейных систем принципа независимости параметров деформации от порядка приложения факторов нагрузки приравняем  $W(1)$  и  $W(2)$ :

$F_1 \cdot A_{12} = F_2 \cdot A_{21}$  – это равенство выражает теорему о взаимности работ.

Теорема о взаимности работ даёт возможность выразить общее решение некоторых задач. Например, можно определить изменение объёма  $\Delta V$  тела произвольной формы (1), нагруженного равнопротивоположными силами  $F$  на расстоянии  $AB = l$  друг от друга. Сопоставим работу сил  $F$ :  $W(1) = F \cdot \Delta l$  с работой растягивающих сил, распределённых по поверхности этого тела равномерно с интенсивностью  $p$  (2). Изменение отрезка  $AB$   $\Delta l_p = p l (1 - 2\nu)/E$  при всестороннем растяжении ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ ) складывается из растяжения на  $\Delta l_1 = \epsilon_1 l = p l / E$  и сжатия на  $\Delta l_2 = \Delta l_3 = \epsilon_2 l = -\nu p l / E$  при растяжении по двум другим поперечным направлениям.

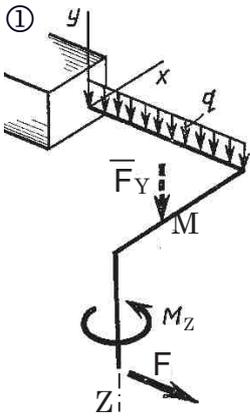


Из соответствующего теореме о взаимности работ выражения:  $p \cdot \Delta V = F \cdot \Delta l_p$ , определим изменение объёма:  $\Delta V = F l (1 - 2\nu)/E$ .

Из взаимности работы силы  $F_i$  на перемещении от  $F_j$ :  $A_{ij} = A_{ji} F_j$  и работы силы  $F_j$  на перемещении  $A_{ji} = A_{ji} F_i$ . следуют взаимность податливостей:  $A_{ij} = A_{ji}$ . Перемещение по  $i$ -направлению от  $F_j = 1$ , равно перемещению по  $j$ -направлению от  $F_i = 1$ .  $C_{ij} = C_{ji}$ .

Принцип минимума потенциальной энергии  $U$  линейно деформированного тела Среди всех возможных перемещений, удовлетворяющих заданные геометрические граничные условия, действительные перемещения  $A_x(u), A_y(v), A_z(w)$  сообщают энергии абсолютный минимум. Вариационный принцип минимума дополнительной энергии: среди всех систем возможных силовых параметров, удовлетворяющих уравнениям равновесия сил и заданным краевым механическим условиям, действительные силовые параметры сообщают дополнительной энергии абсолютный минимум. Следовательно действительные значения могут быть определены из условия стационарности  $\delta U = 0$ .

16. Энергетический метод определения перемещений точек нагруженных тел



Формула *перемещений* точек элементов линейно деформируемых систем:  $\Delta_i = \partial U / \partial F_i$  выражает *перемещение* по  $i$ -направлению только в месте приложения силового фактора  $F_i$ . Для выражения *перемещения*  $\Delta_{iM}$  в точке М, не являющейся местом приложения  $F_i$ , прикладываем единичный силовой фактор  $\bar{F}_i$  (черта сверху обозначает  $F_i = 1$ ) и определяем  $\Delta_i$ , применяя вариационный вид формулы *перемещений*:  $\delta U = \sum \Delta_i \delta \bar{F}_i$ . Определяя, например, вертикальное *перемещение*  $\Delta_Y$  точки М стержневой системы (①), мысленно прикладываем в месте М стержня единичную силу  $F_Y = 1$  (определяя угол *поворота* прикладываем единичный момент  $\bar{M}$ ). Полагаем, что при варьировании  $\bar{F}_Y$  нагрузка не

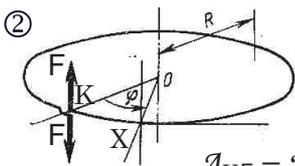
изменяется, а функции равнодействующих внутренних сил *растяжения*  $N$ , *сдвига*  $Q$ , моментов *изгиба*  $M_x$  и моментов *кручения*  $M_z$  изменяются пропорционально  $\delta \bar{F}$ . Слагаемые энергии сил *сдвига* не учитываются, потому что они меньше энергии *растяжения* и много меньше энергии *изгиба* и *кручения*. Энергию ферм (системы шарнирно соединённых в узлах стержней) описывает один интеграл *растяжения*.

$$U = \sum \frac{N^2 l}{2EA} + \int \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \dots \quad U + \delta U = \sum \frac{(N + \bar{N} \delta \bar{F}_i)^2}{2EA} dz + \sum \int \frac{(M_x + \bar{M}_x \delta \bar{F}_Y)^2}{2EI_x} dz + \dots$$

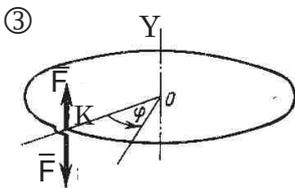
Пренебрегая в выражениях  $(N + \bar{N} \delta \bar{F}_i)^2$ ,  $(M_x + \bar{M}_x \delta \bar{F}_i)^2$ , ... квадратом малой величины  $\delta \bar{F}$ , подставим  $\delta U = \sum \Delta_i \delta \bar{F}_i$  и сокращая  $\delta \bar{F}_i$ , выразим *перемещение* по  $i$ -направлению:

$$\Delta_i = \sum \frac{N \bar{N}_i l}{EA} + \int \frac{M_x \bar{M}_{ix}}{EI_x} dz + \int \frac{M_y \bar{M}_{iy}}{EI_y} dz + \int \frac{M_z \bar{M}_{iz}}{GI_z} dz.$$

**Пример.** К краям разреза кольца (радиус  $R$ ), показанного на схеме ②, приложены две равные противоположно направленные силы  $F$ , перпендикулярные плоскости  $ZX$  кольца. Требуется определить расхождение краёв К разреза кольца под действием сил  $F$ .  $EI_x$  - характеристика сопротивления  $M$ -сечения на *повороте* относительно оси  $X$  при *изгибе* стержня,  $GI_z$  -  $M$ -сечения на *повороте* относительно оси  $Z$  при *кручении*.



$\Delta_{YF} = ?$



Для определения расхождения краёв К разреза под действием сил  $F$  выразим функции моментов *изгиба* и *кручения* в сечении, заданном углом  $\varphi$ , от точки К:  $M_x = FR \sin \varphi$ ,  $M_z = FR (1 - \cos \varphi)$ . В точках К вертикального *перемещения*  $\Delta_{YK}$  концов кольца прикладываем противоположно направленные силы  $F = 1$  (③), параллельные оси  $Y$  и выражаем функции моментов *изгиба* и

*кручения* от единичных сил в сечении, заданном углом  $\varphi$ , изменяемом от 0 до  $2\pi$ :  $\bar{M}_x = 1 \cdot R \sin \varphi$ ,  $\bar{M}_z = 1 \cdot R (1 - \cos \varphi)$ . Подставив функции моментов внутренних сил от нагрузки и от  $F = 1$ , приложенных в месте искомого *перемещения*, выразим интегралы:

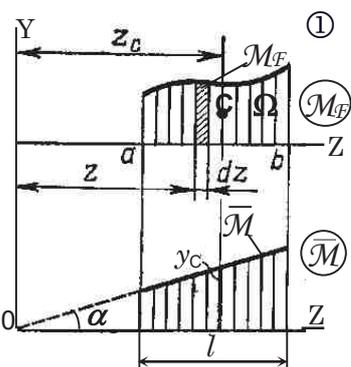
$$\Delta_{YF} = \int_0^{2\pi} M_x \bar{M}_x R d\varphi / (EI_x) + \int_0^{2\pi} M_z \bar{M}_z R d\varphi / (GI_z) = FR^3 \left[ \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi / (EI_x) + \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi / (GI_z) \right].$$

Ответ:  $\Delta_{YF} = \pi FR^3 [1/(EI_x) + 3/(GI_z)]$ .

Графоаналитический способ вычисления интегрального произведения:  $\int M_F M dz$

Упрощению вычислений интегралов *перемещений*  $\Delta_i = \sum \int M(z) \bar{M}_i(z) dz / (EI)$  на участках прямых стержней постоянной жёсткости сечений способствует графическое представление интеграла произведения функций моментов:  $M(z) \bar{M}_i(z) dz$ .

Допустим, что график функций моментов *изгиба* от нагрузки  $M_F$  на участке стержня  $ab$  ( $EI = \text{const}$ ) имеет криволинейное очертание (1), а график  $\bar{M}$  от единичной силы, приложенной в месте искомого *перемещения* – прямая под углом  $\alpha$ , которая пересекает ось  $Z$  в точке  $O$ ,  $y = z \operatorname{tg} \alpha = \bar{M}$  – ордината графика  $\bar{M}$ .



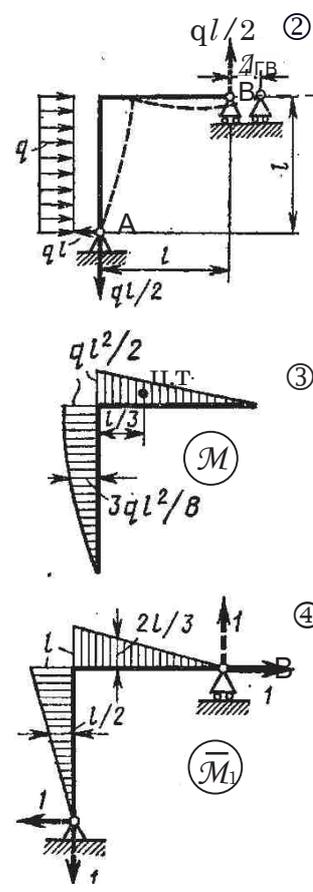
Если  $d\Omega_F = M_F dz$  – площадь заштрихованного элемента графика  $M_F$ , а  $\bar{M} = z \operatorname{tg} \alpha$ , то интегральное произведение  $\int M_F \bar{M} dz$  имеет вид:  $\operatorname{tg} \alpha \int z \cdot d\Omega_F$ . Здесь  $\int z \cdot d\Omega_F = \Omega_F \cdot z_c$  – площадь  $\Omega_F$  графика  $M_F$ ,  $z_c$  – абсцисса центра тяжести  $\Omega_F$ . Учитывая, что  $z_c \cdot \operatorname{tg} \alpha = y_c$ , получаем:  $\Delta_i = \sum \int (M_F \bar{M} dz) / EI = \sum \Omega_F \cdot y_c / (EI)$ . Таким образом, выражение функций моментов от нагрузки  $M_F$  и единичной силы  $\bar{M}$  с последующим интегрированием заменяет построение графиков  $M_F$  и  $\bar{M}$  с последующей операцией их «перемножения»: площадь первого графика ( $M_F$  или  $\bar{M}$ ) умножается на ординату второго (линейного) графика под центром тяжести первого. «Перемножение» ( $M_F \times \bar{M}$ ), на отрезке  $ab = l$  можно вычислить по формуле Симпсона:  $\frac{1}{6} l [M(a) \cdot \bar{M}(a) + 4M(\text{ср}) \cdot \bar{M}(\text{ср}) + M(b) \cdot \bar{M}(b)]$ ,  $M(a)$  и  $M(b)$  – значения моментов на краях отрезка  $ab$ ,  $M(\text{ср})$  – моменты посередине  $ab$ .

