

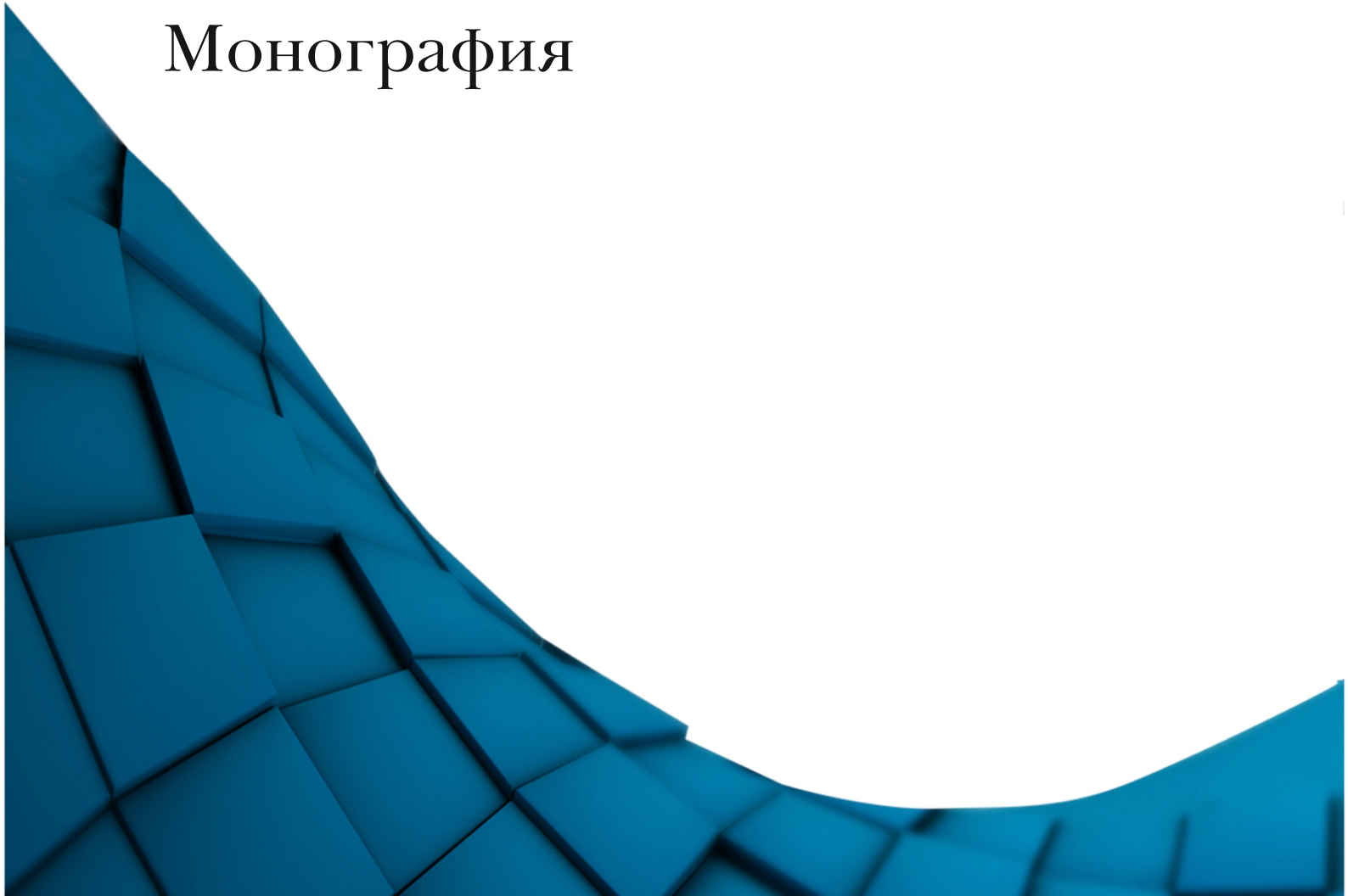


Антипин Н. А.

Начальные стохастические моменты матриц



Монография



Н. А. Антипин

Начальные стохастические моменты матриц

Монография

Санкт-Петербург
Наукоемкие технологии
2024

УДК 519.6
ББК 22.1
А72

Антипин Н. А.

А72 Начальные стохастические моменты матриц: монография /
Н. А. Антипин. – СПб.: Научные технологии, 2024. – 178 с.

ISBN 978-5-907804-42-5

В монографии предложен набор распределений матриц из целых чисел различных порядков, полученных с помощью ЭВМ. Данные систематизированы. Получены точные стохастические моменты модулей определителей многих числовых полей, а также оценки верхним границам.

Книга рекомендована для студентов и преподавателей, занимающихся целочисленным и вычислительным анализом.

УДК 519.6
ББК 22.1

ISBN 978-5-907804-42-5

© Антипин Н. А., 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	6
1. К ПОИСКУ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАТРИЦ ИЗ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПО МОДУЛЯМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ	8
1.1. К первому приближению теории модулей средних детерминантов матриц порядка n с элементами из кольца Z_m , при малых n и m	11
1.2. Оценка числа необходимых испытаний для достижения требуемой точности расчета стохастических моментов распределений матриц из целых чисел с помощью генерации случайных матриц.....	15
1.3. Сочетание стохастических моментов в нескольких выборках .	19
1.4. Вычисление среднего квадрата определителя матриц из натуральных или целых чисел	21
1.5. К вопросу о разложении матрицы из комплексных элементов на действительные и мнимые составляющие и последующие оценки модуля определителя этой матрицы	25
1.6. К вопросу о количестве матриц, приходящихся на каждую фундаментальную, для данного порядка n квадратных матриц и числового поля Z_m её элементов	28
1.7. Некоторые сведения о стохастических пространствах матриц из целых чисел.....	31
1.8. К оценке чисел Эйлера-Гаусса.....	33
1.9. Число базисных матриц из нескольких строк	36
1.10. Матрица Гильберта.....	37
2. К ОПТИМАЛЬНОМУ ВЫЧИСЛЕНИЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ	40
2.1. К оптимальному вычислению функций $\arcsin r$, $\arccos r$ или $\arctg r$	40
2.2. К оптимальному вычислению $\sin r$, $\cos r$ или $\operatorname{tg} r$. Экспонента e^r	43
2.3. О вычислении логарифмов простых чисел	46

2.4. К оптимальному вычислению функции $\ln r, r \in (0,1; 1)$	48
2.5. Лагранжевы полиномы с матрицей коэффициентов, соответствующей матрице Вандермонда, к полиномиальному сокращению трудности вычисления произведения двух величин...	50
2.6. Доказательство справедливости формулы для коэффициентов интерполяционного многочлена Лагранжа	54
2.7. К вопросу о быстром сложении обратных величин, практически не используя операцию деления	57
2.8. Вычисление квадратов в методе Ньютона или ряда экспоненты	59
ПРИЛОЖЕНИЕ I	61
I.1. Генератор ГПСЧ	61
I.2. К вопросу разнообразия случайных последовательностей, получаемых посредством мультипликации вектора матрицей порядка $n \in N$ в кольце $Z_p, p \in N$	64
ПРИЛОЖЕНИЕ II	67
ПРИЛОЖЕНИЕ III	127
ПРИЛОЖЕНИЕ IV	135
ПРИЛОЖЕНИЕ V	140
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	174

*«Нужно заниматься не тем, что интересно
или любопытно, а тем, что важно и необходимо»*

П. Л. Чебышев

*Обрети свои порывы,
Обрати порывы в сталь
И лети мечтой игривой
Ты в заоблачную даль.*

С. Есенин

«Я высоко ценю старательность тех, которые стремятся все доказать, вплоть до первоначальных положений, и нередко сам прилагаю к этому старания; однако я не советовал бы чрезмерной тщательностью ставить преграды искусству открытия или под этим предлогом отбрасывать наилучшие открытия и самих себя лишать их плодов...»

Г. В. Лейбниц

Предисловие

Ранние работы по оценке точности вычисления определителей содержат противоречие, так как оценки, приведенные в них, не учитывают факториальный рост максимального детерминанта. Расчеты показывают, что для матриц с элементами из множества $\{-1, 0, 1\}$ он очень близок к своей верхней оценке в $n!$. Средний детерминант матриц из этих элементов, как показывают текущие исследования 2024 года, имеет порядок корня из максимального определителя, что также не соответствует выводам статьи [26]. Выводы, согласующиеся с экспериментом: асимптотическая оценка числа знаков для вычисления среднего определителя, в терминологии цитируемой статьи, должна быть $(n \ln n)$, а не $\ln(n)$, как там указано. Для максимального же определителя, а любые точные вычисления должны оперировать именно с ним, исходя из точности составляющих его элементов по оценке числа необходимых знаков, указанной выше, необходимо добавить $n \ln(m)$, здесь m – порядок кольца элементов матрицы. Также авторы утверждают, что рассматривать матрицы порядка меньше 10 смысла нет, но существует бесчисленное число матриц Гильберта меньшего порядка, определитель которых не удастся вычислить с помощью встроенной арифметики или числа знаков по приведенной в [26] формуле – чем более плохо они обусловлены, тем больше нужно запасных знаков. Несколько обобщенных матриц Гильберта приведены в разделе 1.10. Оценка необходимого количества знаков $(A_0 n \ln(m^*n))$, где A_0 – некоторая небольшая константа, позволяет вычислить определитель любой матрицы Гильберта. И вообще каждый 10^8 , а может и меньший определитель матрицы порядка 9, с взятыми наугад элементами (положительными или отрицательными) из двух значащих десятичных цифр, окажется вычисленным неверно. Обусловленность начинается в $Z_{37; 37}$ для 10^8 сгенерированных матриц. Но тем не менее не смотря ни на что, необходимо уважать труд Д. фон Неймана и Х. Гольдштейна, произведенный в технически непростых условиях [18]. Для начала 20-го века их работа является научным прорывом, который до сих пор служит предметом исследования [25]. И лишь последний раздел, который они взяли исходя из работ другого ученого, никуда не годится для матриц больших порядков. Д. фон Нейман был одним из пионеров американского технического прогресса, да и мирового в целом, так почему не сделать сейчас то, что он хотел сделать в своей статье? Он одним из

первых представил человека как носителя информации, далеко продвинув спорные концепции Ч. Дарвина. Может ли человеческий мозг обработать информацию в 1 ТВ и больше? Как устроен этот человек? Идея, что при просмотре фильмов мозг обрабатывает гигабайты информации – абсурдна. Попросите нарисовать кадр в какой-то определенный момент – вряд ли вам ответят, что было в тот определенный момент и уж тем более не изобразят тот конкретный кадр. У меня сложилось впечатление, что после просмотра часового фильма в мозгу остается менее мегабайта данных. Замечательный ученый фон Нейман мог запоминать целые книги и воспроизводить их на любой странице, значит все же мозг может обрабатывать около 100 мегабайт. Данная оценка подтверждается и в отношении глубоко взаимосвязанного программного обеспечения. Так, Э. Таненбаум полагает, что программист в состоянии понять около 10 000 строк кода, каждый модуль которого зависит от всех остальных, т. е. реально он должен понимать около 100 000 000 строк кода, что хорошо согласуется с оценкой выше. Может ли группа людей обработать информацию в 1 ТВ и больше? Как устроена эта группа? Почему 21-му веку не стать венцом матричных распределений, как 19-му – числовых, хоть и придется использовать подход, отличный от фон Неймановского? Может кто-то найдет путь для его идей, подобно тому, как П. Эрдёш и А. Сельберг нашли путь для доказательства асимптотического закона распределения простых чисел без использования теории функций комплексного переменного (ТФКП). Пока мировые лидеры еще не уничтожили до конца экономики друг друга и технически воплотить все необходимые работы вполне реально. Остались ли в мире достойные люди, способные решать насущные задачи и двигаться вперед в светлое будущее? Нужно двигаться дальше, чтобы река знаний не застоялась и не превратилась в болото заблуждений и ошибок...

1. К поиску стохастических моментов распределений матриц из целых чисел по модулям определителей

Покажем распределение, или зависимость (рис. 1) количества матриц размером $n \times n$ из целых чисел, имеющих модуль определителя $|\det|$, от этого модуля определителя.

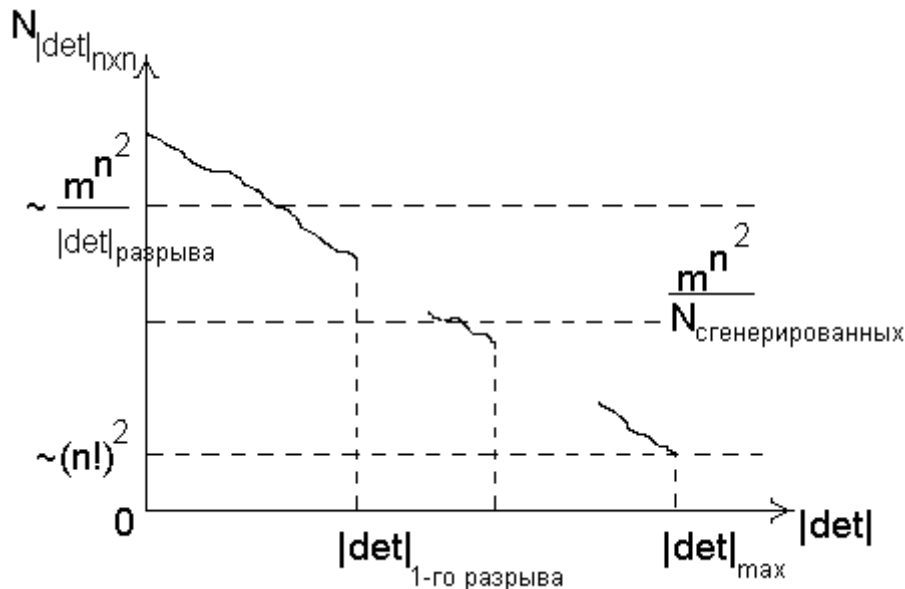


Рис. 1

Количество матриц $N_{|\det|_{n \times n}}$ вычисляется по формуле:

$$N_{|\det|_{n \times n}} = N_{singular} \cdot \exp^{-A|\det|} \cdot P_l(|\det|) \cdot Fac(|\det|),$$

здесь n – порядок матрицы,

m – порядок кольца элементов матрицы,

A и l – некоторые константы для данных m и n ,

$N_{singular}$ – число вырожденных матриц, определитель которых равен нулю,

$P_l(|\det|)$ – некоторый полином степени $l \geq 0$,

$Fac(|\det|)$ – функция, значения которой пропорциональны количеству делителей числа $|\det|$, она во многом определяет «ширину» или

разброс значений $N_{|det|}$ вблизи среднего значения линии распределения. Так, если $|det| = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ – каноническое разложение числа $|det|$, то $Fac(|det|) \sim \sum_{i=1}^k a_i$.

Введением функции $Fac(|det|)$ качественно нельзя объяснить причину возникновения разрывов, возникающих в распределении $N_{|det|}$ при достаточно больших¹ m и n . Так, для любого $|det|$: $N_{|det|} \geq n!$, при достаточно больших n $N_{|det|} \geq (n!)^2$. Тогда при достаточно больших $|det|$: $N_{singular} \cdot \exp^{-A|det|} \cdot P_l(|det|)$ становится меньше $n!$ для малых n или $(n!)^2$ для достаточно больших и будет разрыв или нет, должна определить функция $Fac(|det|)$. Но этого не происходит: существуют $|det_1| > |det_2|$, для которых: $N_{|det_1|} = 0$ и $N_{|det_2|} > 0$, но $Fac(|det_1|) > Fac(|det_2|)$. Возможное объяснение этого феномена лежит в немонотонном поведении функции $P_l(|det|)$, которая в области $|det|_{max}$ должна иметь максимум. Введение $P_l(|det|)$ не является математической фикцией для объяснения рассмотренного выше феномена, оно имеет чисто статистическое происхождение, которое было получено лишь при рассмотрении распределений модулей определителей для m и n больших, чем в работе [3] и рассмотренных здесь. Величина l должна определяться значениями m и n , а не $|det|_{max}$. В противном случае мы имели бы функцией распределения аналог гамма-функции, чего не может быть в силу природы распределения модулей определителей – оно должно быть убывающим, не обязательно монотонно, ближе к $|det|_{max}$ становясь константой, не зависящей от m и близкой к $(n!)^2$ для достаточно больших n .

Если количество взятых совершенно случайным образом из всех $m^{n \times n}$ матриц, $\sim m^{n \times n}$ или хотя бы близко к $m^{n \times n} / (n!)^2$, то стохастические моменты любого порядка определяются весьма точно (возможно 6 и

¹ Под большими m и n понимаются числа, для которых перестает выполняться экспоненциальное приближение. Например, все распределения m и n , указанные в [3], следует считать малыми. Некоторые m и n , представленные в приложении II, возможно, не являются экспоненциальными. Чтобы прояснить этот вопрос, необходимы вычисления, указанные в разделе п. 1.2. «Субэкспоненциальный случай». В начале раздела 1 указывается одна из причин, почему экспоненциальный случай не может считаться верным.

более верных знаков). Если брать матриц много меньше, то будут появляться лишние разрывы по линии $m^{n*n}/N_{\text{сгенерированных}}$ на рис. 1 и удастся лишь приблизительно определить начальные стохастические параметры распределения.

Так как поиск стохастических параметров осуществляется посредством вычисления случайно выбранных матриц, то центральным местом в обосновании сходимости к истинному распределению принадлежит закону больших чисел и теоремам Чебышева о количестве отклонений случайной величины. Обозначим ее x , а сам закон распределения – $\xi(x)$, от своего среднего значения:

$$p\{|\xi(x) - \overline{\xi(x)}| < \sigma\alpha\} > 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Стохастические параметры распределений квадратных матриц порядка n с элементами из Z_m по модулям определителя мы можем рассчитывать по матрицам, элементы которых равномерно распределены по модулю m (т. е. от 0 до $(m-1)$ – равновероятно). Крайне важно определить более точное значение α , при котором достигается различная вероятность отклонений от среднего по уровням, например, 99%, 99,9%, 99,99% и более высоких. Необходимо определить степень корректности, т. е. количество верных знаков в стохастических параметрах центральных моментов, исходя из закона больших чисел. Всегда полагаем, что если вычислить сначала N случайных матриц модулей определителей, а потом, например, $100N$, независимых от предыдущего выбора матриц, то во втором случае стохастические параметры определяются более корректно, чем в первом, как минимум на один верный знак, для достаточно большого N . Также полагаем, что число матриц N слишком мало для данных m и n , если и в первом и во втором случае не совпало более одной из первых значащих цифр центральных моментов.

Возникает также вопрос к параметрам генератора случайных матриц для воспроизведения стохастических констант истинного распределения модулей определителей квадратных матриц порядка n с элементами из Z_m . В этой работе везде полагается, что скорость сходимости к истинному распределению пропорциональна $\sqrt{N_{\text{сгенерированных}}}$, где $N_{\text{сгенерированных}}$ – количество вычисленных модулей определителей случайно выбранных матриц. Из чего следует, что период генератора случайных матриц должен быть не менее, чем $(n^4 m^{2*n*n})$ элементов матриц.

Отметим также, что в [10] неравенство Чебышева записано в виде, $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$:

$$p\{|X_n - \mu| \geq \Delta\} = \begin{cases} \int_{x: |x-\mu| \geq \Delta} f(x) dx \\ \sum_{i: |x_i - \mu| \geq \Delta} p_i \end{cases} \leq \left(\frac{\sigma}{\Delta}\right)^2,$$

а закон больших чисел сформулирован в виде:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \exists N: \forall n > N:$

$$p\{|\mu - \overline{X_n}| < \varepsilon\} > 1 - \delta.$$

В дополнение к работе [3], в данной работе удалось точно оценить не только максимальные модули определителей матриц порядка n с натуральными или целыми элементами, но и сделать аналогичные оценки для комплексного пространства, а главное – были точно оценены средние значения модулей определителей.

Тематику данной работы можно продолжать и продолжать, написав еще не одну сотню работ не меньшего объема и не меньшей актуальности как для практической, так и чистой математики будущего и настоящего.

1.1. К первому приближению теории модулей средних детерминантов матриц порядка n с элементами из кольца Z_m , при малых n и m

Экспоненциальный случай

В работе [3] приведены данные, из которых можно заключить, что для небольших n число матриц с модулем определителя равного x можно приближенно находить из равенства:

$$N_{|\det|=x} \approx N_0 e^{-\alpha x}, \quad (1.1.1)$$

где N_0 – число определителей равных 0 (для больших m и n данное число надо брать несколько меньшим), α – некоторая константа для данных m и n .

При не очень малых m и n для числа матриц с максимальным определителем можно приближенно считать:

$$(n!)^2 \approx N_0 e^{-\alpha \det_{\max}}. \quad (1.1.2)$$

Откуда мы можем определить коэффициент α :

$$\alpha = \frac{1}{\det_{\max}} \ln \frac{N_0}{(n!)^2}. \quad (1.1.3)$$

Общее число матриц равно $(m^n)^n$, с другой стороны оно приближенно равно $\sum_{k=0}^{\det_{\max}} N_0 e^{-\alpha k}$.

Для больших n и m распределение имеет большие пустоты и равенство переходит в неравенство:

$$m^{n^2} \leq \sum_{k=0}^{\det_{\max}} N_0 e^{-\alpha k} = N_0 \frac{\exp(-\alpha(\det_{\max} + 1)) - 1}{\exp(-\alpha) - 1}. \quad (1.1.4)$$

Отсюда:

$$\frac{m^{n^2}}{(n!)^2} \leq \frac{\exp(-\alpha) - \exp(\alpha \det_{\max})}{\exp(-\alpha) - 1}. \quad (1.1.5)$$

И окончательно приходим к неравенству:

$$e^{\alpha(\det_{\max} + 1)} - (e^{\alpha} - 1) \frac{m^{n^2}}{(n!)^2} - 1 \geq 0.$$

Вводя обозначения $e^{\alpha} = x$, $\det_{\max} = N$, $\frac{m^{n^2}}{(n!)^2} = b$, далее будем исследовать функцию:

$$f(x) = x^{N+1} - bx + b - 1, \quad x \geq 0. \quad (1.1.6)$$

$f(x)$ имеет корень $x = 1$ и её можно представить в виде:

$$f(x) = (x - 1) \left(1 - b + \sum_{k=0}^{N-1} x^{N-k} \right). \quad (1.1.7)$$

Исследуя производную $f(x)$, найдем:

$$f'(x) = (N + 1)x^N - b, \quad x_{extr} = \sqrt[N]{\frac{b}{N + 1}}. \quad (1.1.8)$$

Точка экстремума является точкой глобального минимума:

$$f(x_{extr}) = -N\left(\sqrt[N]{\frac{b}{N+1}}\right)^{N+1} + b - 1. \quad (1.1.9)$$

Далее полагаем $\frac{b}{N+1} > 1$ и в (1.1.7) представляем b в виде $b = \frac{N+1}{N+1}b$. Группируя затем каждую $\frac{b}{N+1}$ с каждым слагаемым суммы найдем, что $f(x_{extr}) < 0$, а сам $x_{extr} > 1$. Также легко установить, что $f(\sqrt[N]{b}) = b - 1 > 0$.

По найденным точкам построим график $f(x)$:

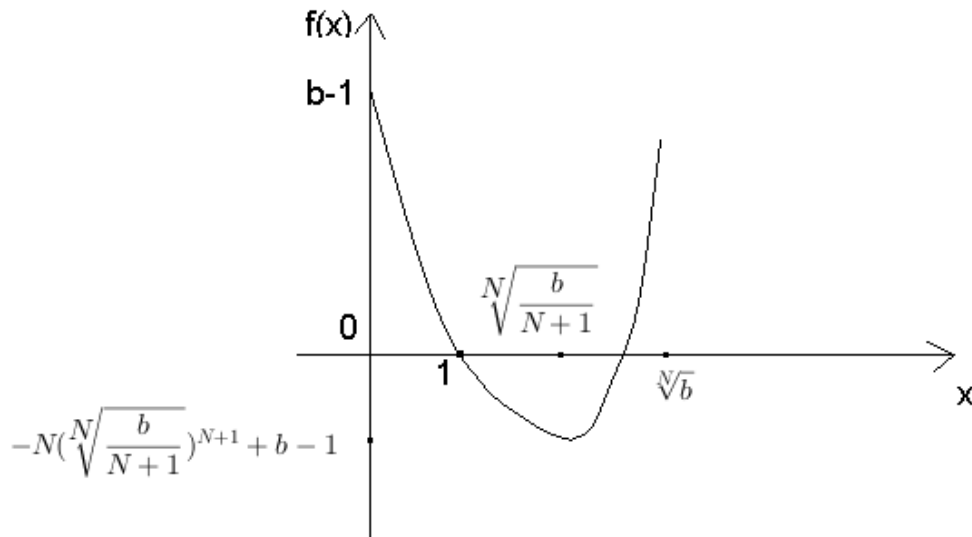


Рис. 2

Искомый корень найдем приближенно с любой наперед заданной точностью для малых N представляя его в виде:

$$x = \sqrt[N]{b} - \delta. \quad (1.1.10)$$

Для больших же N , x представим в виде:

$$x = \sqrt[N]{\frac{b}{N+1}} + \delta. \quad (1.1.11)$$

В корневой точке $f(x)=0$, тогда

$$x^{N+1} = bx - b + 1 \Rightarrow x = \sqrt[N+1]{b(x-1)+1}. \quad (1.1.12.a)$$

Для (1.1.10) формула (1.1.12.а) приводится к виду:

$$\delta = \sqrt[N]{b} - {}^{N+1}\sqrt{b(\sqrt[N]{b} - \delta - 1) + 1}, \quad (1.1.10.a)$$

для первого приближения – δ_1 в (1.1.10.а) δ под корнем пренебрегаем:

$$\delta_1 = \sqrt[N]{b} - {}^{N+1}\sqrt{b(\sqrt[N]{b} - 1) + 1},$$

для второго приближения подставляем в (1.1.10.а) под корень само это выражение:

$$\delta = \sqrt[N]{b} - {}^{N+1}\sqrt{b({}^{N+1}\sqrt{b(\sqrt[N]{b} - \delta - 1) + 1} - 1) + 1} \quad (1.1.10.б)$$

и пренебрегаем δ под корнем:

$$\delta_2 = \sqrt[N]{b} - {}^{N+1}\sqrt{b({}^{N+1}\sqrt{b(\sqrt[N]{b} - 1) + 1} - 1) + 1}.$$

Для третьего приближения, делая аналогичную процедуру получим:

$$\delta_2 = \sqrt[N]{b} - {}^{N+1}\sqrt{1 + b(-1 + {}^{N+1}\sqrt{b(-1 + {}^{N+1}\sqrt{1 + b(-1 + {}^{N+1}\sqrt{b(\sqrt[N]{b} - 1) + 1})})})}. \quad (1.1.10.в)$$

Также из (1.1.3) и (1.1.10):

$$N_0 = (n!)^2 \exp(N \ln(\sqrt[N]{b} - \delta)),$$

где $N = \det_{max}$, $b = \frac{m^{n^2}}{(n!)^2}$.

Для (1.1.11) совершенно аналогично из (1.1.12.а) получим:

$$\delta = {}^{N+1}\sqrt{b(\sqrt[N]{\frac{b}{N+1}} + \delta - 1) + 1} - \sqrt[N]{\frac{b}{N+1}}. \quad (1.1.11.a)$$

Откуда первое приближение есть:

$$\delta_1 = {}^{N+1}\sqrt{b(\sqrt[N]{\frac{b}{N+1}} - 1) + 1} - \sqrt[N]{\frac{b}{N+1}}.$$

Для второго приближения получим:

$$\delta_2 = \sqrt[N+1]{b \left(\sqrt[N+1]{b \left(\sqrt[N]{\frac{b}{N+1}} - 1 \right) + 1} - 1 \right) + 1} - \sqrt[N]{\frac{b}{N+1}}. \quad (1.1.11.6)$$

Также из (1.1.3) и (1.1.11):

$$N_0 = (n!)^2 \exp \left(N \ln \left(\sqrt[N]{\frac{b}{N+1}} + \delta \right) \right).$$

В случае, когда нельзя применять указанное экспоненциальное приближение (1.1.1), можно использовать численные методы для конкретных m и n . В данной работе это делается посредством генерации случайных матриц.

1.2. Оценка числа необходимых испытаний для достижения требуемой точности расчета стохастических моментов распределений матриц из целых чисел с помощью генерации случайных матриц

В экспоненциальном приближении:

$$\begin{aligned} |\det_{\text{cp}}|_{m,n} &= \int_0^{\det_{\text{max}}} x \frac{N_0}{m^{n^2}} e^{-\alpha x} dx = \\ &= \left(-\frac{1}{\alpha} x e^{-\alpha x} \Big|_0^{\det_{\text{max}}} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha x} \Big|_0^{\det_{\text{max}}} \right) \cdot \frac{N_0}{m^{n^2}}. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Следовательно, величина модуля среднего детерминанта сохраняется при следующих заменах:

$$m^{n^2} \rightarrow M$$

$$N = N_0 e^{-\alpha x} \rightarrow \frac{M}{m^{n^2}} N$$

С учетом данных замен и больших M в (1.2.1) оно переходит в равенство для среднего модуля определителя при случайной выборке M матриц.

Оценим величину поправки σ у $|\det_{\text{cp}}|_{m,n}$. При ограничении распределения модулей определителей величиной не $\det_{\text{max}}$, а $\det_{\sigma}$ поправка выражается формулой:

$$\sigma = \left(-\frac{x}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_{\det_{\sigma}}^{\det_{\max}} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha x} \Big|_{\det_{\sigma}}^{\det_{\max}} \right) \cdot \frac{N_0}{m^{n^2}};$$

$$\sigma \approx \left(\frac{1}{\alpha} |\det_{\sigma}| e^{-\alpha |\det_{\sigma}|} + \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha |\det_{\sigma}|} \right) \cdot \frac{N_0}{m^{n^2}}. \quad (1.2.2)$$

При случайной выборке M матриц и N_{σ} равного единице, из (1.2.2) получим:

$$M\sigma\alpha = \left(\frac{1}{\alpha} + \det_{\sigma} \right).$$

Так как

$$\det_x = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{N_0}{N_x},$$

то из предыдущего равенства для экспоненциального приближения:

$$\left(M - \frac{\ln M}{\alpha^2 \sigma} \right) = \frac{1 + \ln \frac{N_0}{m^{n^2}}}{\alpha^2 \sigma} \quad (1.2.3)$$

может при больших M интерпретироваться как число необходимых испытаний для достижения точности σ .

Исследуем ассимптоты этого равенства. Введем $\xi = \frac{\sigma}{|\det_{\text{cp}}|_{m,n}}$.

Тогда предыдущее равенство запишется в виде:

$$\left(M - \frac{\ln M}{\xi} \cdot \frac{m^{n^2}}{N_0} \right) = \frac{1 + \ln \frac{N_0}{m^{n^2}}}{\xi} \cdot \frac{m^{n^2}}{N_0}.$$

Тогда при $M \rightarrow +0 \Rightarrow \xi \rightarrow -\infty$.

При $M = \frac{m^{n^2}}{N_0} \Rightarrow \xi = 1$, здесь достигается максимум.

Если

$$\ln M > \ln \frac{m^{n^2}}{N_0} - 1 \Rightarrow \xi > 0.$$

Субэкспоненциальный случай

При рассмотрении распределений модулей определителей, полученных с помощью генерирования случайных матриц (Таблицы группы II.1.x.2, II.2.x.2, но для III.1.x.3 экспоненциальное приближение вполне справедливо), можно заключить, что в случае больших n мы, по-видимому, имеем другой предельный случай:

$$N_{|\det|=x} = N_0 \cdot P_r(x) \cdot e^{-\alpha x}, \quad (1.2.4)$$

где $P_r(x)$ – некоторый полином степени r , r возможно зависит от x .

Тогда для общего числа матриц порядка n с элементами из Z_m запишем неравенство:

$$m^{n^2} \leq \sum_{k=0}^{\det_{\max}} N_0 \cdot P_r(k) \cdot e^{-\alpha k}.$$

В простейшем случае очень больших n (увеличение m дает менее чувствительный вклад) формула для распределения определителей в субэкспоненциальном случае запишется в виде:

$$N_{|\det|=x} \approx A \cdot N_0,$$

где N_0 – число определителей равных 0, A – некоторая константа для данных m и n .

Откуда аналогично экспоненциальному случаю:

$$A \approx \frac{1}{N_0 \cdot \det_{\max}} \cdot m^{n^2}.$$

Следовательно,

$$N_{|\det|=x} \approx \frac{1}{\det_{\max}} \cdot m^{n^2}.$$

В качестве $\det_{\max}$ удобно брать обрыв по определенному уровню. Например, определитель, после которого суммарное число сгенерированных матриц, начиная от нулевого превышает 0,9 общего числа сгенерированных матриц.

В случае определения среднего определителя:

$$|\det_{\text{cp}}|_{m,n} = \frac{\det_{\max}}{2}.$$

Из экспоненциального случая ясно, что было бы полезно для различных порядков матриц n найти интерполяцией функцию N_0 в виде:

$$N_0 = P_k(n) \cdot m^{\hat{P}_2(n)}, \quad (1.2.5)$$

здесь $P_k(n)$ и $\hat{P}_2(n)$ – полиномы k -го и 2-го порядка.

Впрочем 2-й порядок может быть и увеличен. Обозначим эту величину как z , тогда в случае наличия узлов более, чем $(k+z+2)$, для нахождения формулы выше требуется 2 раза применить формулу интерполяции: один раз для случая $(k+1)$ -го количества узлов, другой – для $(z+1)$ -го количества узлов, а также решить системы линейных уравнений $(k+1)$ -го и $(z+1)$ -го порядка. А затем обобщить результаты на различные m (порядок кольца Z_m элементов матриц), т. е. получить формулу, объединяющую интерполяцию по n , а затем ее обобщение по m . Но нужно много дополнительных исследований для зависимости N_0 от m , аналогичных проделанным автором в [4], серьезных работ в этом направлении пока не появилось. Например, для числа вырожденных матриц с элементами $\{-1; 0; 1\}$ можно вывести формулу (здесь берется $k=2$):

$$N_0 = ((0,006418287)n^2 - 0,076124497n + 1) \cdot 3^{0,952101815n^2 + 0,248680085n - 0,97678575}. \quad (1.2.5.a)$$

По сравнению с формулой, приведенной в [4], для числа вырожденных матриц с элементами из нулей и единиц, приведенная выше дает намного более определенные и точные значения. Ее можно использовать для практически расчетов, но для теоретических рассуждений приведенная в ссылке формула более справедлива. При больших n данная формула дает лишь порядок величины, что свидетельствует о необходимости использовать большие k , однако стохастические подходы могут дать лишь ограниченную точность узлов. Чтобы использовать выборки из 10^{16} и более случайных матриц, нужны миллионы высокопроизводительных компьютеров с десятками ГБ оперативной памяти и возможность обработать ПБ информации.

Еще менее точные формулы можно получить, пользуясь указанной выше интерполяцией для остальных модулей определителей, участвующих в распределении, но тогда для больших m и n мы получили бы громадное число формул, которое невозможно было бы сохранить даже на

электронном носителе. Единственным выходом в данной ситуации является совершенствование формулы, приведенной в начале раздела 1.

В случае экспоненциального приближения легко получить формулу для среднего значения детерминанта (выкладки приведены ранее):

$$\mu = \frac{m^{n^2} - \det_{\max} N_{\det_{\max}}}{N_0 - N_{\det_{\max}}};$$

$$\mu_{approx} = \frac{1 - \det_{\max} N_{0\%} \exp^{-(N_{0\%} - N_{\det_{\max}\%}) \det_{\max}}}{N_{0\%} - N_{\det_{\max}\%}}. \quad (1.2.6)$$

В данном приближении среднее значение определителя обратно пропорционально относительному количеству вырожденных матриц. Сразу отметим, что это утверждение очень приближенно, даже для небольших m и n . Но оно позволяет нам для обратной величины среднего детерминанта сделать ту же интерполяцию, что и для количества вырожденных матриц. Узлами данной интерполяции должны служить обратные величины средних детерминантов.

1.3. Сочетание стохастических моментов в нескольких выборках

Пусть задана дискретная случайная величина x с вероятностью выпадения того или иного значения p_x . Если осуществляем выборку N_i значений x , то среднее значение x в этой выборке определится из формулы:

$$\mu_i = \sum x p_{ix} = \sum x \frac{N_x}{N_i}. \quad (1.3.1)$$

Пусть теперь осуществим еще одну выборку из N_j значений случайной величины y , тогда:

$$\mu_j = \sum y p_{jy} = \sum y \frac{N_y}{N_j}.$$

Если x и y – одна и та же величина, то ее среднее значение в ходе выборки $(N_j + N_i)$ определится из формулы:

$$\mu_{i+j} = \sum x \frac{N_x}{N_i + N_j} + \sum y \frac{N_y}{N_i + N_j} = \frac{N_i}{N_i + N_j} \mu_i + \frac{N_j}{N_i + N_j} \mu_j.$$

Если осуществить не 2, а n выборок с общим количеством выбора случайной величины N_{all} , то среднее значение случайной величины определится из формулы:

$$\mu_n = \sum_{k=1}^n \frac{N_k}{N_{all}} \mu_k. \quad (1.3.2)$$

Аналогично определяются остальные стохастические моменты произвольной дискретной случайной величины в случае n выборок с общим количеством выбора случайной величины N_{all} . В частности, для остальных первых четырех стохастических моментов справедливы следующие формулы.

Для дисперсии:

$$D_n = \sum_{k=1}^n \frac{N_k}{N_{all}} D_k + (-\mu_n^2 + \sum_{k=1}^n \frac{N_k}{N_{all}} \mu_k^2). \quad (1.3.3)$$

Для коэффициента асимметрии:

$$a_{x\ n} = \frac{\mu_{3\ n}}{\sigma_n^3} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{N_k}{N_{all}} a_{x\ k} \sigma_k^3 + 3(-\mu_n D_n + \sum_{k=1}^n \frac{N_k}{N_{all}} \mu_k D_k) + \right. \\ \left. + (-\mu_n^3 + \sum_{k=1}^n \frac{N_k}{N_{all}} \mu_k^3) \right) / \sigma_n^3. \quad (1.3.4)$$

Для коэффициента эксцесса:

$$\mu_{4n} = \sum_{k=1}^n \frac{N_k}{N_{all}} \mu_{4k} - (\mu_n \mu_{3n} - \sum_{k=1}^n \frac{N_k}{N_{all}} \mu_k \mu_{3k}) - \\ - 6(\mu_n^2 D_n - \sum_{k=1}^n \frac{N_k}{N_{all}} \mu_k^2 D_k) - (\mu_n^4 - \sum_{k=1}^n \frac{N_k}{N_{all}} \mu_k^4); \\ \mu_{3k} = a_{x\ k} \sigma_k^3; \\ \mu_{4k} = \sigma_k^4 (e_{x\ k} + 3); \\ \mu_{4n} = \sigma_n^4 (e_{x\ n} + 3). \quad (1.3.5)$$

Данные формулы особенно удобны при суммарном вычислении стохастических моментов, полученных в различных выборках (смотри раздел 1.7).

1.4. Вычисление среднего квадрата определителя матриц из натуральных или целых чисел

Пусть задана квадратная матрица $\mathbf{A}$ порядка n с элементами a_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Тогда в соответствии с [6] её определитель задается формулой:

$$\det ||\mathbf{A}_{n \times n}|| = \sum_{l=1}^{n!} ((-1)^{t(i)} \cdot \prod_{k=1}^n a_{kj_k})_l. \quad (1.4.1)$$

Квадрат определителя матрицы $\mathbf{A}_{n \times n}$ определится из выражения:

$$(\det ||\mathbf{A}_{n \times n}||)^2 = \left(\sum_{l=1}^{n!} ((-1)^{t(i)} \cdot \prod_{k=1}^n a_{kj_k})_l \right)^2.$$

Возведя в квадрат выражение в скобках и отделяя друг от друга квадраты и произведения различных сомножителей, найдем для квадрата определителя:

$$\begin{aligned} (\det ||\mathbf{A}_{n \times n}||)^2 &= \sum_{l=1}^{n!} \left(\prod_{k=1}^n a_{kj_k} \right)_l^2 + \\ &+ 2 \cdot \sum_{l=1}^{0,5 \cdot n!(n!-1)} ((-1)^{t(j1)} (-1)^{t(j2)} \cdot \prod_{k=1}^n a_{kj1_k} \cdot \prod_{r=1}^n a_{rj2_r})_l. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Если каждый элемент a_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, n\}$, является случайной величиной, то по правилам для математического ожидания случайной величины [10] для среднего квадрата детерминанта матрицы $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} M((\det ||\mathbf{A}_{n \times n}||)^2) &= \sum_{l=1}^{n!} M\left(\left(\prod_{k=1}^n a_{kj_k}\right)_l^2\right) + \\ &+ 2 \cdot \sum_{l=1}^{0,5 \cdot n!(n!-1)} M\left(\left((-1)^{t(j1)} (-1)^{t(j2)} \cdot \prod_{k=1}^n a_{kj1_k} \cdot \prod_{r=1}^n a_{rj2_r}\right)_l\right). \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Если a_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, n\}$ независимы друг от друга:

$$\begin{aligned} M((\det ||\mathbf{A}_{n \times n}||)^2) &= \sum_{l=1}^{n!} \prod_{k=1}^n M(a_{kj_k}^2) + \\ &+ 2 \cdot \sum_{l=1}^{0,5 \cdot n!(n!-1)} ((-1)^{t(j1)} (-1)^{t(j2)} \cdot \prod_{k=1}^n M(a_{kj1_k}) \cdot \prod_{r=1}^n M(a_{rj2_r}))_l. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Если $a_{ij}, i, j \in \{1, \dots, n\}$ являются дискретными независимыми друг от друга случайными величинами, распределенными равномерно среди натуральных чисел от 0 до m :

$$M((a_{ij})^2) = \frac{m(2m+1)}{6};$$

$$M(a_{ij}) = \frac{m}{2}.$$

Для среднего квадрата определителя таких матриц найдем:

$$M((\det || \mathbf{A}_{n \times n} \{Z_{m+1}\} ||)^2) = n! \left(\frac{m(2m+1)}{6} \right)^n - C_n m^{2n}, \quad (1.4.5)$$

здесь C_n – константа, зависящая от n и m . При $m \rightarrow \infty$ C_n зависит только от n .

Если $a_{ij}, i, j \in \{1, \dots, n\}$ являются дискретными независимыми друг от друга случайными величинами, распределенными равномерно среди целых чисел от $-m$ до m :

$$M((a_{ij})^2) = \frac{m(m+1)}{3};$$

$$M(a_{ij}) = 0.$$

Для среднего квадрата определителя таких матриц найдем:

$$M((\det || \mathbf{A}_{n \times n} \{Z_{-(m+1); (m+1)}\} ||)^2) = n! \left(\frac{m(m+1)}{3} \right)^n, \quad (1.4.6)$$

Для среднего значения других четных степеней определителя матриц из натуральных или целых чисел необходимо знать значения сумм:

$$\sum_{i=1}^m i^{2s},$$

значения которых определяются рядом Бернулли:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m i^{2s} = & \\
 = & \frac{(m+1)^{2s+1}}{2s+1} - \frac{1}{2}(m+1)^{2s} + \frac{2s}{2!} \frac{1}{6}(m+1)^{2s-1} - \\
 & - \frac{2s(2s-1)(2s-2)}{4!} \frac{1}{30}(m+1)^{2s-3} + \dots + \\
 & + \frac{(2s)!}{3!} (-1)^{s-2} B_{2s-2} \frac{(m+1)^3}{(2s-2)!} + (-1)^{s-1} B_{2s}(m+1),
 \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

здесь B_{2k} – модуль $2k$ -го числа Бернулли [3]:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= -\frac{1}{2}; \\
 s_p &= 1 + 2^{-p} + 3^{-p} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-p}; \\
 B_{2n} &= (-1)^{n-1} \frac{2 \cdot (2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot s_{2n}.
 \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

Отметим также, что если элементами матриц являются элементы Z_{m+1} или $Z_{-(m+1)}$; $(m+1)$, то $M(\det^2_{n \times n}) = M(|\det_{n \times n}|^2) = D(|\det_{n \times n}|) + \mu(|\det_{n \times n}|)^2$. Квадрат среднего определителя в сумме с его дисперсией есть второй стохастический момент этой величины.

Обратимся теперь к вычислению констант C_n , фигурирующих в выражении для $M(\det^2_{n \times n}\{Z_{m+1}\})$.

Пусть $m=1$, тогда:

$$C_n = m^{-2n} \cdot n! \cdot \left(\frac{m(2m+1)}{6} \right)^n - (\mu^2 + D) \cdot m^{-2n} = \frac{n!}{2^n} - (\mu^2 + D). \tag{1.4.9}$$

Найдем тогда:

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}; \\
 C_3 &= \frac{3}{4} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4 &= \frac{3}{2} - \frac{15}{32} = \frac{33}{32}; \\
C_5 &= \frac{15}{4} - \frac{45}{64} = \frac{195}{64}; \\
C_6 &= \frac{45}{4} - \frac{315}{256} = \frac{2565}{256}; \\
C_7 &= \frac{315}{8} - \frac{315}{128} = \frac{4725}{128}; \\
C_8 &= \frac{315}{2} - \frac{2835}{512} = \frac{77805}{512}; \\
C_9 &= \frac{2835}{4} - \frac{14175}{1024} = \frac{711585}{1024}.
\end{aligned} \tag{1.4.10}$$

Особо обращает на себя внимание равенство числителя $(D(|\det_{n \times n}|) + \mu(|\det_{n \times n}|)^2)$ и числителя $((n+1)! 2^{-(n+1)})$. Результаты вычислений запишем в таблицу.

Таблица 1.1

Константы среднего квадрата определителя
из натуральных с нулем чисел

n	C_n , числитель и знаменатель
2	1
	8
3	3
	8
4	33
	32
5	195
	64
6	2565
	256
7	4725
	128
8	77805
	512
9	711585
	1024

1.5. К вопросу о разложении матрицы из комплексных элементов на действительные и мнимые составляющие и последующие оценки модуля определителя этой матрицы

Для квадратных матриц A порядка n из комплексных элементов выделим те, в которых их элементы c_{kr} , $k, r \in \{1, \dots, n\}$, $n \in N$, удовлетворяют условиям: $Re\ c_{kr} \in Z^{-(m+1); (m+1)}$ и $Im\ c_{kr} \in Z^{-(m+1); (m+1)}$, $k, r \in \{1, \dots, n\}$, $n \in N$. Далее будем полагать $a_{kr} = Re\ (c_{kr})$ и $b_{kr} = i\ Im\ (c_{kr})$, $k, r \in \{1, \dots, n\}$, $i^2 = -1$.

Полагая последовательно сначала:

$n = 2$, находим [6]:

$$\begin{aligned} \det A_{2 \times 2} &= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$n = 3$:

$$\begin{aligned} \det A_{3 \times 3} &= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

И вообще для любого n :

$$\det A_{n \times n} = \sum_{l=0}^{2^n-1} \Delta_l, \quad (1.5.1)$$

где Δ_l – определитель $\det||a_{kr}||$, в котором строки с индексами равными ненулевым компонентам индексов двоичного представления числа l заменены на соответствующие строки определителя $\det||b_{kr}||$, $k, r \in \{1, \dots, n\}$.

Если теперь в определителях Δ_l , $l \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, вынести в строках, содержащих строки $\det||b_{kr}||$, $k, r \in \{1, \dots, n\}$, мнимую единицу i , ($i^2 = -1$), то

$$\Delta_l = i^{l_p} |\tilde{\Delta}_l|,$$

здесь l_p – число единиц в двоичном представлении числа l . Тогда модуль детерминанта матрицы $\mathbf{A}_{n \times n}$ можно оценить сверху [3]:

$$\begin{aligned} |\det A_{n \times n}| &= \left| \sum_{l=0}^{2^n-1} \Delta_l \right| \leq \sum_{l=0}^{2^n-1} |\Delta_l| = \sum_{l=0}^{2^n-1} |\tilde{\Delta}_l| \leq \\ &\leq 2^n \max_{l=0, 2^n-1} |\tilde{\Delta}_l| \leq 2^n m^n \max \det\{-1, 0, 1\}. \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Если теперь $Re c_{kr} \in Z_{(m+1)}$ и $Im c_{kr} \in Z_{(m+1)}$, $k, r \in \{1, \dots, n\}$. То аналогично придем к следующей формуле для оценки сверху модуля детерминанта матрицы $\mathbf{A}_{n \times n}$ [3]:

$$\begin{aligned} |\det A_{n \times n}| &= \left| \sum_{l=0}^{2^n-1} \Delta_l \right| \leq \sum_{l=0}^{2^n-1} |\Delta_l| = \sum_{l=0}^{2^n-1} |\tilde{\Delta}_l| \leq \\ &\leq 2^n \max_{l=0, 2^n-1} |\tilde{\Delta}_l| \leq 2^n m^n \max \det\{0, 1\}. \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Для максимального модуля определителя, состоящего из произвольных комплексных величин, может быть получена следующая оценка. Будем полагать, что есть квадратная матрица $\mathbf{A}$ порядка n , состоящая из комплексных элементов c_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $n \in N$. Найдем, что её определитель есть величина:

$$\det ||\mathbf{A}_{n \times n}|| = \sum_{l=1}^{n!} ((-1)^{t(j)} \cdot \prod_{k=1}^n c_{kj_k})_l.$$

А величина модуля определяется из выражения:

$$|\det ||\mathbf{A}_{n \times n}||| = \left| \sum_{l=1}^{n!} ((-1)^{t(j)} \cdot \prod_{k=1}^n c_{kj_k})_l \right| \leq \sum_{l=1}^{n!} \left| \left(\prod_{k=1}^n c_{kj_k} \right)_l \right| \leq \sum_{l=1}^{n!} \left(\prod_{k=1}^n |c_{kj_k}| \right)_l.$$

Тогда:

$$|\det ||\mathbf{A}_{n \times n}|| \leq R^n n!, \quad (1.5.4)$$

здесь R – радиус круга, проведенного из начала координат, в котором заключены все элементы матрицы $\mathbf{A}$. Более грубая оценка:

$$\begin{aligned} |\det ||\mathbf{A}_{n \times n}|| &\leq p^n n!; \\ p^2 &= \max_{i,j} |Re c_{ij}|^2 + \max_{i,j} |Im c_{ij}|^2; \\ i, j &\in \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Перейдем к оценке квадрата среднего модуля определителя для случая $Re c_{kr} \in Z_{-(m+1); (m+1)}$ и $Im c_{kr} \in Z_{-(m+1); (m+1)}$, $k, r \in \{1, \dots, n\}$, $n \in N$. Сразу отметим, что в общем случае квадрат среднего модуля определителя не совпадает со средним квадратом определителя. Также заметим, что каждый определитель Δ_l содержит по крайней мере одну строку не содержащуюся в остальных $(2^n - 1)$ определителях, что гарантирует нам для произведения их среднего значения:

$$M(\Delta_t \cdot \Delta_q) = 0, t \neq q, \quad (1.5.6)$$

так как $M(a_{kr}) = M(b_{kr}) = 0$, $k, r \in \{1, \dots, n\}$, $n \in N$.

$$|\det A_{n \times n}|^2 = \left| \sum_{l=0}^{2^n-1} \Delta_l \right|^2 = \left(\sum_{q=1}^{2^n-1} (-1)^{t_q} \tilde{\Delta}_q \right)^2 + \left(\sum_{h=1}^{2^n-1} (-1)^{t_h} \tilde{\Delta}_h \right)^2.$$

Последнее равенство объясняется разделением комплексного числа на мнимую и вещественную части в выражении для его модуля. Учитывая данное равенство и предыдущее, для среднего квадрата модуля определителя найдем:

$$\begin{aligned} M(|\det A_{n \times n} \{Z_{-(m+1); (m+1)}; iZ_{-(m+1); (m+1)}\}|^2) &= \\ &= M\left(\left(\sum_{q=1}^{2^n-1} (-1)^{t_q} \tilde{\Delta}_q\right)^2 + \left(\sum_{h=1}^{2^n-1} (-1)^{t_h} \tilde{\Delta}_h\right)^2\right) = \\ &= M\left(\sum_{l=0}^{2^n-1} \tilde{\Delta}_l^2\right) = \sum_{l=0}^{2^n-1} M(\tilde{\Delta}_l^2) = 2^n \cdot M(\tilde{\Delta})^2 = \\ &= 2^n \cdot n! \left(\frac{m(m+1)}{3}\right)^n. \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

1.6. К вопросу о количестве матриц, приходящихся на каждую фундаментальную, для данного порядка n квадратных матриц и числового поля Z_m её элементов

В связи со стохастическим генерированием матриц возникает вопрос: какого типа матрицы нужно генерировать, чтобы при наименьшем количестве сгенерированных матриц узнать как можно больше информации о распределении определителей? Особо этот вопрос актуален при поиске максимального определителя матриц с элементами $\{0, 1\}$ или $\{-1, 0, 1\}$. Ответу на него в небольшой степени способствует тот факт, что из расположения 0 и 1 в матрице $n \times n$ с максимальным модулем определителя для данного n нельзя сделать вывод о расположении 0 и 1 для максимального определителя матриц порядка $(n + 1)$ с элементами из 0 и 1. Но следующее решение можно считать важнейшим при поиске максимального определителя в матрицах с элементами $\{-1, 0, 1\}$: **Для максимального определителя матриц из $\{-1, 0, 1\}$ естественно считать его состоящим из $\{-1; 1\}$, так как во-первых он отличен от нуля, а во-вторых в любой строке содержащей нули мы можем последовательно заменять их 1 или минус 1 так, чтобы детерминант всей матрицы на каждой такой замене не уменьшался.** Учитывая этот факт для матриц с элементами из $\{-1, 0, 1\}$ при порядке матриц $n = 7$ был найден определитель равный 576, при $n = 8$ был найден определитель равный 4096, при $n = 9$ был найден определитель равный 14336. Без отмеченного выше факта генерированием случайных матриц определить эти детерминанты при существующем ныне уровне технологий практически невозможно.

В работе [3] было показано, что множество всех квадратных матриц данного порядка n с коэффициентами из данного поля Z_m могут быть разделены на фундаментальные матрицы в зависимости от количества (но не от их расположения в матрице) её элементов равных: $0, 1, \dots, m-1$ для натуральных элементов или: $-(m-1)/2, -(m-3)/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, (m-3)/2, (m-1)/2$ для целых элементов (m предполагаем в этом случае нечетной). Ввиду вопроса о среднем детерминанте для произвольного порядка матрицы и кольца элементов, оценим число фундаментальных матриц и их весовые коэффициенты.

Пусть $m = 2$, тогда $N_{\text{фундаментальных матриц}} = n^2 + 1$.

В каждой N_i из $(n^2 + 1)$ содержится $C_{n^2}^{N_i}$ матриц.

Пусть $m = 3$, тогда $N_{\text{фундаментальных матриц}}$ определится из выражения:

$$\mathcal{F}_{n^2}^m = \mathcal{F}_{n^2}^3 = \sum_{k=1}^{n^2+1} k = \frac{(n^2+1)(n^2+2)}{2}. \quad (1.6.1.a)$$

В каждой N_i из $(0,5 (n^2+1)(n^2+2))$ содержится $C_{n^2}^k \cdot C_k^{k-l}$ матриц, где:

$$\begin{cases} k = p + 1; \\ l = N_i - \sum_{q=0}^p q, \end{cases}$$

здесь p определяется из условия своей максимальности в неравенстве:

$$N_i - \sum_{q=0}^p q \geq 0.$$

Пусть $m = 4$, тогда $N_{\text{фундаментальных матриц}}$ определится из выражения:

$$\mathcal{F}_{n^2}^m = \mathcal{F}_{n^2}^4 = \sum_{k=1}^{n^2+1} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(n^2+1)(n^2+2)(n^2+3)}{6}. \quad (1.6.1.b)$$

В каждой N_i из $((n^2+1)(n^2+2)(n^2+3)/6)$ содержится $C_{n^2}^k \cdot C_k^{k-l} \cdot C_l^{l-r}$ матриц, где:

$$\begin{cases} k = p + 1; \\ l = N_i - \sum_{q=0}^p \frac{q(q+1)}{2}; \\ r = N_i - \sum_{q=0}^p \frac{q(q+1)}{2} - \sum_{w=0}^t w, \end{cases}$$

здесь p и t определяются последовательно, аналогично p для случая $m = 3$.

Пусть $m = 5$, тогда $N_{\text{фундаментальных матриц}}$ определится из выражения:

$$\mathcal{F}_{n^2}^m = \mathcal{F}_{n^2}^5 = \sum_{k=1}^{n^2+1} \frac{k(k+1)(k+2)}{6} = \frac{(n^2+1)(n^2+2)(n^2+3)(n^2+4)}{24}. \quad (1.6.1.b)$$

И вообще для любого m численно (было проверено около 50 различных комбинаций m и n , при $m > 10$, количество фундаментальных матриц становится невыносимо огромным даже для ЭВМ, сам алгоритм подсчета основан на рассмотрении m -мерных векторов), но не аналитически, было найдено, что:

$$\mathcal{F}_{n^2}^m = C_{n^2+m-1}^{m-1}. \quad (1.6.1)$$

Из которого вытекает, что:

$$\mathcal{F}_{n^2}^m = \sum_{k=1}^{n^2+1} C_{k+m-3}^{m-2} = \sum_{k=1}^{n^2+1} \mathcal{F}_{k-1}^{m-1}. \quad (1.6.2)$$

Но данное соотношение легко доказывается с помощью аддитивного правила сочетаний Паскаля [28]:

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}. \quad (1.6.2.a)$$

Весовые коэффициенты $C_{n^2}^{k_1} C_{n^2-k_1}^{k_2} \dots C_{n^2-\sum_{r=1}^{m-2} k_r}^{k_{m-1}}$ матриц определяются как и выше.

Я вынужден снова обратиться к вопросу о максимуме $C_{n^2}^{k_1} C_{n^2-k_1}^{k_2} \dots C_{n^2-\sum_{r=1}^{m-2} k_r}^{k_{m-1}}$, и повторить некоторые из рассуждений, представленных мною в [3], уточнив некоторые из предпосылок, заявленных в [3].

Для введенной там функции V :

$$\begin{aligned} V &= C_N^{N-k_1} \cdot C_{k_1}^{k_1-k_2} \dots C_{k_r}^{k_r-k_{r+1}} \dots C_{k_{m-2}}^{k_{m-2}-k_{m-1}} = \\ &= \frac{N!}{(N-k_1)!(k_1-k_2)! \dots (k_r-k_{r+1})! \dots k_{m-1}!} = \\ &= \frac{N!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_{m-2}! \cdot k_{m-1}! \cdot (n^2 - \sum_{r=1}^{m-1} k_r)!}, \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

здесь $N = n^2$ и во втором (что соответствует [3]) и третьем (нумерация текущей работы) равенстве $k_0, k_1, k_2, k_3, \dots, k_{m-2}, k_{m-1}$ несколько различны – способ ввода этих величин в этой работе и в [3] несколько отличаются.

Мы предполагали условиться о некоторой величине $\max V$ и дали предполагаемое значение для неё. Численные расчеты показали, что это лишь условное значение, истинное же следует искать из формулы:

$$\tilde{\max} V = \begin{cases} \frac{(n^2)!}{((n^2 \operatorname{div} m)!)^{m-2} \cdot (n^2 \operatorname{div} m + \delta)!(n^2 - \delta - (m-1)(n^2 \operatorname{div} m))!} \cdot 1, & n^2 > m; \\ (n^2)!, & n^2 \leq m, \end{cases} \quad (1.6.4)$$

где $-n^2 \operatorname{div} m \leq \delta \leq n^2 - (m-1)(n^2 \operatorname{div} m)$.

$$\max V = \begin{cases} \frac{(n^2)!}{((n^2 \operatorname{div} m)!)^{m-2} \cdot ((n^2 \operatorname{div} m + [(n^2 \operatorname{mod} m) / 2])!)^2}, & n^2 > m; \\ (n^2)!, & n^2 \leq m. \end{cases} \quad (1.6.4.a)$$

Что соответствует равномерному распределению $\{0, \dots, m-1\}$ в n^2 элементах матрицы при $n^2 > m$: $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_{m-2} = n^2 \operatorname{div} m$, и для $k_0 = k_{m-1} = n^2 \operatorname{div} m + [(n^2 \operatorname{mod} m) / 2]$. И $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_{m-2} = k_{m-1} = 1$ для $m \geq n^2$.

Данную величину при $n^2 > m$ следует называть пиком святого Иоанна, а в случае $m \geq n^2$ плато святого Иоанна. Аналитического доказательства справедливости этого выражения для $\max V$ в данной работе не приводится, но в дальнейших рассуждениях оно не фигурирует. $\max V$ из [3] является важной величиной, так как ее значение довольно просто оценить численно, но её следовало бы назвать подмаксимумом – $\operatorname{submax} V$.

1.7. Некоторые сведения о стохастических пространствах матриц из целых чисел

В конце статьи [2] было изложено утверждение о несимметричности распределения модулей детерминантов квадратных матриц с элементами из Z_2 , а точнее его среднего значения при числе нулей или единиц равно n . Новые расчеты показывают, что вблизи уровня $n^2/2$

нулей или единиц ситуация аналогичная – средний модуль детерминанта возрастает при увеличении числа единиц и уменьшается при возрастании числа нулей (вблизи уровня $n^2/2$ наблюдается «горб», направленный в сторону увеличения единиц). Отсюда следует, что максимальной энтропии элементов максимальный средний модуль детерминанта квадратной матрицы не соответствует. То есть существуют такие плотности элементов матриц, которые генерировать выгодней для получения информации о максимальном определителе, чем матрицы с равномерной плотностью элементов. Численно это проверено для всех рассмотренных в работе [3] матриц порядка n с элементами из Z_m . В данной работе стохастические параметры этих распределений указаны в приложении 2.

Также была замечена зависимость средних модулей детерминантов матриц из целых чисел от различных стохастических пространств матриц. Были найдены 2 стохастических пространства, в которых стохастические моменты модулей детерминантов совпадают с моментами модулей детерминантов истинного распределения матриц из целых чисел.

Будем рассматривать 2 основных стохастических пространства:

I. Пространство всех различных квадратных матриц порядка n с элементами из кольца Z_m .

II. Пространство элементов кольца Z_m .

Выбирая произвольным образом по одному элементу из пространства I и n^2 элементов из пространства II, каждый из которых равновероятен числу от 0 до $m-1$, получим два различных распределения модулей определителей, если дополнительно не наложим ограничения на выбор матриц. Пространство I содержит в себе, например, следующие пересекающиеся между собой пространства, стохастически не переходящие одно в другое. Так, разделяя все $(m^n)^n$ матриц на $\mathcal{F}_{n^2}^m = C_{n^2+m-1}^{m-1}$ ² подпространств по $C_{n^2}^{k_1} C_{n^2-k_1}^{k_2} \dots C_{n^2-\sum_{r=1}^{m-2} k_r}^{k_{m-1}}$ матриц, где каждый верхний индекс k_i сочетания соответствует количеству элементов

² Число Эйлера-Гаусса, аббревиатура F (field) в теории чисел обозначает конечное поле, также аббревиатурой «figure's numbers» – фигурные числа – обозначают число сочетаний C_N^k , я же в данной работе присвоил эту аббревиатуру числу фундаментальных матриц («fundamental matrices»). Впрочем, в начале я назвал их числами Эйлера-Маклорена, но не знал, что интегралы Эйлера мало интересовали Маклорена, что несколько не должно преуменьшать значимость этого великого математика

i кольца Z_m в матрицах, количество нулевых элементов определяется из условия: $k_0 = n^2 - k_{m-1} - k_{m-2} - \dots - k_2 - k_1$.

В первом случае будем полагать, что в исследуемых матрицах сохраняется распределение i – x элементов строго соответствует $k_0; k_1; k_2; \dots; k_{m-1}$.

Во втором случае будем предполагать, что в исследуемых матрицах сохраняется распределение i – x элементов, если только количество этих матриц стремится к бесконечности. Во втором пространстве каждое подпространство имеет ту же плотность элементов соответствующего подпространства первого пространства, только при большом их количестве, но в каждой конкретной матрице плотность элементов может отличаться от общей. Так, и в первом, и во втором пространстве только суммы каждого из m элементов кольца Z_m всех матриц подпространства примерно совпадают. Оказывается, что при малых n эти 2 пространства стохастически существенно отличаются друг от друга, причем первое из них стохастически существенно совпадает с пространством Π . Настоящая работа ищет своей целью найти эквивалент правилу «3 дисперсий», связанному с именем П. Л. Чебышева, применительно к распределению матриц из целых чисел для более точной оценки детерминанта, при котором не возникало бы ошибок при расчетах или ошибка была бы минимальной, и ею можно было бы пренебречь. Также в данную работу были включены новые термины: числа Эйлера-Гаусса и пик св. Иоанна – максимум энтропии плотности элементов матриц порядка n с элементами из Z_m .

1.8. К оценке чисел Эйлера-Гаусса

Пусть $m, n \in N$ и $m, n > 1$. Тогда для каждой пары $\{m, n\}$ существует единственное число Эйлера-Гаусса, причем всегда имеем, что $\mathcal{F}_{N-k}^{k+1} = C_N^k$. Очевидно также, что

$$\mathcal{F}_{n^2}^m = \mathcal{F}_{m-1}^{n^2+1}. \quad (1.8.1)$$

Также легко заметить, что число Эйлера-Гаусса равно величине обратной Эйлерову интегралу первого рода – $B(m, n^2)$ (смотри [21]), умноженной на n^2 :

$$\mathcal{F}_{n^2}^m = \frac{n^2}{B(m, n^2)}.$$

Отметим также, что данный интеграл для дробных аргументов успешно изучался еще Д. Валлисом. Следуя ему, данные числа можно было бы назвать гипергеометрическими, т. к. привычного теперь термина *интеграл* тогда еще не существовало, он появился как минимум четверть века спустя, еще при жизни Д. Валлиса, что не умаляет достижений этого ученого. Не забудем также, что сначала Л. Эйлером, а затем более подробно К. Ф. Гауссом была исследована более общая последовательность – гипергеометрический ряд. Его свойства остаются объектом исследования и в наши дни.

Далее займемся оценкой зависимости n^2 от m , если наперед известно, что $\mathcal{F}_{n^2}^m < M$, где M – некоторая достаточно большая константа. Из определения чисел Эйлера-Гаусса:

$$\mathcal{F}_{n^2}^m = C_{n^2+m-1}^{m-1} < M \Rightarrow \prod_{k=1}^{m-1} \frac{n^2 + k}{(m-1)!} < M. \quad (1.8.2)$$

Рассматривая данное произведение как многочлен степени $(m-1)$ от n^2 найдем, что

$$n^2 < {}^{m-1}\sqrt{(m-1)!M}, \quad (1.8.3)$$

но данная оценка хороша лишь для малых m и больших n .

$$\text{Если } m = n^2 + 1, \quad \text{то} \quad \mathcal{F}_{n^2}^{n^2+1} = \frac{(2n^2)!}{((n^2)!)^2} = \frac{2^{2n^2}}{\sqrt{\pi n^2}} e^{\frac{1}{24n^2}(\theta_1 - 4\theta_2)},$$

где $\theta_1, \theta_2 \in (0; 1)$. При больших n : $e^{\frac{1}{24n^2}(\theta_1 - 4\theta_2)} \rightarrow 1$, отсюда при логарифмировании (1.8.2):

$$n^2 - \frac{1}{2} \log_2 n \approx \frac{1}{2} \log_2 (M \sqrt{\pi}) \quad (1.8.4)$$

Отсюда получаем, что чем более m меньше $\boxed{\frac{1}{2} \log_2 (M \sqrt{\pi})}$, тем

более справедлива оценка (1.8.3) и наоборот, чем более m больше этой величины, тем более справедливо (1.8.6).

Для нижней грани n^2 аналогично оценке (1.8.3) из (1.8.2) получаем:

$$\prod_{k=1}^{n^2} \frac{m-1+k}{(n^2)!} < M \Rightarrow (m-1)^{n^2} < M(n^2)! \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{(m-1)e}{n^2} \right)^{n^2} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{\theta}{(12n^2)}\right)}{\sqrt{2\pi n^2}} < M, \theta \in (0; 1).$$

Беря корень n^2 -й степени из левой и правой части найдем:

$$\frac{(m-1)e}{\sqrt[n^2]{M}} < \sqrt[n^2]{2\pi n^2} \exp\left(\frac{\theta}{12n^4}\right) n^2 < 2n^2.$$

Отсюда и из (1.8.3) получаем:

$$\frac{(m-1)e}{2 \cdot \sqrt[n^2]{M}} < n^2 < \sqrt[m-1]{(m-1)!M}$$

или

$$\frac{(m-1)e}{2} < n^2 < \sqrt[m-1]{(m-1)!M}. \quad (1.8.5)$$

Аналогично (1.8.3), перезаписав (1.8.2) в виде (здесь имеются ввиду граничные с M числа Эйлера-Гаусса):

$$\mathcal{F}_{n^2}^m = C_{n^2+m-1}^{m-1} < M < \prod_{k=1}^{m-1} \frac{n^2 + m - 1}{(m-1)!}.$$

Следовательно,

$$n^2 > \sqrt[m-1]{(m-1)!M} - (m-1). \quad (1.8.6)$$

Откуда для граничного случая окончательно получаем:

$$\sqrt[m-1]{(m-1)!M} - (m-1) < n^2 < \sqrt[m-1]{(m-1)!M}. \quad (1.8.7)$$

Приведем также формулу для чисел $\mathcal{F}_{n^2}^m$ без использования факториалов.

Пусть $K_{mn} = \frac{n^2 + m - 1}{(m-1)n^2}$, тогда:

$$\mathcal{F}_{n^2}^m = \sqrt{\frac{K_{mn}}{2\pi}} \cdot K_{mn}^{n^2+m-1} \cdot (m-1)^{n^2} \cdot n^{2(m-1)} \cdot \exp\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\theta_{mn}}{n^2+m-1} - \frac{\theta_m}{m-1} - \frac{\theta_n}{n^2}\right)\right); \theta_{mn}, \theta_m, \theta_n \in (0; 1). \quad (1.8.8)$$

Также приведем неравенство:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{K_{mn}}{2\pi}} \cdot K_{mn}^{n^2+m-1} \cdot (m-1)^{n^2} \cdot n^{2(m-1)} \cdot \exp\left(-\frac{K_{mn}}{12}\right) &\leq \mathcal{F}_{n^2}^m \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{K_{mn}}{2\pi}} \cdot K_{mn}^{n^2+m-1} \cdot (m-1)^{n^2} \cdot n^{2(m-1)} \cdot \exp\left(\frac{1}{12(n^2+m-1)}\right). \end{aligned} \quad (1.8.9)$$

Числам Эйлера-Гаусса родственен вопрос о числе базисных матриц одной строки, смотри (1.9).

1.9. Число базисных матриц из нескольких строк

Большинство распределений, представленных в [3], было получено с помощью аппарата базисных матриц, смотри [4]. Здесь мы приведем некоторые закономерности и просто частные случаи, известные о базисных матрицах:

Таблица 1.2.1

1 строка, натуральные элементы

n	5	4	4	4	4	4
m	3	5	6	7	8	9
N_{BM}	20	69	125	209	329	494

Как для натуральных элементов, так и для целых, в случае одной строки:

$$N_{BM} = C_{n+m-1}^{m-1} - 1, \quad N_{zero} = 1. \quad (1.9)$$

Таблица 1.2.2.1

2 строки, натуральные элементы

n	7	5	5	5	4	4	4	4	4
m	2	4	5	6	6	7	8	9	10
N_{BM}	55	7756	59462	329347	41109	135364	383335	964963	2211068
N_{zero}	382	4286	13235	24308	5588	10679	13537	22050	43256

Таблица 1.2.2.2

2 строки, целые элементы

n	5	4	4
m	5	7	9
N_{BM}	59397	135265	964648
N_{zero}	13467	10563	36578

Таблица 1.2.3.1

3 строки, натуральные элементы

n	8	6
m	2	3
N_{BM}	5455	150364
N_{zero}	408556	—

Таблица 1.2.3.2

3 строки, целые элементы

n	6
m	3
N_{BM}	148996

Таблица 1.2.4.1

4 строки, натуральные элементы

n	8
m	2
N_{BM}	20077
N_{zero}	183926236

1.10. Матрица Гильберта

Матрица Гильберта приводится во многих работах как пример плохо обусловленной [11] и [12]. Здесь приводятся два из обобщений этой матрицы и находится ее определитель.

Пусть:

$$\mathbf{H}_{n \times n} = \begin{vmatrix} a_0^{-1} & (a_0 + h)^{-1} & \dots & (a_0 + (n-1)h)^{-1} \\ (a_0 + h)^{-1} & (a_0 + 2h)^{-1} & \dots & (a_0 + nh)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_0 + (n-1)h)^{-1} & (a_0 + nh)^{-1} & \dots & (a_0 + (2n-2)h)^{-1} \end{vmatrix} \quad (1.10.1)$$

С помощью алгебраических преобразований из определения $\mathbf{H}_{n \times n}$ для любых вещественных или комплексных a_0 и h получается справедливость данных утверждений:

$$\det \mathbf{H}_{1 \times 1} = a_0^{-1}; \quad (1.10.2.a)$$

$$\det \mathbf{H}_{2 \times 2} = \frac{h^2}{a_0(a_0 + h)^2(a_0 + 2h)}; \quad (1.10.2.б)$$

$$\det \mathbf{H}_{3 \times 3} = \frac{4h^6}{a_0(a_0 + h)^2(a_0 + 2h)^3(a_0 + 3h)^2(a_0 + 4h)}; \quad (1.10.2.в)$$

$$\det \mathbf{H}_{4 \times 4} = \frac{144h^{12}}{a_0(a_0 + h)^2(a_0 + 2h)^3(a_0 + 3h)^4(a_0 + 4h)^3(a_0 + 5h)^2(a_0 + 6h)}. \quad (1.10.2.г)$$

Для больших порядков алгебраические преобразования становятся слишком громоздкими и для поиска вида $\det(\mathbf{H}_{n \times n})$ в формулу, его определяющую, подставлялись численные значения a_0 и h . Значения полученных определителей сравнивались с численными значениями формулы для тех же a_0 и h :

$$\det \mathbf{H}_{k \times k} = \frac{C_k \cdot h^{k(k-1)}}{\prod_{i=0}^{k-1} (a_0 + ih)^{i+1} \prod_{i=k}^{2k-2} (a_0 + ih)^{2k-1-i}}, \quad (1.10.2)$$

откуда определялись константы C_k .

Таблица 1.3

Значения констант определителей Гильберта

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k	1	1	4	144	82944	1194393600	619173642240000
k	8					9	
C_k	15728001190723584000000					25569049282962188245401600000000	

Заметим, что если ввести следующее обозначение:

$$\Pi = \prod_{i=0}^{2(n-1)} (a_0 + ih) \quad (1.10.3)$$

То формулу для $\det \mathbf{H}_{n \times n}$ можно записать в виде:

$$\Pi^n \det \mathbf{H}_{n \times n} = \begin{vmatrix} \Pi_{i \neq 0} & \Pi_{i \neq 1} & \dots & \Pi_{i \neq (n-1)h} \\ \Pi_{i \neq 1} & \Pi_{i \neq 2} & \dots & \Pi_{i \neq nh} \\ & & \dots & \\ \Pi_{i \neq (n-1)h} & \Pi_{i \neq nh} & \dots & \Pi_{i \neq 2(n-1)h} \end{vmatrix} \quad (1.10.4)$$

В данном случае не нужно заботиться о точности задания элементов матрицы $\mathbf{H}_{n \times n}$ при вычислении ее определителя!

2. К оптимальному вычислению элементарных функций

2.1. К оптимальному вычислению функций $\arcsin r$, $\arccos r$ или $\arctg r$

Будем предполагать, что в процессе вычисления данных функций большая часть времени уходит на использование функций вычисления квадратного корня и перемножения двух величин, попытаемся представить общее время вычислений в зависимости от следующих параметров:

d – количество вычислений квадратного корня для косинуса половинного аргумента;

x – скорость вычисления квадратного корня – корень/секунда;

m – количество членов степенного ряда функции $\arccos r$;

y – скорость вычисления умножения – умножение/секунда;

TOL – точность вычисления функции $\arccos r$,

r – одно из главных положительных значений аргумента $\arccos$.

Тогда мы приходим к задаче:

$$\begin{cases} d(1 + \frac{x}{y}) \\ \{ \frac{\quad}{x} + 2\frac{m}{y} \} - ? \\ 2^d \frac{1}{2m\sqrt{\pi m}} \cdot (\frac{r}{2^d})^{2m} = TOL \end{cases}$$

Практический интерес представляет минимум

$$\min \left\{ \frac{d(1 + \frac{x}{y})}{x} + 2\frac{m}{y} \right\}$$

и соответствующие значения параметров.

Так как

$$d = \log_2 \frac{r^{1 + \frac{1}{2m-1}}}{\sqrt[2m-1]{TOL \cdot 2m\sqrt{\pi m}}}, \quad (2.1.1)$$

то необходимо найти $m_{\min}$, при котором достигается минимум величины:

$$\min\left\{\frac{1}{x} \cdot \left(1 + \frac{x}{y}\right) \cdot \log_2 \frac{r^{1+\frac{1}{2m-1}}}{2^{m-1} \sqrt{TOL \cdot 2m \sqrt{\pi m}}} + 2 \frac{m}{y}\right\}. \quad (2.1.2)$$

Будем также полагать, что квадратный корень вычисляется методом Ньютона, в котором используется операция деления, которая также вычисляется методом Ньютона (в обоих случаях были разработаны оригинальные алгоритмы, в которых повышается скорость вычисления и стабильности в сравнении с оригинальным методом Ньютона). Тогда x через y выражается зависимостью:

$$\frac{2}{x} = \frac{2}{y} \left(\sum_{k=0}^N 2 + \sum_{i=0}^k \frac{2^{2i}}{4 \left\lceil \frac{1}{9} \cdot \log_{10} TOL^{-1} \right\rceil^2} \right) = \frac{2}{y} \left(2N + \frac{25}{9} - \frac{4 + 3N}{9 \left\lceil \frac{2}{9} \log_{10} TOL^{-1} \right\rceil^2} \right).$$

Здесь $N = \log_2 \left\lceil \frac{2}{9} \log_{10} TOL^{-1} \right\rceil$, а верхние квадратные скобки означают минимальную степень 2, превышающую значение их аргумента. Для удобства запишем $\frac{1}{x} = \frac{f(TOL)}{y}$.

Будем полагать, что x не зависит от m , тогда необходимо найти m для достижения минимума величины:

$$I(r, m, TOL) = \min\left\{\left(1 + \frac{1}{f(TOL)}\right) \log_2 \frac{r^{1+\frac{1}{2m-1}}}{2^{m-1} \sqrt{TOL \cdot 2m \sqrt{\pi m}}} + 2 \frac{m}{f(TOL)}\right\} \quad (2.1.3)$$

Дифференцируя это выражение по m , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial m} = & \frac{2}{(2m-1)^2} \left(\frac{(2m-1)^2}{f(TOL)} + \left(1 + \frac{1}{f(TOL)}\right) \cdot \right. \\ & \left. \cdot (\log_2(2m \sqrt{\pi m}) - (\frac{3}{2 \ln 2} + \log_2(r TOL^{-1}))) + \frac{3}{4m \ln 2} \right). \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Для достаточно больших TOL^{-1} можно приближенно полагать, что:

$$m_{\min} \approx \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{f(TOL)}\right) \log_2(r TOL^{-1}) f(TOL)} + 1 \right). \quad (2.1.5)$$

Аналитическое решение уравнения $\frac{\partial I}{\partial m} = 0$, как и $\min I$, можно задать весьма приближенно. Подставляя в них численные значения m , можем быстро отыскать $m_{\min}$.

Если теперь учтем, что операция возведения в квадрат в 2 раза выгодней обычного умножения, то

$$\left\{ \begin{array}{l} I = d + (2m + \frac{1}{2}d) \frac{x}{y} \\ f(TOL) = \frac{3}{2} \log_2 \left[\frac{2}{9} \log_{10} TOL^{-1} \right] + \\ + \left(\frac{25}{6} - \frac{4 + 3N}{6 \left[\frac{2}{9} \log_{10} TOL^{-1} \right]^2} \right) \frac{2}{3} \\ N = \log_2 \left[\frac{1}{9} \log_{10} TOL^{-2} \right] \end{array} \right.$$

И необходимо найти $m_{\min}$ для достижения $\min$ функции:

$$\begin{aligned} \min I(r, m, TOL) = \\ = \min \left\{ \left(1 + \frac{1}{2f(TOL)} \right) \log_2 \frac{r^{1 + \frac{1}{2m-1}}}{\sqrt[2m-1]{TOL \cdot 2m\sqrt{\pi m}}} + 2 \frac{m}{f(TOL)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.1.3.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial m} = \frac{2}{(2m-1)^2} \left(\frac{(2m-1)^2}{f(TOL)} + \left(1 + \frac{1}{2f(TOL)} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot (\log_2(2m\sqrt{\pi m}) - (\frac{3}{2\ln 2} + \log_2(rTOL^{-1}))) + \frac{3}{4m\ln 2} \right). \end{aligned} \quad (2.1.4.a)$$

Для достаточно больших TOL :

$$m_{\min} \approx \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{(\log_2(r \cdot TOL^{-1}) + \frac{3}{2\ln 2}) \left(\frac{3}{2} \log_2 \left[\frac{2}{9} \log_{10} TOL^{-1} \right] + \frac{14}{3} \right)} \right). \quad (2.1.5.a)$$

2.2. К оптимальному вычислению $\sin r$, $\cos r$ или $\operatorname{tg} r$.