**Пример.** Система двух перпендикулярных стержней (2) одинаковой жёсткости сечения  $EI$  нагружена по длине  $l$  стойки равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью  $q$ . Требуется определить горизонтальное *смещение* опоры В –  $\Delta_{ЗВ}$ . Согласно предварительно намеченной пунктиром линии (2) предполагаемого *изгиба* считаем, что опора *перемещается* вправо. Из уравнений равновесия:  $ql - R_A = 0$ ,  $R_B \cdot l - ql \cdot \frac{1}{2} l = 0$   $R_A - R_B = 0$  определим реакции опор:  $R_A = ql$ ,  $R_A = R_B = \frac{1}{2} ql$ .

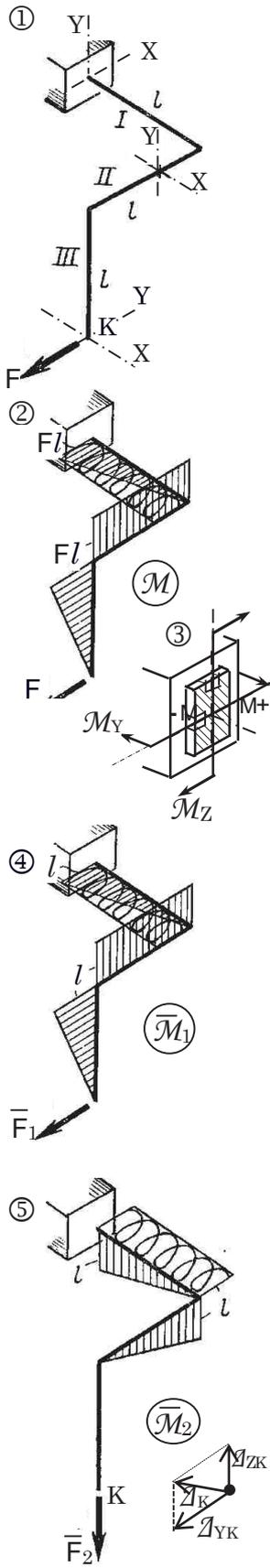
Выразим момент *изгиба* в сечении, отстоящем на  $z$  от опоры А:  $M(z) = ql \cdot z - qz \cdot \frac{1}{2} z$ . При  $z = l$ ,  $M = \frac{1}{2} ql^2$ ; при  $z = \frac{1}{2} l$ ,  $M(\text{ср}) = \frac{3}{8} ql^2$ . Строим график (3) изменения вдоль  $Z$  момента *изгиба* от нагрузки, откладывая ординаты  $M$  со стороны *сжатых* волокон. В месте искомого *перемещения* (опора В) по его направлению (вправо) прикладываем силу, равную единице (4), определяем реакции, выражаем момент *изгиба*  $\bar{M}(z)$  от единичной силы, строим график изменения  $\bar{M}(z)$  от  $F = 1$  по длине стержней.

Определим горизонтальное *перемещение*  $\Delta_{ЗВ}$  опоры В рамы, суммируя произведение площади  $\Omega_p = \frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{2} ql^2$  ригеля (3) на ординату  $\frac{2}{3} l$  (4) под центром тяжести  $\Omega_p$ :  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} l = \frac{1}{6} ql^4$  и результат вычисления произведения ( $M \times \bar{M}_1$ ) по длине стойки по формуле Симпсона:  $\frac{1}{6} l (0 + 4 \cdot \frac{3}{8} ql^2 \cdot \frac{1}{2} l + \frac{1}{2} ql^2 \cdot l) = \frac{5}{24} ql^4$ .

Ответ:  $\Delta_{ЗВ} = \frac{3}{8} ql^4 / EI$ .



## Определение параметров деформирования пространственной стержневой системы



Пример. Защемлённая одним концом система (①) одинаковых перпендикулярных стержней I, II, III ( $l = 1$  м,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа,  $[\sigma] = 160$  МПа) на свободном конце К нагружена силой  $F = 10$  кН в плоскости ZY. Требуется определить размер  $b$  прямоугольного сечения  $b \times 2b$  и *перемещение* свободного конца.

### Определение наиболее нагруженного места системы стержней

Выражаем равнодействующие внутренних сил в сечениях и строим графики моментов (②), откладывая моменты *изгиба* со стороны *сжатых* волокон. Силы *сдвига* не учитываем, так как их влияние мало. Стержень III: *Изгиб*. Наибольший момент  $M_X = Fl$ . Стержень II: *Изгиб с растяжением*.  $M_X = Fl$ ,  $N = F$ . Стержень I: *Изгиб с кручением*.  $M_Y = F \cdot z$  – момент *изгиба* в плоскости меньшей жёсткости XZ,  $M_Z = Fl$  – момент *кручения*. Наиболее деформирован стержень I у защемления:  $M_{Y_{max}} = Fl$ ,  $M_Z = Fl$ .

### Определение напряжений в месте M наибольшей деформации

Самыми напряжёнными в месте максимального момента  $M_Y$  у защемления стержня I являются M-точки, наиболее удалённые от нейтральной оси Y (③):  $\sigma_{max} = (M/I)_Y \cdot x_{max} = Fl / (2b \cdot b^2 / 6) = 3Fl / b^3$ . При *кручении* стержня I прямоугольного сечения наибольшую величину имеют напряжения *сдвига* посередине больших сторон:  $\tau_{max} = Fl / (\beta h b^2)$ .  $\sigma_{max} = 3 \cdot 10^{-2} / b^3$ ,  $\tau_{max} = 2,03 \cdot 10^{-2} / b^3$  (при  $h/b = 2$ ,  $\beta = 0,246$ ) – наибольшие напряжения в точках M+, M- (③).

### Подбор размеров прямоугольного сечения ломаного стержня

Определим главные напряжения мест M+, M- сечения стержня I:

$\sigma_3 = \frac{1}{2} (\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau_{max}^2}) = \frac{1}{2} 10^{-2} (3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 2,03^2}) / b^3$ . Подставив главные напряжения  $\sigma_1 = 4,03 \cdot 10^{-2} / b^3$ ,  $\sigma_3 = -1,03 \cdot 10^{-2} / b^3$  в условие прочности по критерию максимальных напряжений *сдвига*:  $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ , определим размер  $b \approx 7 \cdot 10^{-2}$  м прямоугольного сечения.  $h = 140$  мм,  $b = 70$  мм – принятые размеры профиля стержня.

### Определение перемещения свободного конца несущей системы.

К торцу стержня прикладываем силы:  $F_1 (F_Y) = 1$  влево (③),  $F_2 (F_Z) = 1$  вниз (④), строим графики  $\bar{M}_1(z)$ ,  $\bar{M}_2(z)$  и выражаем *перемещения*:

$$\Delta_Y = (M \times \bar{M}_1) = Fl^3 \left[ \frac{1}{EI_X} \left( \frac{1}{2} 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot 1 \cdot 1 \right) + \frac{1}{EI_Y} \frac{1}{2} 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{GI_Z} 1 \cdot 1 \cdot 1 \right] = 9,9 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

$$\Delta_Z = (M \times \bar{M}_2) = -Fl^3 \left( \frac{1}{EI_X} 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{GI_Z} 1 \cdot 1 \cdot 1 \right) = -7,88 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

$I_X = bh^3 / 12 = 3b^4 / 4$ ,  $I_Y = hb^3 / 12 = b^4 / 6$ ,  $I_Z = \alpha hb^3$  (при  $h/b = 2$ ,  $\alpha = 0,229$ ).

Знак минус вертикального *перемещения*  $\Delta_{ZK}$  свободного конца К стержня показывает, что  $\Delta_{ZK}$  направлено вверх (противоположно силе  $F_2$ ). *Перемещение*  $\Delta_K$  равно геометрической сумме  $\Delta_{YK}$  и  $\Delta_{ZK}$ :  $\Delta_K = \sqrt{\Delta_{YK}^2 + \Delta_{ZK}^2} = 10^{-3} \sqrt{17^2 + 10^2} = 19,7 \cdot 10^{-3}$  м. Малая проекция  $\Delta_{XK}$  на ось X ( $\Delta_{XK} \approx 0,09 \cdot 10^{-3}$  м) не учитывается. Ответ:  $\Delta_K = 20$  мм.

## 17. Методы расчёта сил, неопределимых только из уравнений равновесия

$S$  – число превышения числа независимых уравнений статики  
 Раскрыть неопределимость методом сил – значит определить неизвестные силы  $X$ , превышающие на  $S$  число независимых уравнений равновесия. Например, двум реакциям шарнирно неподвижной опоры К рамы (①) и трём реакциям защемления 3 соответствуют три независимых уравнения статики:  $S = 5 - 3 = 2$ . Следовательно, число неизвестных  $X$  метода сил равно двум.

Образование системы определимых сил (ОС) из заданной СНС  
 Удаляя из  $S$  раз статически неопределимой системы  $S$  связей, образуем кинематически неизменяемую систему определимых из уравнений равновесия сил ОС. По направлению удалённых  $S$  связей прикладываем реакции связей  $X_1, X_2, \dots, X_S$ . В раме (①) отброшена шарнирно неподвижная опора К и к системе ОС (②) приложены составляющие реакции опоры – неизвестные  $X_1, X_2$ .

Выражение отсутствия перемещений в месте удалённых связей  
 Соответственно принципу минимума потенциальной энергии *перемещения* точек системы ОС по  $i$ -направлению виртуально удалённых связей:  $\Delta_i = \Delta_{iF} + \Delta_{iX}$  равны нулю.  $\Delta_{iF}$  – перемещение от нагрузки,  $\Delta_{ij} = \sum \Delta_{ij} X_j$  – перемещение от неизвестных силы  $X_j$ .

Система уравнений  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + \dots + A_{1S} X_S + \Delta_{1F} = 0, \\ \Delta_2 = A_{21} X_1 + A_{22} X_2 + \dots + A_{2S} X_S + \Delta_{2F} = 0, \\ \dots \\ \Delta_S = A_{S1} X_1 + A_{S2} X_2 + \dots + A_{SS} X_S + \Delta_{SF} = 0. \end{array} \right.$   
 по  $i$ -направлению.

$\Delta_1, \Delta_2$  системы ОС (②):  $A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + \Delta_{1F} = 0, A_{21} X_1 + A_{22} X_2 + \Delta_{2F} = 0.$

Вычисление перемещений от единичных сил  $\Delta_{ij}$  и от нагрузки  $\Delta_{iF}$   
 Определяем *перемещения*  $\Delta_{ij}$  и  $\Delta_{iF}$  энергетическим методом.  $\Delta_{ij}$  – податливость стержня в  $i$ -направлении под действием  $X_j$ .