Экспонента e^r

Тригонометрические функции

Будем предполагать, что в процессе вычисления данных функций основное время тратится на умножение при вычислениях удвоенного аргумента и вычисление степенного ряда функции $\cos r$. Попытаемся представить количество времени вычислений $\{(d+2m)/y\}$ в зависимости от параметров:

d – количество умножений для удвоения аргумента;

m – количество членов степенного ряда функции $\cos r$;

y – скорость вычисления умножения – умножение/секунда, полагаем независимой от m ;

TOL – точность вычисления функции $\cos r$, $r \in [0; \pi/4]$.

Из условия:

$$2^d \frac{1}{(2m)!} \left(\frac{r}{2^d}\right)^{2m} = TOL;$$
$$d = \log_2 \left(\frac{r^{\frac{2m}{2m-1}}}{\sqrt[2m-1]{(2m)! TOL}} \right). \quad (2.2.1)$$

Попытаемся найти $\min$ времени вычислений, домноженный на y :

$$I(m, TOL, r) = \log_2 \left(\frac{r^{\frac{2m}{2m-1}}}{\sqrt[2m-1]{(2m)! TOL}} \right) + 2m \quad (2.2.2)$$

как функции от m . Из [21] мы знаем, что производная функции факториал ищется в виде:

$$\frac{\partial(x!)}{\partial x} = x! \left(\ln(x+1) + \frac{1}{2(x+1)} + \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{B_{2n}}{2n(x+1)^{2n}} + \right. \\ \left. + \theta'(-1)^{N+1} \frac{B_{2(N+1)}}{2(N+1)(x+1)^{2N+1}} \right), \theta' \in (0; 1),$$

здесь B_{2n} – модуль (1.4.8).

А натуральный логарифм функции факториал:

$$\begin{aligned}\ln x! = & \ln \sqrt{2\pi} + (x + \frac{1}{2})\ln(x + 1) - (x + 1) + \frac{B_2}{2} \cdot \frac{1}{x + 1} + \\ & + \sum_{m=1}^N (-1)^m \frac{B_{2(m+1)}}{(2m+1)(2m+2)} \cdot \frac{1}{(x+1)^{2m+1}} + \\ & + \theta(-1)^{N+1} \frac{B_{2(N+2)}}{(2N+3)(2N+4)} \cdot \frac{1}{(x+1)^{2N+3}}, \theta \in (0; 1),\end{aligned}$$

здесь B_{2n} – модуль (1.4.8).

Заметим, что в случае натурального $x > 1$, данные формулы легко получаются применением формулы Эйлера-Маклорена к рядам:

$$\begin{aligned}\ln m! = & \sum_{i=1}^m \ln i ; \\ \frac{\partial(m!)}{\partial m} = & m! \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m-i}.\end{aligned}$$

Тогда для производной $I'_m(r, m, TOL)$ получим выражение:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial m} = & \frac{1}{2(m-0,5)^2} \cdot ((2m-1)^2 - \log_2(TOL^{-1} \cdot r) + \\ & + \frac{1}{\ln 2} (\ln \sqrt{2\pi} + (m+1)\ln(2m+1) - (2m+1) + \frac{4-6m}{12(2m+1)} - \\ & - \frac{(2m+1)\theta_1 + 3(m-0,5)\theta_2}{360(2m+1)^4} + \frac{m-0,5}{12(2m+1)^2})), \theta_1, \theta_2 \in (0; 1).\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

В точке экстремума m : $\frac{\partial I}{\partial m} = 0$. Аналитическое решение данного

уравнения, как и $\min I$ можно задать весьма приближенно. Подставляя численные значения m , можем вполне быстро найти $m_{\min}$.

Если теперь учтем, что операция возведения в квадрат в 2 раза выгодней обычного умножения, то

$$I = 0,5d + 2m$$

И необходимо найти $m_{\min}$ для достижения $\min$ функции:

$$\min I(r, m, TOL) = \frac{1}{2} \log_2 \frac{r^{1+\frac{1}{2m-1}}}{2^{m-1} \sqrt{(2m)! TOL}} + 2m; \quad (2.2.2.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial m} = & \frac{1}{(2m-1)^2} \cdot (2(2m-1)^2 - \log_2(TOL^{-1} \cdot r)) + \\ & + \frac{1}{\ln 2} (\ln \sqrt{2\pi} + (m+1) \ln(2m+1) - (2m+1) + \frac{4-6m}{12(2m+1)} - \\ & - \frac{(2m+1)\theta_1 + 3(m-0,5)\theta_2}{360(2m+1)^4} + \frac{m-0,5}{12(2m+1)^2}), \theta_1, \theta_2 \in (0; 1). \end{aligned} \quad (2.2.3.a)$$

Экспонента e^r , $r \in (0; 1)$

В этом случае количество времени вычислений будем предполагать в виде $\{(d+2m)/y\}$, а параметры d и m связаны условием:

$$\frac{2^d}{m!} \cdot \left(\frac{r}{2^d}\right)^m = TOL. \quad (2.2.4)$$

И необходимо найти $m_{\min}$ для достижения $\min$ величины:

$$U(m, TOL, r) = -\frac{1}{m-1} \log_2(m! TOL) + 2m + \frac{m}{m-1} \cdot \log_2 r \quad (2.2.5)$$

как функции от m .

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial m} = & \frac{1}{(m-1)^2} \cdot (2(m-1)^2 + \log_2(r^{-1} \cdot TOL)) + \\ & + \frac{1}{\ln 2} (\ln \sqrt{2\pi} + \frac{3}{2} \ln(m+1) - (m+1) + \frac{7-6m}{12(m+1)} - \\ & - \frac{(m+1)\theta_3 + 3(m-1)\theta_4}{360(m+1)^4}), \theta_3, \theta_4 \in (0; 1). \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Для достаточно большой TOL^{-1} :

$$m_{\min} \approx \frac{1 + \sqrt{1 - 8 \log_2(r^{-1} TOL) \ln^2 2}}{4 \ln 2} + 1. \quad (2.2.7)$$

В общем случае для нахождения $m_{\min}$ необходимо подставлять численные значения m в уравнения $\frac{\partial U}{\partial m} = 0$ и $\min U$.

Учитывая, что операция возведения в квадрат в 2 раза выгодней обычного умножения, экспоненциальный случай преобразуется к виду:

$$U = 0,5d + (1+a)m,$$

где $a \approx 0,75$ для $TOL^{-1} > 10^{100}$ и характеризует выгоду получения последовательности $\{t, t^2, t^3, t^4, \dots, t^m\}$.

И необходимо найти $m_{\min}$ для достижения $\min$ функции:

$$U(m, TOL, r) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{m-1} \log_2(m!TOL) + \frac{m}{m-1} \cdot \log_2 r \right) + (1+a)m; \quad (2.2.5.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial m} = & \frac{1}{2(m-1)^2} \cdot (2(1+a)(m-1)^2 + \log_2(r^{-1} \cdot TOL) + \\ & + \frac{1}{\ln 2} (\ln \sqrt{2\pi} + \frac{3}{2} \ln(m+1) - (m+1) + \frac{7-6m}{12(m+1)} - \\ & - \frac{(m+1)\theta_3 + 3(m-1)\theta_4}{360(m+1)^4})), \theta_3, \theta_4 \in (0; 1). \end{aligned} \quad (2.2.6.a)$$

Для достаточно больших TOL^{-1} можно приближенно положить:

$$m_{\min} \approx \frac{1 + \sqrt{1 - 8(1+a)\log_2(r^{-1}TOL)\ln^2 2}}{4(1+a)\ln 2} + 1. \quad (2.2.7.a)$$

2.3. О вычислении логарифмов простых чисел

Слишком большое количество логарифмов простых чисел можно не разместить в оперативной памяти. Для большей TOL точность $\ln p$ нужно также повышать. Например, при $TOL = 10^{-3100}$ для вычисления 10000 логарифмов простых чисел нужно порядка часа работы для ультрасовременной ЭВМ: Intel Core i9-9900KS, 4,0/5,0 ГГц, 8С/16Т, 16 МБ – L3, DDR4 – 2666 ГГц, DIMM DDR-4, 16384x2 МБ, PC 24000, 3000 МГц, Kingston, HyperX FuryBlack RGB, CL 15, AsRock LGA 1151 U2, Z390 Extreme 4.

К сожалению, даже ресурсам этой ЭВМ есть предел не смотря на то, что вы «не пили, не ели» ради нее лет 30. Так, на продекларированном ранее компьютере для вычисления натуральных логарифмов всех простых чисел меньших 10^6 с точностью 10^{-3000} уйдет порядка недели. Если очень тонко подобрать параметры мантиссы, возможно половина недели, но мелочность – «корень всех зол», как любил повторять Д. Кнут. Эти логарифмы с $TOL = 10^{-3000}$ будут занимать в оперативной памяти около 100 МБ, что весьма много. Так, для хранения остальных констант элементарных функций при вычислении с той же точностью требуется порядка 5 МБ. Но даже с этой десятой миллиона натуральных логарифмов простых чисел для вычисления натурального логарифма действительного числа с $TOL = 10^{-3000}$ понадобится около 300 членов ряда Эйлера. Если вычислить миллион натуральных логарифмов простых чисел, то для тех же вычислений потребуется около 250 членов ряда Эйлера и около 1 ГБ оперативной памяти, что несовместимо с обычным персональным компьютером. Вычисление миллиона натуральных логарифмов потребует около 2 месяцев, для рассмотренного выше двигателя прогресса. Если необходима точность натуральных логарифмов выше 10^{-3000} , например 10^{-30000} , то затраты на их вычисления можно смело умножить на 100. На десятую долю миллиона натуральных логарифмов простых чисел уйдет около 2 лет, даже у рассмотренного выше двигателя прогресса, который стоил всего остального в жизни. На практике, в идеальных условиях, на полную мощность непрерывно можно отработать около полугода, после чего человек и машина требуют профилактики в течение оставшегося полугода. Так что подсчитать со столь большой точностью удастся только 10^4 натуральных логарифмов простых чисел. В этом случае для $TOL = 10^{-30000}$ понадобится около 3750 членов ряда Эйлера. Так что для TOL много меньших 10^{-1000} поиск натуральных логарифмов простых чисел уже становится малоэффективным.

Для таких TOL на помощь приходит ТФКП. Для вычисления натурального логарифма мы используем степенной ряд Маклорена, впервые рассмотренный Л. Эйлером и по тому мы связываем его имя с этим рядом:

$$\begin{aligned}
\ln t &= 2i \operatorname{Arctg}\left(i \frac{1-t}{1+t}\right) = 2i \operatorname{Arctg}(ix) = 2iw = -2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \\
&= -2 \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \theta \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x)} \right), \\
x, \theta &\in (0; 1).
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Из курса ТФКП:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} w &= ix = \frac{e^w - e^{-w}}{i(e^w + e^{-w})}; \\
e^{2w} &= \frac{1-x}{1+x}.
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Откуда, d раз применяя операцию извлечения квадратного корня можно найти $\exp\{\frac{2w}{2^d}\}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\ln t &= 2^d \cdot 2i \operatorname{Arctg}\left(\frac{ix}{2^d}\right) = \\
&= -2 \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \frac{1}{2^{2dk}} + \theta \left(\frac{x}{2^d}\right)^{2n+3} \cdot \frac{2^{2d}}{(2^d - x)(2n+3)} \right), \\
\theta &\in (0; 1).
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

2.4. К оптимальному вычислению функции $\ln r$, $r \in (0, 1; 1)$

Для более быстрой сходимости степенного ряда функции $\ln r$ необходимо максимально приблизить её аргумент к единице слева. Для этого необходимо знать как можно большее количество последовательных логарифмов с самого начала простых чисел: $\ln 2$, $\ln 3, \dots, p_{N_{\max}}$

Так как $r < 10/p_{N_{\max}}$ в степенном ряде $\operatorname{arctg}(ir)$, для нахождения логарифма $r^{2m}/(2m+1) = TOL$, TOL – точность вычисления функции $\ln$. Таким образом необходимо найти m из условия:

$$\left(\frac{10}{p_{N_{\max}}} \right)^{2m} = (2m+1) \cdot TOL.$$

Положим в обозначениях, введенных для обратных тригонометрических функций, определить минимальное время для вычисления натурального логарифма:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min\{\frac{d}{x} + \frac{2m}{y}\} = \min\{xI(r, m, TOL)\}; \\ \frac{(\frac{r}{2^d})^{2m+1} \cdot 2^d}{2m+1} = TOL; \\ d \geq 1. \end{array} \right.$$

Но здесь r заметно отличается от единицы и меньше $10/N_{\ln p}$, так что в принципе при больших TOL может принять и отрицательные значения. В этом случае прежние рассуждения для вычисления логарифма без извлечения квадратного корня из экспоненты остаются верны. Так что будем полагать TOL достаточно малой, чтобы $d \geq 1$. Во всех предыдущих элементарных функциях нужно также проверять условие:

$$r > 2 \cdot m_{extr} \sqrt{TOL \cdot F(m_{extr})}. \quad (2.4.1)$$

Если оно не выполняется, то преобразовывать аргумент не нужно и можно ограничиться вычислением соответствующего ряда Маклорена.

Будем считать условие $d \geq 1$ выполненным, тогда:

$$d = \frac{1}{2m} \log_2 \frac{r^{2m+1}}{(2m+1)TOL}. \quad (2.4.2)$$

И будем искать m для достижения минимума величины:

$$\min I(r, m, TOL) = \min\left\{ \frac{1}{2m} \log_2 \frac{r^{2m+1}}{(2m+1)TOL} + \frac{2m}{f(TOL)} \right\} \quad (2.4.3)$$

здесь

$$f(TOL) = 2N + \frac{25}{9} - \frac{4 + 3N}{9 \left[\frac{2}{9} \log_{10} TOL^{-1} \right]^2}, \quad (2.4.4)$$

где $N = \log_2 \left\lceil \frac{2}{9} \log_{10} TOL^{-1} \right\rceil$, верхние квадратные скобки означают минимальную степень 2, превышающую значение аргумента.

Тогда

$$\frac{\partial I}{\partial m} = \frac{2}{(2m)^2} \left(\frac{(2m)^2}{f(TOL)} + \log_2(2m+1) - (\log_2(r \cdot TOL^{-1}) + \frac{1}{\ln 2}) \right). \quad (2.4.5)$$

Для достаточно больших TOL можно приближенно полагать:

$$m_{\min} \approx \frac{1}{2} \sqrt{f(TOL) \log_2(r \cdot TOL^{-1})}. \quad (2.4.6)$$

Аналитическое решение уравнения $\frac{\partial I}{\partial m} = 0$, как и $\min I$ можно за-

дать весьма приближенно. Подставляя в них численные значения m , мы можем быстро отыскать $m_{\min}$. Но необходимо учесть, что d сильно зависит от r для не очень больших TOL !

Если теперь учесть, что операция возведения в квадрат в 2 раза выгодней обычного умножения, то по-новому запишется лишь $f(TOL)$:

$$f(TOL) = \frac{3}{2} \log_2 \left\lceil \frac{2}{9} \log_{10} TOL^{-1} \right\rceil + \frac{2}{3} \left(\frac{25}{6} - \frac{4 + 3N}{6 \left\lceil \frac{2}{9} \log_{10} TOL^{-1} \right\rceil^2} \right). \quad (2.4.4.a)$$

Все остальные соотношения с точностью до обозначений остаются прежними.

2.5. Лагранжевы полиномы с матрицей коэффициентов, соответствующей матрице Вандермонда, к полиномиальному сокращению трудности вычисления произведения двух величин

Для целых неотрицательных сомножителей x и y , для которых требуется найти произведение xy , будем представлять их в виде полиномов в W -й системе счисления:

$$x = \sum_{k=0}^D x_k W^k \text{ и } y = \sum_{k=0}^D y_k W^k, \text{ где } x_i \text{ и } y_i < W, \text{ а также } x \text{ и } y < W^{D+1}; i = \overline{0; D}.$$

Будем последовательно искать $(2D+1)$ произведений вида:

$$z(iW) = x(iW) * y(iW), \text{ где } i = \overline{0; 2D}.$$

Так как система $z(iW) = \sum_{k=0}^{2D} z_k (iW)^k, i = \overline{0; 2D}$ относительно коэффициентов z_k совместна и имеет единственное решение при ненулевых x или y , а матрица ее коэффициентов представляет собой определитель Вандермонда, то z_k итерационно находятся подобно коэффициентам Лагранжевых полиномов, с равноотстоящими узлами.

Определив коэффициенты z_k через $z(iW)$, мы можем вычислять произведение $z = xy$, для различных x и y с уменьшением многоразрядных умножений в $(D+1)^2/(2D+1)$ раз.

Для примера рассмотрим случай $D=1$:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1 W; z_0 = x_0 y_0 \\ y &= y_0 + y_1 W, \text{ тогда } z_1 = (x_0 + x_1)(y_0 + y_1) \\ z_2 &= (x_0 + 2x_1)(y_0 + 2y_1) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$xy = (z_0 - 2z_1 + z_2)W^2/2 + (-3z_0 + 4z_1 - z_2)W/2 + z_0$$

Случай $D=2$:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1 W + x_2 W^2; z_0 = x_0 y_0 \\ y &= y_0 + y_1 W + y_2 W^2, \text{ тогда } z_1 = (x_0 + x_1 + x_2)(y_0 + y_1 + y_2) \\ z_2 &= (x_0 + 2x_1 + 4x_2)(y_0 + 2y_1 + 4y_2) \\ z_3 &= (x_0 + 3x_1 + 9x_2)(y_0 + 3y_1 + 9y_2) \\ z_4 &= (x_0 + 4x_1 + 16x_2)(y_0 + 4y_1 + 16y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } xy &= (z_0 - 4z_1 + 6z_2 - 4z_3 + z_4) W^4 / 24 + \\ &+ (-5z_0 + 18z_1 - 24z_2 + 14z_3 - 3z_4) W^3 / 12 + \\ &+ (35z_0 - 104z_1 + 114z_2 - 56z_3 + 11z_4) W^2 / 24 + \\ &+ (-25z_0 + 48z_1 - 36z_2 + 16z_3 - 3z_4) W / 12 + z_0 \end{aligned}$$

Несколько иной путь понижения разрядности произведения рассмотрен в [29]. Соответствующий алгоритм они называли в честь Тоома-Кука. Там рассматриваются иные узлы для $z(iW)$. Так, там $i = \overline{-D; D}$ и матрица коэффициентов отлична от Вандермондовой, что не позволяет аналитически найти формулу для коэффициентов $z(W)$, смотри

ниже, так что рассмотренный выше алгоритм принципиально отличается от алгоритма Тоома-Кука.

Необходимость деления на $(2D)!$ на стадии решения системы для поиска коэффициентов z_k приводит к необходимости использования конкретных систем счисления в зависимости от разрядности архитектуры вычисляющей машины. Так, на 32-разрядных системах этот алгоритм требует принимать $D = 4$, а $W = 8!^{m_2}$, для 64-разрядных систем этот алгоритм требует принимать $D = 6$, а $W = 12!^{m_1}$, где m_1, m_2 – некоторые целые числа, т. е. основаниями систем счисления будут $8!$ и $12!$ для 32- и 64-разрядных вычислительных архитектур соответственно. Иные небольшие D или W не подходят для арифметики, отличной от целочисленной в некотором поле (вещественные, рациональные числа).

Пусть $D = n$. Тогда приведем формулу для произведения двух сомножителей:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sum_{k=0}^n x_k W^k; \\ y = \sum_{k=0}^n y_k W^k, \end{array} \right. \text{ тогда } \left\{ \begin{array}{l} z_0 = x_0 y_0; \\ z_i = \left(\sum_{k=0}^n i^k x_k \right) \left(\sum_{k=0}^n i^k y_k \right), i = \overline{1; n}. \end{array} \right.$$

И окончательную формулу приведем в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} xy = \sum_{k=0}^{2n} a_k W^k; \\ a_i = \frac{1}{i! h^i} \left(\sum_{s=0}^i z_s (-1)^{s+i} C_i^s - \right. \\ \left. - \sum_{k=i+1}^{2n} (a_k h^k \sum_{m=1}^i C_i^m (-1)^{m+i} m^k) \right), i = \overline{1, 2n-1}; \\ a_0 = z_0; \\ a_{2n} = \frac{1}{(2n)! h^{2n}} \left(\sum_{s=0}^{2n} z_s (-1)^{s+2n} C_{2n}^s \right); \\ h = 1 - \text{расстояние среди узлов интерполяции Лагранжа.} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

В частности, если $D=6$:

$$\begin{aligned}
 P_{12}(x) = & \\
 = & (z_0 - 12z_1 + 66z_2 - 220z_3 + 495z_4 - 792z_5 + 924z_6 - 792z_7 + \\
 & + 495z_8 - 220z_9 + 66z_{10} - 12z_{11} + z_{12}) / 479001600 + \\
 & + (-13z_0 + 154z_1 - 836z_2 + 2750z_3 - 6105z_4 + 9636z_5 - 11088z_6 + \\
 & + 9372z_7 - 5775z_8 + 2530z_9 - 748z_{10} + 134z_{11} - 11z_{12}) / 79833600 + \\
 & + (247z_0 - 2880z_1 + 15390z_2 - 49840z_3 + 108945z_4 - 169344z_5 + \\
 & + 191940z_6 - 159840z_7 + 97065z_8 - 41920z_9 + 12222z_{10} - 2160z_{11} + \\
 & + 175z_{12}) / 43545600 + \\
 & + (-169z_0 + 1932z_1 - 10128z_2 + 32196z_3 - 69129z_4 + 105624z_5 - \\
 & - 117768z_6 + 96552z_7 - 57771z_8 + 24604z_9 - 7080z_{10} + 1236z_{11} - \\
 & - 99z_{12}) / 1451520 + \\
 & + (22711z_0 - 253212z_1 + 1296366z_2 - 4030540z_3 + 8476785z_4 - \\
 & - 12705912z_5 + 13918884z_6 - 11228472z_7 + 6620265z_8 - 2782060z_9 + \\
 & + 790926z_{10} - 136572z_{11} + 10831z_{12}) / 14515200 + \\
 & + (-34983z_0 + 377594z_1 - 1876756z_2 + 5680990z_3 - 11665395z_4 + \\
 & + 17118276z_5 - 18405408z_6 + 14606652z_7 - 8489565z_8 + 3523170z_9 - \\
 & - 990668z_{10} + 169414z_{11} - 13321z_{12}) / 2419200 + \\
 & + (4090021z_0 - 42283560z_1 + 202378170z_2 - 593031160z_3 + \\
 & + 1184651955z_4 - 1698651792z_5 + 1791395340z_6 - 1398858480z_7 + \\
 & + 802063035z_8 - 329051080z_9 + 91621146z_{10} - 15536280z_{11} + \\
 & + 1212685z_{12}) / 43545600 + \\
 & + (-624455z_0 + 6084008z_1 - 27722152z_2 + 78076984z_3 - 151151631z_4 + \\
 & + 211459728z_5 - 218717352z_6 + 168168048z_7 - 95221749z_8 + \\
 & + 38664776z_9 - 10673648z_{10} + 1796824z_{11} - 139381z_{12}) / 1451520 + \\
 & + (14936519z_0 - 133608168z_1 + 569977974z_2 - 1529302040z_3 + \\
 & + 2859027975z_4 - 3899983248z_5 + 3959062716z_6 - 3000900528z_7 + \\
 & + 1680271965z_8 - 676161800z_9 + 185286654z_{10} - 31000248z_{11} + \\
 & + 2392229z_{12}) / 10886400 + \\
 & + (-5356117z_0 + 42005376z_1 - 163511064z_2 + 413694720z_3 - \\
 & - 745259265z_4 + 992058624z_5 - 989989392z_6 + 740994048z_7 - \\
 & - 410915295z_8 + 164103040z_9 - 44692632z_{10} + 7439616z_{11} - \\
 & - 571659z_{12}) / 1814400 + \\
 & + (6706804z_0 - 41976720z_1 + 142878780z_2 - 337836400z_3 + \\
 & + 587250675z_4 - 764853408z_5 + 752145240z_6 - 557076960z_7 + \\
 & + 306489150z_8 - 121646800z_9 + 32966604z_{10} - 5465520z_{11} + \\
 & + 418555z_{12}) / 1663200 + \\
 & + (-86021z_0 + 332640z_1 - 914760z_2 + 2032800z_3 - 3430350z_4 + \\
 & + 4390848z_5 - 4268880z_6 + 3136320z_7 - 1715175z_8 + 677600z_9 - \\
 & - 182952z_{10} + 30240z_{11} - 2310z_{12}) / 27720 + z_0
 \end{aligned}$$

(2.5.a)

Если же $D = 4$:

$$\begin{aligned}
 P_8(x) = & (z_0 - 8z_1 + 28z_2 - 56z_3 + 70z_4 - 56z_5 + 28z_6 - 8z_7 + z_8) / 40320 + \\
 & + (-9z_0 + 70z_1 - 238z_2 + 462z_3 - 560z_4 + 434z_5 - 210z_6 + 58z_7 - \\
 & - 7z_8) / 10080 + (39z_0 - 292z_1 + 956z_2 - 1788z_3 + 2090z_4 - 1564z_5 + \\
 & + 732z_6 - 196z_7 + 23z_8) / 2880 + (-81z_0 + 575z_1 - 1790z_2 + 3195z_3 - \\
 & - 3580z_4 + 2581z_5 - 1170z_6 + 305z_7 - 35z_8) / 720 + \\
 & + (3207z_0 - 21056z_1 + 61156z_2 - 102912z_3 + 109930z_4 - 76352z_5 + \\
 & + 33636z_6 - 8576z_7 + 967z_8) / 5760 + \\
 & + (-2403z_0 + 13960z_1 - 36706z_2 + 57384z_3 - 58280z_4 + 39128z_5 - \\
 & - 16830z_6 + 4216z_7 - 469z_8) / 1440 + \\
 & + (29531z_0 - 138528z_1 + 312984z_2 - 448672z_3 + 435330z_4 - \\
 & - 284256z_5 + 120008z_6 - 29664z_7 + 3267z_8) / 10080 + \\
 & + (-2283z_0 + 6720z_1 - 11760z_2 + 15680z_3 - 14700z_4 + 9408z_5 - \\
 & - 3920z_6 + 960z_7 - 105z_8) / 840 + z_0
 \end{aligned}
 \tag{2.5.6}$$

Приведем также квадратурные формулы для этих полиномов, которые могут быть полезны при вычислении определенных интегралов, при дроблении [21] промежутка интегрирования:

$$\begin{aligned}
 I_{12} |_{0^h}^{12^h} = & (1364651z_0 + 9903168z_1 - 7587864z_2 + 35725120z_3 - \\
 & - 51491295z_4 + 87516288z_5 - 87797136z_6 + 87516288z_7 - 51491295z_8 + \\
 & + 35725120z_9 - 7587864z_{10} + 9903168z_{11} + 1364651z_{12})h / 63063000
 \end{aligned}
 \tag{2.5.a.a)$$

$$\begin{aligned}
 I_8 |_{0^h}^{8^h} = & (3956z_0 + 23552z_1 - 3712z_2 + 41984z_3 - 18160z_4 + \\
 & + 41984z_5 - 3712z_6 + 23552z_7 + 3956z_8)h / 113400
 \end{aligned}
 \tag{2.5.б.a)$$

Операцию дробления сомножителей на более мелкие будем повторять, пока W не станет равным $8!$ для 32-разрядных архитектур и $12!$ для 64. В этом случае можно обойтись лишь встроенными типами данных для подсчета отдельных $x_k * y_k \bmod W$ без использования векторной арифметики.

2.6. Доказательство справедливости формулы для коэффициентов интерполяционного многочлена Лагранжа

Пусть имеется $(n+1)$ равноотстоящих точки абсциссы $\{x_i\}_{i=1; n}$ и соответствующие ординаты $\{y_i\}_{i=1; n}$. Через данные точки можно провести единственный [20] полином степени n , обозначим его $P_n(x)$, а

расстояние между соседними абсциссами через h . Решим систему уравнений, коэффициенты которой представляют собой значения коэффициентов этого полинома в узлах интерполяции:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k,$$

тогда

$$P_n(r \cdot h) = y_r = \sum_{k=0}^n a_k \cdot (r \cdot h)^k, r = \overline{0; n}.$$

Откуда придем к системе уравнений:

$$||\mathbf{L}|| \cdot \vec{a}^T = \vec{y}^T, \quad (2.6.1)$$

причем матрица $\mathbf{L}$ задается в виде:

$$||\mathbf{L}||_{(n+1) \times (n+1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & h & h^2 & h^3 & \dots & h^n \\ 1 & (2h) & (2h)^2 & (2h)^3 & \dots & (2h)^n \\ 1 & (3h) & (3h)^2 & (3h)^3 & \dots & (3h)^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (nh) & (nh)^2 & (nh)^3 & \dots & (nh)^n \end{vmatrix}. \quad (2.6.2)$$

Но определитель матрицы $\mathbf{L}$ представляет собой определитель Вандермонда [6]:

$$\det \mathbf{L}_{(n+1) \times (n+1)} = n! h^n \cdot (n-1)! h^{n-1} \cdot \dots \cdot 2! h^2 \cdot 1! h. \quad (2.6.3)$$

По правилу Крамера [6] $a_0 = y_0$, далее найдем коэффициент a_n :

$$a_n = \frac{\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_0 \\ 1 & h & h^2 & h^3 & \dots & h^{n-1} & y_1 \\ 1 & (2h) & (2h)^2 & (2h)^3 & \dots & (2h)^{n-1} & y_2 \\ 1 & (3h) & (3h)^2 & (3h)^3 & \dots & (3h)^{n-1} & y_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (nh) & (nh)^2 & (nh)^3 & \dots & (nh)^{n-1} & y_n \end{vmatrix}}{\det \mathbf{L}_{(n+1) \times (n+1)}}. \quad (2.6.4)$$

Определитель в числителе будем искать в виде суммы подматриц последнего столбца. Каждая такая подматрица представляет собой новый определитель Вандермонда, окончательно получим:

$$a_n = \frac{1}{(n)!h^n} \left(\sum_{s=0}^n y_s (-1)^{s+n} C_n^s \right). \quad (2.6.5)$$

Если в системе (2.6.1) перенести коэффициенты с a_n в правую сторону, то для определения коэффициента a_{n-1} придем к системе, аналогичной предыдущей:

$$\mathbf{L}_{n \times n} \cdot \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_0 \\ y_1 - a_n h^n \\ y_2 - a_n (2h)^n \\ \dots \\ y_{n-1} - a_n ((n-1)h)^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Откуда a_{n-1} :

$$a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!h^{n-1}} \left(\sum_{s=0}^{n-1} y_s (-1)^{s+n-1} C_{n-1}^s - (a_n h^n \sum_{m=1}^{n-1} C_{n-1}^m (-1)^{m+n-1} m^n) \right). \quad (2.6.6.a)$$

Поступая так аналогичным образом для нахождения коэффициентов a_{n-2} , a_{n-3} , и последующих придем к формуле:

$$a_i = \frac{1}{i!h^i} \left(\sum_{s=0}^i y_s (-1)^{s+i} C_i^s - \sum_{k=i+1}^n (a_k h^k \sum_{m=1}^i C_i^m (-1)^{m+i} m^k) \right), i = \overline{1, n-1}. \quad (2.6.6)$$

Определитель Вандермонда используется во многих приложениях математики, часть из которых приводится в работах [1], [8], [13], [14], [22], [23], [24], [30]. Особо отметим исследования этого определителя П. Л. Чебышевым, определители которого получили название Чебышева-Вандермонда [12], эти исследования возможно опубликованы в полном собрании работ П. Л. Чебышева [П. Л. Чебышев Полн. собр. соч. М.; Л.; Изд-во АН СССР, 1944–1951. Т. 1–5].

2.7. К вопросу о быстром сложении обратных величин, практически не используя операцию деления

В [3] в разделе, посвященном вычислению логарифмов или арктангенсов с помощью формулы Эйлера-Маклорена необходимо было просуммировать ряд обратных величин. Вернемся здесь снова к этому ряду:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{1+kh} = \frac{\sum_{k=0}^n \prod_{m=0, m \neq k}^n (1+mh)}{\prod_{p=0}^n (1+ph)}, \quad (2.7.1)$$

$\sum_{k=0}^n \prod_{m=0, m \neq k}^n (1+mh)$ делим на несколько $l = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ подсумм S_t и вычисляем

отдельно, зная для каждого t ($l-1$) произведение вида:

$$\begin{aligned} \prod_{p=(l-t)r}^{(l-t+1)r} (1+ph) &= \Pi_t; \\ \prod_{p=0}^n (1+ph) &= \\ (1+h)(1+2h)(1+3h)\dots(1+(r-1)h)(1+rh) \cdot \\ \cdot (1+(r+1)h)(1+(r+2)h)\dots(1+(2r-1)h)(1+2rh) \cdot \\ \dots \\ \cdot (1+((l-1)r+1)h)(1+((l-1)r+2)h)\dots(1+lrh) &= \\ = \Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \dots \cdot \Pi_l \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

В данном случае необходимо около Q умножений:

$$\begin{aligned} Q &= 2(lr + l((l-1) + r(r-1))); \\ r_{opt} &= n^p, l_{opt} = n^{1-p_{opt}}; \\ \ln 2 &= (3p_{opt} - 1)\ln n + \ln(1 + n^{-2p_{opt}}); \\ p_{opt} &\approx \frac{1}{3} + \frac{\ln 2}{3\ln n}. \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

Если обладаем достаточным количеством памяти, то для снижения асимптотической оценки числа произведенных умножений будем произведение Π_l считать в памяти пирамидально. Сначала найдем и сохраним в памяти все двойные произведения: первой величины со второй, третьей

с четвертой и т. д. Затем аналогично поступаем с двойными произведениями для нахождения четверных: первое двойное умножаем на второе, третье на четвертое и т. д. Поступая так $\lceil \log_2 n \rceil$ раз найдем все уровни пирамиды. Тогда, чтобы найти каждый из членов суммы $\sum_{k=0}^n \prod_{m=0, m \neq k}^n (1 + mh)$, потребуется по одному звену из каждого уровня пирамиды, т. е. $\lceil \log_2 n \rceil$ произведений. Для всей же суммы их потребуется

$$n \lceil \log_2 n \rceil.$$

Дополнительное хранение в памяти результатов умножений по нахождению предыдущего произведения позволяет снизить число умножений по крайней мере в 2 раза. Данные ряды могут быть полезны как для вычисления логарифма произвольной величины, так и экспоненты с показателем 1 или меньше.

В связи с вычислением логарифмов могут быть также полезны следующие соображения. Так, если первые значащие цифры аргумента (абсциссы) логарифма принадлежат интервалу $[1/3; 1]$, то для него будет хорошо сходиться следующий ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \ln t &= 2i \operatorname{Arctg}\left(\frac{i - it}{t + 1}\right) = 2i \operatorname{Arctg}(ix) = \\ &= -2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = -2 \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \theta \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(1-x)} \right), \\ \theta &\in (0; 1) \end{aligned}$$

Сохранение в памяти значений степеней $x, x^2, \dots, x^k$ позволяет во всех рассмотренных выше случаях сократить количество умножений на величину

$$n - \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil.$$

Возвращаясь снова к логарифмам отметим, что если $t \in (0, 1; 1/3)$, то домножая t на 3 получим, что $x \in (0; 7/13)$. Если после умножения на 3: $t \in (0, 3; 0, 5)$, то снова домножим t на 2, тогда $x \in (0; 1/4)$ и ряд $i \operatorname{Arctg}(ix)$ будет сходиться очень быстро, даже если $x \in (0; 1/3)$. Естественно мы должны отдельно посчитать величины $\ln 2, \ln 3, \ln 5$.

Впрочем, ясное определение логарифма было дано лишь Эйлером (в том числе и для комплексной переменной), а в случае вещественной переменной логарифм успешно вычислял еще Ньютон. Но к вышеизложенному ряду был близок именно Л. Эйлер.

Если $t \in [58/59; 1]$, то $x \in [0; 1/117]$.

Если $t \in [0,1; 58/59] * 59/58$, то $t \in [59/580; 1]$.

Для вычисления логарифма необходимо найти минимум числа r , при котором:

$$\frac{\min r}{59} \cdot t > 1.$$

Т. к. $t \geq 0,1$, то $590 \geq r$.

Данные значения t и x гарантируют вычисление 2 десятичных цифр при вычислении одного члена ряда Эйлера. Беря за основание простое число большее 59, можем вычислять большее количество значащих цифр, при старом числе членов ряда Эйлера.

2.8. Вычисление квадратов в методе Ньютона или ряда экспоненты

При вычислении элементарных функций с большой точностью требуется применять метод Ньютона и ряды Маклорена. В частности, применительно к вычислениям с большой точностью метод Ньютона нужен для вычисления обратной величины a [3]:

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2 \quad (2.8.1)$$

и квадратного корня величины a [3]:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right). \quad (2.8.2)$$

Также метод Ньютона рассматривается в [20] и [29]. Часто в этих методах требуется вычислить квадрат величины. В работе [29] предложена формула для его вычисления в 2 раза более быстрая, чем обычное умножение, но авторы явно указали только половину формулы, может в силу ее громоздкости. Приведем здесь ее полностью. Сама идея возведения в квадрат базируется на том, что при умножении в ромбик, известный еще со школы, каждый столбец квадрата, имеет суммой своих элементов: w_k , $k \in [0; 2D-2]$, D – разрядность аргумента, представимой в виде:

$$x^2 = \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} w_k = 2 \cdot \sum_{i=0}^{\lfloor 0,5k \rfloor} x_i \cdot x_{k-i} - \delta_0, k \in [0; D-1] \\ \delta_0 = x_{0,5k}^2, k \bmod 2 = 0 \\ \delta_0 = 0, k \bmod 2 = 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} w_k = 2 \cdot \sum_{i=k-(D-1)}^{k-(D-1)+\lfloor 0,5(2D-2-k) \rfloor} x_i \cdot x_{k-i} - \delta_0, k \in [D; 2D-2] \\ \delta_0 = x_{k-(D-1)+0,5(2D-2-k)}^2, (2D-2-k) \bmod 2 = 0 \\ \delta_0 = 0, (2D-2-k) \bmod 2 = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(2.8.3)

Приложение I

I.1. Генератор ГПСЧ

Странно, что исходя из исследований [19], в настоящее время большинство человечества не может генерировать случайные величины. Удача, успех, везение, фортуна и тому подобные понятия – это то, без чего не построить генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ), и чем больше у вас этих сущностей, тем лучше, т. е. тем больше должен быть период ГПСЧ. Удивительно, но Ветхий Завет утверждает, что успех – вполне реальное явление, имеющее свою сущность. Можно попытаться дать определение успеху: это отношение результата к вероятности, причем вероятность находится как определенная цепь маловероятных – $p(A)$ – событий (зависимых, независимых или являющихся их комбинацией), которые в определенное время в определенном месте приводят к максимальному результату – $y_{\max}(A)$. То есть успех события A есть $y(A)/p(A)$. Здесь учитываем одно из утверждений квантовой механики говорившей о том, что вероятность некоторого события в определенный промежуток времени в определенном месте не может строго равняться 0.

Генераторы ПСЧ со сверхбольшими периодами, рассмотренные в [29], обладают необходимыми характеристиками для генерации случайных матриц небольших порядков. По крайней мере озвученная в их книге величина периода действительно подходит для определенных порядков, но будут ли случайны начальные ключи при их использовании группой из 5 человек? Скорей всего да. А для группы из миллиарда человек? Я боюсь сказать, что нет. У меня есть ощущение, что проблема выбора начального ключа является слабым местом генератора Марсальи, но сильным для матричного, рассматриваемого в моей работе и затронутая очень кратко в работе [29]. Однако сильной стороной генератора Марсальи является его период. Матричный генератор, на котором получены данные для этой работы, имеет для периода стабильную нижнюю грань и варьирующееся значение периода для различных модулей и начальных ключей. Я выбрал матричный генератор, так как пока не осознал до конца, как решить проблему начальных ключей для генератора Марсальи (американские авторы также приводят ссылку на генератор Брента с еще большим по их мнению периодом). В противовес этому я понимаю, какой примерно период будет для данного модуля у матричного генератора, а главное – точно знаю значение

нижней грани для него. Проблема нижней грани связана с факторизацией целых чисел, ряд алгоритмов по которой представлен в [29] и [9]. Но их книга создана для тех, кто собственноручно доказал каждую, приведенную в ней теорему и реализовал каждый представленный в ней алгоритм. Не авторам её это просто не под силу – будь у вас целый институт из профессоров по теории чисел и кибернетике, вам все равно не справиться без этих конкретных авторов, один из которых к глубокому моему огорчению ушел в другой мир. Это странно, последователям должно быть намного легче, чем первооткрывателям. Так, Х. Колумб перед глумливой знатью сформулировал задачу поставить яйцо острым концом вертикально вверх. Никто не мог справиться с этой задачей и однажды Колумб взял и снизу немного примял яйцо – «Вот теперь это может каждый» – сказал он. Книга американских авторов является то ли золотым яйцом, то ли зашифрованным посланием, подобно секрету изготовления пороха Р. Бэкона. Но все же в своей книге они замечают, что всю информацию о простых числах невозможно понять одному человеку. Несколько иной подход к факторизации чисел дается в [9], но авторы делают акцент именно на криптографических проблемах. Но если не создать свой генератор ПСЧ, то не стоит исследовать стохастические моменты распределений случайных матриц. Встроенные библиотеки не обладают необходимыми периодами, ошибка при поиске стохастических моментов не убывает как корень из числа сгенерированных матриц, и, более того, мне неизвестно есть ли среди них периоды большие нижней грани периода генератора, построенного для этой работы.

В 20-м веке успех или неудача определенных предприятий стали столь важны для некоторых государств, что была предпринята попытка создания новой науки – теории принятия решений (также употребляется термин теория игр). К данным предприятиям изначально относили ведение войн, социальное устройство общества, жизнь конкретного человека и т. д. Как вести наступление или оборону в войне, чтобы выиграть с наименьшими потерями и нанести наибольший урон? Как устроить мировой социум так, чтобы он не саморазрушил себя? Как устроить общество так, чтобы оно приносило наибольшую выгоду каждому его гражданину? Как устроить жизнь гражданина, чтобы он приносил наибольшую пользу социуму, в котором проживает? Естественно ответы на данные вопросы не являются ни теорией, ни играми в обычном их понимании.

Генераторы ГПСЧ тоже используются при ответах на некоторые важные вопросы или непосредственно эксплуатируются в криптографии. Естественно задаться вопросом поиска самого подходящего для данной цели генератора, понимая под ним некоторое программное обеспечение и оборудование к нему или непосредственно генерацию последовательности чисел с данными стохастическими характеристиками. К стохастическим параметрам ГПСЧ можно отнести:

- 1) период генерируемой последовательности;
- 2) влияние выбора начального ключа (или ключей) на степень совпадения генерируемых последовательностей, то есть степень параллелизуемости генератора;
- 3) стохастические моменты сгенерированной последовательности.

К программным параметрам можно отнести:

- 1) количество вычислений для генерации элемента последовательности;
- 2) количество оперативной памяти, необходимой для работы генератора;
- 3) количество места на жестком диске для хранения генератора;
- 4) степень переносимости кода генератора на различные операционные системы и оборудование;
- 5) степень переносимости кода с точки зрения поддержки: сможет ли человек, не написавший код генератора, понять и исправить ошибку, если генератор подвергнется атаке. Или наоборот: сможет ли злоумышленник понять, как работает генератор и написать программное обеспечение, чтобы он перестал нормально работать?

Матричный генератор псевдослучайных чисел с точки зрения программного и алгоритмического содержания занимает сравнительно небольшой объем. Естественно другие генераторы с точки зрения своего алгоритмического наполнения могут быть еще более простыми, например, линейный конгруэнтный генератор, или наоборот более сложными, для меня это, например, алгоритм Марсальи. Я не знаком с доказательством истинности его периода, предложенного Марсальей или Брентом, и не смог его воспроизвести сам, основываясь только на теории, представленной у Крэнделла и Померанса. Думаю, это тот случай, когда нужен человек типа Померанса, очень хорошо разбирающийся в теории алгоритмов. Но помимо генератора, действительно колоссального объема кода, превышающего по количеству строк эту ра-

боту, достигла программа для генерации матриц, последующего определения модуля их определителя и сортировка. Так, генерации для пространств I и II являются совершенно разными, также кардинально отличаются способы вычисления определителя в случае, если его можно определить встроенными типами и в случае, если этого сделать нельзя – вот тут понадобится весь арсенал самых лучших алгоритмов, доступных на сегодня. Конечно, стоит еще упомянуть поиск генерирующей матрицы учитывая, что понадобится факторизация довольно немалых чисел, понадобится много веры в полезность и важность этой работы, алгоритмы факторизации. Так, вычисление детерминанта генерирующей матрицы представляет собой практический интерес, но не столь важный, как факторизация чисел и перемножение матриц [16].

I.2. К вопросу разнообразия случайных последовательностей, получаемых посредством мультипликации вектора матрицей порядка $n \in N$ в кольце Z_p , $p \in N$

Пусть дан ненулевой вектор v_{01} размерности n с элементами из кольца Z_p . Также дана квадратная матрица $A_{n \times n}$ порядка n с элементами из Z_p , определитель которой известен и равен числу D (D – простое число, но оно может и не принадлежать Z_p).

При умножении вектора v_{10} на матрицу $A_{n \times n} \bmod p$, получится вектор v_{11} , который тоже ненулевой и может совпадать с v_{10} . Будем продвигать эту операцию столько раз с v_{10} , обозначим это число k_1 , сколько нужно, чтобы $v_{1k_1} = v_{10} \bmod p$. Обозначим эту последовательность векторов v_{1i} через K_1 .

Если последовательность K_1 содержит менее $p^n - 1$ векторов, то возьмем ненулевой вектор $v_{20} \bmod p$, не входящий в последовательность K_1 , и будем снова его умножать на матрицу $A_{n \times n} \bmod p$, пока не достигнем равенства $v_{2k_2} = v_{20} \bmod p$, обозначим эту последовательность векторов K_2 .

Если суммарное число векторов в последовательностях K_2 и K_1 меньше $p^n - 1$, то возьмем новый ненулевой вектор $v_{30} \bmod p$, и будем снова его умножать на матрицу $A_{n \times n} \bmod p$, пока не достигнем равенства $v_{3k_3} = v_{30} \bmod p$, обозначим эту последовательность векторов K_3 .

Будем повторять эту операцию столько раз (обозначим это число через r) сколько нужно, чтобы суммарное число векторов последовательностей $\{K_1, K_2, K_3, \dots, K_r\}$ равнялось $p^n - 1$. Очевидно [7], что каждое из количеств последовательностей $\{K_1, K_2, K_3, \dots, K_r\}$ кратно порядку числа D в кольце Z_p . Так как

$$v_{i0} \cdot A_{n \times n}^{K_i-1} = E_{n \times n} \bmod p, i = \overline{1, r}, \quad (1.2.1)$$

то

$$D^{K_i-1} = 1 \bmod p, i = \overline{1, r}. \quad (1.2.2)$$

Если r близко к 1, то будем говорить, что $A_{n \times n}$ генерирует в поле Z_p r псевдослучайных последовательностей векторов, содержащих nK_i целых чисел $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Следует также сказать, что существуют матрицы порядка n с элементами из поля Z_p , для которых длина мультипликативной последовательности есть $(p^n - 1)$, то есть привлекая терминологию теории чисел можно сказать, что существуют первообразные матрицы Z_p^n в данных векторных полях. Например, такие матрицы были численно найдены в полях Z_2^{17} , Z_2^{32} , Z_2^{64} и других. Прямой связи между величиной определителя матрицы и тем, является ли матрица первообразной, выявлено не было, но во всех указанных выше случаях он брался простым числом, плотность нулей и единиц была одинакова.

Необходимым условием для первообразности матрицы $A_{n \times n}$ в Z_p^n является условие:

$$A_{n \times n}^{p^n-1} = E_{n \times n},$$

здесь $E_{n \times n}$ – единичная матрица порядка n .

В теории чисел [3] существует теорема о первообразных корнях, согласно которой:

Если $s = \varphi(m)$ и $q_1, q_2, \dots, q_k$ – различные простые делители числа s , то для того, чтобы число g , взаимно простое с m , было первообразным корнем по модулю m , необходимо и достаточно, чтобы это g не удовлетворяло ни одному из следующих сравнений:

$$g^{\frac{c}{q_1}} \equiv 1 \pmod{m}$$

$$g^{\frac{c}{q_2}} \equiv 1 \pmod{m}$$

...

$$g^{\frac{c}{q_k}} \equiv 1 \pmod{m}$$

Для случая векторов длины n с элементами из Z_p эту теорему перепишем следующим образом (p – простое):

Если $c = (p^n - 1)$ и $q_1, q_2, \dots, q_k$ – различные простые делители числа c , то для того, чтобы невырожденная матрица $A_{n \times n}$ с элементами из Z_p , была первообразной в Z_p^n , необходимо и достаточно, чтобы эта матрица $A_{n \times n}$ не удовлетворяла ни одному из сравнений:

$$\begin{aligned} A_{n \times n}^{\frac{c}{q_1}} &= E_{n \times n} \pmod{p} \\ A_{n \times n}^{\frac{c}{q_2}} &= E_{n \times n} \pmod{p} \\ &\dots \\ A_{n \times n}^{\frac{c}{q_k}} &= E_{n \times n} \pmod{p} \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Похожую теорему пытался вывести С. В. Голомб, но так и не нашел ей применение [29].

Легко доказать, что если период последовательностей в векторном поле Z_2^n составляет r , то в векторном поле Z_p^n , $p > 2$, период будет не меньше, чем r для любого генератора псевдослучайных чисел.

Приложение II

В данном приложении для квадратных матриц различных порядков с элементами из Z_m или $Z_{-m; m}$ для выборки сгенерированных матриц от 10^8 до $4 \cdot 10^8$ (в таблицах не указана) приводятся следующие стохастические характеристики распределений их модулей определителей:

μ – математическое ожидание модулей определителей сгенерированных матриц;

σ – среднеквадратичное отклонение модулей определителей сгенерированных матриц;

a_x – коэффициент асимметрии модулей определителей сгенерированных матриц;

e_x – коэффициент эксцесса модулей определителей сгенерированных матриц;

$\det_{0,99}$ – пороговый детерминант для 99% сгенерированных матриц;

$\det_{0,999}$ – пороговый детерминант для 99,9% сгенерированных матриц;

$\det_{0,9999}$ – пороговый детерминант для 99,99% сгенерированных матриц;

$\det_{\max}$ – максимальный определитель сгенерированных матриц;

$N_{\max}$ – средний процент от общего количества сгенерированных матриц для максимального определителя среди них;

$\delta_{\max}$ – максимальный разброс максимального определителя из числа сгенерированных матриц: $\max_{ij} |\det_{\max j} - \det_{\max i}|$. Данная величина является одним из показателей корректности работы генератора случайных матриц для данного числа сгенерированных матриц, так при $N_{\max}$ близких к N_{tol} она должна быть близка к $\det_{\max}$;

N_{zeroes} – средний процент от общего количества сгенерированных матриц для вырожденных матриц.

Далее приводятся стохастические параметры для матриц порядка n с элементами из Z_m . Здесь N_{tol} примерно $3,333E-07$.

Таблица II.1.1.1

 Z_2

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	3,750E-01	4,841E-01	5,164E-01	-1,733E+00	6,250E+01
3	3,515E-01	5,014E-01	8,987E-01	-5,534E-01	6,602E+01
4	3,846E-01	5,665E-01	1,216E+00	8,177E-01	6,557E+01
5	4,712E-01	6,936E-01	1,526E+00	2,594E+00	6,271E+01
6	6,299E-01	9,130E-01	1,843E+00	4,753E+00	5,804E+07
7	9,024E-01	1,283E+00	2,171E+00	7,340E+00	5,197E+01
8	1,368E+00	1,915E+00	2,502E+00	1,029E+01	4,492E+01
9	2,175E+00	3,018E+00	2,826E+00	1,355E+01	3,733E+01
10	3,609E+00	5,004E+00	3,134E+00	1,708E+01	2,973E+01
11	6,228E+00	8,687E+00	3,421E+00	2,080E+01	2,262E+01
12	1,114E+01	1,572E+01	3,679E+00	2,447E+01	1,641E+01
13	2,063E+01	2,955E+01	3,922E+00	2,837E+01	1,135E+01
14	3,949E+01	5,755E+01	4,143E+00	3,222E+01	7,482E+00
15	7,801E+01	1,158E+02	4,358E+00	3,654E+01	4,705E+00
16	1,588E+02	2,400E+02	4,549E+00	4,016E+01	2,828E+00
17	3,327E+02	5,117E+02	4,747E+00	4,464E+01	1,629E+00
18	7,165E+02	1,121E+03	4,943E+00	4,957E+01	9,056E-01
19	1,583E+03	2,519E+03	5,131E+00	5,429E+01	4,884E-01
20	3,588E+03	5,795E+03	5,294E+00	5,831E+01	2,590E-01
21	8,326E+03	1,365E+04	5,479E+00	6,330E+01	1,396E-01
22	1,976E+04	3,285E+04	5,661E+00	6,886E+01	7,932E-02
23	4,790E+04	8,075E+04	5,857E+00	7,764E+01	5,023E-02

Таблица II.1.1.2

 Z_2

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	1,000000E+00	1,000000E+00	1,000000E+00	1.0000	3,750E+01	0,000E+00
3	2,000000E+00	2,000000E+00	2,000000E+00	2.0000	1,172E+00	0,000E+00
4	2,000000E+00	3,000000E+00	3,000000E+00	3.0000	1,827E-01	0,000E+00
5	3,000000E+00	4,000000E+00	5,000000E+00	5.0000	2,153E-02	0,000E+00
6	4,000000E+00	6,000000E+00	8,000000E+00	9.0000	1,549E-03	0,000E+00
7	6,000000E+00	9,000000E+00	1,200000E+01	24.0000	1,667E-06	0,000E+00
8	8,000000E+00	1,400000E+01	2,000000E+01	48.0000	N_{tol}	8,000E+00
9	1,400000E+01	2,400000E+01	3,500000E+01	84.0000	N_{tol}	4,000E+00
10	2,400000E+01	4,200000E+01	6,200000E+01	201.0000	N_{tol}	4,900E+01
11	4,100000E+01	7,400000E+01	1,140000E+02	378.0000	N_{tol}	4,200E+01
12	7,500000E+01	1,380000E+02	2,170000E+02	757.0000	N_{tol}	1,830E+02
13	1,420000E+02	2,670000E+02	4,250000E+02	1453.0000	N_{tol}	2,270E+02
14	2,760000E+02	5,300000E+02	8,580000E+02	2919.0000	N_{tol}	2,540E+02

Продолжение таблицы II.1.1.2

15	5,560000E+02	1,084000E+03	1,784000E+03	8024.0000	N _{tol}	1,498E+03
16	1,152000E+03	2,280000E+03	3,792000E+03	14259.0000	N _{tol}	2,563E+03
17	2,449000E+03	4,926000E+03	8,328000E+03	41598.0000	N _{tol}	1,265E+04
18	5,360000E+03	1,092300E+04	1,862200E+04	80181.0000	N _{tol}	1,154E+04
19	1,201600E+04	2,478000E+04	4,290700E+04	212920.0000	N _{tol}	1,980E+04
20	2,759000E+04	5,759400E+04	1,000940E+05	496777.0000	N _{tol}	2,637E+04
21	6,487000E+04	1,368570E+05	2,405780E+05	1185773.0000	N _{tol}	1,664E+05
22	1,558600E+05	3,317950E+05	5,880840E+05	2921655.0000	N _{tol}	3,446E+05
23	3,819200E+05	8,226700E+05	1,470936E+06	12161606.0000	N _{tol}	5,265E+06

Таблица II.1.2.1

 Z_3

n	μ	σ	a_x	e_x	N _{zeroes}
2	1,333E+00	1,333E+00	6,875E-01	-5,625E-01	3,827E+01
3	2,125E+00	2,294E+00	1,269E+00	1,648E+00	3,501E+01
4	3,826E+00	4,306E+00	1,785E+00	4,419E+00	2,835E+01
5	7,542E+00	8,798E+00	2,246E+00	7,689E+00	2,070E+01
6	1,601E+01	1,939E+01	2,653E+00	1,132E+01	1,368E+01
7	3,623E+01	4,559E+01	3,010E+00	1,521E+01	8,200E+00
8	8,691E+01	1,135E+02	3,328E+00	1,924E+01	4,474E+00
9	2,198E+02	2,976E+02	3,630E+00	2,366E+01	2,238E+00
10	5,834E+02	8,164E+02	3,908E+00	2,821E+01	1,039E+00
11	1,620E+03	2,336E+03	4,179E+00	3,320E+01	4,531E-01
12	4,685E+03	6,944E+03	4,443E+00	3,860E+01	1,908E-01
13	1,408E+04	2,140E+04	4,694E+00	4,403E+01	8,312E-02
14	4,382E+04	6,818E+04	4,937E+00	4,993E+01	4,182E-02
15	1,411E+05	2,242E+05	5,161E+00	5,542E+01	2,670E-02
16	4,684E+05	7,597E+05	5,399E+00	6,205E+01	2,121E-02
17	1,601E+06	2,646E+06	5,616E+00	6,771E+01	1,891E-02

Таблица II.1.2.2

 Z_3

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ_{max}
2	4,000000E+00	4,000000E+00	4,000000E+00	4.0000	1,235E+01	0,000E+00
3	8,000000E+00	1,200000E+01	1,600000E+01	16.0000	3,046E-02	0,000E+00
4	2,000000E+01	2,800000E+01	3,600000E+01	48.0000	2,830E-04	0,000E+00
5	4,000000E+01	6,400000E+01	8,400000E+01	160.0000	6,667E-07	1,600E+01
6	9,200000E+01	1,480000E+02	2,100000E+02	480.0000	1,000E-06	4,800E+01
7	2,160000E+02	3,720000E+02	5,440000E+02	1344.0000	N _{tol}	9,600E+01
8	5,440000E+02	9,630000E+02	1,456000E+03	4968.0000	N _{tol}	9,680E+02

Продолжение таблицы II.1.2.2

9	1,430000E+03	2,613000E+03	4,062000E+03	13744.0000	N_{tol}	2,720E+03
10	3,924000E+03	7,360000E+03	1,168000E+04	44118.0000	N_{tol}	6,966E+03
11	1,122000E+04	2,211847E+04	3,506600E+04	140741.0000	N_{tol}	2,446E+04
12	3,330200E+04	6,544000E+04	1,084320E+05	619536.0000	N_{tol}	2,453E+05
13	1,024800E+05	2,051760E+05	3,451280E+05	1496521.0000	N_{tol}	2,243E+05
14	3,255900E+05	6,622020E+05	1,129945E+06	5598044.0000	N_{tol}	7,828E+05
15	1,068950E+06	2,207574E+06	3,831435E+06	18312348.0000	N_{tol}	2,075E+06
16	3,614820E+06	7,570620E+06	1,327802E+07	70341640.0000	N_{tol}	4,998E+06
17	1,254708E+07	2,666160E+07	4,739445E+07	206852748.0000	N_{tol}	1,674E+07

Таблица II.1.3.1

 Z_4

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	2,797E+00	2,560E+00	8,106E-01	-1,574E-01	2,500E+01
3	6,109E+00	6,138E+00	1,464E+00	2,483E+00	1,879E+01
4	1,492E+01	1,606E+01	1,995E+00	5,636E+00	1,181E+01
5	3,982E+01	4,557E+01	2,438E+00	9,176E+00	6,379E+00
6	1,147E+02	1,387E+02	2,824E+00	1,303E+01	3,017E+00
7	3,537E+02	4,492E+02	3,172E+00	1,719E+01	1,275E+00
8	1,158E+03	1,536E+03	3,495E+00	2,168E+01	4,921E-01
9	4,006E+03	5,518E+03	3,796E+00	2,640E+01	1,796E-01
10	1,456E+04	2,075E+04	4,087E+00	3,145E+01	6,801E-02
11	5,532E+04	8,129E+04	4,369E+00	3,709E+01	3,114E-02
12	2,191E+05	3,310E+05	4,638E+00	4,281E+01	1,966E-02
13	9,015E+05	1,397E+06	4,902E+00	4,907E+01	1,607E-02
14	3,843E+06	6,096E+06	5,148E+00	5,479E+01	1,486E-02
15	1,694E+07	2,745E+07	5,410E+00	6,316E+01	1,424E-02

Таблица II.1.3.2

 Z_4

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{max}$	N_{max}	δ_{max}
2	9,000000E+00	9,000000E+00	9,000000E+00	9.0000	5,469E+00	0,000E+00
3	2,700000E+01	3,600000E+01	4,500000E+01	54.0000	2,255E-03	0,000E+00
4	7,200000E+01	1,080000E+02	1,390000E+02	243.0000	5,333E-06	0,000E+00
5	2,160000E+02	3,360000E+02	4,620000E+02	972.0000	3,333E-07	6,300E+01
6	6,600000E+02	1,098000E+03	1,580000E+03	4050.0000	6,667E-07	5,880E+02
7	2,151000E+03	3,738000E+03	5,564000E+03	16011.0000	N_{tol}	1,305E+03
8	7,373000E+03	1,329300E+04	2,047500E+04	81609.0000	N_{tol}	1,764E+04
9	2,651400E+04	4,933500E+04	7,764800E+04	273205.0000	N_{tol}	1,080E+04

Продолжение таблицы II.1.3.2

10	9,971100E+04	1,901040E+05	3,067580E+05	972927.0000	N _{tol}	1,157E+05
11	3,899700E+05	7,617120E+05	1,253016E+06	7418196.0000	N _{tol}	2,818E+06
12	1,585200E+06	3,159740E+06	5,311355E+06	26009382.0000	N _{tol}	5,779E+06
13	6,671300E+06	1,356381E+07	2,322707E+07	112926796.0000	N _{tol}	4,670E+06
14	2,906200E+07	6,002685E+07	1,038589E+08	511128738.0000	N _{tol}	9,934E+07
15	1,304670E+08	2,735930E+08	4,793940E+08	2419051035.0000	N _{tol}	–

Таблица II.1.4.1

 Z_5

n	μ	σ	a_x	e_x	N _{zeroes}
2	4,742E+00	4,184E+00	8,702E-01	1,048E-02	1,808E+01
3	1,307E+01	1,286E+01	1,537E+00	2,802E+00	1,171E+01
4	4,017E+01	4,292E+01	2,059E+00	6,046E+00	6,089E+00
5	1,352E+02	1,548E+02	2,497E+00	9,704E+00	2,638E+00
6	4,918E+02	5,977E+02	2,879E+00	1,363E+01	9,837E-01
7	1,917E+03	2,450E+03	3,231E+00	1,801E+01	3,258E-01
8	7,940E+03	1,060E+04	3,557E+00	2,265E+01	1,025E-01
9	3,473E+04	4,820E+04	3,869E+00	2,768E+01	3,630E-02
10	1,596E+05	2,292E+05	4,164E+00	3,304E+01	1,871E-02
11	7,673E+05	1,136E+06	4,447E+00	3,862E+01	1,409E-02
12	3,844E+06	5,854E+06	4,720E+00	4,449E+01	1,270E-02
13	2,001E+07	3,126E+07	4,991E+00	5,133E+01	1,205E-02
14	1,079E+08	1,725E+08	5,229E+00	5,675E+01	1,159E-02
15	6,015E+08	9,828E+08	5,488E+00	6,410E+01	1,111E-02

Таблица II.1.4.2

 Z_5

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ_{max}
2	1,600000E+01	1,600000E+01	1,600000E+01	16.0000	2,879E+00	0,000E+00
3	5,600000E+01	7,500000E+01	9,600000E+01	128.0000	3,040E-04	0,000E+00
4	1,960000E+02	2,920000E+02	3,840000E+02	704.0000	6,667E-07	4,800E+01
5	7,280000E+02	1,160778E+03	1,604000E+03	3504.0000	N _{tol}	1,120E+02
6	2,848000E+03	4,780000E+03	6,912000E+03	16816.0000	N _{tol}	1,298E+03
7	1,173200E+04	2,056200E+04	3,078600E+04	90528.0000	N _{tol}	1,089E+04
8	5,088800E+04	9,234000E+04	1,428390E+05	468006.0000	N _{tol}	1,827E+04
9	2,316100E+05	4,329500E+05	6,886550E+05	2592810.0000	N _{tol}	4,709E+05
10	1,101475E+06	2,112608E+06	3,443845E+06	14346772.0000	N _{tol}	1,836E+06
11	5,451600E+06	1,069952E+07	1,773460E+07	73989163.0000	N _{tol}	5,911E+06
12	2,803080E+07	5,621360E+07	9,476013E+07	406407000.0000	N _{tol}	7,729E+07

Продолжение таблицы II.1.4.2

13	1,492740E+08	3,042750E+08	5,237880E+08	2291064385.0000	N _{tol}	3,583E+08
14	8,217300E+08	1,706310E+09	2,962200E+09	12294410924.0000	N _{tol}	1,182E+09
15	4,666800E+09	9,853125E+09	1,737368E+10	73995446244.0000	N _{tol}	–

Таблица II.1.5.1

 Z_6

n	μ	σ	a_x	e_x	N _{zeroes}
2	7,174E+00	6,201E+00	9,045E-01	9,742E-02	1,312E+01
3	2,381E+01	2,322E+01	1,573E+00	2,959E+00	7,108E+00
4	8,818E+01	9,403E+01	2,087E+00	6,246E+00	3,015E+00
5	3,580E+02	4,107E+02	2,523E+00	9,945E+00	1,061E+00
6	1,572E+03	1,916E+03	2,909E+00	1,402E+01	3,254E-01
7	7,398E+03	9,491E+03	3,263E+00	1,843E+01	9,342E-02
8	3,700E+04	4,962E+04	3,596E+00	2,330E+01	3,077E-02
9	1,955E+05	2,724E+05	3,907E+00	2,840E+01	1,551E-02
10	1,085E+06	1,565E+06	4,200E+00	3,367E+01	1,197E-02
11	6,298E+06	9,364E+06	4,484E+00	3,945E+01	1,089E-02
12	3,811E+07	5,825E+07	4,758E+00	4,541E+01	1,035E-02
13	2,395E+08	3,757E+08	5,029E+00	5,192E+01	9,962E-03

Таблица II.1.5.2

 Z_6

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ_{max}
2	2,500000E+01	2,500000E+01	2,500000E+01	25.0000	1,697E+00	0,000E+00
3	1,000000E+02	1,370000E+02	1,750000E+02	250.0000	5,700E-05	0,000E+00
4	4,340000E+02	6,460000E+02	8,500000E+02	1650.0000	N _{tol}	1,500E+02
5	1,935000E+03	3,094000E+03	4,300000E+03	9115.0000	N _{tol}	1,850E+02
6	9,132000E+03	1,537600E+04	2,240000E+04	54580.0000	N _{tol}	3,556E+03
7	4,546800E+04	7,995200E+04	1,204850E+05	336304.0000	N _{tol}	2,246E+04
8	2,381460E+05	4,341280E+05	6,724200E+05	2359985.0000	N _{tol}	3,869E+05
9	1,308720E+06	2,457455E+06	3,905370E+06	15761763.0000	N _{tol}	2,608E+06
10	7,513940E+06	1,445885E+07	2,362122E+07	82239200.0000	N _{tol}	6,175E+06
11	4,490500E+07	8,841030E+07	1,473955E+08	686940600.0000	N _{tol}	1,803E+08
12	2,789730E+08	5,611600E+08	9,474400E+08	4551457508.0000	N _{tol}	1,261E+09
13	1,793020E+09	3,672760E+09	6,324100E+09	27511493341.0000	N _{tol}	–

Таблица II.1.6.1

 Z_7

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,008E+01	8,623E+00	9,205E-01	1,417E-01	1,062E+01
3	3,913E+01	3,801E+01	1,588E+00	3,036E+00	5,229E+00
4	1,696E+02	1,808E+02	2,103E+00	6,363E+00	1,951E+00
5	8,057E+02	9,256E+02	2,538E+00	1,011E+01	5,895E-01
6	4,143E+03	5,059E+03	2,923E+00	1,417E+01	1,540E-01
7	2,283E+04	2,935E+04	3,278E+00	1,864E+01	4,101E-02
8	1,338E+05	1,797E+05	3,611E+00	2,349E+01	1,620E-02
9	8,277E+05	1,156E+06	3,924E+00	2,862E+01	1,096E-02
10	5,379E+06	7,776E+06	4,222E+00	3,401E+01	9,602E-03
11	3,657E+07	5,452E+07	4,514E+00	4,006E+01	9,137E-03
12	2,591E+08	3,970E+08	4,784E+00	4,632E+01	8,832E-03
13	1,908E+09	3,000E+09	5,059E+00	5,276E+01	8,422E-03

Таблица II.1.6.2

 Z_7

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	3,600000E+01	3,600000E+01	3,600000E+01	36.0000	1,083E+00	0,000E+00
3	1,680000E+02	2,250000E+02	2,880000E+02	432.0000	1,333E-05	0,000E+00
4	8,360000E+02	1,248000E+03	1,650000E+03	3456.0000	N_{tol}	5,160E+02
5	4,366000E+03	6,990000E+03	9,705000E+03	25920.0000	N_{tol}	4,860E+03
6	2,411500E+04	4,069200E+04	5,920500E+04	156208.0000	N_{tol}	1,310E+04
7	1,406400E+05	2,476400E+05	3,733650E+05	1074720.0000	N_{tol}	9,682E+04
8	8,631500E+05	1,575431E+06	2,447190E+06	7852520.0000	N_{tol}	7,541E+05
9	5,553730E+06	1,044536E+07	1,658362E+07	57636230.0000	N_{tol}	3,356E+06
10	3,733900E+07	7,199360E+07	1,178157E+08	399161429.0000	N_{tol}	4,775E+07
11	2,612610E+08	5,165050E+08	8,596096E+08	3146770656.0000	N_{tol}	2,666E+08
12	1,899352E+09	3,828040E+09	6,482343E+09	41234409549.0000	N_{tol}	1,710E+10
13	1,431213E+10	2,939202E+10	5,062576E+10	211659028544.0000	N_{tol}	1,158E+10

Таблица II.1.7.1

 Z_8

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,348E+01	1,144E+01	9,322E-01	1,712E-01	8,207E+00
3	5,985E+01	5,799E+01	1,598E+00	3,082E+00	3,475E+00
4	2,969E+02	3,166E+02	2,111E+00	6,427E+00	1,109E+00
5	1,616E+03	1,858E+03	2,546E+00	1,018E+01	2,905E-01
6	9,522E+03	1,164E+04	2,935E+00	1,432E+01	6,930E-02
7	6,012E+04	7,739E+04	3,290E+00	1,881E+01	2,054E-02
8	4,035E+05	5,429E+05	3,624E+00	2,374E+01	1,105E-02

Продолжение таблицы II.1.7.1

9	2,860E+06	4,000E+06	3,939E+00	2,896E+01	8,947E-03
10	2,130E+07	3,083E+07	4,240E+00	3,449E+01	8,405E-03
11	1,659E+08	2,476E+08	4,524E+00	4,023E+01	7,997E-03
12	1,347E+09	2,067E+09	4,819E+00	4,767E+01	7,847E-03

Таблица II.1.7.2

 Z_8

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ_{max}
2	4,500000E+01	4,900000E+01	4,900000E+01	49.0000	7,326E-01	0,000E+00
3	2,550000E+02	3,440000E+02	4,410000E+02	686.0000	3,667E-06	0,000E+00
4	1,464000E+03	2,190000E+03	2,892000E+03	5341.0000	N _{tol}	1,920E+02
5	8,768000E+03	1,405600E+04	1,957800E+04	43155.0000	N _{tol}	2,869E+03
6	5,549100E+04	9,392000E+04	1,368250E+05	357882.0000	N _{tol}	3,948E+04
7	3,708480E+05	6,540480E+05	9,873090E+05	3004866.0000	N _{tol}	4,252E+05
8	2,607936E+06	4,759992E+06	7,402344E+06	27645126.0000	N _{tol}	3,546E+06
9	1,921450E+07	3,617444E+07	5,768669E+07	237899000.0000	N _{tol}	6,397E+07
10	1,480500E+08	2,858634E+08	4,675474E+08	1764974773.0000	N _{tol}	3,509E+08
11	1,186664E+09	2,346540E+09	3,897285E+09	14484289977.0000	N _{tol}	5,275E+08
12	9,891600E+09	1,994070E+10	3,387540E+10	190767187920.0000	N _{tol}	–

Таблица II.1.8.1

 Z_9

n	μ	σ	a_x	e_x	N _{zeroes}
2	1,735E+01	1,465E+01	9,381E-01	1,886E-01	6,844E+00
3	8,676E+01	8,397E+01	1,604E+00	3,114E+00	2,655E+00
4	4,849E+02	5,170E+02	2,115E+00	6,458E+00	7,648E-01
5	2,974E+03	3,421E+03	2,551E+00	1,024E+01	1,786E-01
6	1,974E+04	2,416E+04	2,939E+00	1,436E+01	4,020E-02
7	1,405E+05	1,810E+05	3,296E+00	1,889E+01	1,353E-02
8	1,063E+06	1,431E+06	3,634E+00	2,384E+01	8,880E-03
9	8,489E+06	1,189E+07	3,949E+00	2,913E+01	7,875E-03
10	7,123E+07	1,032E+08	4,248E+00	3,450E+01	7,438E-03
11	6,253E+08	9,343E+08	4,537E+00	4,056E+01	7,036E-03
12	5,720E+09	8,789E+09	4,813E+00	4,670E+01	6,872E-03

Таблица II.1.8.2

 Z_9

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	5,700000E+01	6,400000E+01	6,400000E+01	64.0000	5,182E-01	0,000E+00
3	3,720000E+02	5,040000E+02	6,370000E+02	1024.0000	1,000E-06	6,400E+01
4	2,390000E+03	3,581000E+03	4,734000E+03	9480.0000	N _{tol}	9,040E+02
5	1,614400E+04	2,589400E+04	3,617600E+04	86240.0000	N _{tol}	8,818E+03
6	1,151850E+05	1,949340E+05	2,836260E+05	719060.0000	N _{tol}	5,199E+04
7	8,668080E+05	1,530802E+06	2,308941E+06	6840102.0000	N _{tol}	1,043E+06
8	6,873480E+06	1,257948E+07	1,955227E+07	62043500.0000	N _{tol}	8,228E+06
9	5,710000E+07	1,076192E+08	1,716809E+08	743916328.0000	N _{tol}	1,832E+08
10	4,955536E+08	9,574385E+08	1,570543E+09	6643513712.0000	N _{tol}	1,869E+09
11	4,477890E+09	8,858601E+09	1,480920E+10	58717123564.0000	N _{tol}	6,384E+09
12	4,203259E+10	8,481947E+10	1,443114E+11	655255293118.0000	N _{tol}	–

Таблица II.1.9.1

 Z_{10}

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	2,170E+01	1,826E+01	9,424E-01	2,005E-01	5,701E+00
3	1,207E+02	1,167E+02	1,607E+00	3,130E+00	1,994E+00
4	7,502E+02	7,999E+02	2,120E+00	6,506E+00	5,103E-01
5	5,117E+03	5,888E+03	2,554E+00	1,027E+01	1,077E-01
6	3,781E+04	4,628E+04	2,946E+00	1,447E+01	2,418E-02
7	2,992E+05	3,858E+05	3,305E+00	1,901E+01	1,006E-02
8	2,518E+06	3,394E+06	3,637E+00	2,388E+01	7,612E-03
9	2,237E+07	3,135E+07	3,961E+00	2,934E+01	6,965E-03
10	2,089E+08	3,029E+08	4,261E+00	3,490E+01	6,687E-03
11	2,040E+09	3,052E+09	4,563E+00	4,165E+01	6,436E-03
12	2,076E+10	3,192E+10	4,832E+00	4,728E+01	6,126E-03

Таблица II.1.9.2

 Z_{10}

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	7,200000E+01	8,100000E+01	8,100000E+01	81.0000	3,800E-01	0,000E+00
3	5,150000E+02	7,020000E+02	8,890000E+02	1458.0000	1,000E-06	8,100E+01
4	3,699000E+03	5,546000E+03	7,343000E+03	14940.0000	N _{tol}	1,492E+03
5	2,779000E+04	4,461000E+04	6,232400E+04	136600.0000	N _{tol}	5,006E+03
6	2,206300E+05	3,735750E+05	5,465420E+05	1870544.0000	N _{tol}	6,168E+05
7	1,849035E+06	3,265320E+06	4,937800E+06	15811578.0000	N _{tol}	2,221E+06
8	1,630380E+07	2,982240E+07	4,647940E+07	172546235.0000	N _{tol}	4,733E+07

Продолжение таблицы II.1.9.2

9	1,505775E+08	2,841660E+08	4,555340E+08	1842131362.0000	N_{tol}	4,575E+08
10	1,453700E+09	2,814720E+09	4,614700E+09	17411585552.0000	N_{tol}	9,825E+08
11	1,462320E+10	2,895660E+10	4,830780E+10	223349125195.0000	N_{tol}	2,713E+10
12	1,462320E+10	3,087550E+11	4,830820E+10	2627992909916.0000	N_{tol}	8,070E+11

Таблица II.1.10.1

 Z_{11}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	2,654E+01	2,227E+01	9,449E-01	2,086E-01	4,911E+00
3	1,624E+02	1,569E+02	1,609E+00	3,143E+00	1,591E+00
4	1,111E+03	1,185E+03	2,121E+00	6,509E+00	3,725E-01
5	8,347E+03	9,608E+03	2,558E+00	1,031E+01	7,223E-02
6	6,790E+04	8,315E+04	2,948E+00	1,448E+01	1,685E-02
7	5,917E+05	7,631E+05	3,306E+00	1,900E+01	8,273E-03
8	5,482E+06	7,393E+06	3,643E+00	2,395E+01	6,828E-03
9	5,362E+07	7,517E+07	3,959E+00	2,921E+01	6,326E-03
10	5,511E+08	7,997E+08	4,258E+00	3,471E+01	5,980E-03
11	5,926E+09	8,870E+09	4,562E+00	4,120E+01	5,674E-03

Таблица II.1.10.2

 Z_{11}

n	$det_{0,99}$	$det_{0,999}$	$det_{0,9999}$	det_{max}	N_{max}	δ_{max}
2	9,000000E+01	9,181818E+01	1,000000E+02	100.0000	2,873E-01	0,000E+00
3	6,960000E+02	9,420000E+02	1,197000E+03	1900.0000	2,333E-06	0,000E+00
4	5,483000E+03	8,216000E+03	1,085400E+04	21600.0000	N_{tol}	2,120E+03
5	4,535500E+04	7,292400E+04	1,016400E+05	293286.0000	N_{tol}	7,697E+04
6	3,962580E+05	6,709040E+05	9,809830E+05	2490162.0000	N_{tol}	1,980E+05
7	3,656160E+06	6,459420E+06	9,779040E+06	27856266.0000	N_{tol}	1,086E+06
8	3,550750E+07	6,499740E+07	1,014226E+08	322938708.0000	N_{tol}	2,826E+07
9	3,610440E+08	6,819480E+08	1,088045E+09	4228952412.0000	N_{tol}	5,289E+08
10	3,838290E+09	7,439880E+09	1,212857E+10	46310853282.0000	N_{tol}	1,536E+09
11	4,251090E+10	8,422530E+10	1,405479E+11	538331537207.0000	N_{tol}	—

Таблица II.1.11.1

 Z_{12}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	3,186E+01	2,667E+01	9,468E-01	2,145E-01	4,090E+00
3	2,128E+02	2,055E+02	1,611E+00	3,156E+00	1,195E+00
4	1,589E+03	1,695E+03	2,123E+00	6,529E+00	2,536E-01
5	1,303E+04	1,500E+04	2,559E+00	1,031E+01	4,706E-02
6	1,157E+05	1,417E+05	2,949E+00	1,448E+01	1,211E-02
7	1,101E+06	1,420E+06	3,310E+00	1,908E+01	7,048E-03
8	1,113E+07	1,502E+07	3,648E+00	2,412E+01	6,027E-03
9	1,189E+08	1,668E+08	3,960E+00	2,919E+01	5,760E-03
10	1,334E+09	1,936E+09	4,270E+00	3,504E+01	5,584E-03
11	1,565E+10	2,344E+10	4,572E+00	4,155E+01	5,255E-03

Таблица II.1.11.2

 Z_{12}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{max}$	N_{max}	δ_{max}
2	1,090000E+02	1,210000E+02	1,210000E+02	121.0000	2,217E-01	0,000E+00
3	9,100000E+02	1,234000E+03	1,564000E+03	2541.0000	6,667E-07	1,100E+02
4	7,840000E+03	1,176000E+04	1,557000E+04	29733.0000	N_{tol}	2,063E+03
5	7,082000E+04	1,137440E+05	1,585480E+05	372387.0000	N_{tol}	6,790E+04
6	6,758570E+05	1,144668E+06	1,666932E+06	4414534.0000	N_{tol}	2,637E+05
7	6,806160E+06	1,203224E+07	1,823536E+07	50560925.0000	N_{tol}	6,465E+06
8	7,217300E+07	1,321524E+08	2,060104E+08	775655062.0000	N_{tol}	1,559E+08
9	8,011740E+08	1,513457E+09	2,412740E+09	9341062305.0000	N_{tol}	2,060E+09
10	9,293310E+09	1,802606E+10	2,950454E+10	111969895863.0000	N_{tol}	9,162E+09
11	1,122880E+11	2,227728E+11	3,718656E+11	1685482982407.0000	N_{tol}	5,191E+10

Таблица II.1.12.1

 Z_{13}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	3,765E+01	3,147E+01	9,479E-01	2,188E-01	3,701E+00
3	2,725E+02	2,631E+02	1,612E+00	3,161E+00	1,033E+00
4	2,206E+03	2,353E+03	2,125E+00	6,548E+00	2,046E-01
5	1,961E+04	2,258E+04	2,560E+00	1,032E+01	3,543E-02
6	1,887E+05	2,312E+05	2,955E+00	1,458E+01	9,738E-03
7	1,946E+06	2,512E+06	3,317E+00	1,922E+01	6,267E-03
8	2,133E+07	2,878E+07	3,646E+00	2,401E+01	5,626E-03
9	2,469E+08	3,465E+08	3,968E+00	2,939E+01	5,342E-03
10	3,003E+09	4,361E+09	4,272E+00	3,516E+01	5,132E-03