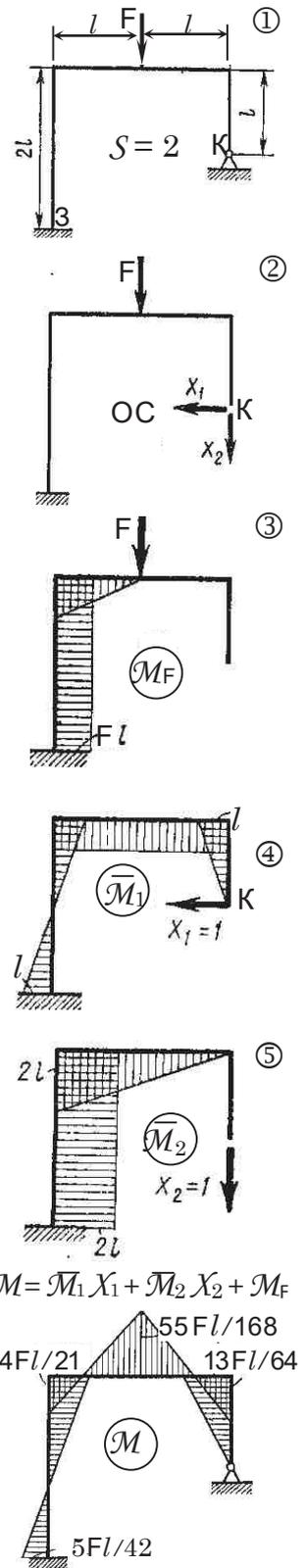
$$\Delta_{ij} = \sum \int \frac{\bar{M}_{Xi} \bar{M}_{Xj} dz}{EI_X} + \sum \int \frac{\bar{M}_{Yi} \bar{M}_{Yj} dz}{EI_Y} + \sum \int \frac{\bar{M}_{Zi} \bar{M}_{Zj} dz}{GI_Z}.$$

$\Delta_{iF}$  – перемещение точки в  $i$ -направлении от нагрузки.

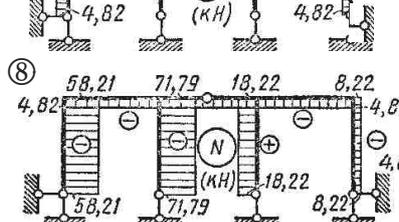
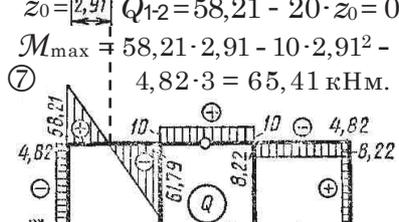
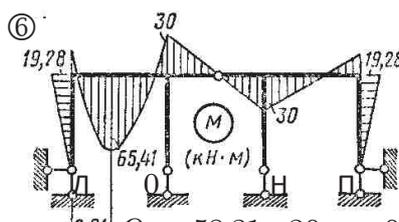
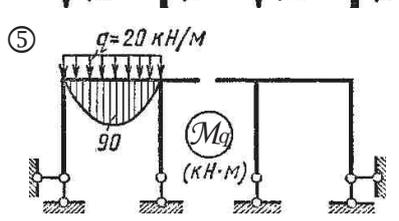
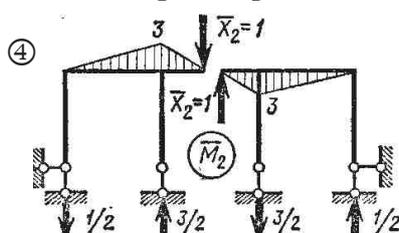
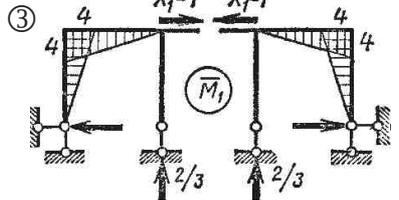
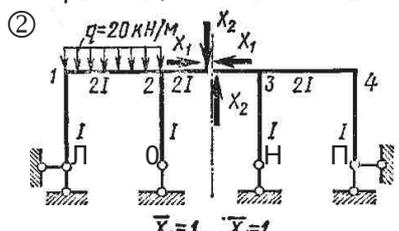
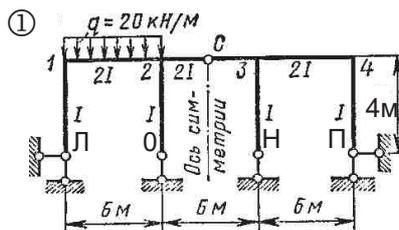
$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{M_{XF} \bar{M}_{Xi} dz}{EI_X} + \sum \int \frac{M_{YF} \bar{M}_{Yi} dz}{EI_Y} + \sum \int \frac{M_{ZF} \bar{M}_{Zi} dz}{GI_Z}.$$

$\bar{M}_{Xi}, \bar{M}_{Yi}, \bar{M}_{Zi}$  – моменты *изгиба* от  $X_i = 1, \bar{M}_{Xj}, \bar{M}_{Yj}, \bar{M}_{Zj}$  – моменты *изгиба* от  $X_j = 1, M_{XF}, M_{YF}, M_{ZF}$  – от нагрузки.

При графоаналитическом вычислении *перемещений*  $\Delta_{ij}, \Delta_{iF}$  строим графики функций моментов *изгиба*  $M(z)$  от нагрузки  $F$  – (③), от  $X_1 = 1$  – (④), от  $X_2 = 1$  – (⑤); выражаем:  $EIA_{11} = (M_F \times \bar{M}_1) = 3 \cdot \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l + l \cdot 2l \cdot l = 3l^3, EIA_{12} = (M_1 \times \bar{M}_2) = \frac{1}{2} 2l \cdot 2l \cdot l = 2l^3, EIA_{22} = \frac{1}{2} 2l \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} 2l + 2l \cdot 2l \cdot 2l = -32l^3/3; EI\Delta_{1F} = (M_F \times \bar{M}_1) = \frac{1}{2} Fl \cdot l \cdot l = Fl^3/2. EI\Delta_{2F} = (M_F \times \bar{M}_2) = Fl \cdot 2l \cdot 2l + \frac{5}{6} Fl^3 = 29Fl^3/6$  и из уравнений равновесия:  $3X_1 + 2X_2 + 0,5F = 0, X_1/5 + 32X_2/3 + 29F/6 = 0$ , получаем значения искомых сил:  $X_1 = 13F/84, X_2 = -27F/56.$



### Использование симметрии системы упрощает расчёт



Плоская симметричная рама (1) на ригеле 1-2 нагружена равномерно распределёнными силами интенсивностью  $q$ . Стойки ( $I$  – момент инерции) и ригель ( $2I$ ) изготовлены из одного материала. Шарнирно неподвижные опоры Л, П накладывают четыре связи, подвижные опоры О, Н – две, одну связь снимает шарнир С. Для определения пяти реакций есть три уравнения равновесия.  $S = (6 - 1) - 3 = 2$ .

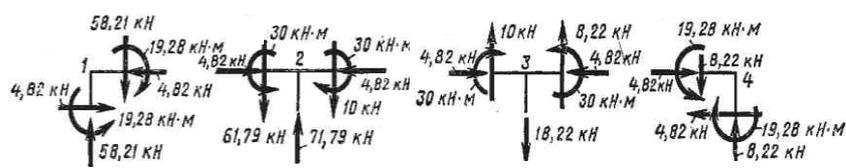
Образуя симметричную систему ОС (2), удаляем из рамы шарнир С и по направлению возможных *перемещений* краёв ригеля (горизонтального  $X_1$  и вертикального  $X_2$ ) прикладываем к краям разрыва силы  $X_1$  и  $X_2$ . Уравнения отсутствия взаимных *смещений* краёв ригеля имеют вид:

$$\Delta_1 = A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + \Delta_{1q} = 0; \Delta_2 = A_{21} X_1 + A_{22} X_2 + \Delta_{2q} = 0.$$

Для графоаналитического вычисления *перемещений* от единичных сил  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{12} = A_{21}$ ,  $A_{22}$  и от нагрузки  $\Delta_{1q}$ ,  $\Delta_{2q}$  строим графики ( $M$ ) (3), ( $M_2$ ) (4) от  $\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = 1$  и ( $M_0$ ) (5) от нагрузки интенсивности  $q$ , откладывая моменты со стороны *растянутых* волокон.  $EI A_{11} = 2 \left[ \frac{1}{2} (6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4) + \frac{1}{2} 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right]$ ,  $EI A_{22} = \frac{1}{2} \cdot 2 \left[ \frac{1}{2} (6 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3) \right]$ .  $A_{12} = A_{21} = 0$ , так как при «умножении» симметричного ( $M_1$ ) и кососимметричного ( $M_2$ ) графиков получается нуль. Применяя формулу Симпсона, вычислим  $EI \Delta_{1q} = \frac{1}{2} \cdot 6/6 (0 + 4 \cdot 90 \cdot 2 + 0)$  и  $EI \Delta_{2q} = -\frac{1}{2} \cdot 6/6 (0 + 4 \cdot 90 \cdot 1,5 + 0)$ . Из уравнений:  $\Delta_1 = 74,67 X_1 + 360 = 0$ ,  $\Delta_2 = 27 X_2 - 270 = 0$ , определим силы  $X_1 = -4,82$  кН,  $X_2 = 10$  кН. Минус силы  $X_1$  указывает на сжатие частей ригеля 2-3.

Выразим уравнения равновесия сил левой части рамы:  $R_{Лгор} - 4,82 = 0$ ,  $R_{Лверт} \cdot 6 - 20 \cdot 6 \cdot 3 - 4,82 \cdot 4 + 10 \cdot 3 = 0$ ,  $R_{Лверт} + R_0 - 20 \cdot 6 - 10 = 0$  и правой части:  $R_{Пверт} \cdot 6 - 4,82 \cdot 4 - 10 \cdot 3 = 0$ ,  $10 - R_Н + R_{Пверт} = 0$ . Вычислим реакции:  $R_{Лгор} = |R_{Пгор}| = 4,82$  кН,  $R_{Лверт} = 58,21$  кН,  $R_0 = 71,79$  кН,  $R_{Пверт} = 8,22$  кН,  $R_Н = 18,22$  кН.

Построим графики функций  $M(z)$  (6),  $Q(z)$  (7),  $N(z)$  (8). Вырежем узлы 1, 2, 3, 4, покажем моменты *изгиба*  $M$ , силы *растяжения*  $N$  и *сдвига*  $Q$ , проверим выполнение условий равновесия узлов рамы:  $\sum M = 0$ ,  $\sum Q = 0$ ,  $\sum N = 0$ .



Проверка:  $\Delta_{Сгор} = (M \times \bar{M}_1) = 0$ .  $EI \Delta_{1c} = -2 \left( \frac{1}{2} 4 \cdot 19,28 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{2} \cdot 6/6 [(-19,28 \cdot 4 + 4 \cdot 65,35 \cdot 2 + 0) + (0 + 4 \cdot 5,36 \cdot 2 - 19,28 \cdot 4)] = -0,37$ . Ошибка:  $0,37 \cdot 100\% / 282,4 = 0,13\%$  меньше [1%].

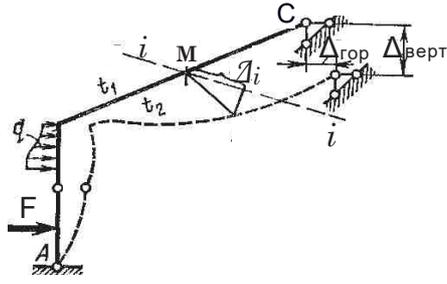
Статически неопределимые системы позволяют за счёт более рационального распределения усилий по элементам конструкции достигать значительной экономии металла; дополнительные связи увеличивают жёсткость конструкции и предохраняют её при нарушении любой связи от разрушения. Недостатком таких систем является их высокая чувствительность к изменению температуры, к неточности изготовления отдельных элементов, к нарушению расположения опор, в результате чего в элементах конструкции возникают дополнительные напряжения.

Подскребка М.Д. «Сопротивление материалов».

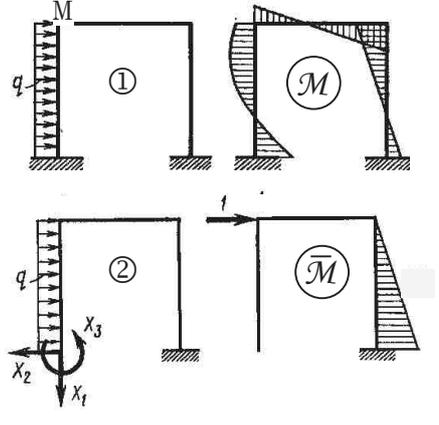
О распределении внутренних сил между элементами систем неопределимых сил Система с  $S$  «избыточными» для кинематической неизменяемости связями при отказе какой-либо связи, может сохранить несущую способность, перераспределив усилия. Распределение внутренних сил между элементами статически неопределимых систем (в отличие от статически определимых) зависит от соотношения жёсткостей сечений ( $EA, GA, EI, GI$ ). С увеличением жёсткости какого-либо элемента СНС доля нагрузки, приходящаяся на него, возрастает, а нагрузка других соответственно уменьшается. Возможность перераспределения внутренних сил элементов рациональным подбором сечений без изменения схемы воздействия способствует повышению надёжности СНС. Начальные несовершенства статически неопределимых систем из-за неточности изготовления элементов или сборки некоторых узлов и изменения температуры  $\Delta T$  вызывают дополнительные внутренние силы элементов. Тепловые воздействия можно учесть при проектировании прочности элементов статически неопределимых систем, а отклонения размеров полностью учесть невозможно, поэтому к точности их изготовления предъявляются высокие требования. В условиях возможных перепадов температур  $\Delta T^\circ$  и смещений опор  $\Delta c$  формула определения *перемещений* имеет вид:

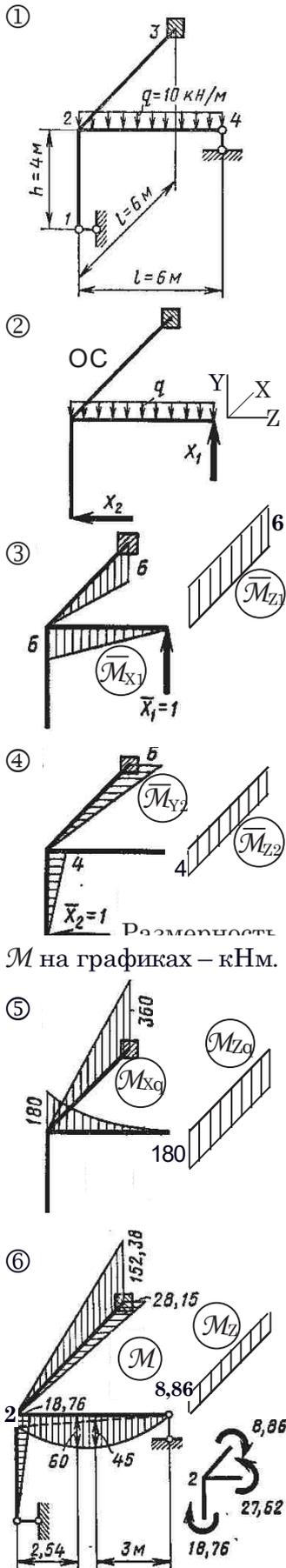
$$\Delta_{i(F, T^\circ, \Delta c)} = \sum \int \frac{M \bar{M}_i dz}{EI} + \sum \int \frac{M_z \bar{M}_i dz}{GI_z} + \sum \int \alpha T^\circ \bar{N}_i dz + \sum \int \alpha (\Delta T^\circ / h) \bar{M}_i dz - \sum \int \bar{R}_i \Delta c.$$

Первое слагаемое представляет вклад в *перемещение*  $\Delta_i$  моментов *изгиба*, второе – моментов *кручения*. Третье слагаемое – *перемещение*  $\Delta_{iT^\circ}$  от  $\Delta T^\circ$ ; четвертое – вызвано неравномерностью температуры  $\Delta T^\circ = t_1 - t_2$  по высоте  $h$  сечения,  $\bar{N}_i$  и  $\bar{M}_i$  есть функции сил *растяжения* и моментов *изгиба* от силы  $X_i = 1$ , приложенной в точке М по  $i$ -направлению искомого *перемещения*. Последнее слагаемое выражает *перемещение* от *смещения* опоры на  $\Delta c$ ,  $\bar{R}_i$  – реакция опорной связи от единичной силы.



**Определение перемещений М-точек элементов СНС**  
 Выразим горизонтальное *смещение*  $\Delta_{ГМ}$  узла М рамы (1). Справа от схемы 1 показан график моментов *изгиба* СНС. К узлу М системы ОС (2), которая образована удалением левого защемления, прикладываем горизонтально силу  $F = 1$  и выражаем моменты *изгиба*  $\bar{M}(z)$ . Определяя *перемещение*  $\Delta_{ГМ} = (1/EI) \sum \int M(z) \bar{M}(z) dz$ , интегрируем произведение функций моментов или «перемножаем» графики ( $M \times \bar{M}$ ) правой стойки по формуле Симпсона.





### Раскрытие неопределенности сил пространственной системы

Пространственная система (1) трёх перпендикулярных стержней ( $d$  – диаметр) нагружена по длине  $l = 6$  м стержня 2-4 равномерно распределёнными силами интенсивностью  $q = 10$  кН/м.  $EI$  – жёсткость сечения стержней 2-4, 2-3;  $GI_Z = \frac{1}{3} EI$  – жёсткость 2-3 при *кручении*,  $EI_{ct} = \frac{1}{2} EI$  – стойки 2-3 при *изгибе*. Требуется установить области наибольшей напряжённости стержневой системы. Для вычисления реакций шарнирно подвижных опор 1, 4 и шести реакций защемления 3 можно составить шесть независимых уравнений сил.  $S = 8 - 6 = 2$ .

Образуем систему определимых из уравнений равновесия сил. Исключаем опоры 1 и 4 (2). В местах удалённых связей, по их направлению, прикладываем неизвестные силы  $X_1$  и  $X_2$ . Составляем уравнения отсутствия *перемещений* опор 1 и 4:

$$\Delta_1 = A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + \Delta_{1q} = 0 \text{ и } \Delta_2 = A_{21} X_1 + A_{22} X_2 + \Delta_{2q} = 0.$$

*Перемещения* точек 4, 1 ОС от нагрузки  $q$  –  $\Delta_{1q}$ ,  $\Delta_{2q}$ , и от сил  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  –  $A_{11}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{12} = A_{21}$  определяем по формуле Мора, применяя графоаналитический способ вычисления  $\int M \bar{M} dz$ . Строим графики изменений моментов внутренних сил вдоль оси стержня  $Z$  (силы *растяжения*  $N$  и *сдвига*  $Q$  не учитываем). Величины моментов *изгиба*  $\bar{M}_{X1}$  от  $X_1 = 1$  (3),  $\bar{M}_{Y2}$  от  $X_2 = 1$  (4),  $M_{Xq}$  (5) от распределённых сил  $q$  откладываем со стороны *растянутых* волокон. Моменты *кручения*:  $\bar{M}_{Z1}$  (3),  $\bar{M}_{Z2}$  (4) и  $M_{Zq}$  (5), откладываем вверх, если  $M_Z$  против часовой стрелки.

Определяем *податливости*  $A_{ij}$  стержня в  $i$ -направлении от силы  $F_j = 1$ , умножая площадь  $\Omega$  участка  $l$  графика  $\bar{M}_i$  на ординату того же участка  $l$  графика  $\bar{M}_j$  под центром тяжести  $\Omega$ .

$$EI A_{11} = \frac{1}{2} 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 6 + \frac{1}{2} 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 6 + 3(6 \cdot 6 \cdot 6) = 792.$$

$$EI A_{12} = EI A_{21} = -3(6 \cdot 6 \cdot 4) = -432.$$

$$EI A_{22} = 3(\frac{1}{2} 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} 4) + \frac{1}{2} 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 6 + 3(4 \cdot 6 \cdot 4) = 424.$$

$$EI \Delta_{1q} = -[\frac{1}{3} 6 \cdot 180 \cdot \frac{3}{4} 6 + \frac{1}{2} 6 \cdot 360 \cdot \frac{2}{3} 6 + 3(180 \cdot 6 \cdot 6)] = -25380.$$

$$EI \Delta_{2q} = 3(180 \cdot 6 \cdot 4) = 12960.$$

Решая уравнения метода сил:  $792 X_1 - 432 X_2 - 25380 = 0$  и  $-432 X_1 + 424 X_2 + 12960 = 0$ , определим неизвестные силы – реакции опоры 4 –  $X_1 = 34,60$  кН и опоры 1 –  $X_2 = 4,69$  кН.

Сумма:  $\bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_q$ , определяет ординаты показанных на схеме 6 графиков моментов *изгиба*  $M_X$ ,  $M_Y$  и *кручения*  $M_Z$ .

Проверка отсутствия *перемещения* 1-ой опоры:  $\Delta_1 = (M \times \bar{M}_{Y2}) - (M_Z \times \bar{M}_{Z2}) = (3 \cdot \frac{1}{2} 4 \cdot 18,76 \cdot \frac{2}{3} 4 + \frac{1}{2} 6 \cdot 28,15 \cdot \frac{2}{3} 6 - 3 \cdot 8,86 \cdot 6 \cdot 4) / (EI) = 0$ .

Вид *деформирования* стержня 2-3: *изгиб* в плоскостях  $ZY$  и  $ZX$  с *кручением*, он наиболее *деформирован* в месте близ защемления:  $M_X = 152,38$  кНм,  $M_Y = 28,15$  кНм,  $M_Z = 8,86$  кНм.