Таблица II.1.12.2

 Z_{13}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	1,260000E+02	1,440000E+02	1,440000E+02	144.0000	1,753E-01	0,000E+00
3	1,166000E+03	1,584000E+03	2,002000E+03	3456.0000	N_{tol}	2,880E+02
4	1,088600E+04	1,635200E+04	2,160300E+04	41184.0000	N_{tol}	6,380E+02
5	1,066330E+05	1,714000E+05	2,387610E+05	533902.0000	N_{tol}	4,717E+04
6	1,102416E+06	1,870253E+06	2,724678E+06	8981328.0000	N_{tol}	2,550E+06
7	1,203982E+07	2,129966E+07	3,228049E+07	96598812.0000	N_{tol}	1,500E+07
8	1,382310E+08	2,529324E+08	3,959370E+08	1250634002.0000	N_{tol}	1,396E+08
9	1,664671E+09	3,144698E+09	5,024019E+09	17021924269.0000	N_{tol}	3,715E+08
10	2,092320E+10	4,057230E+10	6,642660E+10	250454341467.0000	N_{tol}	4,219E+09

Таблица II.1.13.1

 Z_{14}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	4,393E+01	3,667E+01	9,486E-01	2,215E-01	3,150E+00
3	3,425E+02	3,305E+02	1,613E+00	3,166E+00	8,007E-01
4	2,988E+03	3,186E+03	2,126E+00	6,551E+00	1,464E-01
5	2,861E+04	3,295E+04	2,564E+00	1,037E+01	2,504E-02
6	2,966E+05	3,635E+05	2,952E+00	1,453E+01	7,905E-03
7	3,295E+06	4,254E+06	3,314E+00	1,915E+01	5,700E-03
8	3,891E+07	5,253E+07	3,657E+00	2,426E+01	5,245E-03
9	4,854E+08	6,812E+08	3,967E+00	2,937E+01	5,002E-03
10	6,359E+09	9,234E+09	4,264E+00	3,481E+01	4,678E-03

Таблица II.1.13.2

 Z_{14}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	1,450000E+02	1,690000E+02	1,690000E+02	169.0000	1,406E-01	0,000E+00
3	1,464000E+03	1,992000E+03	2,514000E+03	4225.0000	N_{tol}	1,690E+02
4	1,474400E+04	2,213500E+04	2,928300E+04	58416.0000	N_{tol}	5,604E+03
5	1,555950E+05	2,501580E+05	3,495800E+05	761295.0000	N_{tol}	5,682E+04
6	1,733160E+06	2,936784E+06	4,281790E+06	10699184.0000	N_{tol}	5,743E+05
7	2,037660E+07	3,605443E+07	5,465701E+07	161139139.0000	N_{tol}	1,318E+07
8	2,522400E+08	4,627986E+08	7,210665E+08	2377094172.0000	N_{tol}	1,857E+08
9	3,270646E+09	6,170762E+09	9,888528E+09	30564332859.0000	N_{tol}	3,297E+08
10	4,432768E+10	8,593472E+10	1,401611E+11	466728374472.0000	N_{tol}	1,411E+10

Таблица II.1.14.1

 Z_{15}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	5,069E+01	4,226E+01	9,494E-01	2,249E-01	2,811E+00
3	4,236E+02	4,086E+02	1,613E+00	3,169E+00	6,753E-01
4	3,960E+03	4,223E+03	2,127E+00	6,562E+00	1,167E-01
5	4,063E+04	4,680E+04	2,563E+00	1,036E+01	1,953E-02
6	4,516E+05	5,535E+05	2,955E+00	1,458E+01	6,956E-03
7	5,377E+06	6,942E+06	3,315E+00	1,919E+01	5,282E-03
8	6,806E+07	9,190E+07	3,653E+00	2,412E+01	4,834E-03
9	9,099E+08	1,277E+09	3,971E+00	2,945E+01	4,606E-03
10	1,278E+10	1,857E+10	4,283E+00	3,546E+01	4,490E-03

Таблица II.1.14.2

 Z_{15}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	1,690000E+02	1,960000E+02	1,960000E+02	196.0000	1,149E-01	0,000E+00
3	1,812000E+03	2,464000E+03	3,114000E+03	5292.0000	N_{tol}	1,960E+02
4	1,954500E+04	2,934600E+04	3,886000E+04	73724.0000	N_{tol}	4,468E+03
5	2,210130E+05	3,550690E+05	4,958360E+05	1539512.0000	N_{tol}	5,434E+05
6	2,639338E+06	4,479488E+06	6,524570E+06	19001947.0000	N_{tol}	2,479E+06
7	3,328680E+07	5,880513E+07	8,910640E+07	260646183.0000	N_{tol}	3,197E+07
8	4,415308E+08	8,096806E+08	1,263745E+09	5118482130.0000	N_{tol}	1,486E+09
9	6,136416E+09	1,157358E+10	1,860443E+10	61731640690.0000	N_{tol}	4,393E+09
10	8,911290E+10	1,726602E+11	2,827617E+11	1072515156894.0000	N_{tol}	1,998E+11

Таблица II.1.15.1

 Z_{16}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	5,794E+01	4,825E+01	9,495E-01	2,259E-01	2,539E+00
3	5,164E+02	4,981E+02	1,613E+00	3,172E+00	5,728E-01
4	5,150E+03	5,492E+03	2,126E+00	6,554E+00	9,185E-02
5	5,641E+04	6,497E+04	2,565E+00	1,038E+01	1,529E-02
6	6,688E+05	8,198E+05	2,955E+00	1,457E+01	6,105E-03
7	8,498E+06	1,097E+07	3,318E+00	1,922E+01	4,913E-03
8	1,148E+08	1,549E+08	3,655E+00	2,423E+01	4,538E-03
9	1,637E+09	2,297E+09	3,970E+00	2,950E+01	4,362E-03
10	2,453E+10	3,565E+10	4,285E+00	3,544E+01	4,215E-03

Таблица II.1.15.2

 Z_{16}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	1,950000E+02	2,230000E+02	2,250000E+02	225.0000	9,441E-02	0,000E+00
3	2,208000E+03	3,003000E+03	3,789000E+03	6105.0000	Ntol	1,950E+02
4	2,541900E+04	3,814000E+04	5,055600E+04	93115.0000	Ntol	6,085E+03
5	3,068000E+05	4,939760E+05	6,896100E+05	1809702.0000	Ntol	2,031E+05
6	3,911115E+06	6,628089E+06	9,702040E+06	24568118.0000	Ntol	1,117E+06
7	5,260762E+07	9,311153E+07	1,410460E+08	567825303.0000	Ntol	1,763E+08
8	7,441632E+08	1,363220E+09	2,133750E+09	9136874802.0000	Ntol	2,207E+09
9	1,103667E+10	2,082709E+10	3,336208E+10	127395770113.0000	Ntol	2,374E+10
10	1,710666E+11	3,321617E+11	5,452410E+11	2314936576739.0000	Ntol	3,203E+11

Таблица II.1.16.1

 Z_{17}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	6,565E+01	5,464E+01	9,499E-01	2,279E-01	2,302E+00
3	6,219E+02	5,997E+02	1,614E+00	3,176E+00	4,942E-01
4	6,592E+03	7,031E+03	2,129E+00	6,576E+00	7,536E-02
5	7,672E+04	8,835E+04	2,563E+00	1,036E+01	1,257E-02
6	9,666E+05	1,185E+06	2,956E+00	1,458E+01	5,534E-03
7	1,305E+07	1,686E+07	3,318E+00	1,924E+01	4,631E-03
8	1,874E+08	2,530E+08	3,657E+00	2,426E+01	4,310E-03
9	2,840E+09	3,986E+09	3,968E+00	2,938E+01	4,155E-03
10	4,523E+10	6,574E+10	4,282E+00	3,535E+01	3,931E-03

Таблица II.1.16.2

 Z_{17}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	2,200000E+02	2,510000E+02	2,560000E+02	256.0000	7,928E-02	0,000E+00
3	2,658000E+03	3,614000E+03	4,575000E+03	7456.0000	N_{tol}	2,560E+02
4	3,254400E+04	4,892000E+04	6,468600E+04	123210.0000	N_{tol}	5,994E+03
5	4,171018E+05	6,706960E+05	9,359460E+05	2132979.0000	N_{tol}	9,640E+04
6	5,651688E+06	9,581130E+06	1,398501E+07	39566544.0000	N_{tol}	6,043E+06
7	8,080416E+07	1,428424E+08	2,164854E+08	806276625.0000	N_{tol}	1,579E+08
8	1,215549E+09	2,228818E+09	3,482491E+09	14308035488.0000	N_{tol}	4,059E+09
9	1,915140E+10	3,615756E+10	5,790596E+10	191932832952.0000	N_{tol}	2,715E+10
10	3,156000E+11	6,116500E+11	1,003950E+12	4116887366269.0000	N_{tol}	7,424E+11

Таблица II.1.17.1

 Z_{18}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	7,386E+01	6,142E+01	9,501E-01	2,290E-01	2,021E+00
3	7,409E+02	7,143E+02	1,614E+00	3,177E+00	4,048E-01
4	8,318E+03	8,870E+03	2,127E+00	6,565E+00	5,848E-02
5	1,025E+05	1,181E+05	2,564E+00	1,037E+01	1,020E-02
6	1,368E+06	1,677E+06	2,959E+00	1,464E+01	5,075E-03
7	1,956E+07	2,526E+07	3,320E+00	1,926E+01	4,390E-03
8	2,974E+08	4,016E+08	3,657E+00	2,422E+01	4,050E-03
9	4,773E+09	6,703E+09	3,978E+00	2,966E+01	3,862E-03
10	8,049E+10	1,170E+11	4,286E+00	3,554E+01	3,677E-03

Таблица II.1.17.2

 Z_{18}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	2,460000E+02	2,810000E+02	2,890000E+02	289.0000	6,660E-02	0,000E+00
3	3,166000E+03	4,312000E+03	5,445000E+03	8976.0000	N_{tol}	2,550E+02
4	4,105200E+04	6,165000E+04	8,158400E+04	157510.0000	N_{tol}	1,025E+04
5	5,573700E+05	8,970900E+05	1,250598E+06	2839266.0000	N_{tol}	1,361E+05
6	7,997778E+06	1,358068E+07	1,984610E+07	55157577.0000	N_{tol}	6,391E+06
7	1,210440E+08	2,144953E+08	3,251067E+08	1146724710.0000	N_{tol}	2,284E+08
8	1,928317E+09	3,535049E+09	5,514135E+09	17568420985.0000	N_{tol}	1,817E+08
9	3,219934E+10	6,082294E+10	9,765060E+10	354347090472.0000	N_{tol}	3,212E+10
10	5,617000E+11	1,087850E+12	1,782979E+12	7571951725954.0000	N_{tol}	1,695E+12

Таблица II.1.18.1

 Z_{19}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	8,255E+01	6,860E+01	9,502E-01	2,299E-01	1,878E+00
3	8,741E+02	8,426E+02	1,614E+00	3,177E+00	3,629E-01
4	1,036E+04	1,105E+04	2,128E+00	6,574E+00	5,004E-02
5	1,348E+05	1,553E+05	2,565E+00	1,038E+01	8,936E-03
6	1,899E+06	2,329E+06	2,959E+00	1,463E+01	4,607E-03
7	2,867E+07	3,703E+07	3,321E+00	1,929E+01	4,083E-03
8	4,601E+08	6,214E+08	3,657E+00	2,423E+01	3,819E-03
9	7,798E+09	1,095E+10	3,977E+00	2,954E+01	3,665E-03
10	1,388E+11	2,018E+11	4,281E+00	3,562E+01	3,490E-03

Таблица II.1.18.2

 Z_{19}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	2,740000E+02	3,130000E+02	3,240000E+02	324.0000	5,662E-02	0,000E+00
3	3,735000E+03	5,082000E+03	6,421000E+03	11016.0000	Ntol	8,680E+02
4	5,111800E+04	7,684400E+04	1,017360E+05	203712.0000	Ntol	1,758E+04
5	7,331820E+05	1,178580E+06	1,645590E+06	3658118.0000	Ntol	1,807E+05
6	1,110191E+07	1,884602E+07	2,750182E+07	81558516.0000	Ntol	1,557E+07
7	1,775369E+08	3,140057E+08	4,757207E+08	1502181052.0000	Ntol	1,962E+08
8	2,984352E+09	5,468641E+09	8,550723E+09	29747287548.0000	Ntol	6,987E+09
9	5,260353E+10	9,928199E+10	1,598672E+11	515451259121.0000	Ntol	6,215E+09
10	9,683000E+11	1,875400E+12	3,078680E+12	18925090133256.0000	Ntol	5,625E+12

Таблица II.1.19.1

 Z_{20}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	9,171E+01	7,617E+01	9,501E-01	2,302E-01	1,670E+00
3	1,022E+03	9,855E+02	1,615E+00	3,180E+00	3,027E-01
4	1,276E+04	1,360E+04	2,128E+00	6,576E+00	4,005E-02
5	1,747E+05	2,013E+05	2,565E+00	1,037E+01	7,667E-03
6	2,592E+06	3,178E+06	2,958E+00	1,461E+01	4,361E-03
7	4,120E+07	5,321E+07	3,317E+00	1,920E+01	3,815E-03
8	6,959E+08	9,399E+08	3,654E+00	2,416E+01	3,657E-03
9	1,242E+10	1,744E+10	3,976E+00	2,951E+01	3,472E-03
10	2,328E+11	3,384E+11	4,279E+00	3,513E+01	3,293E-03

Таблица II.1.19.2

 Z_{20}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	3,060000E+02	3,460000E+02	3,610000E+02	361.0000	4,869E-02	0,000E+00
3	4,370000E+03	5,946000E+03	7,493000E+03	12654.0000	Ntol	7,410E+02
4	6,296400E+04	9,459700E+04	1,250250E+05	252222.0000	Ntol	2,153E+04
5	9,504950E+05	1,529048E+06	2,131848E+06	4554140.0000	Ntol	2,879E+04
6	1,516050E+07	2,569823E+07	3,752880E+07	105533736.0000	Ntol	1,406E+07
7	2,550886E+08	4,511090E+08	6,813757E+08	2184115024.0000	Ntol	2,908E+08
8	4,512404E+09	8,276517E+09	1,289887E+10	51098731224.0000	Ntol	8,861E+09
9	8,375500E+10	1,581313E+11	2,538302E+11	906691916989.0000	Ntol	1,039E+11
10	1,623750E+12	3,149000E+12	5,162378E+12	18676141171944.0000	Ntol	1,580E+12

Таблица II.1.20.1

 Z_{21}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,014E+02	8,415E+01	9,500E-01	2,305E-01	1,563E+00
3	1,187E+03	1,144E+03	1,615E+00	3,183E+00	2,739E-01
4	1,555E+04	1,658E+04	2,128E+00	6,573E+00	3,488E-02
5	2,236E+05	2,577E+05	2,568E+00	1,041E+01	6,802E-03
6	3,484E+06	4,272E+06	2,960E+00	1,463E+01	4,149E-03
7	5,814E+07	7,511E+07	3,320E+00	1,923E+01	3,669E-03
8	1,032E+09	1,393E+09	3,654E+00	2,413E+01	3,418E-03
9	1,933E+10	2,715E+10	3,979E+00	2,970E+01	3,306E-03
10	3,805E+11	5,531E+11	4,284E+00	3,542E+01	3,134E-03

Таблица II.1.20.2

 Z_{21}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	3,400000E+02	3,820000E+02	4,000000E+02	400.0000	4,217E-02	0,000E+00
3	5,071000E+03	6,900000E+03	8,720000E+03	14840.0000	Ntol	7,420E+02
4	7,674000E+04	1,152560E+05	1,525670E+05	308166.0000	Ntol	3,630E+04
5	1,216680E+06	1,958143E+06	2,733020E+06	6618592.0000	Ntol	5,252E+05
6	2,036834E+07	3,454455E+07	5,054124E+07	134420024.9999	Ntol	1,550E+07
7	3,600622E+08	6,371045E+08	9,663977E+08	3345115208.0000	Ntol	6,807E+08
8	6,689806E+09	1,226091E+10	1,916288E+10	61440957842.0000	Ntol	6,225E+09
9	1,304531E+11	2,463377E+11	3,947680E+11	1414764666132.0000	Ntol	1,949E+11
10	2,653000E+12	5,147750E+12	8,441640E+12	34476342357519.9999	Ntol	4,191E+12

Таблица II.1.21.1

 Z_{22}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,115E+02	9,252E+01	9,500E-01	2,312E-01	1,445E+00
3	1,367E+03	1,318E+03	1,615E+00	3,183E+00	2,407E-01
4	1,877E+04	2,002E+04	2,130E+00	6,593E+00	2,938E-02
5	2,829E+05	3,259E+05	2,568E+00	1,041E+01	6,024E-03
6	4,617E+06	5,663E+06	2,960E+00	1,465E+01	3,876E-03
7	8,075E+07	1,043E+08	3,319E+00	1,919E+01	3,512E-03
8	1,501E+09	2,027E+09	3,660E+00	2,433E+01	3,383E-03
9	2,946E+10	4,139E+10	3,982E+00	2,983E+01	3,165E-03
10	6,075E+11	8,832E+11	4,282E+00	3,526E+01	2,940E-03

Таблица II.1.21.2

 Z_{22}

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	3,720000E+02	4,200000E+02	4,410000E+02	441.0000	3,678E-02	0,000E+00
3	5,842000E+03	7,954000E+03	1,004400E+04	17199.0000	N _{tol}	1,179E+03
4	9,264900E+04	1,393280E+05	1,843880E+05	349296.0000	N _{tol}	1,903E+04
5	1,538797E+06	2,477514E+06	3,465579E+06	7850240.0000	N _{tol}	8,666E+05
6	2,700940E+07	4,578714E+07	6,694680E+07	207099701.9999	N _{tol}	3,393E+07
7	4,998936E+08	8,851690E+08	1,340586E+09	3863946029.9999	N _{tol}	5,205E+08
8	9,736927E+09	1,784059E+10	2,792597E+10	101188064511.0000	N _{tol}	1,601E+10
9	1,987740E+11	3,762390E+11	5,989110E+11	3470831821362.0000	N _{tol}	1,328E+12
10	4,240000E+12	8,219000E+12	1,350188E+13	60356391900668.0000	N _{tol}	1,138E+13

Таблица II.1.22.1

 Z_{23}

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	1,221E+02	1,013E+02	9,500E-01	2,313E-01	1,331E+00
3	1,566E+03	1,509E+03	1,615E+00	3,184E+00	2,140E-01
4	2,247E+04	2,397E+04	2,129E+00	6,579E+00	2,522E-02
5	3,542E+05	4,080E+05	2,567E+00	1,039E+01	5,460E-03
6	6,043E+06	7,412E+06	2,961E+00	1,464E+01	3,693E-03
7	1,105E+08	1,428E+08	3,322E+00	1,927E+01	3,373E-03
8	2,148E+09	2,901E+09	3,659E+00	2,427E+01	3,113E-03
9	4,407E+10	6,191E+10	3,980E+00	2,963E+01	3,071E-03
10	9,503E+11	1,382E+12	4,286E+00	3,546E+01	2,843E-03

Таблица II.1.22.2

 Z_{23}

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	4,060000E+02	4,620000E+02	4,840000E+02	484.0000	3,214E-02	0,000E+00
3	6,690000E+03	9,108000E+03	1,148400E+04	19382.0000	N _{tol}	4,400E+02
4	1,109500E+05	1,665500E+05	2,209080E+05	455712.0000	N _{tol}	4,307E+04
5	1,926464E+06	3,102280E+06	4,330784E+06	9820524.0000	N _{tol}	8,947E+05
6	3,533205E+07	5,999284E+07	8,771534E+07	284147791.0000	N _{tol}	6,053E+07
7	6,845774E+08	1,210634E+09	1,839608E+09	5528988885.9999	N _{tol}	2,327E+08
8	1,393592E+10	2,556049E+10	3,988511E+10	152775320939.0000	N _{tol}	3,350E+10
9	2,974644E+11	5,617350E+11	9,028320E+11	3103638719195.9999	N _{tol}	4,201E+11
10	6,631000E+12	1,285500E+13	2,104177E+13	75864937735701.0000	N _{tol}	5,164E+12

Таблица II.1.23.1

 Z_{24}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,332E+02	1,105E+02	9,500E-01	2,317E-01	1,206E+00
3	1,783E+03	1,717E+03	1,614E+00	3,181E+00	1,835E-01
4	2,670E+04	2,847E+04	2,129E+00	6,577E+00	2,115E-02
5	4,390E+05	5,058E+05	2,568E+00	1,042E+01	4,906E-03
6	7,819E+06	9,588E+06	2,959E+00	1,461E+01	3,614E-03
7	1,492E+08	1,928E+08	3,321E+00	1,921E+01	3,227E-03
8	3,025E+09	4,087E+09	3,658E+00	2,426E+01	3,073E-03
9	6,480E+10	9,102E+10	3,976E+00	2,953E+01	2,882E-03

Таблица II.1.23.2

 Z_{24}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	4,420000E+02	5,060000E+02	5,290000E+02	529.0000	2,840E-02	0,000E+00
3	7,613000E+03	1,036200E+04	1,307800E+04	22264.0000	Ntol	1,452E+03
4	1,317140E+05	1,980260E+05	2,616300E+05	500737.0000	Ntol	1,857E+04
5	2,387200E+06	3,843860E+06	5,373420E+06	13115413.0000	Ntol	1,885E+06
6	4,572300E+07	7,759344E+07	1,132807E+08	332135226.9999	Ntol	7,134E+07
7	9,240800E+08	1,636536E+09	2,473912E+09	7698937233.0000	Ntol	1,429E+09
8	1,963262E+10	3,597147E+10	5,626414E+10	184303925658.0000	Ntol	7,805E+09
9	4,372650E+11	8,258274E+11	1,327183E+12	4613528124444.9999	Ntol	8,647E+10

Таблица II.1.24.1

 Z_{25}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,448E+02	1,200E+02	9,499E-01	2,321E-01	1,152E+00
3	2,018E+03	1,944E+03	1,614E+00	3,180E+00	1,712E-01
4	3,149E+04	3,358E+04	2,130E+00	6,588E+00	1,918E-02
5	5,395E+05	6,216E+05	2,568E+00	1,042E+01	4,653E-03
6	1,001E+07	1,227E+07	2,959E+00	1,463E+01	3,343E-03
7	1,695E+08	2,293E+08	3,603E+00	2,296E+01	3,244E-03
8	4,203E+09	5,678E+09	3,661E+00	2,432E+01	2,966E-03
9	9,378E+10	1,317E+11	3,979E+00	2,960E+01	2,764E-03

Таблица II.1.24.2

 Z_{25}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	4,830000E+02	5,520000E+02	5,760000E+02	576.0000	2,501E-02	0,000E+00
3	8,624000E+03	1,174000E+04	1,480800E+04	24192.0000	Ntol	1,368E+03
4	1,554610E+05	2,335110E+05	3,088150E+05	592035.0000	Ntol	4,013E+04
5	2,934550E+06	4,726250E+06	6,606925E+06	14543361.0000	Ntol	4,565E+05
6	5,855197E+07	9,932220E+07	1,449210E+08	436895622.0000	Ntol	7,441E+07
7	6,842510E+08	2,179137E+09	3,301159E+09	12155839250.0000	Ntol	7,554E+09
8	2,726989E+10	4,996143E+10	7,831492E+10	231243814840.0000	Ntol	1,857E+10
9	6,330996E+11	1,196301E+12	1,915348E+12	6076628792396.0000	Ntol	1,267E+10

Таблица II.1.25.1

 Z_{26}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,568E+02	1,300E+02	9,498E-01	2,321E-01	1,064E+00
3	2,274E+03	2,191E+03	1,615E+00	3,184E+00	1,507E-01
4	3,690E+04	3,935E+04	2,130E+00	6,586E+00	1,668E-02
5	6,575E+05	7,575E+05	2,568E+00	1,042E+01	4,245E-03
6	1,268E+07	1,556E+07	2,958E+00	1,461E+01	3,283E-03
7	2,622E+08	3,388E+08	3,323E+00	1,931E+01	3,046E-03
8	5,764E+09	7,788E+09	3,662E+00	2,435E+01	2,807E-03
9	1,338E+11	1,879E+11	3,979E+00	2,961E+01	2,624E-03

Таблица II.1.25.2

 Z_{26}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	5,250000E+02	6,000000E+02	6,250000E+02	625.0000	2,239E-02	0,000E+00
3	9,716000E+03	1,322400E+04	1,672000E+04	27000.0000	Ntol	5,560E+02
4	1,821140E+05	2,737050E+05	3,621050E+05	741881.0000	Ntol	5,526E+04
5	3,577307E+06	5,759087E+06	8,048127E+06	18494104.0000	Ntol	5,899E+05
6	7,419061E+07	1,258412E+08	1,837099E+08	466148242.0000	Ntol	4,226E+07
7	1,624946E+09	2,875751E+09	4,363965E+09	14217054196.0000	Ntol	1,224E+09
8	3,739429E+10	6,856370E+10	1,068946E+11	426844814824.0000	Ntol	1,191E+11
9	9,022351E+11	1,706072E+12	2,731890E+12	9034510016088.0000	Ntol	5,072E+11

Таблица II.1.26.1

 Z_{27}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,694E+02	1,403E+02	9,496E-01	2,318E-01	9,901E-01
3	2,550E+03	2,456E+03	1,615E+00	3,181E+00	1,354E-01
4	4,298E+04	4,583E+04	2,130E+00	6,585E+00	1,479E-02
5	7,953E+05	9,162E+05	2,568E+00	1,041E+01	4,067E-03
6	1,593E+07	1,954E+07	2,960E+00	1,464E+01	3,159E-03
7	3,422E+08	4,420E+08	3,318E+00	1,920E+01	2,864E-03
8	7,809E+09	1,055E+10	3,658E+00	2,425E+01	2,708E-03
9	1,882E+11	2,644E+11	3,984E+00	2,986E+01	2,560E-03

Таблица II.1.26.2

 Z_{27}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	5,650000E+02	6,470000E+02	6,760000E+02	676.0000	1,989E-02	0,000E+00
3	1,089600E+04	1,483100E+04	1,870200E+04	30575.0000	Ntol	1,071E+03
4	2,121470E+05	3,187820E+05	4,220550E+05	837336.0000	Ntol	8,713E+04
5	4,326706E+06	6,961254E+06	9,758343E+06	28823640.0000	Ntol	9,515E+06
6	9,319005E+07	1,581690E+08	2,308830E+08	680643587.9999	Ntol	9,697E+07
7	2,119176E+09	3,750057E+09	5,665266E+09	15882792956.9999	Ntol	7,864E+08
8	5,068048E+10	9,291531E+10	1,449448E+11	536173375357.0000	Ntol	1,029E+11
9	1,270080E+12	2,399120E+12	3,851040E+12	13686780966835.0000	Ntol	7,818E+11

Таблица II.1.27.1

 Z_{28}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,824E+02	1,511E+02	9,499E-01	2,330E-01	9,270E-01
3	2,848E+03	2,743E+03	1,615E+00	3,185E+00	1,221E-01
4	4,978E+04	5,307E+04	2,128E+00	6,574E+00	1,307E-02
5	9,553E+05	1,101E+06	2,569E+00	1,042E+01	3,770E-03
6	1,985E+07	2,434E+07	2,960E+00	1,464E+01	3,004E-03
7	4,420E+08	5,709E+08	3,321E+00	1,927E+01	2,741E-03
8	1,046E+10	1,413E+10	3,651E+00	2,407E+01	2,656E-03
9	2,615E+11	3,675E+11	3,987E+00	2,989E+01	2,412E-03

Таблица II.1.27.2

 Z_{28}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	6,060000E+02	6,950000E+02	7,290000E+02	729.0000	1,811E-02	0,000E+00
3	1,216600E+04	1,655900E+04	2,093300E+04	34453.0000	Ntol	1,780E+02
4	2,457080E+05	3,689420E+05	4,883380E+05	1030144.0000	Ntol	1,307E+05
5	5,200110E+06	8,363205E+06	1,168218E+07	29124402.0000	Ntol	4,394E+06
6	1,160795E+08	1,971063E+08	2,878460E+08	842662014.9999	Ntol	1,391E+08
7	2,735705E+09	4,841445E+09	7,342308E+09	20250720575.9999	Ntol	7,974E+08
8	6,790028E+10	1,244580E+11	1,936744E+11	613589778474.0000	Ntol	4,197E+10
9	1,765352E+12	3,336539E+12	5,347026E+12	19042297242818.0000	Ntol	1,787E+12

Таблица II.1.28.1

 Z_{29}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,959E+02	1,622E+02	9,496E-01	2,324E-01	8,809E-01
3	3,168E+03	3,051E+03	1,615E+00	3,188E+00	1,127E-01
4	5,736E+04	6,116E+04	2,129E+00	6,586E+00	1,178E-02
5	1,140E+06	1,314E+06	2,569E+00	1,043E+01	3,532E-03
6	2,454E+07	3,009E+07	2,959E+00	1,462E+01	2,920E-03
7	5,661E+08	7,313E+08	3,319E+00	1,919E+01	2,701E-03
8	1,388E+10	1,875E+10	3,663E+00	2,438E+01	2,585E-03
9	3,592E+11	5,045E+11	3,978E+00	2,964E+01	2,394E-03

Таблица II.1.28.2

 Z_{29}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	6,500000E+02	7,450000E+02	7,840000E+02	784.0000	1,608E-02	0,000E+00
3	1,353300E+04	1,843800E+04	2,323600E+04	38696.0000	Ntol	9,520E+02
4	2,830800E+05	4,254880E+05	5,634720E+05	1068395.0000	Ntol	6,637E+03
5	6,204006E+06	9,984438E+06	1,395247E+07	31609586.0000	Ntol	2,593E+06
6	1,435305E+08	2,438420E+08	3,553019E+08	1018081728.9999	Ntol	1,658E+08
7	3,503610E+09	6,202530E+09	9,400500E+09	27388364405.9999	Ntol	4,463E+09
8	9,001200E+10	1,651208E+11	2,587076E+11	969788039834.9999	Ntol	1,857E+11
9	2,423576E+12	4,583673E+12	7,331606E+12	30705264546448.9999	Ntol	5,688E+12

Таблица II.1.29.1

 Z_{30}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	2,099E+02	1,737E+02	9,495E-01	2,326E-01	8,109E-01
3	3,511E+03	3,382E+03	1,615E+00	3,182E+00	9,982E-02
4	6,576E+04	7,011E+04	2,129E+00	6,583E+00	1,041E-02
5	1,352E+06	1,558E+06	2,569E+00	1,042E+01	3,380E-03
6	3,011E+07	3,693E+07	2,961E+00	1,464E+01	2,761E-03
7	7,185E+08	9,285E+08	3,326E+00	1,935E+01	2,666E-03
8	1,822E+10	2,462E+10	3,658E+00	2,426E+01	2,460E-03
9	4,881E+11	6,857E+11	3,982E+00	2,971E+01	2,373E-03

Таблица II.1.29.2

 Z_{30}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	7,000000E+02	7,970000E+02	8,410000E+02	841.0000	1,457E-02	0,000E+00
3	1,500000E+04	2,041200E+04	2,576300E+04	42253.0000	Ntol	2,900E+01
4	3,244200E+05	4,877380E+05	6,449180E+05	1317072.0000	Ntol	1,623E+05
5	7,356480E+06	1,185120E+07	1,655654E+07	44401176.0000	Ntol	8,062E+06
6	1,761309E+08	2,988081E+08	4,374104E+08	1092352140.0000	Ntol	1,210E+08
7	4,449021E+09	7,888059E+09	1,194458E+10	36430967328.0000	Ntol	7,275E+09
8	1,182877E+11	2,168979E+11	3,375599E+11	1109933179337.9999	Ntol	3,421E+10
9	3,295509E+12	6,228654E+12	1,000069E+13	36286277203913.9999	Ntol	3,253E+12

Таблица II.1.30.1

 Z_{31}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	2,243E+02	1,857E+02	9,493E-01	2,322E-01	7,829E-01
3	3,878E+03	3,735E+03	1,615E+00	3,184E+00	9,458E-02
4	7,508E+04	8,006E+04	2,130E+00	6,584E+00	9,622E-03
5	1,595E+06	1,838E+06	2,568E+00	1,041E+01	3,201E-03
6	3,671E+07	4,502E+07	2,962E+00	1,465E+01	2,655E-03
7	9,049E+08	1,169E+09	3,323E+00	1,928E+01	2,434E-03
8	2,372E+10	3,205E+10	3,660E+00	2,426E+01	2,402E-03
9	6,564E+11	9,224E+11	3,982E+00	2,981E+01	2,235E-03

Таблица II.1.30.2

 Z_{31}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	7,490000E+02	8,510000E+02	9,000000E+02	900.0000	1,315E-02	0,000E+00
3	1,656200E+04	2,255100E+04	2,849300E+04	48750.0000	Ntol	9,300E+02
4	3,706500E+05	5,563710E+05	7,367090E+05	1393560.0000	Ntol	6,238E+04
5	8,680188E+06	1,397838E+07	1,953128E+07	43961574.0000	Ntol	3,397E+06
6	2,147290E+08	3,645285E+08	5,312528E+08	1480246778.0000	Ntol	2,694E+08
7	5,603181E+09	9,918800E+09	1,508142E+10	43440751560.9999	Ntol	3,064E+09
8	1,539530E+11	2,825290E+11	4,415034E+11	1410048186993.9999	Ntol	7,301E+10
9	4,430833E+12	8,374398E+12	1,342166E+13	78114222168438.0000	Ntol	3,538E+13

Таблица II.1.31.1

 Z_{32}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	2,393E+02	1,980E+02	9,495E-01	2,330E-01	7,244E-01
3	4,270E+03	4,112E+03	1,615E+00	3,184E+00	8,406E-02
4	8,531E+04	9,096E+04	2,129E+00	6,580E+00	8,615E-03
5	1,872E+06	2,157E+06	2,569E+00	1,043E+01	3,091E-03
6	4,446E+07	5,452E+07	2,960E+00	1,464E+01	2,557E-03
7	1,132E+09	1,462E+09	3,321E+00	1,923E+01	2,427E-03
8	3,061E+10	4,138E+10	3,669E+00	2,447E+01	2,303E-03
9	8,745E+11	1,229E+12	3,987E+00	2,990E+01	2,099E-03

Таблица II.1.31.2

 Z_{32}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	7,970000E+02	9,060000E+02	9,610000E+02	961.0000	1,193E-02	0,000E+00
3	1,824200E+04	2,480800E+04	3,131500E+04	52169.0000	Ntol	1,837E+03
4	4,210300E+05	6,325860E+05	8,369500E+05	1734622.0000	Ntol	2,400E+05
5	1,018720E+07	1,640298E+07	2,292702E+07	56510820.0000	Ntol	5,908E+06
6	2,601112E+08	4,408340E+08	6,438317E+08	1745793011.9999	Ntol	1,551E+08
7	7,008389E+09	1,241093E+10	1,879188E+10	52722802574.0000	Ntol	4,225E+09
8	1,986962E+11	3,643712E+11	5,710747E+11	2091761101580.0000	Ntol	2,645E+11
9	5,901101E+12	1,115706E+13	1,789227E+13	77800823401279.9998	Ntol	9,988E+12

Таблица II.1.32.1

 Z_{33}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	2,547E+02	2,107E+02	9,492E-01	2,326E-01	6,891E-01
3	4,688E+03	4,514E+03	1,615E+00	3,187E+00	7,832E-02
4	9,660E+04	1,030E+05	2,130E+00	6,587E+00	7,900E-03
5	2,185E+06	2,517E+06	2,567E+00	1,041E+01	2,911E-03
6	5,353E+07	6,565E+07	2,961E+00	1,465E+01	2,511E-03
7	1,405E+09	1,815E+09	3,323E+00	1,929E+01	2,387E-03
8	3,920E+10	5,297E+10	3,662E+00	2,431E+01	2,188E-03
9	1,155E+12	1,624E+12	3,983E+00	2,970E+01	2,121E-03

Таблица II.1.32.2

 Z_{33}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	8,470000E+02	9,640000E+02	1,024000E+03	1024.0000	1,103E-02	0,000E+00
3	2,002600E+04	2,726500E+04	3,439800E+04	56696.0000	Ntol	1,076E+03
4	4,768000E+05	7,164800E+05	9,492160E+05	2121471.0000	Ntol	3,434E+05
5	1,188531E+07	1,912550E+07	2,674029E+07	66394591.0000	Ntol	9,631E+06
6	3,131378E+08	5,313670E+08	7,768930E+08	1806858544.0000	Ntol	7,222E+07
7	8,699983E+09	1,541071E+10	2,331719E+10	77129660560.9999	Ntol	6,566E+08
8	2,544755E+11	4,667983E+11	7,305607E+11	2573754588116.9999	Ntol	4,853E+11
9	7,801029E+12	1,474340E+13	2,361474E+13	95021317125695.9999	Ntol	1,107E+13

Таблица II.1.33.1

 Z_{34}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	2,706E+02	2,239E+02	9,492E-01	2,327E-01	6,531E-01
3	5,132E+03	4,941E+03	1,615E+00	3,187E+00	7,124E-02
4	1,090E+05	1,162E+05	2,130E+00	6,589E+00	7,294E-03
5	2,540E+06	2,927E+06	2,570E+00	1,044E+01	2,814E-03
6	6,409E+07	7,860E+07	2,962E+00	1,466E+01	2,461E-03
7	1,733E+09	2,240E+09	3,324E+00	1,932E+01	2,306E-03
8	4,982E+10	6,734E+10	3,664E+00	2,434E+01	2,174E-03
9	1,513E+12	2,125E+12	3,972E+00	2,941E+01	2,061E-03

Таблица II.1.33.2

 Z_{34}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	8,990000E+02	1,024000E+03	1,089000E+03	1089.0000	1,005E-02	0,000E+00
3	2,191800E+04	2,984600E+04	3,769800E+04	63459.0000	Ntol	3,107E+03
4	5,377510E+05	8,086140E+05	1,067990E+06	2113450.0000	Ntol	1,393E+05
5	1,382463E+07	2,224319E+07	3,106687E+07	77823138.0000	Ntol	1,079E+07
6	3,749670E+08	6,361543E+08	9,297278E+08	2589618252.0000	Ntol	2,143E+08
7	1,073464E+10	1,898092E+10	2,882437E+10	111671313792.0000	Ntol	1,331E+10
8	3,233943E+11	5,933985E+11	9,278517E+11	2885727900192.0000	Ntol	9,307E+10
9	1,021475E+13	1,930684E+13	3,081010E+13	111951850868680.0000	Ntol	5,977E+12

Таблица II.1.34.1

 Z_{35}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	2,870E+02	2,374E+02	9,491E-01	2,326E-01	6,176E-01
3	5,603E+03	5,394E+03	1,614E+00	3,182E+00	6,586E-02
4	1,224E+05	1,306E+05	2,130E+00	6,585E+00	6,850E-03
5	2,938E+06	3,386E+06	2,569E+00	1,042E+01	2,765E-03
6	7,633E+07	9,362E+07	2,962E+00	1,467E+01	2,376E-03
7	2,126E+09	2,747E+09	3,323E+00	1,928E+01	2,253E-03
8	6,290E+10	8,500E+10	3,666E+00	2,444E+01	2,075E-03
9	1,965E+12	2,761E+12	3,972E+00	2,936E+01	1,960E-03

Таблица II.1.34.2

 Z_{35}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	9,560000E+02	1,089000E+03	1,152000E+03	1156.0000	9,092E-03	0,000E+00
3	2,393400E+04	3,257100E+04	4,102400E+04	67486.0000	Ntol	2,274E+03
4	6,043820E+05	9,080150E+05	1,201577E+06	2374008.0000	Ntol	1,086E+05
5	1,598668E+07	2,573701E+07	3,590076E+07	84152988.0000	Ntol	8,315E+06
6	4,463832E+08	7,581584E+08	1,107273E+09	3786325204.9999	Ntol	1,174E+09
7	1,316660E+10	2,330978E+10	3,533856E+10	133985490903.9999	Ntol	3,968E+10
8	4,082704E+11	7,486412E+11	1,171662E+12	3772724459790.9999	Ntol	3,992E+11
9	1,326654E+13	2,505363E+13	4,015935E+13	133776315366107.9999	Ntol	—

Таблица II.1.35.1

 Z_{36}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	3,039E+02	2,513E+02	9,491E-01	2,328E-01	5,875E-01
3	6,102E+03	5,874E+03	1,615E+00	3,184E+00	6,056E-02
4	1,372E+05	1,463E+05	2,130E+00	6,590E+00	6,231E-03
5	3,386E+06	3,901E+06	2,568E+00	1,041E+01	2,644E-03
6	9,048E+07	1,110E+08	2,962E+00	1,467E+01	2,315E-03
7	2,591E+09	3,349E+09	3,324E+00	1,931E+01	2,149E-03
8	7,888E+10	1,066E+11	3,662E+00	2,435E+01	2,038E-03
9	2,535E+12	3,562E+12	3,979E+00	2,958E+01	1,921E-03

Таблица II.1.35.2

 Z_{36}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	1,013000E+03	1,155000E+03	1,219000E+03	1225.0000	8,492E-03	0,000E+00
3	2,606200E+04	3,546800E+04	4,477500E+04	77451.0000	Ntol	5,515E+03
4	6,772440E+05	1,016700E+06	1,347245E+06	2885008.0000	Ntol	3,785E+05
5	1,842464E+07	2,965102E+07	4,142648E+07	109644473.0000	Ntol	1,866E+07
6	5,291648E+08	8,984353E+08	1,313091E+09	3824569995.9999	Ntol	5,795E+08
7	1,605094E+10	2,840143E+10	4,318083E+10	137531013119.0000	Ntol	1,150E+09
8	5,118800E+11	9,390352E+11	1,464607E+12	5630507906891.9999	Ntol	6,261E+11
9	1,710336E+13	3,232448E+13	5,188454E+13	167587579899560.0000	Ntol	—

Таблица II.1.36.1

 Z_{37}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	3,212E+02	2,656E+02	9,492E-01	2,332E-01	5,701E-01
3	6,629E+03	6,383E+03	1,615E+00	3,183E+00	5,805E-02
4	1,532E+05	1,633E+05	2,129E+00	6,582E+00	5,959E-03
5	3,885E+06	4,477E+06	2,568E+00	1,042E+01	2,532E-03
6	1,067E+08	1,309E+08	2,960E+00	1,463E+01	2,265E-03
7	3,141E+09	4,059E+09	3,321E+00	1,925E+01	2,093E-03
8	9,830E+10	1,329E+11	3,663E+00	2,429E+01	1,986E-03
9	3,247E+12	4,562E+12	3,985E+00	2,982E+01	1,937E-03

Таблица II.1.36.2

 Z_{37}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	1,068000E+03	1,224000E+03	1,287000E+03	1296.0000	7,808E-03	0,000E+00
3	2,831000E+04	3,854100E+04	4,859300E+04	78046.0000	Ntol	2,438E+03
4	7,559240E+05	1,135752E+06	1,506709E+06	2853468.0000	Ntol	1,185E+05
5	2,113904E+07	3,404395E+07	4,749449E+07	122666688.0000	Ntol	2,130E+07
6	6,241575E+08	1,059581E+09	1,546049E+09	4097544600.0000	Ntol	4,826E+08
7	1,945395E+10	3,442985E+10	5,227429E+10	181255931093.0000	Ntol	1,424E+10
8	6,380779E+11	1,171598E+12	1,828629E+12	5269232216276.0000	Ntol	2,929E+11
9	2,190743E+13	4,143677E+13	6,630895E+13	214204954124190.0005	Ntol	—

Таблица II.1.37.1

 Z_{38}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	3,391E+02	2,803E+02	9,488E-01	2,325E-01	5,336E-01
3	7,187E+03	6,919E+03	1,615E+00	3,187E+00	5,258E-02
4	1,705E+05	1,818E+05	2,129E+00	6,585E+00	5,404E-03
5	4,444E+06	5,121E+06	2,569E+00	1,042E+01	2,470E-03
6	1,253E+08	1,537E+08	2,961E+00	1,463E+01	2,200E-03
7	3,790E+09	4,898E+09	3,324E+00	1,929E+01	2,023E-03
8	1,218E+11	1,646E+11	3,665E+00	2,440E+01	1,958E-03
9	4,132E+12	5,805E+12	3,974E+00	2,943E+01	1,801E-03

Таблица II.1.37.2

 Z_{38}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	1,126000E+03	1,291000E+03	1,358000E+03	1369.0000	7,233E-03	0,000E+00
3	3,069400E+04	4,176800E+04	5,268600E+04	88136.0000	Ntol	1,484E+03
4	8,417540E+05	1,264860E+06	1,672998E+06	3359124.0000	Ntol	3,859E+05
5	2,418678E+07	3,894886E+07	5,442705E+07	142643008.0000	Ntol	2,969E+07
6	7,333337E+08	1,245285E+09	1,813559E+09	4817383728.0000	Ntol	5,251E+08
7	2,346330E+10	4,157564E+10	6,294302E+10	187230121101.0000	Ntol	2,509E+10
8	7,899024E+11	1,449256E+12	2,269169E+12	8729359755751.0000	Ntol	1,477E+12
9	2,789305E+13	5,268266E+13	8,450906E+13	306643194739911.9995	Ntol	—

Таблица II.1.38.1

 Z_{39}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	3,574E+02	2,955E+02	9,491E-01	2,332E-01	5,072E-01
3	7,774E+03	7,484E+03	1,614E+00	3,183E+00	4,888E-02
4	1,894E+05	2,019E+05	2,130E+00	6,587E+00	5,061E-03
5	5,063E+06	5,833E+06	2,568E+00	1,041E+01	2,403E-03
6	1,466E+08	1,799E+08	2,962E+00	1,465E+01	2,081E-03
7	4,548E+09	5,877E+09	3,324E+00	1,930E+01	1,984E-03
8	1,500E+11	2,027E+11	3,664E+00	2,438E+01	1,963E-03
9	5,225E+12	7,341E+12	3,983E+00	2,977E+01	1,773E-03

Таблица II.1.38.2

 Z_{39}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	1,188000E+03	1,360000E+03	1,430000E+03	1444.0000	6,717E-03	0,000E+00
3	3,320400E+04	4,516200E+04	5,697400E+04	93620.0000	Ntol	3,340E+03
4	9,340660E+05	1,404347E+06	1,861181E+06	3393384.0000	Ntol	3,302E+04
5	2,753364E+07	4,435578E+07	6,193250E+07	152913024.0000	Ntol	1,182E+07
6	8,579415E+08	1,455835E+09	2,124442E+09	5262461806.9999	Ntol	3,621E+08
7	2,815890E+10	4,982048E+10	7,574183E+10	257872457129.0000	Ntol	2,943E+10
8	9,736863E+11	1,786582E+12	2,791051E+12	10033102629101.9999	Ntol	1,839E+12
9	3,526617E+13	6,666492E+13	1,067144E+14	373571953687601.9999	Ntol	—

Таблица II.1.39.1

 Z_{40}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	3,762E+02	3,109E+02	9,489E-01	2,329E-01	4,838E-01
3	8,393E+03	8,079E+03	1,614E+00	3,182E+00	4,551E-02
4	2,097E+05	2,235E+05	2,129E+00	6,579E+00	4,734E-03
5	5,751E+06	6,626E+06	2,569E+00	1,041E+01	2,353E-03
6	1,708E+08	2,095E+08	2,961E+00	1,464E+01	2,079E-03
7	5,435E+09	7,024E+09	3,321E+00	1,922E+01	1,953E-03
8	1,838E+11	2,484E+11	3,665E+00	2,441E+01	1,865E-03
9	6,565E+12	9,224E+12	3,984E+00	2,975E+01	1,782E-03

Таблица II.1.39.2

 Z_{40}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	1,252000E+03	1,430000E+03	1,505000E+03	1521.0000	6,168E-03	0,000E+00
3	3,584000E+04	4,879600E+04	6,153000E+04	105183.0000	Ntol	6,591E+03
4	1,034970E+06	1,554973E+06	2,058567E+06	3947168.0000	Ntol	2,689E+05
5	3,129318E+07	5,032606E+07	7,043297E+07	161068200.0000	Ntol	1,710E+07
6	9,992368E+08	1,694042E+09	2,480098E+09	6447407465.0000	Ntol	3,467E+08
7	3,367074E+10	5,963320E+10	9,029768E+10	280821601344.0000	Ntol	5,181E+10
8	1,193220E+12	2,188500E+12	3,418956E+12	12480587260483.9999	Ntol	4,590E+11
9	4,429619E+13	8,378568E+13	1,343476E+14	473143929823176.0000	Ntol	–

Таблица II.1.40.1

 Z_{41}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	3,954E+02	3,268E+02	9,488E-01	2,325E-01	4,689E-01
3	9,044E+03	8,705E+03	1,614E+00	3,182E+00	4,329E-02
4	2,316E+05	2,469E+05	2,129E+00	6,588E+00	4,485E-03
5	6,510E+06	7,500E+06	2,568E+00	1,041E+01	2,259E-03
6	1,982E+08	2,431E+08	2,962E+00	1,466E+01	2,039E-03
7	6,465E+09	8,356E+09	3,326E+00	1,933E+01	1,885E-03
8	2,241E+11	3,028E+11	3,659E+00	2,425E+01	1,829E-03
9	8,207E+12	1,153E+13	3,979E+00	2,952E+01	1,706E-03

Таблица II.1.40.2

 Z_{41}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	1,316000E+03	1,502000E+03	1,580000E+03	1600.0000	5,701E-03	0,000E+00
3	3,862000E+04	5,255800E+04	6,629600E+04	114161.0000	Ntol	5,825E+03
4	1,142888E+06	1,716624E+06	2,269264E+06	4417140.0000	Ntol	2,662E+05
5	3,540713E+07	5,701973E+07	7,961482E+07	188166528.0000	Ntol	2,015E+07
6	1,159346E+09	1,967613E+09	2,873527E+09	7618824252.0000	Ntol	1,079E+09
7	4,004636E+10	7,097276E+10	1,074581E+11	324965660447.0000	Ntol	3,370E+10
8	1,453888E+12	2,666956E+12	4,169133E+12	14543867373032.0000	Ntol	6,279E+11
9	5,541051E+13	1,046765E+14	1,682047E+14	550368885593059.9997	Ntol	–

Таблица II.1.41.1

 Z_{42}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	4,152E+02	3,431E+02	9,488E-01	2,329E-01	4,424E-01
3	9,729E+03	9,365E+03	1,615E+00	3,183E+00	3,961E-02
4	2,552E+05	2,720E+05	2,129E+00	6,583E+00	4,241E-03
5	7,348E+06	8,467E+06	2,569E+00	1,042E+01	2,139E-03
6	2,291E+08	2,810E+08	2,961E+00	1,464E+01	1,990E-03
7	7,658E+09	9,896E+09	3,325E+00	1,933E+01	1,895E-03
8	2,720E+11	3,675E+11	3,661E+00	2,424E+01	1,715E-03
9	1,020E+13	1,434E+13	3,983E+00	2,972E+01	1,674E-03

Таблица II.1.41.2

 Z_{42}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	1,380000E+03	1,576000E+03	1,659000E+03	1681.0000	5,322E-03	0,000E+00
3	4,154900E+04	5,654600E+04	7,132300E+04	115132.0000	Ntol	2,806E+03
4	1,259432E+06	1,891170E+06	2,504556E+06	4841544.0000	Ntol	3,319E+05
5	3,998718E+07	6,435697E+07	9,001638E+07	211212194.9999	Ntol	1,697E+07
6	1,340265E+09	2,274058E+09	3,327450E+09	9301854968.0000	Ntol	7,198E+08
7	4,741591E+10	8,393879E+10	1,273885E+11	392098501997.9999	Ntol	3,865E+10
8	1,765577E+12	3,238974E+12	5,052606E+12	16158930702160.0000	Ntol	1,157E+12
9	6,886884E+13	1,302097E+14	2,085424E+14	695274978587403.0003	Ntol	—

Таблица II.1.42.1

 Z_{43}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	4,355E+02	3,598E+02	9,487E-01	2,328E-01	4,303E-01
3	1,044E+04	1,005E+04	1,615E+00	3,184E+00	3,801E-02
4	2,805E+05	2,990E+05	2,129E+00	6,583E+00	3,994E-03
5	8,271E+06	9,530E+06	2,569E+00	1,042E+01	2,112E-03
6	2,641E+08	3,239E+08	2,962E+00	1,467E+01	1,936E-03
7	9,035E+09	1,167E+10	3,321E+00	1,924E+01	1,800E-03
8	3,285E+11	4,440E+11	3,661E+00	2,428E+01	1,652E-03
9	1,262E+13	1,773E+13	3,986E+00	2,984E+01	1,571E-03

Таблица II.1.42.2

 Z_{43}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	1,446000E+03	1,652000E+03	1,739000E+03	1764.0000	4,951E-03	0,000E+00
3	4,459800E+04	6,073800E+04	7,652000E+04	129390.0000	Ntol	1,121E+04
4	1,384192E+06	2,079920E+06	2,755570E+06	5491206.0000	Ntol	2,316E+05
5	4,498223E+07	7,237688E+07	1,014396E+08	237288852.0000	Ntol	2,101E+07
6	1,544417E+09	2,623407E+09	3,829649E+09	10137828144.0000	Ntol	1,404E+09
7	5,596722E+10	9,900772E+10	1,500819E+11	409538464764.0000	Ntol	1,507E+10
8	2,132180E+12	3,908904E+12	6,102767E+12	21167362834779.9999	Ntol	1,841E+12
9	8,515980E+13	1,609991E+14	2,577109E+14	905182314535720.0003	Ntol	—

Таблица II.1.43.1

 Z_{44}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	4,562E+02	3,769E+02	9,487E-01	2,329E-01	4,065E-01
3	1,120E+04	1,078E+04	1,614E+00	3,183E+00	3,502E-02
4	3,077E+05	3,280E+05	2,128E+00	6,578E+00	3,779E-03
5	9,283E+06	1,070E+07	2,568E+00	1,041E+01	2,077E-03
6	3,033E+08	3,719E+08	2,961E+00	1,464E+01	1,931E-03
7	1,062E+10	1,372E+10	3,323E+00	1,928E+01	1,745E-03
8	3,951E+11	5,339E+11	3,658E+00	2,419E+01	1,682E-03
9	1,552E+13	2,180E+13	3,983E+00	2,978E+01	1,581E-03

Таблица II.1.43.2

 Z_{44}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	1,517000E+03	1,729000E+03	1,821000E+03	1849.0000	4,728E-03	0,000E+00
3	4,780300E+04	6,510300E+04	8,204500E+04	134977.0000	Ntol	2,236E+03
4	1,518418E+06	2,280432E+06	3,014726E+06	6085824.0000	Ntol	6,470E+05
5	5,050109E+07	8,126699E+07	1,134127E+08	287113353.0000	Ntol	5,785E+07
6	1,774125E+09	3,009679E+09	4,403600E+09	11469367942.0000	Ntol	1,306E+09
7	6,572399E+10	1,164410E+11	1,763412E+11	545194128006.9999	Ntol	6,213E+10
8	2,564135E+12	4,701746E+12	7,353912E+12	22191555472872.0000	Ntol	1,100E+12
9	1,047375E+14	1,979742E+14	3,163391E+14	1159244752504357.0000	Ntol	–

Таблица II.1.44.1

 Z_{45}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	4,774E+02	3,944E+02	9,486E-01	2,327E-01	3,911E-01
3	1,198E+04	1,153E+04	1,614E+00	3,183E+00	3,305E-02
4	3,368E+05	3,591E+05	2,130E+00	6,594E+00	3,634E-03
5	1,039E+07	1,197E+07	2,568E+00	1,041E+01	2,005E-03
6	3,472E+08	4,259E+08	2,961E+00	1,465E+01	1,842E-03
7	1,243E+10	1,606E+10	3,321E+00	1,923E+01	1,724E-03
8	4,731E+11	6,395E+11	3,663E+00	2,428E+01	1,617E-03
9	1,902E+13	2,671E+13	3,979E+00	2,967E+01	1,499E-03

Таблица II.1.44.2

 Z_{45}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	1,588000E+03	1,808000E+03	1,904000E+03	1936.0000	4,349E-03	0,000E+00
3	5,116000E+04	6,966900E+04	8,778100E+04	149380.0000	Ntol	9,513E+03
4	1,661988E+06	2,500740E+06	3,301524E+06	6971550.0000	Ntol	2,066E+05
5	5,656192E+07	9,101523E+07	1,268783E+08	309937687.9999	Ntol	3,405E+07
6	2,030965E+09	3,445092E+09	5,029003E+09	14410729785.0000	Ntol	2,007E+09
7	7,695784E+10	1,363126E+11	2,064369E+11	612684531720.0000	Ntol	2,369E+09
8	3,070874E+12	5,641401E+12	8,794099E+12	28899297937309.0000	Ntol	4,263E+12
9	1,283048E+14	2,425030E+14	3,886022E+14	1365846597458533.9992	Ntol	–

Таблица II.1.45.1

 Z_{46}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	4,991E+02	4,123E+02	7,113E-01	1,742E-01	3,798E-01
3	1,281E+04	1,232E+04	1,614E+00	3,182E+00	3,120E-02
4	3,680E+05	3,923E+05	2,129E+00	6,585E+00	3,439E-03
5	1,161E+07	1,337E+07	2,569E+00	1,041E+01	1,974E-03
6	3,964E+08	4,861E+08	2,960E+00	1,463E+01	1,802E-03
7	1,451E+10	1,875E+10	3,321E+00	1,924E+01	1,718E-03
8	5,644E+11	7,628E+11	3,659E+00	2,419E+01	1,558E-03
9	2,318E+13	3,258E+13	3,983E+00	2,973E+01	1,508E-03

Таблица II.1.45.2

 Z_{46}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	1,660000E+03	1,892000E+03	1,989000E+03	2025.0000	4,065E-03	0,000E+00
3	5,466900E+04	7,446400E+04	9,371000E+04	160776.0000	Ntol	1,320E+04
4	1,815658E+06	2,729467E+06	3,611192E+06	7748312.0000	Ntol	1,476E+06
5	6,313107E+07	1,016615E+08	1,421192E+08	336009734.0000	Ntol	2,933E+07
6	2,318472E+09	3,931954E+09	5,749120E+09	16109012876.0000	Ntol	2,945E+09
7	8,984857E+10	1,591200E+11	2,412666E+11	691892410459.9999	Ntol	7,106E+10
8	3,661724E+12	6,722872E+12	1,050154E+13	32559650218091.9999	Ntol	1,715E+12
9	1,565425E+14	2,956001E+14	4,738294E+14	1828987474502219.9947	Ntol	2,274E+14

Таблица II.1.46.1

 Z_{47}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	5,213E+02	4,306E+02	9,484E-01	2,323E-01	3,628E-01
3	1,367E+04	1,315E+04	1,615E+00	3,184E+00	2,946E-02
4	4,012E+05	4,277E+05	2,129E+00	6,581E+00	3,342E-03
5	1,293E+07	1,490E+07	2,570E+00	1,043E+01	1,922E-03
6	4,513E+08	5,536E+08	2,964E+00	1,469E+01	1,753E-03
7	1,687E+10	2,180E+10	3,321E+00	1,921E+01	1,610E-03
8	6,707E+11	9,065E+11	3,664E+00	2,436E+01	1,546E-03
9	2,816E+13	3,958E+13	3,986E+00	2,981E+01	1,450E-03

Таблица II.1.46.2

 Z_{47}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	1,732000E+03	1,979000E+03	2,077000E+03	2116.0000	3,792E-03	0,000E+00
3	5,835900E+04	7,938500E+04	1,000480E+05	162164.0000	Ntol	6,014E+03
4	1,979516E+06	2,973488E+06	3,942904E+06	8117444.0000	Ntol	1,045E+06
5	7,031934E+07	1,132601E+08	1,585333E+08	364367879.0000	Ntol	5,398E+07
6	2,640690E+09	4,477988E+09	6,554733E+09	18029705590.0000	Ntol	1,803E+09
7	1,045377E+11	1,849687E+11	2,802865E+11	760279221258.9999	Ntol	6,660E+10
8	4,353458E+12	7,984609E+12	1,247151E+13	42924073993242.0000	Ntol	6,274E+12
9	1,900641E+14	3,594483E+14	5,760062E+14	2316643212298901.9997	Ntol	2,686E+14

Таблица II.1.47.1

 Z_{48}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	5,439E+02	4,492E+02	7,113E-01	1,744E-01	3,447E-01
3	1,456E+04	1,402E+04	1,614E+00	3,182E+00	2,725E-02
4	4,366E+05	4,655E+05	2,129E+00	6,586E+00	3,137E-03
5	1,437E+07	1,656E+07	2,568E+00	1,042E+01	1,818E-03
6	5,122E+08	6,282E+08	2,962E+00	1,465E+01	1,753E-03
7	1,956E+10	2,528E+10	3,324E+00	1,927E+01	1,573E-03
8	7,941E+11	1,073E+12	3,659E+00	2,423E+01	1,503E-03
9	3,405E+13	4,786E+13	3,988E+00	2,995E+01	1,464E-03

Таблица II.1.47.2

 Z_{48}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	1,806000E+03	2,068000E+03	2,165000E+03	2209.0000	3,573E-03	0,000E+00
3	6,217400E+04	8,464700E+04	1,069070E+05	177528.0000	Ntol	5,043E+03
4	2,154630E+06	3,239460E+06	4,280865E+06	9080353.0000	Ntol	1,241E+06
5	7,818415E+07	1,258771E+08	1,760460E+08	462939123.9999	Ntol	7,533E+07
6	2,996436E+09	5,085768E+09	7,441580E+09	21744656856.0000	Ntol	2,889E+09
7	1,211670E+11	2,147909E+11	3,253365E+11	875011690494.9999	Ntol	3,811E+10
8	5,154307E+12	9,446061E+12	1,477699E+13	46055633955207.9999	Ntol	6,400E+12
9	2,298477E+14	4,347315E+14	6,978121E+14	3656616740095679.9958	Ntol	1,360E+15

Таблица II.1.48.1

 Z_{49}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	5,670E+02	4,683E+02	9,484E-01	2,327E-01	3,378E-01
3	1,550E+04	1,492E+04	1,614E+00	3,183E+00	2,638E-02
4	4,743E+05	5,057E+05	2,129E+00	6,583E+00	3,030E-03
5	1,594E+07	1,837E+07	2,570E+00	1,043E+01	1,883E-03
6	5,799E+08	7,113E+08	2,962E+00	1,464E+01	1,661E-03
7	2,261E+10	2,923E+10	3,326E+00	1,934E+01	1,572E-03
8	9,370E+11	1,266E+12	3,662E+00	2,433E+01	1,493E-03
9	4,101E+13	5,761E+13	3,976E+00	2,948E+01	1,453E-03

Таблица II.1.48.2

 Z_{49}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	1,885000E+03	2,156000E+03	2,256000E+03	2304.0000	3,364E-03	0,000E+00
3	6,617800E+04	9,010500E+04	1,136450E+05	189986.0000	Ntol	1,146E+04
4	2,340944E+06	3,517968E+06	4,651568E+06	10038654.0000	Ntol	1,826E+06
5	8,671338E+07	1,396653E+08	1,953908E+08	482928488.0000	Ntol	6,801E+07
6	3,392160E+09	5,757428E+09	8,426044E+09	20949670654.0000	Ntol	1,403E+09
7	1,400649E+11	2,482762E+11	3,763211E+11	1151835307027.9999	Ntol	6,089E+10
8	6,083861E+12	1,116088E+13	1,742128E+13	65251284287519.9999	Ntol	5,171E+12
9	2,768220E+14	5,228572E+14	8,382643E+14	2860020075261673.9992	Ntol	1,768E+14

Таблица II.1.49.1

 Z_{50}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	5,906E+02	4,878E+02	9,483E-01	2,324E-01	3,228E-01
3	1,647E+04	1,585E+04	1,614E+00	3,181E+00	2,479E-02
4	5,145E+05	5,486E+05	2,130E+00	6,585E+00	2,881E-03
5	1,764E+07	2,033E+07	2,569E+00	1,042E+01	1,806E-03
6	6,549E+08	8,033E+08	2,961E+00	1,465E+01	1,650E-03
7	2,606E+10	3,368E+10	3,324E+00	1,929E+01	1,522E-03
8	1,102E+12	1,489E+12	3,664E+00	2,433E+01	1,484E-03
9	4,921E+13	6,916E+13	3,986E+00	2,981E+01	1,376E-03

Таблица II.1.49.2

 Z_{50}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	1,964000E+03	2,244000E+03	2,352000E+03	2401.0000	3,188E-03	0,000E+00
3	7,033400E+04	9,572500E+04	1,207710E+05	214179.0000	Ntol	2,255E+04
4	2,540538E+06	3,815636E+06	5,049126E+06	10055226.0000	Ntol	9,660E+05
5	9,594926E+07	1,545402E+08	2,160943E+08	497400283.0000	Ntol	5,464E+07
6	3,831451E+09	6,502550E+09	9,495690E+09	30144286730.9999	Ntol	5,937E+09
7	1,614838E+11	2,858715E+11	4,328208E+11	1251520874271.9999	Ntol	1,140E+11
8	7,148113E+12	1,310747E+13	2,057484E+13	68950478323285.9999	Ntol	7,159E+12
9	3,322080E+14	6,279984E+14	1,004362E+15	3935304591425691.0004	Ntol	6,448E+14

max_det_order_9_2 = 3290460664196686.0190429688

Таблица II.1.50.1

 Z_{51}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	6,147E+02	5,076E+02	9,485E-01	2,330E-01	3,128E-01
3	1,749E+04	1,683E+04	1,615E+00	3,186E+00	2,335E-02
4	5,572E+05	5,940E+05	2,130E+00	6,596E+00	2,769E-03
5	1,949E+07	2,245E+07	2,570E+00	1,044E+01	1,744E-03
6	7,378E+08	9,050E+08	2,962E+00	1,467E+01	1,637E-03
7	2,994E+10	3,870E+10	3,324E+00	1,931E+01	1,495E-03
8	1,292E+12	1,745E+12	3,661E+00	2,433E+01	1,427E-03
9	5,883E+13	8,266E+13	3,982E+00	2,970E+01	1,417E-03

Таблица II.1.50.2

 Z_{51}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	2,044000E+03	2,335000E+03	2,450000E+03	2500.0000	2,961E-03	0,000E+00
3	7,465500E+04	1,016800E+05	1,284520E+05	225891.0000	Ntol	2,323E+04
4	2,749756E+06	4,136604E+06	5,474432E+06	11096048.0000	Ntol	1,227E+06
5	1,059918E+08	1,707456E+08	2,383866E+08	531289954.0000	Ntol	3,673E+07
6	4,316262E+09	7,330492E+09	1,069214E+10	30912205688.0000	Ntol	3,975E+09
7	1,854926E+11	3,283414E+11	4,969118E+11	1633573047966.0000	Ntol	3,577E+11

8	8,377809E+12	1,537741E+13	2,401246E+13	88605798831999.0000	Ntol	2,174E+13
9	3,971545E+14	7,511411E+14	1,205141E+15	3811198944230769.0009	Ntol	9,950E+13

Таблица II.1.51.1

 Z_{52}

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	6,393E+02	5,279E+02	6,321E-01	1,546E-01	3,012E-01
3	1,855E+04	1,785E+04	1,614E+00	3,184E+00	2,220E-02
4	6,024E+05	6,422E+05	2,130E+00	6,590E+00	2,657E-03
5	2,148E+07	2,475E+07	2,568E+00	1,041E+01	1,750E-03
6	8,294E+08	1,017E+09	2,964E+00	1,470E+01	1,643E-03
7	3,432E+10	4,435E+10	3,325E+00	1,934E+01	1,462E-03
8	1,509E+12	2,040E+12	3,663E+00	2,432E+01	1,421E-03
9	7,010E+13	9,853E+13	3,989E+00	2,986E+01	1,321E-03

Таблица II.1.51.2

 Z_{52}

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	2,124000E+03	2,427000E+03	2,550000E+03	2601.0000	2,886E-03	0,000E+00
3	7,917800E+04	1,077940E+05	1,358940E+05	235400.0000	Ntol	1,935E+04
4	2,974209E+06	4,470018E+06	5,907195E+06	12195690.0000	Ntol	7,527E+05
5	1,169193E+08	1,880166E+08	2,633766E+08	597512192.0000	Ntol	3,622E+07
6	4,851788E+09	8,240380E+09	1,203565E+10	30663568845.0000	Ntol	3,426E+09
7	2,125466E+11	3,764761E+11	5,696466E+11	1705890018164.9999	Ntol	4,958E+10
8	9,796371E+12	1,796690E+13	2,809617E+13	86653038407076.0000	Ntol	7,341E+12
9	4,732420E+14	8,944859E+14	1,438375E+15	4843280505073818.0009	Ntol	—

Далее приводятся стохастические параметры для модулей определителей матриц порядка n с элементами из $Z_{-m}; m$.

Таблица II.2.1.1

 $Z_{-1; 1}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	6,914E-01	6,410E-01	3,843E-01	-7,067E-01	4,074E+01
3	9,244E-01	9,611E-01	1,009E+00	8,412E-01	4,000E+01
4	1,463E+00	1,613E+00	1,550E+00	3,284E+00	3,507E+01
5	2,611E+00	2,997E+00	2,033E+00	6,268E+00	2,804E+01
6	5,113E+00	6,089E+00	2,465E+00	9,720E+00	2,053E+01
7	1,080E+01	1,335E+01	2,845E+00	1,345E+01	1,374E+01
8	2,438E+01	3,129E+01	3,183E+00	1,742E+01	8,415E+00
9	5,836E+01	7,766E+01	3,491E+00	2,162E+01	4,724E+00
10	1,474E+02	2,030E+02	3,782E+00	2,626E+01	2,449E+00
11	3,910E+02	5,554E+02	4,051E+00	3,085E+01	1,175E+00
12	1,085E+03	1,586E+03	4,309E+00	3,559E+01	5,291E-01
13	3,136E+03	4,708E+03	4,574E+00	4,162E+01	2,271E-01

Продолжение таблицы II.2.1.1

14	9,419E+03	1,449E+04	4,813E+00	4,669E+01	9,867E-02
15	2,932E+04	4,610E+04	5,040E+00	5,217E+01	4,769E-02
16	9,435E+04	1,515E+05	5,284E+00	5,848E+01	2,888E-02
17	3,132E+05	5,128E+05	5,518E+00	6,609E+01	2,193E-02

Таблица II.2.1.2

 $Z_{-1; 1}$

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	2,000000E+00	2,000000E+00	2,000000E+00	2.0000	9,876E+00	0,000E+00
3	4,000000E+00	4,000000E+00	4,000000E+00	4.0000	2,442E+00	0,000E+00
4	7,000000E+00	1,000000E+01	1,200000E+01	16.0000	1,765E-03	0,000E+00
5	1,400000E+01	2,000000E+01	2,800000E+01	48.0000	5,000E-06	0,000E+00
6	2,800000E+01	4,600000E+01	6,400000E+01	136.0000	1,000E-06	4,000E+00
7	6,400000E+01	1,060000E+02	1,540000E+02	368.0000	6,667E-07	8,000E+00
8	1,500000E+02	2,610000E+02	3,900000E+02	1152.0000	Ntol	1,620E+02
9	3,720000E+02	6,720000E+02	1,032000E+03	3336.0000	Ntol	4,820E+02
10	9,750000E+02	1,809000E+03	2,848000E+03	10400.0000	Ntol	3,060E+02
11	2,669000E+03	5,076000E+03	8,155000E+03	29684.0000	Ntol	4,160E+03
12	7,612000E+03	1,480800E+04	2,425100E+04	94788.0000	Ntol	1,237E+04
13	2,256000E+04	4,469400E+04	7,474000E+04	353812.0000	Ntol	5,587E+04
14	6,928500E+04	1,399340E+05	2,380140E+05	1166101.0000	Ntol	1,899E+05
15	2,201000E+05	4,513780E+05	7,734180E+05	3927634.0000	Ntol	8,979E+05
16	7,218000E+05	1,503264E+06	2,619428E+06	11593156.0000	Ntol	1,173E+06
17	2,436000E+06	5,139200E+06	9,057000E+06	58437230.0000	Ntol	1,503E+07

Таблица II.2.2.1

 $Z_{-2; 2}$

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	2,189E+00	1,791E+00	7,826E-01	2,915E-01	2,064E+01
3	5,048E+00	4,745E+00	1,450E+00	2,612E+00	1,563E+01
4	1,362E+01	1,410E+01	1,976E+00	5,643E+00	9,639E+00
5	4,131E+01	4,619E+01	2,415E+00	9,095E+00	4,973E+00
6	1,380E+02	1,645E+02	2,802E+00	1,291E+01	2,188E+00
7	4,997E+02	6,288E+02	3,153E+00	1,705E+01	8,344E-01
8	1,942E+03	2,560E+03	3,486E+00	2,169E+01	2,835E-01
9	8,027E+03	1,101E+04	3,792E+00	2,643E+01	9,217E-02
10	3,507E+04	4,986E+04	4,088E+00	3,159E+01	3,393E-02
11	1,610E+05	2,363E+05	4,377E+00	3,714E+01	1,823E-02
12	7,733E+05	1,168E+06	4,657E+00	4,335E+01	1,394E-02
13	3,871E+06	6,002E+06	4,915E+00	4,927E+01	1,280E-02
14	2,013E+07	3,198E+07	5,194E+00	5,681E+01	1,206E-02

Таблица II.2.2.2

 $Z_{-2}; 2$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	8,000000E+00	8,000000E+00	8,000000E+00	8.0000	1,280E+00	0,000E+00
3	2,000000E+01	2,800000E+01	3,200000E+01	32.0000	5,406E-02	0,000E+00
4	6,400000E+01	9,600000E+01	1,240000E+02	256.0000	Ntol	3,200E+01
5	2,160000E+02	3,420000E+02	4,720000E+02	936.0000	Ntol	4,800E+01
6	7,810000E+02	1,302000E+03	1,872000E+03	4992.0000	Ntol	6,000E+00
7	3,008000E+03	5,232000E+03	7,782000E+03	26166.0000	Ntol	1,342E+03
8	1,228000E+04	2,213600E+04	3,407200E+04	111015.0000	Ntol	9,606E+03
9	5,289000E+04	9,831600E+04	1,549480E+05	618584.0000	Ntol	1,496E+05
10	2,394720E+05	4,564560E+05	7,371280E+05	3050432.0000	Ntol	7,698E+05
11	1,133300E+06	2,215744E+06	3,647020E+06	13392784.0000	Ntol	1,524E+06
12	5,592600E+06	1,116752E+07	1,881344E+07	74351356.0000	Ntol	3,364E+06
13	2,866560E+07	5,831200E+07	9,953100E+07	405566675.0000	Ntol	9,243E+06
14	1,523560E+08	3,152320E+08	5,474680E+08	2529116949.0000	Ntol	—

Таблица II.2.3.1

 $Z_{-3}; 3$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	4,425E+00	3,524E+00	9,161E-01	5,745E-01	1,204E+01
3	1,435E+01	1,334E+01	1,555E+00	3,059E+00	7,039E+00
4	5,445E+01	5,637E+01	2,054E+00	6,162E+00	3,192E+00
5	2,330E+02	2,619E+02	2,482E+00	9,711E+00	1,171E+00
6	1,099E+03	1,320E+03	2,866E+00	1,365E+01	3,615E-01
7	5,625E+03	7,137E+03	3,219E+00	1,796E+01	9,945E-02
8	3,090E+04	4,106E+04	3,548E+00	2,260E+01	3,005E-02
9	1,807E+05	2,500E+05	3,865E+00	2,773E+01	1,416E-02
10	1,116E+06	1,600E+06	4,161E+00	3,291E+01	1,068E-02
11	7,245E+06	1,072E+07	4,454E+00	3,897E+01	9,693E-03
12	4,922E+07	7,495E+07	4,736E+00	4,489E+01	9,233E-03
13	3,484E+08	5,446E+08	5,005E+00	5,123E+01	8,791E-03

Таблица II.2.3.2

 $Z_{-3}; 3$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	1,500000E+01	1,800000E+01	1,800000E+01	18.0000	3,327E-01	0,000E+00
3	6,000000E+01	8,100000E+01	9,900000E+01	108.0000	4,072E-03	0,000E+00
4	2,600000E+02	3,900000E+02	5,100000E+02	1080.0000	Ntol	1,080E+02
5	1,233000E+03	1,968000E+03	2,736000E+03	6399.0000	Ntol	3,510E+02
6	6,282000E+03	1,055200E+04	1,526900E+04	39438.0000	Ntol	2,430E+03
7	3,415200E+04	5,981400E+04	9,000600E+04	294910.0000	Ntol	5,622E+04
8	1,971360E+05	3,574390E+05	5,530950E+05	1603934.0000	Ntol	1,559E+04
9	1,200800E+06	2,245876E+06	3,576231E+06	14524236.0000	Ntol	2,010E+06
10	7,680160E+06	1,474403E+07	2,399139E+07	82722950.0000	Ntol	3,133E+06
11	5,136000E+07	1,009876E+08	1,675200E+08	755817136.0000	Ntol	1,442E+08

Продолжение таблицы II.2.3.2

12	3,585604E+08	7,196291E+08	1,215628E+09	4417402712.9999	Ntol	7,709E+07
13	2,599600E+09	5,316249E+09	9,135651E+09	36775428369.0000	Ntol	—

Таблица II.2.4.1

 $Z_{-4; 4}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	7,393E+00	5,849E+00	9,637E-01	6,821E-01	8,304E+00
3	3,089E+01	2,870E+01	1,587E+00	3,212E+00	4,075E+00
4	1,511E+02	1,568E+02	2,081E+00	6,363E+00	1,481E+00
5	8,340E+02	9,406E+02	2,504E+00	9,902E+00	4,238E-01
6	5,077E+03	6,119E+03	2,889E+00	1,391E+01	1,020E-01
7	3,355E+04	4,270E+04	3,246E+00	1,835E+01	2,607E-02
8	2,380E+05	3,173E+05	3,577E+00	2,306E+01	1,123E-02
9	1,796E+06	2,494E+06	3,903E+00	2,846E+01	8,568E-03
10	1,432E+07	2,060E+07	4,204E+00	3,390E+01	7,748E-03
11	1,200E+08	1,782E+08	4,489E+00	3,965E+01	7,386E-03
12	1,053E+09	1,609E+09	4,778E+00	4,603E+01	7,078E-03

Таблица II.2.4.2

 $Z_{-4; 4}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}	δ_{max}
2	2,400000E+01	3,200000E+01	3,200000E+01	32.0000	1,221E-01	0,000E+00
3	1,280000E+02	1,760000E+02	2,170000E+02	256.0000	5,430E-04	0,000E+00
4	7,250000E+02	1,088000E+03	1,440000E+03	3192.0000	Ntol	3,680E+02
5	4,432000E+03	7,104000E+03	9,864000E+03	23038.0000	Ntol	6,310E+02
6	2,913600E+04	4,907900E+04	7,138800E+04	180524.0000	Ntol	3,256E+03
7	2,044500E+05	3,593460E+05	5,405400E+05	1664858.0000	Ntol	3,421E+05
8	1,522800E+06	2,772225E+06	4,300405E+06	13708176.0000	Ntol	1,726E+06
9	1,197760E+07	2,244554E+07	3,589400E+07	132882759.0000	Ntol	2,450E+07
10	9,886500E+07	1,906738E+08	3,110878E+08	1393455117.0000	Ntol	3,091E+08
11	8,547000E+08	1,681044E+09	2,809050E+09	12796607597.0000	Ntol	2,663E+09
12	7,697600E+09	1,548870E+10	2,625378E+10	106183647913.0000	Ntol	—

Таблица II.2.5.1

 $Z_{-5; 5}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,111E+01	8,757E+00	9,876E-01	7,352E-01	5,689E+00
3	5,674E+01	5,273E+01	1,601E+00	3,285E+00	2,302E+00
4	3,396E+02	3,530E+02	2,092E+00	6,447E+00	6,863E-01
5	2,296E+03	2,594E+03	2,518E+00	1,006E+01	1,618E-01
6	1,712E+04	2,067E+04	2,904E+00	1,412E+01	3,522E-02
7	1,385E+05	1,766E+05	3,257E+00	1,847E+01	1,144E-02
8	1,203E+06	1,607E+06	3,589E+00	2,325E+01	7,502E-03
9	1,112E+07	1,546E+07	3,911E+00	2,858E+01	6,721E-03
10	1,086E+08	1,565E+08	4,217E+00	3,420E+01	6,297E-03
11	1,115E+09	1,658E+09	4,527E+00	4,100E+01	6,036E-03

Таблица II.2.5.2

 $Z_{-5; 5}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	3,700000E+01	4,500000E+01	5,000000E+01	50.0000	5,480E-02	0,000E+00
3	2,370000E+02	3,270000E+02	4,000000E+02	500.0000	1,235E-04	0,000E+00
4	1,635000E+03	2,460000E+03	3,247000E+03	6650.0000	Ntol	4,000E+02
5	1,223200E+04	1,964200E+04	2,739600E+04	63362.0000	Ntol	8,140E+02
6	9,837000E+04	1,662720E+05	2,415950E+05	696610.0000	Ntol	5,149E+04
7	8,456400E+05	1,488130E+06	2,245972E+06	7543165.0000	Ntol	1,611E+06
8	7,715200E+06	1,404276E+07	2,186375E+07	75440984.0000	Ntol	5,971E+06
9	7,425600E+07	1,395227E+08	2,225128E+08	797622362.0000	Ntol	3,855E+07
10	7,509600E+08	1,447659E+09	2,368008E+09	9527061287.0000	Ntol	9,362E+08
11	7,943140E+09	1,567291E+10	2,617212E+10	117537868162.0000	Ntol	—