Подход, основанный на принципе минимума потенциальной энергии, обычно называется методом перемещений, а подход, использующий принцип минимума дополнительной энергии, называется методом сил. Эти два метода являются главными методами анализа конструкций. Кюнтиро Васидзу

**АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИСТЕМЫ СИЛ,  
НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ИЗ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ**

**МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

**МЕТОД СИЛ**

<p><math>K</math> – сумма углов поворота жёстких узлов (1 на схеме ①) и смещений добавленных связей определяет число неизвестных перемещений, обозначаемых <math>Z</math>.</p>		<p><math>S</math> – разность между числами неизвестных сил (6 на схеме СНС ①) и независимых уравнений равновесия (3) определяет число неизвестных сил, обозначаемых <math>X</math>.</p>
--	--	---

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИЛ В СИСТЕМУ ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ  $Z_1, Z_2, \dots, Z_K$  СИЛ  $X_1, X_2, \dots, X_S$

<p>Введением <math>K</math> избыточных (для кинематической неизменяемости) связей «плавающее» защемление 1 ②) образуем систему ОП определения перемещений.</p>			<p>Удалением <math>S</math> избыточных (для кинематической неизменяемости) связей (6 – 3 = 3 на схеме ③) образуем систему ОС определения сил <math>X_1, X_2, X_3</math>.</p>
--	--	--	--

ОПИСАНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВЕНСТВА НУЛЮ ПАРАМЕТРОВ ДЕФОРМИТОВАНИЯ ПО  $i$ -НАПРАВЛЕНИЮ

РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ  $R_i = \partial U / \partial A_i = R_{ij} + R_{iF} = 0$

ПЕРЕМЕЩЕНИЙ  $A_i = \partial U / \partial F_i = A_{ij} + A_{iF} = 0$

$R_{ij} = \sum C_{ij} Z_j + R_{iF} = 0$  ( $i, j = 1, 2, \dots, K$ ) – уравнение отсутствия по  $i$ -направлению реакций введённых в систему ОП  $j$  связей перемещение  $Z_1, \dots, Z_K$ , от нагрузки –  $R_{iF}$ .  
 $R_1 = C_{11} Z_1 + C_{12} Z_2 + \dots + C_{1K} Z_K + R_{1F} = 0$   
 $\dots$   
 $R_K = C_{K1} Z_1 + C_{K2} Z_2 + \dots + C_{KK} Z_K + R_{KF} = 0$

$A_i = \sum A_{ij} X_j + A_{iF} = 0$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, S$ ) – уравнения отсутствия перемещений  $A_{ij}$  по  $i$ -направлению  $S$  удалённых связей при образовании системы ОС имеют вид:  
 $A_1 = A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + \dots + A_{1S} X_S + A_{1F} = 0$   
 $\dots$   
 $A_S = A_{S1} X_1 + A_{S2} X_2 + \dots + A_{SS} X_S + A_{SF} = 0$

ВЫРАЖЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОТ НАГРУЗКИ И ЕДИНИЧНЫХ ФАКТОРОВ

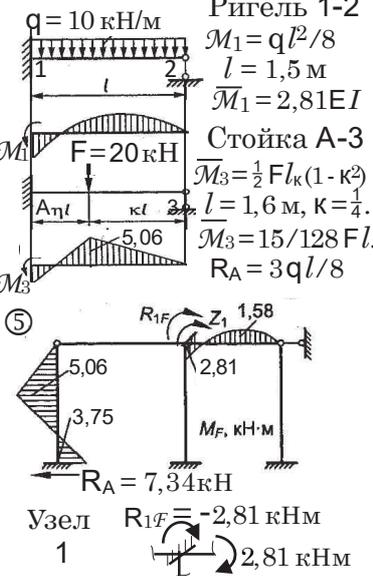
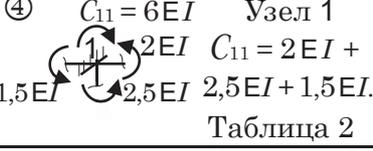
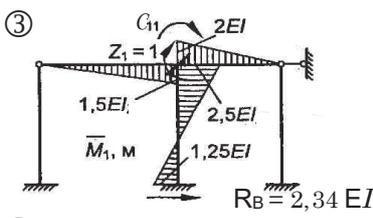
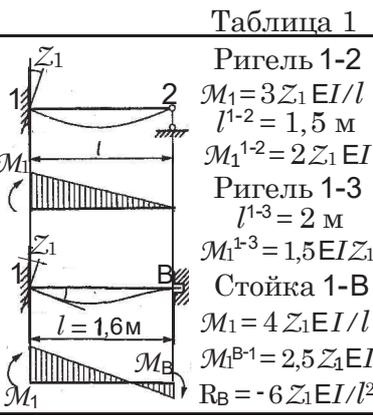
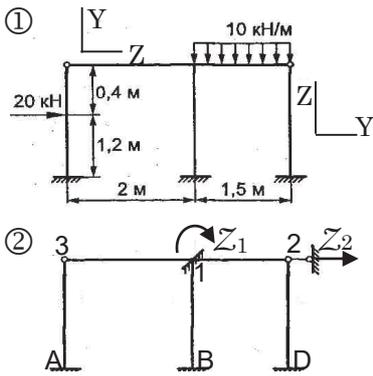
$C_{ij}$  – СОПРОТИВЛЯЕМОСТЬ

$A_{ij}$  – ПОДАТЛИВОСТЬ

Вычисляем реакции  $i$ -направления от нагрузки  $R_{iF}$  и  $C_{ij}$  от перемещений  $Z_j = 1$ , введённых в узлы  $j$ -связей, рассматривая систему ОП как совокупность однопролётных балок неопределимых сил (А1, 1В, 1С на схеме ②). Реакции балок ОП можно определить методом сил или найти решения в справочной литературе.

Для вычисления перемещений в месте удаления  $i$ -связи по её направлению от нагрузки:  $A_{iF} = \sum \int \{ M_F \bar{M}_i dz / (EI) \}$  и от единичной силы:  $A_{ij} = \sum \int \{ \bar{M}_i \bar{M}_j dz / (EI) \}$ , выражаем функции изменения моментов  $M_F, \bar{M}_i, \bar{M}_j$  вдоль оси  $Z$  элемента системы; при графоаналитическом способе строим графики изменения моментов  $M_F, \bar{M}_i, \bar{M}_j$  и «перемножаем» их:  $(M_F \times \bar{M}_i), (\bar{M}_i \times \bar{M}_j)$ .

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОПРЕДЕЛЯЕТ ИСКОМЫЕ ПАРАМЕТРЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ



### Раскрытие неопределенности методом перемещений

Рассмотрим применение метода *перемещений* на примере плоской рамы (①), состоящей из стержней одинаковой жёсткости сечения при *изгибе EI*. Степень статической неопределенности рамы, имеющей три защемления и два промежуточных шарнира:  $S = (3 \cdot 3 - 2 \cdot 1) - 3$ , равна четырём. Степень кинематической неопределенности  $K$  системы (①), жёсткий (без шарнира) узел 1 которой имеет возможность *поворота* и горизонтального *перемещения*, равна двум.

Образование системы определяемых перемещений «ОП» Преобразуя неопределенную раму (①) в систему ОП (②), вводим в узел 1 «плавающее» защемление, препятствующее только его *повороту* на угол  $Z_1$ , и шарнирно подвижную опору 2, исключаяющую горизонтальное *перемещение*  $Z_2$ .

В виртуально добавленных в систему ОП (②) связях  $i$ -направления возможны реакции:  $R_j = R_{ij} + R_{jF}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, K$ ),  $R_{ij} = \sum C_{ij} Z_j$  – реакция на *перемещение*  $Z_j$  введённой  $j$ -той связи,  $C_{ij}$  – единичная реакция на *перемещение*  $Z_j = 1$ ,  $R_{jF}$  – реакция на *нагрузку F*. « $K$ » уравнений, выражающих отсутствие реакций несуществующих связей, имеет вид:

$$R_1 = C_{11} Z_1 + C_{12} Z_2 + \dots + C_{1K} Z_K + R_{1F} = 0;$$

$$R_2 = C_{21} Z_1 + C_{22} Z_2 + \dots + C_{2K} Z_K + R_{2F} = 0;$$

$$\dots$$

$$R_K = C_{K1} Z_1 + C_{K2} Z_2 + \dots + C_{KK} Z_K + R_{KF} = 0.$$

Для системы ОП (②) уравнения метода перемещений (МП) имеют вид:  $C_{11} Z_1 + C_{12} Z_2 + R_{1F} = 0$ ,  $C_{21} Z_1 + C_{22} Z_2 + R_{2F} = 0$ .

### Вычисление коэффициентов $C_{ij}$ и реакций $R_{jF}$ уравнений МП

Перед определением реакций  $C_{ij}$ ,  $R_{jF}$  следует вычислить реакции однопролётных статически неопределенных балок, на которые распадается СНС (①) после добавления связей. Неопределенность реакций балок раскрывается методом сил и можно пользоваться готовыми решениями, приведёнными в таблицах (1, 2, 3) учебников по строительной механике.

В таблице 1 приведены реактивные моменты *изгиба*  $M_1$  в защемлении при *повороте* узла 1 на  $Z_1$ . Подставив  $Z_1 = 1$  и величину длин  $l$  ригелей 1-2, 1-3 и стойки 1-B, получим:  $\bar{M}_1^{1-2} = 2EI$ ,  $\bar{M}_1^{1-3} = 1,5EI$ ,  $\bar{M}_1^{1-B} = 2,5EI$  – моменты в сечениях стержней близ защемления 1 при *повороте* узла 1 на  $Z_1 = 1$ , сумма которых определяет коэффициент  $C_{11} = 6EI$  (④).

График распределения моментов *изгиба* (откладываем со стороны *сжатых* волокон) по длине стержней системы ОП, вызванных единичным поворотом узла 1 показан на схеме ③.

$C_{12}$  – реактивный момент в заземлении 1 при *смещении* опоры 2 вправо на  $Z_2 = 1$  определяем с помощью табл. 3. На схеме 6 изображён график моментов *изгиба*  $\bar{M}_2$  системы ОП от *смещения*  $Z_2 = 1$  опоры 2. Из условия равновесия узла 1 выражаем коэффициенты податливости  $C_{12} = 2,34 EI = C_{21}$ .  $C_{22}$  – реакция опоры 2 системы ОП на её *смещении*  $Z_2 = 1$  определим, проецируя на направление связи 2 реакции опор А, D, В (табл. 3):  $C_{22} = 2 \cdot 3EI/l^3 + 12EI/l^3 = 18EI/l^3 = 4,39 EI$ .

График распределения моментов *изгиба* (5) системы ОП от равномерно распределённой по ригелю 1-2 нагрузки  $q = 10$  кН/м и от силы  $F = 20$  кН на стойке А-3 построен с помощью данных табл. 2. Из условия равновесия (5):  $R_{1F} = -2,81$  кНм. Проецируя силы отсечённой верхней части системы ОП (7), вычислим реакцию опоры 2 от нагрузки:  $R_{2F} = -12,66$  кН.