Таблица II.2.6.1

 $Z_{-6; 6}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,555E+01	1,225E+01	9,983E-01	7,618E-01	4,596E+00
3	9,397E+01	8,739E+01	1,609E+00	3,329E+00	1,673E+00
4	6,654E+02	6,921E+02	2,099E+00	6,507E+00	4,279E-01
5	5,321E+03	6,018E+03	2,523E+00	1,011E+01	8,468E-02
6	4,694E+04	5,673E+04	2,912E+00	1,421E+01	1,799E-02
7	4,495E+05	5,737E+05	3,265E+00	1,859E+01	7,624E-03
8	4,621E+06	6,178E+06	3,604E+00	2,354E+01	6,074E-03
9	5,053E+07	7,031E+07	3,918E+00	2,869E+01	5,621E-03
10	5,839E+08	8,420E+08	4,227E+00	3,440E+01	5,343E-03

Таблица II.2.6.2

 $Z_{-6; 6}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	5,200000E+01	6,600000E+01	7,200000E+01	72.0000	2,785E-02	0,000E+00
3	3,920000E+02	5,440000E+02	6,660000E+02	864.0000	2,700E-05	0,000E+00
4	3,206000E+03	4,824000E+03	6,396000E+03	12938.0000	Ntol	1,298E+03
5	2,838000E+04	4,555500E+04	6,365000E+04	147474.0000	Ntol	1,398E+04
6	2,701920E+05	4,565560E+05	6,674290E+05	1748832.0000	Ntol	2,009E+05
7	2,745900E+06	4,835060E+06	7,305617E+06	22506421.0000	Ntol	3,419E+06
8	2,964960E+07	5,409023E+07	8,407014E+07	288163836.0000	Ntol	4,386E+07
9	3,377690E+08	6,346326E+08	1,011699E+09	4370974989.0000	Ntol	1,434E+09
10	4,040120E+09	7,796156E+09	1,279292E+10	48499266760.0000	Ntol	6,095E+09

Таблица II.2.7.1

 $Z_{-7; 7}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	2,074E+01	1,633E+01	1,006E+00	7,793E-01	3,414E+00
3	1,446E+02	1,345E+02	1,613E+00	3,349E+00	1,066E+00

Продолжение таблицы II.2.7.1

4	1,183E+03	1,231E+03	2,102E+00	6,528E+00	2,365E-01
5	1,092E+04	1,236E+04	2,530E+00	1,018E+01	4,243E-02
6	1,112E+05	1,345E+05	2,914E+00	1,421E+01	1,023E-02
7	1,230E+06	1,571E+06	3,276E+00	1,878E+01	6,012E-03
8	1,460E+07	1,953E+07	3,607E+00	2,353E+01	5,198E-03
9	1,843E+08	2,567E+08	3,926E+00	2,879E+01	4,930E-03
10	2,459E+09	3,548E+09	4,232E+00	3,446E+01	4,678E-03

Таблица II.2.7.2

 $Z_{-7; 7}$

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	7,000000E+01	8,500000E+01	9,800000E+01	98.0000	1,563E-02	0,000E+00
3	6,040000E+02	8,400000E+02	1,026000E+03	1372.0000	9,500E-06	0,000E+00
4	5,703000E+03	8,590000E+03	1,138600E+04	23230.0000	Ntol	1,857E+03
5	5,826500E+04	9,372300E+04	1,309440E+05	306100.0000	Ntol	3,078E+04
6	6,406040E+05	1,083222E+06	1,581697E+06	4203083.0000	Ntol	3,357E+05
7	7,521200E+06	1,325961E+07	2,005206E+07	63044092.0000	Ntol	1,022E+07
8	9,371530E+07	1,712574E+08	2,666664E+08	861204449.0000	Ntol	8,174E+07
9	1,232720E+09	2,317616E+09	3,697200E+09	17116254732.0000	Ntol	4,958E+09
10	1,702088E+10	3,286721E+10	5,372843E+10	188313734486.9999	Ntol	1,218E+10

Таблица II.2.8.1

 $Z_{-8; 8}$

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	2,667E+01	2,100E+01	1,010E+00	7,920E-01	2,837E+00
3	2,108E+02	1,962E+02	1,616E+00	3,366E+00	8,125E-01
4	1,954E+03	2,035E+03	2,106E+00	6,560E+00	1,604E-01
5	2,046E+04	2,317E+04	2,532E+00	1,020E+01	2,655E-02
6	2,363E+05	2,859E+05	2,918E+00	1,427E+01	7,345E-03
7	2,963E+06	3,786E+06	3,273E+00	1,869E+01	5,062E-03
8	3,988E+07	5,336E+07	3,608E+00	2,357E+01	4,585E-03
9	5,710E+08	7,954E+08	3,929E+00	2,883E+01	4,330E-03
10	8,639E+09	1,247E+10	4,237E+00	3,460E+01	4,080E-03

Таблица II.2.8.2

 $Z_{-8; 8}$

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	8,900000E+01	1,120000E+02	1,200000E+02	128.0000	9,660E-03	0,000E+00
3	8,810000E+02	1,224000E+03	1,500000E+03	2048.0000	3,000E-06	0,000E+00
4	9,432000E+03	1,423200E+04	1,884000E+04	38921.0000	Ntol	2,490E+02
5	1,092520E+05	1,757930E+05	2,459880E+05	552332.0000	Ntol	4,003E+04
6	1,361346E+06	2,304795E+06	3,362240E+06	10611684.0000	Ntol	2,621E+06
7	1,813000E+07	3,197331E+07	4,823182E+07	148104344.9999	Ntol	1,869E+07
8	2,561580E+08	4,671425E+08	7,270585E+08	2351926051.9999	Ntol	1,343E+08
9	3,820960E+09	7,183710E+09	1,148940E+10	43672213388.0000	Ntol	9,001E+09
10	5,984860E+10	1,156664E+11	1,896491E+11	699879953690.9999	Ntol	8,043E+10

Таблица II.2.9.1

 $Z_{-9; 9}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	3,334E+01	2,624E+01	1,013E+00	7,998E-01	2,334E+00
3	2,946E+02	2,742E+02	1,618E+00	3,381E+00	5,994E-01
4	3,054E+03	3,181E+03	2,107E+00	6,570E+00	1,059E-01
5	3,574E+04	4,048E+04	2,532E+00	1,020E+01	1,699E-02
6	4,615E+05	5,584E+05	2,919E+00	1,430E+01	5,828E-03
7	6,470E+06	8,270E+06	3,276E+00	1,873E+01	4,384E-03
8	9,734E+07	1,303E+08	3,611E+00	2,359E+01	4,099E-03
9	1,558E+09	2,172E+09	3,934E+00	2,895E+01	3,861E-03
10	2,636E+10	3,807E+10	4,244E+00	3,483E+01	3,608E-03

Таблица II.2.9.2

 $Z_{-9; 9}$

n	$det_{0,99}$	$det_{0,999}$	$det_{0,9999}$	det_{max}	N_{max}	δ_{max}
2	1,120000E+02	1,370000E+02	1,530000E+02	162.0000	6,132E-03	0,000E+00
3	1,232000E+03	1,711000E+03	2,102000E+03	2916.0000	1,500E-06	4,500E+01
4	1,474200E+04	2,224500E+04	2,949400E+04	60306.0000	Ntol	4,230E+02
5	1,908740E+05	3,070140E+05	4,292720E+05	1044558.0000	Ntol	1,942E+05
6	2,659040E+06	4,500872E+06	6,568485E+06	18637162.0000	Ntol	2,801E+06
7	3,963200E+07	6,978024E+07	1,055800E+08	288152986.0000	Ntol	1,985E+07
8	6,254080E+08	1,141628E+09	1,776487E+09	6547867589.9999	Ntol	1,116E+09
9	1,043550E+10	1,960548E+10	3,134438E+10	123476531777.9999	Ntol	2,861E+10
10	1,827114E+11	3,526442E+11	5,772822E+11	2110132801739.9999	Ntol	2,012E+11

Таблица II.2.10.1

 $Z_{-10; 10}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	4,075E+01	3,207E+01	1,015E+00	8,046E-01	2,007E+00
3	3,981E+02	3,706E+02	1,619E+00	3,386E+00	4,770E-01
4	4,561E+03	4,753E+03	2,109E+00	6,587E+00	7,698E-02
5	5,901E+04	6,686E+04	2,534E+00	1,023E+01	1,207E-02
6	8,425E+05	1,020E+06	2,922E+00	1,433E+01	4,808E-03
7	1,306E+07	1,669E+07	3,278E+00	1,879E+01	3,979E-03
8	2,172E+08	2,908E+08	3,614E+00	2,365E+01	3,739E-03
9	3,844E+09	5,358E+09	3,936E+00	2,903E+01	3,533E-03

Таблица II.2.10.2

 $Z_{-10; 10}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	1,360000E+02	1,700000E+02	1,900000E+02	200.0000	4,128E-03	0,000E+00
3	1,665000E+03	2,314000E+03	2,844000E+03	4000.0000	1,000E-06	0,000E+00
4	2,202600E+04	3,324000E+04	4,407400E+04	93190.0000	Ntol	2,970E+03
5	3,154100E+05	5,073120E+05	7,088300E+05	1462294.0000	Ntol	2,097E+04
6	4,856976E+06	8,218875E+06	1,200830E+07	37498881.0000	Ntol	8,824E+06
7	7,991120E+07	1,410149E+08	2,123971E+08	630781314.9999	Ntol	4,002E+07
8	1,395550E+09	2,549768E+09	3,973784E+09	12718151405.9999	Ntol	1,342E+09
9	2,573200E+10	4,836368E+10	7,744724E+10	308503068659.9999	Ntol	6,392E+10

Таблица II.2.11.1

 $Z_{-11; 11}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	4,889E+01	3,849E+01	1,017E+00	8,094E-01	1,635E+00
3	5,232E+02	4,872E+02	1,621E+00	3,393E+00	3,515E-01
4	6,567E+03	6,843E+03	2,110E+00	6,592E+00	5,236E-02
5	9,307E+04	1,054E+05	2,535E+00	1,024E+01	8,832E-03
6	1,456E+06	1,762E+06	2,922E+00	1,434E+01	4,348E-03
7	2,471E+07	3,159E+07	3,278E+00	1,878E+01	3,604E-03
8	4,503E+08	6,031E+08	3,620E+00	2,381E+01	3,398E-03
9	8,729E+09	1,217E+10	3,929E+00	2,872E+01	3,188E-03

Таблица II.2.11.2

 $Z_{-11; 11}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	1,640000E+02	2,090000E+02	2,310000E+02	242.0000	2,936E-03	0,000E+00
3	2,189000E+03	3,042000E+03	3,745000E+03	5280.0000	Ntol	8,800E+01
4	3,172000E+04	4,787700E+04	6,353200E+04	133852.0000	Ntol	9,660E+02
5	4,974160E+05	7,996560E+05	1,119304E+06	2693427.0000	Ntol	1,373E+05
6	8,392192E+06	1,420462E+07	2,080673E+07	56315428.0000	Ntol	3,853E+06
7	1,513260E+08	2,663712E+08	4,036991E+08	1111552699.9999	Ntol	3,935E+07
8	2,895516E+09	5,290967E+09	8,250325E+09	28206731534.9999	Ntol	1,830E+09
9	5,843800E+10	1,100711E+11	1,757903E+11	679676642939.0000	Ntol	—

Таблица II.2.12.1

 $Z_{-12; 12}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	5,779E+01	4,549E+01	1,018E+00	8,122E-01	1,498E+00
3	6,723E+02	6,260E+02	1,621E+00	3,395E+00	3,069E-01
4	9,171E+03	9,559E+03	2,111E+00	6,602E+00	4,224E-02
5	1,413E+05	1,602E+05	2,536E+00	1,024E+01	7,056E-03
6	2,403E+06	2,909E+06	2,920E+00	1,429E+01	3,835E-03
7	4,435E+07	5,670E+07	3,278E+00	1,876E+01	3,362E-03
8	8,784E+08	1,176E+09	3,617E+00	2,377E+01	3,069E-03
9	1,851E+10	2,581E+10	3,935E+00	2,901E+01	2,898E-03

Таблица II.2.12.2

Z_{-12; 12}

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	1,930000E+02	2,420000E+02	2,760000E+02	288.0000	2,066E-03	0,000E+00
3	2,813000E+03	3,908000E+03	4,815000E+03	6776.0000	Ntol	1,520E+02
4	4,431200E+04	6,690400E+04	8,870400E+04	188710.0000	Ntol	1,708E+04
5	7,556400E+05	1,215189E+06	1,698120E+06	3942818.0000	Ntol	2,732E+05
6	1,386019E+07	2,343744E+07	3,428218E+07	90612040.0000	Ntol	1,160E+07
7	2,717100E+08	4,791882E+08	7,237628E+08	2045479814.0000	Ntol	1,422E+08
8	5,643680E+09	1,031269E+10	1,608484E+10	55854085336.9999	Ntol	5,108E+09
9	1,239830E+11	2,332196E+11	3,725829E+11	1409887274950.0000	Ntol	1,064E+11

Таблица II.2.13.1

Z_{-13; 13}

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	6,742E+01	5,307E+01	1,019E+00	8,156E-01	1,253E+00
3	8,472E+02	7,889E+02	1,622E+00	3,402E+00	2,350E-01
4	1,248E+04	1,301E+04	2,111E+00	6,608E+00	3,046E-02
5	2,078E+05	2,355E+05	2,538E+00	1,027E+01	5,662E-03
6	3,816E+06	4,620E+06	2,921E+00	1,429E+01	3,419E-03
7	7,605E+07	9,725E+07	3,281E+00	1,881E+01	3,120E-03
8	1,627E+09	2,179E+09	3,620E+00	2,376E+01	2,896E-03
9	3,704E+10	5,166E+10	3,938E+00	2,898E+01	2,740E-03

Таблица II.2.13.2

Z_{-13; 13}

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	2,260000E+02	2,860000E+02	3,130000E+02	338.0000	1,532E-03	0,000E+00
3	3,546000E+03	4,928000E+03	6,057000E+03	8788.0000	Ntol	3,380E+02
4	6,030600E+04	9,107100E+04	1,209870E+05	247731.0000	Ntol	1,277E+03
5	1,110996E+06	1,787318E+06	2,503764E+06	6315136.0000	Ntol	4,994E+05
6	2,200940E+07	3,726503E+07	5,436499E+07	186411121.0000	Ntol	5,636E+07
7	4,655070E+08	8,219790E+08	1,243958E+09	3889657323.9999	Ntol	6,150E+08
8	1,046210E+10	1,911340E+10	2,986731E+10	91671303078.0000	Ntol	7,305E+09
9	2,480291E+11	4,667592E+11	7,462342E+11	3015059222359.0000	Ntol	4,574E+11

Таблица II.2.14.1

Z_{-14; 14}

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	7,779E+01	6,123E+01	1,019E+00	8,167E-01	1,117E+00
3	1,050E+03	9,776E+02	1,622E+00	3,399E+00	1,981E-01
4	1,662E+04	1,732E+04	2,112E+00	6,609E+00	2,446E-02
5	2,972E+05	3,368E+05	2,537E+00	1,025E+01	4,951E-03
6	5,861E+06	7,096E+06	2,923E+00	1,432E+01	3,150E-03
7	1,255E+08	1,605E+08	3,283E+00	1,884E+01	2,820E-03
8	2,885E+09	3,864E+09	3,619E+00	2,375E+01	2,743E-03
9	7,052E+10	9,835E+10	3,940E+00	2,905E+01	2,567E-03

Таблица II.2.14.2

 $Z_{-14; 14}$

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	2,600000E+02	3,250000E+02	3,640000E+02	392.0000	1,111E-03	0,000E+00
3	4,392000E+03	6,105000E+03	7,503000E+03	10628.0000	Ntol	1,280E+02
4	8,030800E+04	1,212140E+05	1,610000E+05	311279.0000	Ntol	2,013E+04
5	1,588600E+06	2,556036E+06	3,586804E+06	8132672.0000	Ntol	3,571E+05
6	3,380630E+07	5,722104E+07	8,351856E+07	230403110.0000	Ntol	2,055E+06
7	7,685550E+08	1,358280E+09	2,051047E+09	7502877823.9999	Ntol	1,911E+09
8	1,855350E+10	3,388219E+10	5,277169E+10	181023751575.0000	Ntol	2,681E+10
9	4,721731E+11	8,894891E+11	1,425154E+12	4879193068169.9999	Ntol	7,154E+10

Таблица II.2.15.1

 $Z_{-15; 15}$

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	8,891E+01	6,999E+01	1,019E+00	8,159E-01	1,013E+00
3	1,283E+03	1,194E+03	1,622E+00	3,400E+00	1,676E-01
4	2,170E+04	2,262E+04	2,112E+00	6,609E+00	1,943E-02
5	4,149E+05	4,703E+05	2,540E+00	1,030E+01	4,183E-03
6	8,747E+06	1,059E+07	2,924E+00	1,435E+01	2,953E-03
7	2,003E+08	2,561E+08	3,280E+00	1,881E+01	2,687E-03
8	4,921E+09	6,590E+09	3,620E+00	2,379E+01	2,470E-03
9	1,286E+11	1,793E+11	3,933E+00	2,889E+01	2,412E-03

Таблица II.2.15.2

 $Z_{-15; 15}$

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	2,990000E+02	3,750000E+02	4,200000E+02	450.0000	8,600E-04	0,000E+00
3	5,366000E+03	7,463000E+03	9,184000E+03	13065.0000	Ntol	1,500E+01
4	1,048620E+05	1,582560E+05	2,101500E+05	454304.0000	Ntol	2,536E+04
5	2,218409E+06	3,573804E+06	5,012760E+06	12886146.0000	Ntol	9,213E+05
6	5,045600E+07	8,539086E+07	1,251203E+08	341894226.0000	Ntol	4,036E+07
7	1,225958E+09	2,165232E+09	3,264994E+09	10129075703.9999	Ntol	8,955E+08
8	3,162870E+10	5,785950E+10	9,035592E+10	299694642682.0000	Ntol	2,233E+10
9	8,607893E+11	1,620593E+12	2,598681E+12	8451352789775.9999	Ntol	4,399E+11

Таблица II.2.16.1

 $Z_{-16; 16}$

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	1,007E+02	7,930E+01	1,019E+00	8,166E-01	9,165E-01
3	1,547E+03	1,441E+03	1,623E+00	3,405E+00	1,449E-01
4	2,788E+04	2,906E+04	2,112E+00	6,611E+00	1,594E-02
5	5,673E+05	6,430E+05	2,538E+00	1,027E+01	3,767E-03
6	1,273E+07	1,542E+07	2,924E+00	1,435E+01	2,802E-03
7	3,103E+08	3,969E+08	3,284E+00	1,886E+01	2,568E-03
8	8,117E+09	1,088E+10	3,623E+00	2,381E+01	2,328E-03
9	2,259E+11	3,151E+11	3,942E+00	2,902E+01	2,199E-03

Таблица II.2.16.2

 $Z_{-16; 16}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	3,370000E+02	4,200000E+02	4,800000E+02	512.0000	6,925E-04	0,000E+00
3	6,476000E+03	9,010000E+03	1,108600E+04	15872.0000	Ntol	1,920E+02
4	1,346580E+05	2,034530E+05	2,701600E+05	541990.0000	Ntol	9,729E+03
5	3,033100E+06	4,882395E+06	6,830462E+06	16459432.0000	Ntol	1,217E+06
6	7,344250E+07	1,243348E+08	1,817496E+08	560055734.0000	Ntol	1,360E+08
7	1,900920E+09	3,354621E+09	5,076348E+09	16626508351.9999	Ntol	2,648E+09
8	5,220600E+10	9,543125E+10	1,488953E+11	492335612333.0000	Ntol	7,251E+10
9	1,512575E+12	2,848791E+12	4,564960E+12	15574762074151.9999	Ntol	1,189E+12

Таблица II.2.17.1

 $Z_{-17; 17}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,133E+02	8,922E+01	1,020E+00	8,203E-01	7,951E-01
3	1,846E+03	1,720E+03	1,623E+00	3,409E+00	1,176E-01
4	3,528E+04	3,679E+04	2,112E+00	6,613E+00	1,278E-02
5	7,614E+05	8,630E+05	2,539E+00	1,027E+01	3,373E-03
6	1,813E+07	2,196E+07	2,928E+00	1,442E+01	2,561E-03
7	4,686E+08	5,994E+08	3,283E+00	1,886E+01	2,369E-03
8	1,300E+10	1,742E+10	3,620E+00	2,376E+01	2,210E-03
9	3,838E+11	5,352E+11	3,938E+00	2,901E+01	2,118E-03

Таблица II.2.17.2

 $Z_{-17; 17}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	3,800000E+02	4,760000E+02	5,280000E+02	578.0000	5,400E-04	0,000E+00
3	7,728000E+03	1,075400E+04	1,323100E+04	18513.0000	Ntol	1,700E+01
4	1,705100E+05	2,573820E+05	3,417800E+05	727476.0000	Ntol	3,390E+04
5	4,069100E+06	6,555090E+06	9,161406E+06	22801870.0000	Ntol	2,734E+06
6	1,046080E+08	1,771082E+08	2,591295E+08	937018991.0000	Ntol	3,102E+08
7	2,870763E+09	5,064919E+09	7,660971E+09	24544875679.9999	Ntol	4,584E+09
8	8,357400E+10	1,529440E+11	2,381893E+11	892877976022.9999	Ntol	2,048E+11
9	2,571192E+12	4,839415E+12	7,753631E+12	29758209581004.0000	Ntol	6,125E+12

Таблица II.2.18.1

 $Z_{-18; 18}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,267E+02	9,973E+01	1,020E+00	8,215E-01	7,454E-01
3	2,181E+03	2,032E+03	1,623E+00	3,411E+00	1,064E-01
4	4,407E+04	4,594E+04	2,112E+00	6,614E+00	1,104E-02
5	1,006E+06	1,140E+06	2,537E+00	1,025E+01	3,152E-03
6	2,531E+07	3,065E+07	2,925E+00	1,437E+01	2,456E-03
7	6,918E+08	8,847E+08	3,283E+00	1,883E+01	2,249E-03
8	2,029E+10	2,717E+10	3,617E+00	2,373E+01	2,078E-03
9	6,330E+11	8,828E+11	3,937E+00	2,893E+01	1,939E-03

Таблица II.2.18.2

 $Z_{-18; 18}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	4,250000E+02	5,290000E+02	5,950000E+02	648.0000	4,465E-04	0,000E+00
3	9,132000E+03	1,270000E+04	1,564500E+04	22271.0000	Ntol	4,010E+02
4	2,129300E+05	3,216360E+05	4,272900E+05	877368.0000	Ntol	3,815E+04
5	5,374096E+06	8,650278E+06	1,210364E+07	29465463.0000	Ntol	4,327E+06
6	1,460400E+08	2,471803E+08	3,610957E+08	1077884089.9999	Ntol	1,445E+08
7	4,234140E+09	7,476204E+09	1,128411E+10	32412382541.9999	Ntol	4,407E+09
8	1,304250E+11	2,385243E+11	3,715886E+11	1445728855250.0000	Ntol	2,578E+11
9	4,240148E+12	7,989464E+12	1,279533E+13	50055585735452.0000	Ntol	1,092E+13

Таблица II.2.19.1

 $Z_{-19; 19}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,407E+02	1,108E+02	1,021E+00	8,231E-01	6,541E-01
3	2,555E+03	2,380E+03	1,623E+00	3,405E+00	8,784E-02
4	5,440E+04	5,672E+04	2,113E+00	6,628E+00	9,246E-03
5	1,309E+06	1,484E+06	2,540E+00	1,029E+01	2,918E-03
6	3,472E+07	4,205E+07	2,925E+00	1,435E+01	2,323E-03
7	1,000E+09	1,279E+09	3,282E+00	1,884E+01	2,176E-03
8	3,092E+10	4,141E+10	3,618E+00	2,374E+01	2,026E-03
9	1,017E+12	1,419E+12	3,945E+00	2,918E+01	1,887E-03

Таблица II.2.19.2

 $Z_{-19; 19}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	4,720000E+02	5,920000E+02	6,650000E+02	722.0000	3,210E-04	0,000E+00
3	1,069600E+04	1,487400E+04	1,829600E+04	26334.0000	Ntol	8,170E+02
4	2,629400E+05	3,974420E+05	5,277610E+05	1101240.0000	Ntol	2,675E+04
5	6,998520E+06	1,126147E+07	1,578535E+07	40186370.0000	Ntol	4,498E+06
6	2,002668E+08	3,393572E+08	4,954072E+08	1516246730.9999	Ntol	3,095E+08
7	6,127882E+09	1,080763E+10	1,635824E+10	49822510991.0000	Ntol	4,099E+08
8	1,988209E+11	3,632882E+11	5,668013E+11	2040531171188.0000	Ntol	4,282E+11
9	6,815349E+12	1,283037E+13	2,053785E+13	73634344798222.0000	Ntol	8,450E+12

Таблица II.2.20.1

 $Z_{-20; 20}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,556E+02	1,225E+02	1,021E+00	8,216E-01	6,165E-01
3	2,969E+03	2,766E+03	1,623E+00	3,406E+00	7,979E-02
4	6,648E+04	6,931E+04	2,113E+00	6,623E+00	8,198E-03
5	1,681E+06	1,905E+06	2,539E+00	1,028E+01	2,692E-03
6	4,688E+07	5,677E+07	2,925E+00	1,436E+01	2,219E-03
7	1,420E+09	1,816E+09	3,286E+00	1,891E+01	2,025E-03
8	4,614E+10	6,182E+10	3,620E+00	2,374E+01	1,877E-03
9	1,596E+12	2,225E+12	3,940E+00	2,907E+01	1,799E-03

Таблица II.2.20.2

 $Z_{-20; 20}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	5,220000E+02	6,500000E+02	7,240000E+02	800.0000	2,765E-04	0,000E+00
3	1,242800E+04	1,728700E+04	2,126400E+04	30249.0000	Ntol	1,410E+02
4	3,212760E+05	4,853430E+05	6,444260E+05	1267308.0000	Ntol	2,180E+04
5	8,985746E+06	1,445934E+07	2,025808E+07	51359749.0000	Ntol	9,571E+06
6	2,704248E+08	4,579457E+08	6,679016E+08	1831213667.9999	Ntol	1,636E+08
7	8,695030E+09	1,535273E+10	2,326532E+10	65838825116.0000	Ntol	5,277E+09
8	2,968060E+11	5,429513E+11	8,436165E+11	2805005712708.0000	Ntol	2,659E+11
9	1,068804E+13	2,012444E+13	3,215027E+13	104740617856438.0001	Ntol	6,103E+12

Таблица II.2.21.1

 $Z_{-21; 21}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,711E+02	1,347E+02	1,021E+00	8,208E-01	5,706E-01
3	3,425E+03	3,191E+03	1,623E+00	3,410E+00	7,024E-02
4	8,042E+04	8,385E+04	2,114E+00	6,625E+00	7,026E-03
5	2,133E+06	2,418E+06	2,540E+00	1,029E+01	2,452E-03
6	6,239E+07	7,558E+07	2,930E+00	1,443E+01	2,096E-03
7	1,982E+09	2,535E+09	3,283E+00	1,888E+01	1,919E-03
8	6,756E+10	9,053E+10	3,622E+00	2,377E+01	1,820E-03
9	2,450E+12	3,415E+12	3,934E+00	2,890E+01	1,758E-03

Таблица II.2.21.2

 $Z_{-21; 21}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	5,740000E+02	7,190000E+02	8,000000E+02	882.0000	1,240E-04	0,000E+00
3	1,433700E+04	1,994600E+04	2,457600E+04	35322.0000	Ntol	7,140E+02
4	3,887250E+05	5,873610E+05	7,803080E+05	1956086.0000	Ntol	3,353E+05
5	1,141034E+07	1,835063E+07	2,570795E+07	65600665.0000	Ntol	1,204E+07
6	3,600456E+08	6,101095E+08	8,903724E+08	2572573154.9999	Ntol	3,751E+08
7	1,213836E+10	2,141667E+10	3,236918E+10	112160086512.0000	Ntol	8,469E+09
8	4,342857E+11	7,949433E+11	1,237847E+12	3986982284406.0000	Ntol	1,900E+11
9	1,640110E+13	3,088444E+13	4,929637E+13	153840831469757.0000	Ntol	—

Таблица II.2.22.1

 $Z_{-22; 22}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	1,874E+02	1,476E+02	1,021E+00	8,211E-01	5,261E-01
3	3,926E+03	3,657E+03	1,623E+00	3,411E+00	6,234E-02
4	9,647E+04	1,006E+05	2,113E+00	6,624E+00	6,368E-03
5	2,677E+06	3,035E+06	2,541E+00	1,030E+01	2,340E-03
6	8,196E+07	9,927E+07	2,925E+00	1,435E+01	1,997E-03
7	2,725E+09	3,484E+09	3,281E+00	1,882E+01	1,833E-03
8	9,719E+10	1,302E+11	3,622E+00	2,378E+01	1,698E-03
9	3,690E+12	5,146E+12	3,943E+00	2,914E+01	1,632E-03

Таблица II.2.22.2

 $Z_{-22; 22}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	6,280000E+02	7,850000E+02	8,810000E+02	968.0000	1,995E-04	0,000E+00
3	1,644000E+04	2,285700E+04	2,814100E+04	41040.0000	Ntol	1,224E+03
4	4,661550E+05	7,043860E+05	9,350040E+05	1903638.0000	Ntol	1,322E+04
5	1,431375E+07	2,305649E+07	3,232390E+07	77562412.0000	Ntol	9,350E+06
6	4,730097E+08	8,005536E+08	1,169381E+09	3253117903.9999	Ntol	4,745E+08
7	1,668700E+10	2,943883E+10	4,456492E+10	125019490796.0000	Ntol	1,771E+09
8	6,252209E+11	1,142621E+12	1,782540E+12	5308317309009.0000	Ntol	8,333E+10
9	2,470992E+13	4,653787E+13	7,452792E+13	239479545272240.0000	Ntol	—

Таблица II.2.23.1

 $Z_{-23; 23}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	2,044E+02	1,609E+02	1,021E+00	8,221E-01	4,703E-01
3	4,473E+03	4,167E+03	1,624E+00	3,414E+00	5,309E-02
4	1,148E+05	1,197E+05	2,114E+00	6,624E+00	5,384E-03
5	3,327E+06	3,772E+06	2,540E+00	1,029E+01	2,180E-03
6	1,064E+08	1,289E+08	2,929E+00	1,440E+01	1,895E-03
7	3,695E+09	4,727E+09	3,286E+00	1,893E+01	1,786E-03
8	1,377E+11	1,845E+11	3,623E+00	2,383E+01	1,630E-03
9	5,457E+12	7,614E+12	3,949E+00	2,923E+01	1,631E-03

Таблица II.2.23.2

 $Z_{-23; 23}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	6,850000E+02	8,580000E+02	9,660000E+02	1058.0000	1,745E-04	0,000E+00
3	1,873000E+04	2,605100E+04	3,211100E+04	45672.0000	Ntol	4,000E+01
4	5,552190E+05	8,377500E+05	1,114555E+06	2187128.0000	Ntol	9,256E+03
5	1,778913E+07	2,867760E+07	4,004702E+07	90477976.0000	Ntol	1,026E+06
6	6,139732E+08	1,040094E+09	1,523930E+09	4602498140.0000	Ntol	5,221E+08
7	2,264023E+10	3,996489E+10	6,046333E+10	204407765240.0000	Ntol	3,361E+10
8	8,853856E+11	1,618124E+12	2,524951E+12	10012044595087.9999	Ntol	1,923E+12
9	3,655401E+13	6,892197E+13	1,103224E+14	355095505900752.0000	Ntol	—

Таблица II.2.24.1

 $Z_{-24; 24}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	2,222E+02	1,750E+02	1,021E+00	8,228E-01	4,546E-01
3	5,069E+03	4,723E+03	1,624E+00	3,415E+00	4,994E-02
4	1,356E+05	1,414E+05	2,112E+00	6,613E+00	4,902E-03
5	4,099E+06	4,646E+06	2,538E+00	1,026E+01	2,092E-03
6	1,367E+08	1,656E+08	2,927E+00	1,438E+01	1,846E-03
7	4,947E+09	6,328E+09	3,287E+00	1,896E+01	1,674E-03
8	1,922E+11	2,575E+11	3,623E+00	2,385E+01	1,610E-03
9	7,941E+12	1,107E+13	3,934E+00	2,896E+01	1,504E-03

Таблица II.2.24.2

 $Z_{-24}; 24$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	7,440000E+02	9,360000E+02	1,038000E+03	1152.0000	1,475E-04	0,000E+00
3	2,122100E+04	2,954000E+04	3,634500E+04	52152.0000	Ntol	4,600E+02
4	6,556410E+05	9,898620E+05	1,313856E+06	3023632.0000	Ntol	3,045E+05
5	2,192145E+07	3,523936E+07	4,932422E+07	112604724.0000	Ntol	1,514E+06
6	7,885878E+08	1,334363E+09	1,950163E+09	5108836944.0000	Ntol	1,129E+07
7	3,030000E+10	5,348813E+10	8,117606E+10	249870383837.9999	Ntol	2,379E+10
8	1,236209E+12	2,260422E+12	3,520665E+12	14006366633962.0000	Ntol	3,435E+12
9	5,318850E+13	1,001445E+14	1,598385E+14	578584050132990.0002	Ntol	–

Таблица II.2.25.1

 $Z_{-25}; 25$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	2,408E+02	1,896E+02	1,022E+00	8,240E-01	4,180E-01
3	5,716E+03	5,325E+03	1,624E+00	3,416E+00	4,386E-02
4	1,592E+05	1,660E+05	2,114E+00	6,628E+00	4,419E-03
5	5,007E+06	5,677E+06	2,541E+00	1,030E+01	2,025E-03
6	1,737E+08	2,104E+08	2,925E+00	1,435E+01	1,771E-03
7	6,546E+09	8,375E+09	3,287E+00	1,894E+01	1,610E-03
8	2,647E+11	3,546E+11	3,621E+00	2,374E+01	1,571E-03
9	1,139E+13	1,588E+13	3,942E+00	2,935E+01	1,408E-03

Таблица II.2.25.2

 $Z_{-25}; 25$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	8,070000E+02	1,010000E+03	1,128000E+03	1250.0000	1,140E-04	0,000E+00
3	2,393400E+04	3,331200E+04	4,099200E+04	58592.0000	Ntol	1,832E+03
4	7,694600E+05	1,162588E+06	1,544396E+06	3301920.0000	Ntol	1,599E+05
5	2,678224E+07	4,309818E+07	6,035467E+07	135012386.0000	Ntol	3,349E+06
6	1,002250E+09	1,696756E+09	2,480107E+09	6007944468.0000	Ntol	6,846E+07
7	4,010725E+10	7,080738E+10	1,069268E+11	384018675592.0000	Ntol	8,783E+10
8	1,702191E+12	3,110869E+12	4,863320E+12	16620772148925.9999	Ntol	3,685E+12
9	7,624680E+13	1,435539E+14	2,291856E+14	843628065831221.0003	Ntol	–

Таблица II.2.26.1

 $Z_{-26}; 26$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	2,600E+02	2,047E+02	1,022E+00	8,244E-01	3,881E-01
3	6,415E+03	5,977E+03	1,624E+00	3,412E+00	3,950E-02
4	1,857E+05	1,936E+05	2,113E+00	6,618E+00	3,973E-03
5	6,069E+06	6,880E+06	2,539E+00	1,028E+01	1,893E-03
6	2,189E+08	2,651E+08	2,926E+00	1,438E+01	1,750E-03
7	8,570E+09	1,096E+10	3,285E+00	1,887E+01	1,591E-03
8	3,601E+11	4,826E+11	3,627E+00	2,397E+01	1,507E-03
9	1,610E+13	2,246E+13	3,943E+00	2,914E+01	1,330E-03

Таблица II.2.26.2

 $Z_{-26; 26}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	8,720000E+02	1,092000E+03	1,224000E+03	1352.0000	9,400E-05	0,000E+00
3	2,686200E+04	3,735600E+04	4,600600E+04	66428.0000	Ntol	4,920E+02
4	8,975400E+05	1,356096E+06	1,796488E+06	3551601.0000	Ntol	1,068E+04
5	3,245523E+07	5,223450E+07	7,321080E+07	168790756.0000	Ntol	1,036E+07
6	1,262955E+09	2,138109E+09	3,128083E+09	8204760295.0000	Ntol	9,920E+08
7	5,249969E+10	9,269760E+10	1,403001E+11	411831734875.0000	Ntol	2,982E+10
8	2,315674E+12	4,231776E+12	6,614445E+12	27446860006617.0000	Ntol	6,532E+12
9	1,078130E+14	2,033554E+14	3,251587E+14	1368859214809522.0000	Ntol	—

Таблица II.2.27.1

 $Z_{-27; 27}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	2,800E+02	2,204E+02	1,022E+00	8,259E-01	3,633E-01
3	7,170E+03	6,679E+03	1,624E+00	3,413E+00	3,556E-02
4	2,153E+05	2,245E+05	2,114E+00	6,633E+00	3,655E-03
5	7,306E+06	8,282E+06	2,541E+00	1,030E+01	1,840E-03
6	2,734E+08	3,311E+08	2,925E+00	1,434E+01	1,613E-03
7	1,111E+10	1,421E+10	3,284E+00	1,886E+01	1,537E-03
8	4,843E+11	6,488E+11	3,619E+00	2,377E+01	1,417E-03
9	2,247E+13	3,134E+13	3,940E+00	2,908E+01	1,310E-03

Таблица II.2.27.2

 $Z_{-27; 27}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	9,390000E+02	1,174000E+03	1,323000E+03	1458.0000	8,500E-05	0,000E+00
3	3,002400E+04	4,173500E+04	5,142100E+04	75249.0000	Ntol	2,245E+03
4	1,040868E+06	1,572642E+06	2,087964E+06	5134551.0000	Ntol	7,088E+05
5	3,907519E+07	6,290014E+07	8,802822E+07	232592247.0000	Ntol	3,225E+07
6	1,577639E+09	2,668688E+09	3,898494E+09	9309920736.0000	Ntol	1,093E+08
7	6,802200E+10	1,200472E+11	1,818111E+11	614154040756.0000	Ntol	1,284E+11
8	3,114850E+12	5,697138E+12	8,846766E+12	33057931440559.9999	Ntol	7,803E+12
9	1,504506E+14	2,833874E+14	4,541123E+14	1604129104817904.0008	Ntol	—

Таблица II.2.28.1

 $Z_{-28; 28}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	3,007E+02	2,368E+02	1,022E+00	8,243E-01	3,468E-01
3	7,981E+03	7,435E+03	1,624E+00	3,415E+00	3,300E-02
4	2,484E+05	2,590E+05	2,113E+00	6,623E+00	3,420E-03
5	8,733E+06	9,902E+06	2,541E+00	1,029E+01	1,767E-03
6	3,387E+08	4,103E+08	2,928E+00	1,439E+01	1,563E-03
7	1,426E+10	1,824E+10	3,281E+00	1,880E+01	1,489E-03
8	6,445E+11	8,635E+11	3,619E+00	2,374E+01	1,345E-03
9	3,099E+13	4,321E+13	3,937E+00	2,907E+01	1,272E-03

Таблица II.2.28.2

Z_{-28; 28}

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	1,008000E+03	1,262000E+03	1,406000E+03	1568.0000	7,800E-05	0,000E+00
3	3,341100E+04	4,647500E+04	5,729100E+04	80838.0000	Ntol	2,060E+02
4	1,200670E+06	1,812850E+06	2,407950E+06	5084042.0000	Ntol	6,598E+03
5	4,670700E+07	7,518298E+07	1,053811E+08	244208908.0000	Ntol	2,430E+07
6	1,955043E+09	3,309242E+09	4,845679E+09	12085284493.0000	Ntol	5,211E+08
7	8,737120E+10	1,543480E+11	2,325727E+11	640792667352.0000	Ntol	9,331E+09
8	4,146499E+12	7,586431E+12	1,181927E+13	35846660696922.0000	Ntol	1,225E+12
9	2,075315E+14	3,909331E+14	6,226242E+14	2702733460858035.0024	Ntol	–

Таблица II.2.29.1

Z_{-29; 29}

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	3,222E+02	2,537E+02	1,022E+00	8,252E-01	3,160E-01
3	8,850E+03	8,246E+03	1,625E+00	3,422E+00	2,918E-02
4	2,852E+05	2,974E+05	2,114E+00	6,634E+00	3,122E-03
5	1,038E+07	1,177E+07	2,541E+00	1,029E+01	1,729E-03
6	4,166E+08	5,047E+08	2,929E+00	1,440E+01	1,552E-03
7	1,816E+10	2,323E+10	3,284E+00	1,887E+01	1,364E-03
8	8,494E+11	1,138E+12	3,620E+00	2,374E+01	1,328E-03
9	4,228E+13	5,897E+13	3,938E+00	2,897E+01	1,208E-03