Подставив коэффициенты  $C_{11}$ ,  $C_{12} = C_{21}$ ,  $C_{22}$  и реакции  $R_{1F}$ ,  $R_{2F}$  в уравнения МП:  $6EI Z_1 - 2,34EI Z_2 - 2,81 = 0$ ,  $-2,34EI Z_1 + 4,39EI Z_2 - 12,66 = 0$ , выразим угол *поворота* узла 1 рамы (1)  $Z_1 = 2,01/EI$  и его горизонтальное *смещение*  $Z_2 = 3,96/EI$ . Построив график моментов *изгиба*  $M$  (8), определяемых суммой:  $M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + M_F$ , установим  $M = 8,38$  кНм.

Примеры. Система  $n$  сходящихся в шарнирном узле 1 стержней (жесткость сечения  $EA$ ) *растянута* силой  $F$  (9). Для вычисления  $n$  сил *растяжения*  $N$  ( $S = n - 2$ ) метод *перемещений* ( $K = 2$ ) имеет явное преимущество. Образуя систему ОП, добавим в узел С две связи (10), исключаящие его горизонтальное  $Z_1$  и вертикальное  $Z_2$  *перемещения*.

Выразим *удлинение*  $i$ -стержня, составляющего с осью  $Y$  угол  $\varphi_i$ :  $\Delta l_i = N_i l_i / (EA) = Z_1 \sin \varphi_i + Z_2 \cos \varphi_i$  и силу *растяжения*:  $N_i = C_i (Z_1 \sin \varphi_i + Z_2 \cos \varphi_i)$ ,  $C_i = EA/l_i$  – жесткость  $i$ -стержня. Уравнения отсутствия горизонтальной и вертикальной составляющих  $R_1$ ,  $R_2$  реакции введённой опоры С имеют вид:

$$\sum_{i=1}^n N_i \sin \varphi_i = 0 \text{ или } \sum_{i=1}^n C_i \sin \varphi_i (Z_1 \sin \varphi_i + Z_2 \cos \varphi_i) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n N_i \cos \varphi_i - F = 0 \text{ или } \sum_{i=1}^n C_i \cos \varphi_i (Z_1 \sin \varphi_i + Z_2 \cos \varphi_i) - F = 0.$$

Определив *перемещения*  $Z_1$  и  $Z_2$ , можно вычислить силу *растяжения* любого стержня  $N_i = C_i (Z_1 \sin \varphi_i + Z_2 \cos \varphi_i)$ .

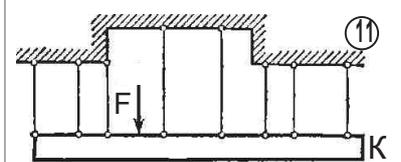
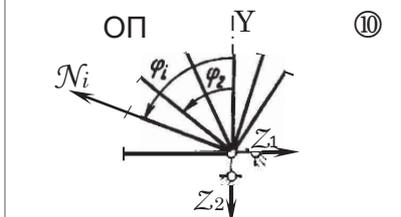
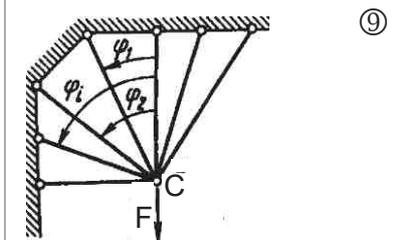
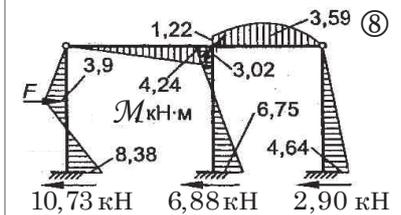
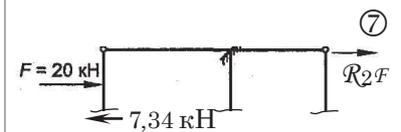
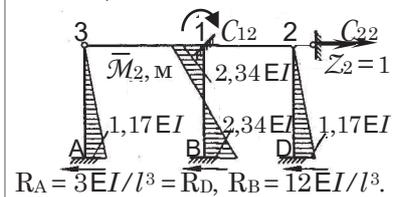
Так же просто, применяя метод перемещений, можно раскрыть неопределимость внутренних сил  $n$  стержней, на которых подвешен жесткий брус, несущего силу  $F$  (11).

Введём заземление конца К бруса, исключаящее угловое  $Z_1$  и вертикальное  $Z_2$  *перемещения*. Выразим *удлинения*  $\Delta l_i$ , силы  $N_i$  как функции  $Z_i$  и определим искомые силы.

Таблица 3

	Стойка D-2 $M_D = M_A = (-3EI/l^2) Z_2$ $R_D = -R_2 = (-3EI/l^3) Z_2$
	Стойка B-1 $M_B = -M_1 (6EI/l^2) Z_2$ $R_B = -R_1 = (-3EI/l^3) Z_2$

Узел 1  $C_{12} = 2,34 EI$   
 $2,34 EI$  (6)



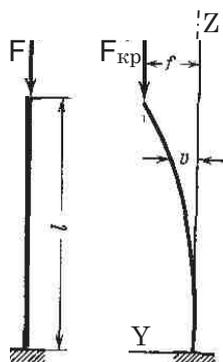
Пусть исходная невозмущённая конфигурация претерпевает заданные малые виртуальные возмущения, не нарушающие краевых условий в перемещениях; так образуется новая «возмущённая» конфигурация. Если виртуальная работа, совершаемая внешними силами, не превосходит возрастания запасённой потенциальной энергии, то тело устойчиво. Если это условие не выполняется для некоторых виртуальных значений, то излишек энергии превращается в кинетическую энергию. Это означает неустойчивость исходной конфигурации по отношению к малым возмущениям.

Васидзу «Вариационные методы в теории упругости и пластичности»

## 18. Оценка устойчивости. Энергетический метод выражения критических сил

Метод, основанный на решении дифференциальных уравнений *искривлённой* оси *сжатого* стержня с различными условиями закрепления выражает наименьшее значение силы, при котором наряду с невозмущённой формой равновесия возможны смежные, весьма близкие к ней формы равновесия. Статический подход позволил свести оценку устойчивости к определению критической силы (или группы сил).

Развитие техники усложняло нагрузки и формы гибких вытянутых тел (стержней) и тонких элементов (оболочек), что затрудняло оценку устойчивости исходной формы равновесия или вовсе не приводило к решению задачи. Вследствие этого получили распространение приближённые методы. Энергетический метод анализа устойчивости на основе теоремы о минимуме потенциальной энергии *деформирования* тела  $\mathcal{U}$ .



Представим *сжатый* критической силой  $F_{кр}$  заземлённый одним концом прямой стержень, *искривляемый* под действием некоторого возмущения. Таким образом к потенциальной энергии *сжатого* стержня прибавляется  $\Delta\mathcal{U}$  – потенциальная энергия *изгиба*. При *изгибе* стержня уровень приложения нагрузки понижается, его потенциальная энергия уменьшается. При опускании силы  $F_{кр}$  на величину *перемещения*  $w_F$  сила совершает работу:  $\mathcal{W} = F_{кр} w_F$ .

Прямая форма стержня устойчива, пока  $\Delta\mathcal{U} - \mathcal{W} > 0$ .

Если  $\Delta\mathcal{U} - \mathcal{W} < 0$ , исходная конфигурация неустойчива.

Из равенства потенциальной энергии *изгиба*  $\Delta\mathcal{U}$  и работы  $\mathcal{W}$  силы  $F_{кр}$  на *смещении*  $w$  от *искривления* стержня:  $\Delta\mathcal{U} = \mathcal{W}$  определяется наименьшая критическая сила.

Для вычисления  $\Delta\mathcal{U}$  и  $\mathcal{W}$  требуется подобрать функцию *прогибов*  $v(z)$  точек оси  $Z$  стойки, удовлетворяющую краевые условия: в заземлении при  $z = 0$ ,  $v = 0$  и  $v' = 0$ ; на свободном конце при  $z = l$ ,  $v = f$  и  $v'' = 0$ . Воспользуемся функцией  $v(z) = f(1 - \cos \pi z/2l)$ , принятой при решении этой задачи С.П. Тимошенко («Устойчивость упругих систем»).

Подставив в формулу потенциальной энергии *изгиба*:  $\mathcal{U} = \int_0^l \mathcal{M}_x^2 dz / (2EI_x) = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x v''^2 dz$  функцию *прогибов*  $v(z) = f(1 - \cos \pi z/2l)$ , выразим её приращение  $\Delta\mathcal{U} = F^2 f^2 l / (4EI)$ .

Функцию *перемещения* силы  $F_{кр}$  представим разностью длины отрезка  $dz$  линии *изгиба* и его проекции на ось  $Z$ :  $w(z) = \int_0^l (dz - dz \cos \theta) = \frac{1}{2} \int_0^l \theta^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^l v'^2 dz$ .  $w_F = \pi^2 f^2 / 16$ .

Из равенства полученных выражений потенциальной энергии *изгиба* стержня  $\mathcal{U} = F^2 f^2 l / (4EI)$  и работы  $\mathcal{W} = F_{кр} \pi^2 f^2 / 16l$  определим критическую силу:  $F_{кр} = \pi^2 EI_x / 4l^2$ . Результат решения приближённым методом совпадает с точным решением. Такое совпадение обусловлено точностью подбора функции *перемещений* С.П. Тимошенко.

Как говорил Александр Михайлович Ляпунов в устойчивости нет универсальных критериев и определений, нет ничего абсолютного, всё зависит от цели исследования и природы ожидаемой неустойчивости в системе. Основная задача – выделение области изменения внешних параметров («управляющих параметров»), при которых данный физический процесс можно считать устойчивым в том или ином смысле относительно некоторого класса возмущений, поэтому именно механика, как феноменологическая часть естествознания, призвана формулировать критерии и классифицировать типы потери устойчивости процессов в природе.

Д.В. Георгиевский

### Определение критической нагрузки стержня, деформируемого собственным весом

Рассмотрим прямой стержень постоянного сечения, защемлённый одним концом (①), который может потерять устойчивость (②) под действием сил собственного веса ( $q$  – вес стойки на единицу длины).

Определим критическую интенсивность равномерно распределённых сжимающих сил  $q$ . Полагаем, что в процессе потери устойчивости ни направление, ни величина сил не изменяется (такие силы называют консервативными). Точность определения критических сил зависит от выбора функции, аппроксимирующей уравнение *изгиба* возмущённой конфигурации. Перебирая функции *прогибов*  $v(z)$ , выбираем ту, при которой критическая величина  $q_{кр}$  меньше, так как действительной линии *изгиба* стержня соответствует наименьшая критическая сила.

Представим, что упругая линия стойки имеет форму параболы  $v = Cz^2$ . При  $z = 0$ , *прогиб*  $v$  и угол *поворота*  $\theta = v'$  в защемлении равны нулю, следовательно, граничные условия в перемещениях удовлетворяются. Но при этом  $v'' (M_x/EI_x)$  – постоянная, что не соответствует моменту  $M_x$ , изменяемому от нуля на свободном конце стержня до  $M_{max}$  в заделке.

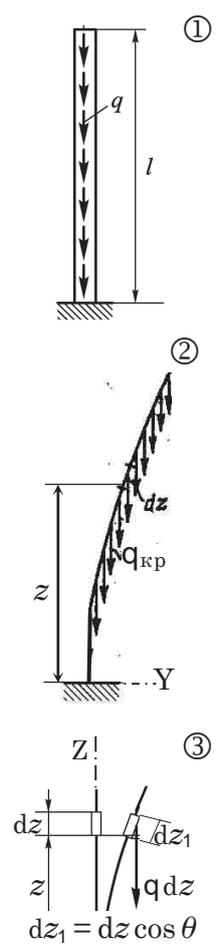
Выберем функцию  $v = C(1 - \cos \pi z/2l)$ , соответствующую *перемещениям* в защемлении  $v = 0$ ,  $\theta = 0$  и на конце стержня  $v = f$ ,  $v'' = 0$ . Заметим, что третья производная *прогиба*  $v''' (Q_y/EI_x)$  при  $z = l$  не равна нулю, тогда как поперечная сила  $Q$  на свободном конце стойки равна нулю.

Подставив функцию  $v = C(1 - \cos \pi z/2l)$  в выражение потенциальной энергии  $\mathcal{U} = \int_0^l M_x^2 dz / (2EI_x) = \frac{1}{2} \int_0^l EI_x v''^2 dz$  получим:  $\mathcal{U} = \frac{1}{4} EI_x C^2 l (\pi/2l)^4$ .

Силы собственного веса  $\int_0^l q dz$  (③) при опускании М-точек на  $w(z)$  от *изгиба* стержня, совершают работу:  $\mathcal{W} = \int_0^l q w(z) dz$ . Определим опускание М-точки в произвольном

сечении *искривлённого* стержня:  $w(z) = \frac{1}{2} \int_0^z v'^2 dz = \frac{1}{4} C^2 (\pi/2l)^2 [z - (l/\pi) \sin(\pi z/l)]$ .

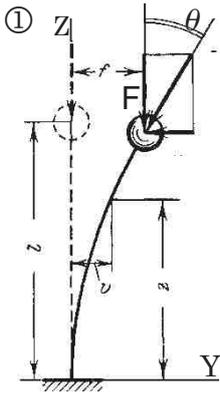
Выражение работы после подстановки  $w(z)$  имеет вид:  $\mathcal{W} = \frac{1}{4} q C^2 (\pi/2l)^2 [\frac{1}{2} l^2 - (2l/\pi)^2]$ . Из равенства энергии  $\mathcal{U}$  *изгиба* стержня и работы  $\mathcal{W}$  нагрузки  $q$  на пути  $w(z)$  выразим величину критической интенсивности сил собственного веса:  $q_{кр} = (EI_x/2l^3) \pi^2 / (\pi^2 - 4) = 8,29 EI_x/l^3$ . Точное решение:  $q_{кр} = 7,83 EI_x/l^3$ . Погрешность решения около 5% вполне приемлема. Применение непринятой зависимости  $Az^2$  дало бы ошибку более 30%.



Развитие современного машиностроения, авиации и ракетной техники существенно расширило класс нагрузок, подлежащих изучению. Аэродинамические силы, действующие на крыло самолёта или на обшивку корпуса ракеты не являются консервативными силами. То же следует сказать и о силах, действующих на ротор электрической машины или на ротор газовой турбины. По существу все системы автоматического регулирования являются неконсервативными системами.

Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.

### Оценка критического параметра нагрузки стержня, сжатого неконсервативной силой



Рассмотрим прямой стержень (1), закреплённый одним концом, к свободному концу которого приложена сжимающая сила  $F$ , сохраняющая в процессе деформирования тела направление по касательной к искривляемой оси. Неявно зависящие от времени силы, «следящие» за изменением конфигурации тела называются неконсервативными. Они не обладают потенциалом, признаком которого является независимость работы внешних сил от пути отклонения при изменении конфигурации  $DO$ . При критической неконсервативной нагрузке любое малое возмущение вызывает колебания. Уравнение малых колебаний стержня плоскости имеет

вид:  $EI (\partial^2 v / \partial z^2) = F(f - v) - F\theta(l - z) + M_{и}$ ,  $v$  – прогиб,  $f(t)$  – прогиб конца стойки,  $\theta(t)$  – угол поворота торцевого сечения,  $M_{и}$  – момент изгиба от инерционных сил. Дважды дифференцируя уравнение колебаний и замечая, что  $\partial^2 M_{и} / \partial z^2 = -m (\partial^2 v / \partial t^2)$ ,  $m$  – интенсивность равномерно распределённой по длине массы стержня, получим дифференциальное уравнение:  $EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + F \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ . Частное решение

уравнения имеет вид:  $v(z, t) = \mathcal{V}(z) e^{i\Omega t}$ ,  $\mathcal{V}(z)$  – неизвестная функция,  $\Omega$  – неизвестная комплексная постоянная, определяющая общий характер возмущённого движения стержня. Подставив  $v(z, t) = \mathcal{V}(z) e^{i\Omega t}$  в дифференциальное уравнение, получим уравнение для функции  $\mathcal{V}$ :  $d^4 \mathcal{V} / d\zeta^4 + \beta (d^2 \mathcal{V} / d\zeta^2) - \omega^2 \mathcal{V} = 0$ ,  $\zeta = z/l$ ,  $\beta = Fl^2 / (EI)$ ,  $\omega = \Omega l^2 \sqrt{m / (EI)}$  – безразмерные параметры. Общее решение уравнения  $\mathcal{V}(\zeta)$  имеет вид:  $\mathcal{V}(\zeta) = (C_1 \sin r_1 + C_2 \cos r_1 + C_3 \operatorname{sh} r_2 + C_4 \operatorname{ch} r_2) \zeta$ ,  $r_1^2 = \frac{1}{2} \beta + \sqrt{(\frac{M_{и}}{EI} - \beta)^2 + \omega^2}$ ,  $r_2^2 = -\frac{1}{2} \beta + \sqrt{(\frac{1}{2} \beta)^2 + \omega^2}$ .

Удовлетворяя условиям в закреплении:  $v(0, t) = \partial v / \partial z = 0$ , и на свободном конце:  $\partial^2 v(l, t) / \partial z^2 = \partial^3 v(l, t) / \partial z^3 = 0$ , получим уравнения для постоянных интегрирования:

$C_2 + C_4 = 0$ ,  $r_1 C_1 + r_2 C_3 = 0$ ,  $C_1(r_1^2 \sin r_1 + r_1 r_2 \operatorname{sh} r_2) + C_2(r_1^2 \cos r_1 + r_2^2 \operatorname{ch} r_2) = 0$ ,  $-C_1(r_1^3 \cos r_1 + r_1 r_2^2 \operatorname{ch} r_2) + C_2(r_1^3 \sin r_1 + r_2^3 \operatorname{sh} r_2) = 0$ . Отсюда выразим уравнение:

$\Delta(\omega, \beta) = \beta^2 + 2\omega^2 + \beta \omega \sin r_1 \operatorname{sh} r_2 + 2\omega^2 \cos r_1 \operatorname{ch} r_2 = 0$ . Если внешняя сила отсутствует, то  $\beta = 0$  и корни уравнения, соответствующие частоте собственных колебаний ненагруженной стойки, являются действительными. С возрастанием  $\beta$  (2) два наименьших корня сближаются и при некотором значении  $\beta = \beta^*$  (20,05) становятся кратными, при  $\beta > \beta^*$  они станут комплексными, с отрицательной мнимой частью одного из них, что соответствует колебаниям, то есть неустойчивости. Критическая сила в этом случае:  $F_{кр} \approx 2\pi^2 EI / l^2$  в восемь раз больше, чем при консервативной силе:  $F_{кр} = \pi^2 EI / 4l^2$

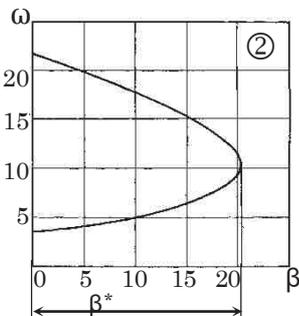


График изменения  $\omega$  в области действительных значений частот.

# ТИПЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

# КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

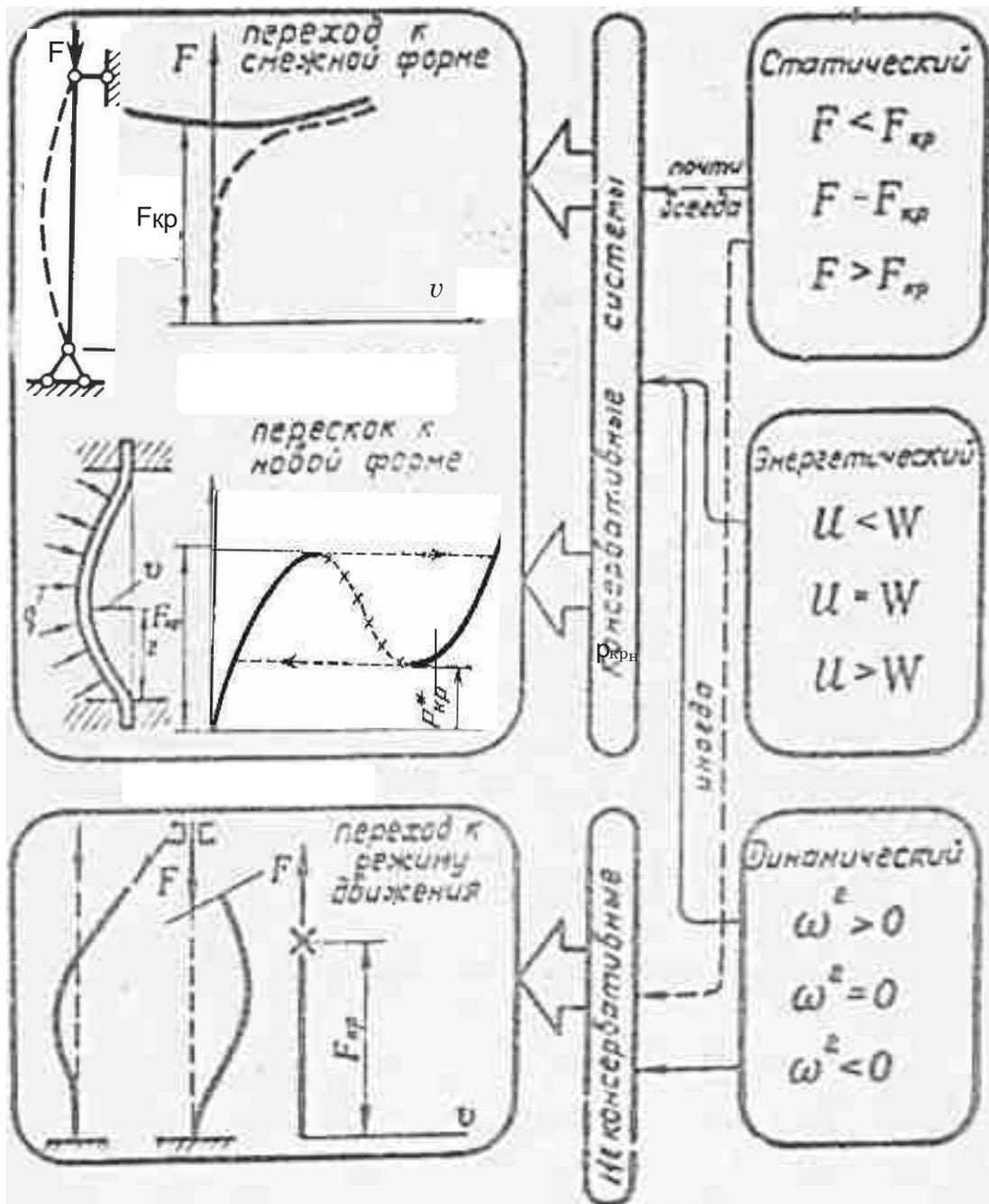


Схема учёта динамики воздействий: сил инерции, удара, колебаний

ДВИЖЕНИЕ С УСКОРЕНИЕМ



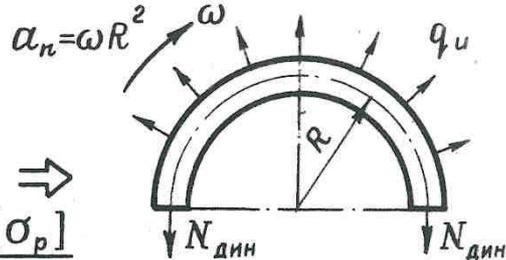
$$F_u = ma$$

$$N_d = G + F_u$$

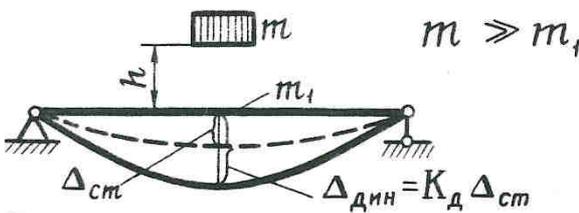
$$N_d = \gamma A v^2 / g \Rightarrow$$

$$\sigma = N_d / A \leq [\sigma_p]$$

ВРАЩЕНИЕ



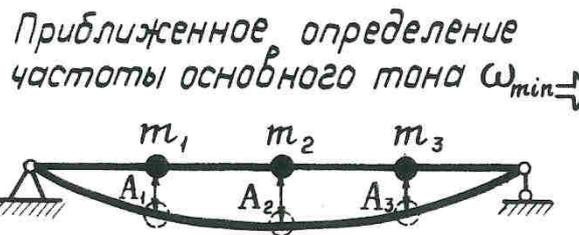
УДАР



$$K_d = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta_{ст}}$$

$$\sigma_{дин} = K_{дин} \sigma_{ст} \leq [\sigma]$$

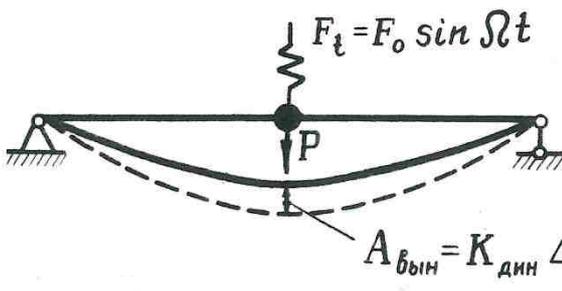
КОЛЕБАНИЯ



$$\omega^2 = \frac{2u}{\sum_{i=1}^n m_i A_i}$$

МРЕТОЛЯ

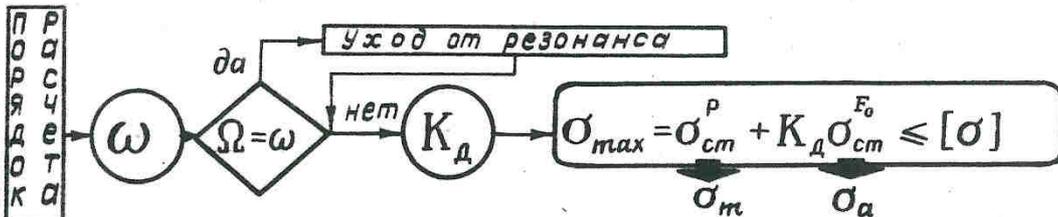
Вынужденные колебания с одной степенью свободы



$$\omega^2 = \frac{1}{m \delta_{ст}}$$

$$\sigma_{дин} = K_{дин} \cdot \sigma_{ст}^{F_0}$$

$$K_{дин} = \frac{1}{1 - \Omega^2/\omega^2}$$



## Принятые обозначения

$\alpha$ (альфа) – угол нормали $\eta$ к площадке М-точки или угол наклона сечения $DO$ к осям координат.	$A$ – обозначение площади перпендикулярного продольной оси $Z$ (поперечного) сечения тела.
$\gamma$ (гамма) – угол сдвига взаимно перпендикулярных отрезков ( $\gamma - \oplus$ , если прямой угол стал острым).	$DO$ – деформированное нагрузкой твёрдое тело. $e$ ( $\varepsilon, \gamma$ ) – геопараметр деформации материала.
$\Delta$ (дельта) обозначает изменение параметра. $\Delta l = l' - l$ – изменение длины $l$ отрезка до $l'$ .	$E = \sigma/\varepsilon$ – характеристика сил сопротивления упруго растягиваемого материала твёрдого тела.
$\Delta$ (дельта) – перемещение точки. $\Delta_X(u), \Delta_Y(v) \parallel$ оси сечения $X, Y$ ; $\Delta_Z(w)$ – перемещение вдоль оси $Z$ .	$F$ – обобщённая сила (равнодействующая сил по сечению, момент, давление, температура).
$\delta$ (дельта) – вариация, означающая согласное со связями $DO$ воображаемое малое возмущение.	$G = \tau/\gamma = \frac{1}{2} E/(1 + \nu)$ означает характеристику внутренних сил материала при упругом сдвиге.
$\varepsilon$ (эпсилон) = $\Delta l/l$ – удлинение-укорочение есть геопараметр растяжения-сжатия отрезков $DO$ .	$H, h$ – наибольший размер (высота) сечения $DO$ . $\hat{h}$ – толщина тонкой стенки сосуда, пластины, ...
$\varepsilon_{\perp} = -\nu\varepsilon$ – укорочение (удлинение) поперечного оси $Z$ отрезка при растяжении (сжатии) тела вдоль оси $Z$ .	$I_X, I_Y, I_Z$ – моменты инерции сечения на повороте на угол $\theta_X, \theta_Y$ – при изгибе, $\theta_Z$ – при кручении $DO$ .
$\Theta$ (тэта) = $\theta_Z/l$ – мера закручивания М-сечения относительно отстоящего от него на $l$ сечения.	$K$ – силовой параметр интенсивности напряжений НЛО у вершины макротрещины материала $DO$ .
$\theta$ (тэта) – угол поворота М-сечения: $\theta_X, \theta_Y$ – относительно осей сечения $X, Y$ ; $\theta_Z$ – вокруг $Z$ .	$K_c$ – критическая трещиностойкость характеризует вязкость сопротивления материала разрушению.
$\kappa$ (каппа) = $1/\rho$ – кривизна ( $\rho$ – радиус) слоя 0-0 волокон, не изменяющих длину при изгибе тела.	$L$ – длина тела. $l$ – длина отрезка. $l'$ – длина после растяжения. $\ell$ – полудлина трещины в теле $DO$ .
$\Lambda$ (лямбда) – перемещение от единичной нагрузки, характеристика податливости тела в целом.	$M_X, M_Y$ – момент сил в сечении тела при изгибе в плоскости $ZY, ZX$ ; $M_Z$ – момент при кручении.
$\lambda$ (лямбда) = $\mu L/i$ – гибкость, $i = \sqrt{I/A}$ – параметр инерции М-сечения на повороте при изгибе стойки.	М-точка – модель макрообъёма сплошной среды, которая схематизирует материал в границах $DO$ .
$\mu$ (мю) – мера влияния вида закрепления стойки на её конфигурацию при потере устойчивости.	М-сечение – модель макроединицы состава $DO$ в виде пластины, перпендикулярной оси тела $Z$ .
$\nu$ (ню) = $ \varepsilon_{\perp}/\varepsilon $ – модуль отношения поперечного укорочения (удлинения) к удлинению (укорочению).	НЛО – необратимо деформированный локальный объём материала близ вершины концентратора.
$\xi$ (кси) – ордината точки, наиболее удалённой от главной оси поворота М-сечения при изгибе тела.	$\mathcal{N}$ – равнодействующая сил сопротивления материала растяжению по поперечному сечению.
$\sigma$ (сигма) – напряжение сил сопротивления материала растяжению (перпендикулярно площадке М-точки).	$Q$ – равнодействующая сил сопротивления сдвигу материала по поперечному сечению $DO$ .
$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ – главные напряжения трёхосного растяжения в направлении главных осей 1, 2, 3.	$S$ – напряжение сил сопротивления деформации материала – мера их распределения по сечению.
$\sigma_{BR}$ – предел прочности материала представляет высшее напряжение равномерного растяжения.	$S_{PR}$ – предельное напряжение материала $DO$ . $[S] = S_{PR}/N_3$ – допускаемое напряжение сил.
$\sigma_T$ – предел текучести материала означает его массовый переход к необратимому растяжению.	$S$ – параметр напряжённости оценивает поле напряжений М-точки по выбранному критерию.
$\sigma_{-1}$ – предел выносливости материала $DO$ при симметричном цикле напряжений растяжения.	$T_s$ – тензор оценки совокупности напряжений на площадке М-точки. $T$ – температура. $t$ – время.
$\zeta$ (сигма) = $s/e$ – опытная силовая характеристика материала $DO$ – параметр упругой деформации.	$U = \frac{1}{2} s e$ – это потенциальная энергия упругой деформации макрообъёма сплошной среды $DO$ .
$\tau$ (тау) – напряжение сил сопротивления сдвигу материала есть проекция $S$ на плоскость сечения.	$W = \frac{1}{2} F \Delta$ есть работа обобщённой силы $F$ на пропорциональном $F$ обобщённом перемещении.
$\psi$ (пси) = $(A - A_{min})/A$ – остаточное сужение-шейка ( $A_{min}$ ) образца, растянутого до разрыва.	$\Psi$ – параметр повреждаемости материала. Если повреждений нет, $\Psi = 0$ ; $\Psi = 1$ – финал разрушения.