Таблица II.2.29.2

Z_{-29; 29}

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	1,080000E+03	1,350000E+03	1,512000E+03	1682.0000	7,450E-05	0,000E+00
3	3,706300E+04	5,158200E+04	6,352000E+04	92546.0000	Ntol	2,240E+03
4	1,378224E+06	2,083788E+06	2,765004E+06	5738766.0000	Ntol	1,064E+04
5	5,552000E+07	8,939710E+07	1,251383E+08	281602098.0000	Ntol	4,362E+06
6	2,405418E+09	4,074709E+09	5,960655E+09	16503494760.0000	Ntol	2,556E+09
7	1,113106E+11	1,962081E+11	2,972100E+11	930380182553.0000	Ntol	1,804E+11
8	5,463511E+12	1,000103E+13	1,557802E+13	51033274718180.0000	Ntol	7,290E+12
9	2,831905E+14	5,335355E+14	8,524676E+14	2848039273607960.0021	Ntol	–

Таблица II.2.30.1

Z_{-30; 30}

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	3,445E+02	2,712E+02	1,022E+00	8,249E-01	3,077E-01
3	9,783E+03	9,114E+03	1,624E+00	3,414E+00	2,768E-02
4	3,258E+05	3,398E+05	2,114E+00	6,632E+00	3,000E-03
5	1,226E+07	1,390E+07	2,541E+00	1,028E+01	1,597E-03
6	5,089E+08	6,165E+08	2,929E+00	1,441E+01	1,510E-03
7	2,293E+10	2,933E+10	3,284E+00	1,887E+01	1,335E-03
8	1,109E+12	1,486E+12	3,625E+00	2,389E+01	1,308E-03
9	5,708E+13	7,959E+13	3,931E+00	2,879E+01	1,192E-03

Таблица II.2.30.2

 $Z_{-30; 30}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	1,155000E+03	1,446000E+03	1,623000E+03	1800.0000	5,000E-05	0,000E+00
3	4,096200E+04	5,700100E+04	7,011200E+04	101893.0000	Ntol	1,684E+03
4	1,575340E+06	2,378831E+06	3,164031E+06	6568650.0000	Ntol	4,967E+05
5	6,559680E+07	1,055953E+08	1,478821E+08	331355380.0000	Ntol	2,132E+07
6	2,937837E+09	4,973245E+09	7,272927E+09	17361895768.0000	Ntol	2,310E+08
7	1,404297E+11	2,482352E+11	3,758200E+11	1132080271560.0000	Ntol	9,949E+10
8	7,132860E+12	1,303380E+13	2,033494E+13	64566183973153.9999	Ntol	5,269E+12
9	3,824480E+14	7,195210E+14	1,149038E+15	3500101905228120.0017	Ntol	—

Таблица II.2.31.1

 $Z_{-31; 31}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	3,674E+02	2,893E+02	1,022E+00	8,251E-01	2,841E-01
3	1,078E+04	1,004E+04	1,624E+00	3,416E+00	2,448E-02
4	3,708E+05	3,866E+05	2,114E+00	6,626E+00	2,630E-03
5	1,441E+07	1,633E+07	2,541E+00	1,030E+01	1,603E-03
6	6,176E+08	7,480E+08	2,925E+00	1,436E+01	1,395E-03
7	2,875E+10	3,678E+10	3,287E+00	1,891E+01	1,300E-03
8	1,436E+12	1,923E+12	3,614E+00	2,362E+01	1,233E-03
9	7,630E+13	1,064E+14	3,941E+00	2,913E+01	1,195E-03

Таблица II.2.31.2

 $Z_{-31; 31}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	1,232000E+03	1,540000E+03	1,736000E+03	1922.0000	4,900E-05	0,000E+00
3	4,512000E+04	6,277700E+04	7,732000E+04	116702.0000	Ntol	4,513E+03
4	1,792125E+06	2,706870E+06	3,589695E+06	7595674.0000	Ntol	3,312E+05
5	7,703094E+07	1,240585E+08	1,740086E+08	413920839.0000	Ntol	2,392E+07
6	3,562809E+09	6,032987E+09	8,821171E+09	23524790090.9999	Ntol	2,766E+09
7	1,761426E+11	3,110849E+11	4,710831E+11	1697286002891.9999	Ntol	3,209E+11
8	9,229563E+12	1,686710E+13	2,625344E+13	84650142821385.0000	Ntol	4,732E+12
9	5,113836E+14	9,617181E+14	1,542339E+15	6933854743627368.0034	Ntol	—

Таблица II.2.32.1

 $Z_{-32; 32}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	3,911E+02	3,080E+02	1,022E+00	8,253E-01	2,701E-01
3	1,184E+04	1,103E+04	1,624E+00	3,414E+00	2,281E-02
4	4,202E+05	4,382E+05	2,114E+00	6,631E+00	2,537E-03
5	1,684E+07	1,910E+07	2,541E+00	1,029E+01	1,542E-03
6	7,449E+08	9,022E+08	2,926E+00	1,437E+01	1,391E-03
7	3,578E+10	4,576E+10	3,283E+00	1,883E+01	1,291E-03
8	1,844E+12	2,471E+12	3,620E+00	2,369E+01	1,175E-03
9	1,011E+14	1,410E+14	3,938E+00	2,903E+01	1,152E-03

Таблица II.2.32.2

Z_{-32; 32}

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	1,312000E+03	1,643000E+03	1,833000E+03	2048.0000	4,950E-05	0,000E+00
3	4,956000E+04	6,892200E+04	8,475200E+04	120714.0000	Ntol	1,796E+03
4	2,031466E+06	3,069588E+06	4,071364E+06	8122780.0000	Ntol	2,567E+05
5	9,008829E+07	1,450944E+08	2,032045E+08	485864277.0000	Ntol	2,850E+07
6	4,299813E+09	7,276813E+09	1,063497E+10	29266669215.9999	Ntol	1,503E+09
7	2,193426E+11	3,869275E+11	5,855680E+11	1687311382974.0000	Ntol	6,705E+10
8	1,185505E+13	2,167601E+13	3,378339E+13	99753135677546.0000	Ntol	9,662E+12
9	6,770102E+14	1,274767E+15	2,036625E+15	6429711748058809.0000	Ntol	–

Таблица II.2.33.1

Z_{-33; 33}

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	4,156E+02	3,272E+02	1,022E+00	8,257E-01	2,564E-01
3	1,296E+04	1,208E+04	1,624E+00	3,414E+00	2,115E-02
4	4,743E+05	4,946E+05	2,113E+00	6,623E+00	2,398E-03
5	1,960E+07	2,223E+07	2,540E+00	1,029E+01	1,472E-03
6	8,937E+08	1,082E+09	2,924E+00	1,435E+01	1,282E-03
7	4,424E+10	5,661E+10	3,286E+00	1,887E+01	1,258E-03
8	2,350E+12	3,149E+12	3,623E+00	2,385E+01	1,179E-03
9	1,328E+14	1,853E+14	3,946E+00	2,932E+01	1,135E-03

Таблица II.2.33.2

Z_{-33; 33}

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	1,393000E+03	1,743000E+03	1,952000E+03	2178.0000	3,800E-05	0,000E+00
3	5,429000E+04	7,549300E+04	9,296700E+04	135702.0000	Ntol	5,039E+03
4	2,292806E+06	3,462503E+06	4,594998E+06	9021030.0000	Ntol	3,324E+05
5	1,048570E+08	1,687538E+08	2,367880E+08	589474981.0000	Ntol	8,836E+07
6	5,158067E+09	8,725502E+09	1,276844E+10	34014422012.0000	Ntol	7,653E+08
7	2,710137E+11	4,791643E+11	7,228395E+11	2371428685872.0000	Ntol	2,461E+11
8	1,510981E+13	2,763006E+13	4,296851E+13	149778649090455.0000	Ntol	9,764E+12
9	8,895541E+14	1,674484E+15	2,677863E+15	8996965650441792.0063	Ntol	–

Таблица II.2.34.1

Z_{-34; 34}

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	4,408E+02	3,470E+02	1,022E+00	8,255E-01	2,416E-01
3	1,416E+04	1,319E+04	1,624E+00	3,417E+00	1,950E-02
4	5,335E+05	5,563E+05	2,114E+00	6,628E+00	2,242E-03
5	2,271E+07	2,574E+07	2,540E+00	1,029E+01	1,484E-03
6	1,066E+09	1,292E+09	2,928E+00	1,440E+01	1,281E-03
7	5,435E+10	6,953E+10	3,284E+00	1,883E+01	1,172E-03
8	2,973E+12	3,985E+12	3,621E+00	2,373E+01	1,108E-03
9	1,731E+14	2,413E+14	3,936E+00	2,909E+01	1,060E-03

Таблица II.2.34.2

 $Z_{-34; 34}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	1,478000E+03	1,850000E+03	2,077000E+03	2312.0000	4,400E-05	0,000E+00
3	5,929000E+04	8,242000E+04	1,016480E+05	148256.0000	Ntol	2,856E+03
4	2,578708E+06	3,896794E+06	5,171672E+06	11293042.0000	Ntol	1,101E+06
5	1,214122E+08	1,953233E+08	2,744064E+08	626577307.0000	Ntol	1,118E+07
6	6,153961E+09	1,042332E+10	1,523173E+10	43420118673.0000	Ntol	4,718E+09
7	3,331482E+11	5,877111E+11	8,893860E+11	2730634878031.9999	Ntol	2,858E+11
8	1,912190E+13	3,499079E+13	5,431985E+13	196942134429654.9999	Ntol	3,598E+13
9	1,159231E+15	2,180823E+15	3,488126E+15	15469068882608446.9990	Ntol	—

Таблица II.2.35.1

 $Z_{-35; 35}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	4,666E+02	3,674E+02	1,022E+00	8,255E-01	2,305E-01
3	1,543E+04	1,437E+04	1,625E+00	3,417E+00	1,797E-02
4	5,981E+05	6,237E+05	2,113E+00	6,623E+00	2,115E-03
5	2,620E+07	2,970E+07	2,538E+00	1,027E+01	1,340E-03
6	1,265E+09	1,533E+09	2,925E+00	1,434E+01	1,265E-03
7	6,638E+10	8,491E+10	3,283E+00	1,883E+01	1,181E-03
8	3,737E+12	5,008E+12	3,626E+00	2,390E+01	1,092E-03
9	2,239E+14	3,122E+14	3,942E+00	2,922E+01	1,045E-03

Таблица II.2.35.2

 $Z_{-35; 35}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	1,565000E+03	1,959000E+03	2,205000E+03	2450.0000	3,300E-05	0,000E+00
3	6,460100E+04	8,987800E+04	1,106050E+05	155225.0000	Ntol	1,820E+03
4	2,890350E+06	4,366968E+06	5,802900E+06	12634908.0000	Ntol	4,234E+05
5	1,400553E+08	2,253401E+08	3,159280E+08	681265853.9999	Ntol	1,088E+07
6	7,300465E+09	1,236870E+10	1,810254E+10	43701339827.0000	Ntol	1,731E+09
7	4,064369E+11	7,186052E+11	1,088462E+12	2916242693223.9999	Ntol	2,781E+11
8	2,403058E+13	4,398710E+13	6,827392E+13	258447240876529.0005	Ntol	4,151E+13
9	1,498786E+15	2,820216E+15	4,521559E+15	18046999520890351.0703	Ntol	—

Таблица II.2.36.1

 $Z_{-36; 36}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	4,934E+02	3,884E+02	1,022E+00	8,246E-01	2,250E-01
3	1,677E+04	1,562E+04	1,625E+00	3,417E+00	1,723E-02
4	6,684E+05	6,970E+05	2,114E+00	6,627E+00	2,062E-03
5	3,010E+07	3,412E+07	2,539E+00	1,027E+01	1,340E-03
6	1,495E+09	1,812E+09	2,928E+00	1,439E+01	1,271E-03
7	8,064E+10	1,032E+11	3,286E+00	1,888E+01	1,148E-03
8	4,668E+12	6,255E+12	3,619E+00	2,372E+01	1,060E-03
9	2,874E+14	4,010E+14	3,942E+00	2,903E+01	1,015E-03

Таблица II.2.36.2

Z_{-36; 36}

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	1,654000E+03	2,070000E+03	2,314000E+03	2592.0000	3,000E-05	0,000E+00
3	7,024000E+04	9,770300E+04	1,201580E+05	181044.0000	Ntol	1,074E+04
4	3,231846E+06	4,879305E+06	6,487695E+06	13347631.0000	Ntol	5,540E+05
5	1,610171E+08	2,589650E+08	3,622591E+08	910477516.0000	Ntol	8,935E+07
6	8,626716E+09	1,461456E+10	2,135410E+10	54831445394.9999	Ntol	4,888E+09
7	4,938180E+11	8,721499E+11	1,319761E+12	3713651975179.9999	Ntol	3,653E+11
8	3,002076E+13	5,491152E+13	8,560018E+13	300825502083438.9892	Ntol	3,983E+13
9	1,924936E+15	3,630693E+15	5,805054E+15	22173439428296628.0175	Ntol	–

Таблица II.2.37.1

Z_{-37; 37}

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	5,208E+02	4,100E+02	1,023E+00	8,268E-01	2,090E-01
3	1,818E+04	1,694E+04	1,625E+00	3,419E+00	1,549E-02
4	7,449E+05	7,768E+05	2,114E+00	6,631E+00	1,951E-03
5	3,446E+07	3,906E+07	2,539E+00	1,027E+01	1,300E-03
6	1,759E+09	2,130E+09	2,925E+00	1,436E+01	1,181E-03
7	9,744E+10	1,247E+11	3,286E+00	1,891E+01	1,078E-03
8	5,793E+12	7,759E+12	3,617E+00	2,370E+01	1,068E-03
9	3,665E+14	5,112E+14	3,944E+00	2,928E+01	9,330E-04

Таблица II.2.37.2

Z_{-37; 37}

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	1,746000E+03	2,185000E+03	2,448000E+03	2738.0000	2,250E-05	0,000E+00
3	7,612500E+04	1,059570E+05	1,305410E+05	188367.0000	Ntol	3,959E+03
4	3,599400E+06	5,443170E+06	7,235040E+06	15345932.0000	Ntol	3,796E+05
5	1,842889E+08	2,965482E+08	4,153723E+08	922246442.9999	Ntol	6,035E+07
6	1,014820E+10	1,715932E+10	2,505737E+10	63180163355.0000	Ntol	1,784E+09
7	5,971863E+11	1,054696E+12	1,594967E+12	5417528097525.0000	Ntol	7,534E+11
8	3,725243E+13	6,805990E+13	1,065486E+14	318122999319967.9999	Ntol	4,797E+12
9	2,455332E+15	4,620097E+15	7,376747E+15	26820777119335998.0019	Ntol	–

Таблица II.2.38.1

Z_{-38; 38}

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	5,489E+02	4,322E+02	1,022E+00	8,251E-01	1,982E-01
3	1,967E+04	1,833E+04	1,625E+00	3,418E+00	1,456E-02
4	8,275E+05	8,629E+05	2,114E+00	6,625E+00	1,855E-03
5	3,930E+07	4,456E+07	2,541E+00	1,029E+01	1,242E-03
6	2,059E+09	2,495E+09	2,926E+00	1,436E+01	1,138E-03
7	1,171E+11	1,499E+11	3,291E+00	1,901E+01	1,050E-03
8	7,152E+12	9,581E+12	3,618E+00	2,366E+01	1,001E-03
9	4,646E+14	6,478E+14	3,934E+00	2,888E+01	9,740E-04

Таблица II.2.38.2

 $Z_{-38; 38}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	1,840000E+03	2,304000E+03	2,588000E+03	2888.0000	2,050E-05	0,000E+00
3	8,239800E+04	1,146480E+05	1,411520E+05	198924.0000	Ntol	7,170E+02
4	3,999760E+06	6,045948E+06	8,020464E+06	15629344.0000	Ntol	7,151E+05
5	2,102641E+08	3,382737E+08	4,745816E+08	1230724999.9999	Ntol	1,174E+08
6	1,187979E+10	2,012791E+10	2,947800E+10	86621856703.9999	Ntol	1,459E+10
7	7,177674E+11	1,266666E+12	1,922747E+12	5510630163656.9999	Ntol	5,293E+11
8	4,599036E+13	8,406099E+13	1,309909E+14	350442587604969.9999	Ntol	—
9	3,112351E+15	5,855243E+15	9,359062E+15	28945657921161992.0390	Ntol	—

Таблица II.2.39.1

 $Z_{-39; 39}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	5,778E+02	4,549E+02	1,022E+00	8,243E-01	1,899E-01
3	2,125E+04	1,980E+04	1,624E+00	3,417E+00	1,354E-02
4	9,168E+05	9,560E+05	2,113E+00	6,619E+00	1,792E-03
5	4,468E+07	5,066E+07	2,542E+00	1,031E+01	1,236E-03
6	2,402E+09	2,910E+09	2,928E+00	1,438E+01	1,132E-03
7	1,402E+11	1,794E+11	3,284E+00	1,887E+01	1,016E-03
8	8,782E+12	1,177E+13	3,623E+00	2,383E+01	9,880E-04
9	5,854E+14	8,165E+14	3,940E+00	2,917E+01	9,000E-04

Таблица II.2.39.2

 $Z_{-39; 39}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	1,938000E+03	2,423000E+03	2,730000E+03	3042.0000	2,200E-05	0,000E+00
3	8,901100E+04	1,238400E+05	1,524830E+05	218156.0000	Ntol	2,270E+03
4	4,429812E+06	6,695638E+06	8,881626E+06	17189642.0000	Ntol	7,203E+04
5	2,389640E+08	3,850575E+08	5,395963E+08	1299770439.9999	Ntol	3,487E+07
6	1,386189E+10	2,348531E+10	3,429037E+10	93437268790.0000	Ntol	6,330E+09
7	8,591103E+11	1,517140E+12	2,291010E+12	7584200661498.9999	Ntol	1,225E+12
8	5,647680E+13	1,032782E+14	1,609445E+14	471330848519586.0000	Ntol	—
9	3,921136E+15	7,391775E+15	1,178953E+16	53094770910354235.9414	Ntol	—

Таблица II.2.40.1

 $Z_{-40; 40}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	6,074E+02	4,782E+02	1,022E+00	8,252E-01	1,852E-01
3	2,291E+04	2,134E+04	1,624E+00	3,416E+00	1,292E-02
4	1,013E+06	1,057E+06	2,113E+00	6,624E+00	1,680E-03
5	5,063E+07	5,740E+07	2,540E+00	1,027E+01	1,216E-03
6	2,791E+09	3,381E+09	2,928E+00	1,442E+01	1,129E-03
7	1,670E+11	2,136E+11	3,283E+00	1,886E+01	1,021E-03
8	1,073E+13	1,437E+13	3,618E+00	2,370E+01	9,670E-04
9	7,328E+14	1,022E+15	3,940E+00	2,896E+01	9,370E-04

Таблица II.2.40.2

Z_{-40; 40}

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	2,037000E+03	2,550000E+03	2,852000E+03	3200.0000	2,400E-05	0,000E+00
3	9,592200E+04	1,334940E+05	1,643330E+05	241326.0000	Ntol	9,935E+03
4	4,897860E+06	7,397507E+06	9,833440E+06	20153848.0000	Ntol	1,732E+06
5	2,708340E+08	4,356703E+08	6,105762E+08	1321579259.0000	Ntol	2,855E+06
6	1,611106E+10	2,726261E+10	3,985353E+10	123515844995.0000	Ntol	2,027E+10
7	1,023029E+12	1,806094E+12	2,735110E+12	8594111137711.9999	Ntol	8,176E+11
8	6,898174E+13	1,261043E+14	1,964071E+14	623018327751903.9998	Ntol	–
9	4,909461E+15	9,243628E+15	1,481366E+16	45123079374000696.0195	Ntol	–

Таблица II.2.41.1

Z_{-41; 41}

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	6,378E+02	5,022E+02	1,022E+00	8,254E-01	1,735E-01
3	2,464E+04	2,296E+04	1,624E+00	3,414E+00	1,190E-02
4	1,117E+06	1,165E+06	2,115E+00	6,632E+00	1,677E-03
5	5,720E+07	6,485E+07	2,540E+00	1,028E+01	1,220E-03
6	3,230E+09	3,913E+09	2,927E+00	1,439E+01	1,080E-03
7	1,981E+11	2,535E+11	3,284E+00	1,885E+01	9,815E-04
8	1,304E+13	1,747E+13	3,620E+00	2,384E+01	9,190E-04
9	9,129E+14	1,273E+15	3,940E+00	2,920E+01	8,950E-04

Таблица II.2.41.2

Z_{-41; 41}

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	2,140000E+03	2,676000E+03	3,001000E+03	3362.0000	1,850E-05	0,000E+00
3	1,032000E+05	1,436240E+05	1,766760E+05	256160.0000	Ntol	2,094E+03
4	5,402884E+06	8,159342E+06	1,082104E+07	24030412.0000	Ntol	2,921E+06
5	3,061242E+08	4,926675E+08	6,889385E+08	1651011302.0000	Ntol	1,121E+08
6	1,864328E+10	3,156370E+10	4,616835E+10	127330385921.9999	Ntol	1,193E+09
7	1,213773E+12	2,140084E+12	3,242179E+12	10470743894572.9999	Ntol	2,754E+11
8	8,386242E+13	1,531406E+14	2,386751E+14	793389761070597.9998	Ntol	–
9	6,112795E+15	1,151778E+16	1,839879E+16	66588822644223960.9765	Ntol	–

Таблица II.2.42.1

Z_{-42; 42}

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	6,690E+02	5,267E+02	1,022E+00	8,265E-01	1,690E-01
3	2,647E+04	2,466E+04	1,624E+00	3,416E+00	1,125E-02
4	1,229E+06	1,281E+06	2,115E+00	6,634E+00	1,603E-03
5	6,443E+07	7,306E+07	2,541E+00	1,029E+01	1,129E-03
6	3,726E+09	4,514E+09	2,929E+00	1,440E+01	1,066E-03
7	2,340E+11	2,993E+11	3,282E+00	1,880E+01	9,630E-04
8	1,577E+13	2,113E+13	3,616E+00	2,360E+01	9,230E-04
9	1,131E+15	1,578E+15	3,952E+00	2,945E+01	8,880E-04

Таблица II.2.42.2

 $Z_{-42; 42}$

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	2,243000E+03	2,808000E+03	3,154000E+03	3528.0000	7,000E-06	0,000E+00
3	1,108160E+05	1,542600E+05	1,897280E+05	274300.0000	Ntol	4,458E+03
4	5,942200E+06	8,973950E+06	1,193295E+07	25791419.0000	Ntol	1,439E+06
5	3,446951E+08	5,547228E+08	7,790306E+08	2037082669.0000	Ntol	4,351E+08
6	2,150081E+10	3,640824E+10	5,332122E+10	135664125488.0000	Ntol	5,608E+09
7	1,433364E+12	2,530314E+12	3,828590E+12	10390696211482.0000	Ntol	8,038E+11
8	1,014208E+14	1,854398E+14	2,892942E+14	883277641356936.0018	Ntol	—
9	7,573891E+15	1,426732E+16	2,287770E+16	87468097803158939.9765	Ntol	—

Таблица II.2.43.1

 $Z_{-43; 43}$

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	7,007E+02	5,517E+02	1,022E+00	8,259E-01	1,592E-01
3	2,838E+04	2,644E+04	1,624E+00	3,416E+00	1,037E-02
4	1,349E+06	1,406E+06	2,114E+00	6,632E+00	1,503E-03
5	7,238E+07	8,207E+07	2,541E+00	1,030E+01	1,145E-03
6	4,285E+09	5,190E+09	2,929E+00	1,444E+01	1,029E-03
7	2,754E+11	3,523E+11	3,284E+00	1,887E+01	9,830E-04
8	1,900E+13	2,545E+13	3,616E+00	2,365E+01	9,160E-04
9	1,394E+15	1,945E+15	3,942E+00	2,906E+01	8,930E-04

Таблица II.2.43.2

 $Z_{-43; 43}$

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	2,350000E+03	2,940000E+03	3,292000E+03	3698.0000	1,600E-05	0,000E+00
3	1,188350E+05	1,653140E+05	2,035980E+05	287725.0000	Ntol	2,463E+03
4	6,518270E+06	9,849510E+06	1,308098E+07	26919192.0000	Ntol	1,554E+06
5	3,871578E+08	6,231288E+08	8,756496E+08	2011922451.9999	Ntol	1,645E+07
6	2,472008E+10	4,184257E+10	6,123341E+10	189191064991.0000	Ntol	1,040E+10
7	1,687344E+12	2,977812E+12	4,505404E+12	13254439485289.9999	Ntol	1,184E+12
8	1,221858E+14	2,231314E+14	3,478557E+14	1006099459755699.0000	Ntol	—
9	9,342606E+15	1,761423E+16	2,818507E+16	92270280092214626.0234	Ntol	—

Таблица II.2.44.1

 $Z_{-44; 44}$

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	7,333E+02	5,774E+02	1,022E+00	8,260E-01	1,542E-01
3	3,038E+04	2,831E+04	1,625E+00	3,418E+00	9,859E-03
4	1,477E+06	1,540E+06	2,113E+00	6,623E+00	1,439E-03
5	8,107E+07	9,193E+07	2,540E+00	1,028E+01	1,121E-03
6	4,911E+09	5,950E+09	2,926E+00	1,435E+01	1,024E-03
7	3,229E+11	4,131E+11	3,285E+00	1,892E+01	9,275E-04
8	2,279E+13	3,053E+13	3,618E+00	2,370E+01	8,420E-04
9	1,711E+15	2,388E+15	3,946E+00	2,908E+01	8,340E-04

Таблица II.2.44.2

Z_{-44; 44}

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	2,459000E+03	3,078000E+03	3,444000E+03	3872.0000	1,500E-05	0,000E+00
3	1,272150E+05	1,770160E+05	2,180500E+05	315710.0000	Ntol	1,557E+03
4	7,140180E+06	1,078074E+07	1,431522E+07	32307177.0000	Ntol	1,964E+06
5	4,335849E+08	6,986108E+08	9,770235E+08	2081319656.0000	Ntol	3,283E+07
6	2,835257E+10	4,803058E+10	7,004545E+10	183576787602.9999	Ntol	1,022E+10
7	1,977820E+12	3,490723E+12	5,278576E+12	18383158928673.0000	Ntol	3,839E+12
8	1,466062E+14	2,678135E+14	4,167058E+14	1276510489965368.0000	Ntol	—
9	1,146169E+16	2,162325E+16	3,461220E+16	116161123404433647.9921	Ntol	—

Таблица II.2.45.1

Z_{-45; 45}

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	7,667E+02	6,037E+02	1,022E+00	8,261E-01	1,494E-01
3	3,248E+04	3,027E+04	1,625E+00	3,418E+00	9,494E-03
4	1,614E+06	1,683E+06	2,114E+00	6,627E+00	1,392E-03
5	9,062E+07	1,027E+08	2,541E+00	1,030E+01	1,068E-03
6	5,611E+09	6,797E+09	2,926E+00	1,436E+01	9,270E-04
7	3,773E+11	4,828E+11	3,286E+00	1,888E+01	9,450E-04
8	2,723E+13	3,647E+13	3,618E+00	2,375E+01	8,010E-04
9	2,090E+15	2,915E+15	3,938E+00	2,898E+01	7,790E-04

Таблица II.2.45.2

Z_{-45; 45}

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	2,572000E+03	3,217000E+03	3,608000E+03	4050.0000	1,200E-05	0,000E+00
3	1,360420E+05	1,892940E+05	2,331000E+05	333132.0000	Ntol	4,682E+03
4	7,802322E+06	1,178516E+07	1,563467E+07	30817008.0000	Ntol	1,825E+06
5	4,847588E+08	7,807984E+08	1,091192E+09	2392597827.0000	Ntol	1,226E+08
6	3,237684E+10	5,486842E+10	8,020694E+10	209669966216.0000	Ntol	1,912E+10
7	2,312344E+12	4,082268E+12	6,188092E+12	20251218850424.0000	Ntol	3,884E+12
8	1,750095E+14	3,199725E+14	4,977945E+14	1532194600067219.9992	Ntol	—
9	1,399884E+16	2,636169E+16	4,216136E+16	137007861642246004.0312	Ntol	—

Таблица II.2.46.1

Z_{-46; 46}

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	8,007E+02	6,305E+02	1,023E+00	8,273E-01	1,425E-01
3	3,467E+04	3,230E+04	1,624E+00	3,414E+00	8,840E-03
4	1,761E+06	1,837E+06	2,114E+00	6,631E+00	1,367E-03
5	1,010E+08	1,146E+08	2,541E+00	1,030E+01	1,068E-03
6	6,394E+09	7,745E+09	2,927E+00	1,440E+01	9,465E-04
7	4,393E+11	5,620E+11	3,286E+00	1,891E+01	8,965E-04
8	3,240E+13	4,342E+13	3,620E+00	2,373E+01	8,230E-04
9	2,541E+15	3,545E+15	3,948E+00	2,935E+01	7,960E-04

Таблица II.2.46.2

 $Z_{-46; 46}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	2,685000E+03	3,361000E+03	3,776000E+03	4232.0000	1,100E-05	0,000E+00
3	1,451700E+05	2,020220E+05	2,486790E+05	359478.0000	Ntol	7,214E+03
4	8,513352E+06	1,286050E+07	1,709136E+07	33326768.0000	Ntol	1,269E+05
5	5,404116E+08	8,698208E+08	1,219676E+09	2996675478.0000	Ntol	2,248E+08
6	3,688953E+10	6,250220E+10	9,143495E+10	254077388194.0000	Ntol	9,171E+09
7	2,691239E+12	4,749581E+12	7,177914E+12	22008671601503.9999	Ntol	3,105E+12
8	2,085102E+14	3,807216E+14	5,938056E+14	1725699612366679.9996	Ntol	—
9	1,702513E+16	3,207469E+16	5,131790E+16	194842498930197932.9843	Ntol	—

Таблица II.2.47.1

 $Z_{-47; 47}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	8,355E+02	6,579E+02	1,022E+00	8,257E-01	1,347E-01
3	3,696E+04	3,443E+04	1,625E+00	3,418E+00	8,199E-03
4	1,917E+06	1,999E+06	2,114E+00	6,628E+00	1,346E-03
5	1,124E+08	1,274E+08	2,542E+00	1,031E+01	1,031E-03
6	7,263E+09	8,800E+09	2,929E+00	1,441E+01	9,430E-04
7	5,099E+11	6,525E+11	3,285E+00	1,886E+01	8,835E-04
8	3,841E+13	5,146E+13	3,620E+00	2,375E+01	7,890E-04
9	3,079E+15	4,296E+15	3,942E+00	2,907E+01	7,760E-04

Таблица II.2.47.2

 $Z_{-47; 47}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	2,802000E+03	3,507000E+03	3,929000E+03	4418.0000	1,000E-05	0,000E+00
3	1,547400E+05	2,153640E+05	2,652300E+05	371767.0000	Ntol	7,112E+03
4	9,271677E+06	1,400251E+07	1,860948E+07	37056922.0000	Ntol	1,594E+06
5	6,009653E+08	9,684528E+08	1,356063E+09	3316116582.0000	Ntol	2,828E+07
6	4,190691E+10	7,102100E+10	1,036874E+11	284038496455.9999	Ntol	2,449E+10
7	3,125380E+12	5,517216E+12	8,347140E+12	23863501219175.0000	Ntol	3,034E+12
8	2,470156E+14	4,519351E+14	7,018987E+14	2234457990022426.9996	Ntol	—
9	2,062930E+16	3,887423E+16	6,223196E+16	226140123762400618.0000	Ntol	—

Таблица II.2.48.1

 $Z_{-48; 48}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	8,711E+02	6,859E+02	1,022E+00	8,256E-01	1,325E-01
3	3,934E+04	3,665E+04	1,624E+00	3,414E+00	7,871E-03
4	2,084E+06	2,173E+06	2,114E+00	6,625E+00	1,296E-03
5	1,247E+08	1,414E+08	2,541E+00	1,030E+01	9,995E-04
6	8,231E+09	9,971E+09	2,929E+00	1,442E+01	9,265E-04
7	5,900E+11	7,548E+11	3,286E+00	1,892E+01	8,445E-04
8	4,538E+13	6,080E+13	3,624E+00	2,385E+01	7,800E-04
9	3,712E+15	5,179E+15	3,948E+00	2,920E+01	7,400E-04

Таблица II.2.48.2

Z_{-48; 48}

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	2,921000E+03	3,655000E+03	4,094000E+03	4608.0000	7,500E-06	0,000E+00
3	1,647120E+05	2,290410E+05	2,820070E+05	417696.0000	Ntol	3,309E+03
4	1,007616E+07	1,521271E+07	2,022099E+07	41845634.0000	Ntol	2,767E+06
5	6,669031E+08	1,073519E+09	1,504536E+09	3657370155.0000	Ntol	3,169E+08
6	4,749096E+10	8,051124E+10	1,176572E+11	326860970942.0000	Ntol	3,670E+10
7	3,613195E+12	6,379651E+12	9,663902E+12	30629092934596.0000	Ntol	3,552E+12
8	2,918025E+14	5,334375E+14	8,337150E+14	2612870055201924.0000	Ntol	—
9	2,487275E+16	4,687689E+16	7,509794E+16	238373068750558039.0312	Ntol	—

Таблица II.2.49.1

Z_{-49; 49}

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	9,075E+02	7,145E+02	1,022E+00	8,251E-01	1,269E-01
3	4,183E+04	3,897E+04	1,624E+00	3,416E+00	7,415E-03
4	2,261E+06	2,358E+06	2,114E+00	6,629E+00	1,275E-03
5	1,381E+08	1,566E+08	2,542E+00	1,031E+01	9,715E-04
6	9,303E+09	1,127E+10	2,925E+00	1,435E+01	9,050E-04
7	6,805E+11	8,707E+11	3,286E+00	1,889E+01	8,355E-04
8	5,343E+13	7,161E+13	3,624E+00	2,386E+01	7,630E-04
9	4,461E+15	6,225E+15	3,950E+00	2,931E+01	7,250E-04

Таблица II.2.49.2

Z_{-49; 49}

n	det _{0,99}	det _{0,999}	det _{0,9999}	det _{max}	N _{max}	δ _{max}
2	3,042000E+03	3,808000E+03	4,273000E+03	4802.0000	7,500E-06	0,000E+00
3	1,751480E+05	2,435970E+05	3,000200E+05	443588.0000	Ntol	1,999E+04
4	1,093475E+07	1,650359E+07	2,194056E+07	44070504.0000	Ntol	1,367E+06
5	7,386105E+08	1,189206E+09	1,667429E+09	4065941847.9999	Ntol	3,374E+08
6	5,369342E+10	9,093065E+10	1,326688E+11	382009941414.0000	Ntol	4,289E+10
7	4,169832E+12	7,358310E+12	1,116300E+13	32855794256549.9999	Ntol	2,702E+12
8	3,438300E+14	6,278462E+14	9,802084E+14	3362362749013673.0002	Ntol	—
9	2,990132E+16	5,629288E+16	9,021173E+16	325634924614431851.0312	Ntol	—

Таблица II.2.50.1

Z_{-50; 50}

n	μ	σ	a _x	e _x	N _{zeroes}
2	9,445E+02	7,437E+02	1,022E+00	8,261E-01	1,229E-01
3	4,442E+04	4,138E+04	1,624E+00	3,414E+00	7,185E-03
4	2,450E+06	2,555E+06	2,115E+00	6,643E+00	1,210E-03
5	1,526E+08	1,731E+08	2,542E+00	1,029E+01	9,620E-04
6	1,049E+10	1,271E+10	2,926E+00	1,436E+01	8,900E-04
7	7,829E+11	1,002E+12	3,287E+00	1,895E+01	8,445E-04
8	6,269E+13	8,400E+13	3,619E+00	2,368E+01	7,360E-04
9	5,342E+15	7,451E+15	3,937E+00	2,889E+01	6,940E-04

Таблица II.2.50.2

 $Z_{-50; 50}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	3,168000E+03	3,962000E+03	4,452000E+03	5000.0000	1,100E-05	0,000E+00
3	1,860040E+05	2,587850E+05	3,186620E+05	471020.0000	Ntol	5,000E+03
4	1,184870E+07	1,790760E+07	2,379360E+07	53355354.0000	Ntol	6,469E+06
5	8,165250E+08	1,315727E+09	1,840410E+09	4131587444.0000	Ntol	1,513E+08
6	6,051012E+10	1,025365E+11	1,496920E+11	364927623141.0000	Ntol	2,171E+10
7	4,792638E+12	8,470308E+12	1,281115E+13	43913700683732.9999	Ntol	2,216E+12
8	4,033328E+14	7,366528E+14	1,148878E+15	3374243444976200.0004	Ntol	—
9	3,578400E+16	6,739950E+16	1,076376E+17	386277555751364737.9375	Ntol	—

Таблица II.2.51.1

 $Z_{-51; 51}$

n	μ	σ	a_x	e_x	N_{zeroes}
2	9,822E+02	7,733E+02	1,022E+00	8,270E-01	1,184E-01
3	4,710E+04	4,388E+04	1,625E+00	3,421E+00	6,709E-03
4	2,650E+06	2,764E+06	2,114E+00	6,623E+00	1,212E-03
5	1,684E+08	1,909E+08	2,540E+00	1,028E+01	9,475E-04
6	1,180E+10	1,429E+10	2,926E+00	1,438E+01	9,035E-04
7	8,979E+11	1,149E+12	3,284E+00	1,884E+01	7,835E-04
8	7,333E+13	9,829E+13	3,631E+00	2,401E+01	7,610E-04
9	6,372E+15	8,884E+15	3,935E+00	2,897E+01	7,030E-04

Таблица II.2.51.2

 $Z_{-51; 51}$

n	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\max}$	$N_{\max}$	$\delta_{\max}$
2	3,294000E+03	4,124000E+03	4,615000E+03	5202.0000	1,100E-05	0,000E+00
3	1,972490E+05	2,745770E+05	3,378970E+05	479910.0000	Ntol	7,870E+03
4	1,281502E+07	1,934837E+07	2,566307E+07	54002580.0000	Ntol	5,665E+06
5	9,005021E+08	1,449516E+09	2,029898E+09	4562499724.0000	Ntol	5,554E+07
6	6,805780E+10	1,151978E+11	1,685411E+11	603120187778.9999	Ntol	1,326E+11
7	5,500897E+12	9,721666E+12	1,472178E+13	46687323246074.0000	Ntol	5,271E+12
8	4,716504E+14	8,615152E+14	1,352218E+15	3751300787850756.0000	Ntol	—
9	4,266096E+16	8,032968E+16	1,285026E+17	460318390071327527.9375	Ntol	—

Приложение III

В данном приложении для квадратных матриц различных порядков с элементами из Z_m или Z_{-m} ; m для точных распределений их модулей определителей, представленных в [3], [2] и других работах автора, приводятся следующие стохастические характеристики:

μ – математическое ожидание модулей определителей матриц порядка n с элементами из Z_m ;

σ – среднеквадратичное отклонение модулей определителей матриц порядка n с элементами из Z_m ;

a_x – коэффициент асимметрии модулей определителей матриц порядка n с элементами из Z_m ;

e_x – коэффициент эксцесса модулей определителей матриц порядка n с элементами из Z_m ;

$det_{0,99}$ – пороговый детерминант для 99% матриц порядка n с элементами из Z_m ;

$det_{0,999}$ – пороговый детерминант для 99,9% матриц порядка n с элементами из Z_m ;

$det_{0,9999}$ – пороговый детерминант для 99,99% матриц порядка n с элементами из Z_m ;

det_{max} – максимальный определитель матриц порядка n с элементами из Z_m ;

N_{max} – количество максимальных определителей;

N_{zeroes} – количество вырожденных матриц.

Таблица III.1.1.1

Z_2

n	μ	σ
2	0.375000000000000000	0.484122918275927110
3	0.351562500000000000	0.501401843428751266
4	0.384521484375000000	0.566474384287627458
5	0.471210479736328125	0.693603405258840624
6	0.629975460469722747	0.913016795686673439
7	0.902348804061148257	1.283239703176852095
8	1.367639430177307324	1.914855546516313622

Таблица III.1.1.2

Z_2

n	a_x	e_x
2	0.516397779494322251	-1.733333333333333333
3	0.898586798409383654	-0.553525691522083280
4	1.216695550186884119	0.819703376756317337
5	1.525978351864402385	2.592586536650735813
6	1.842843106474175850	4.753448310388435498
7	2.170589353304318132	7.330458348935544405
8	2.502438848390544724	10.294066204435233142

Таблица III.1.1.3

 z_2

n	N_{zeroes}	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}
2	10	1	1	1	1	6
3	338	2	2	2	2	6
4	42976	2	3	3	3	120
5	21040112	3	4	5	5	7200
6	39882864736	4	6	8	9	1058400
7	292604283435872	6	9	13	32	151200
8	8286284310367538176	8	14	20	56	391910400

Таблица III.1.2.1

 z_3

n	μ	σ
2	1.33333333333333333333	1.33333333333333333333
3	2.125285779606767261	2.293673501782464520
4	3.826332974351286826	4.306316425273138213
5	7.542801210323528690	8.799269148961344185
6	16.009272525951297139	19.385612154944185292

Таблица III.1.2.2

 z_3

n	a_x	e_x
2	0.68750000000000000000	-0.56249999999999999999
3	1.268923278961880225	1.649249428127132149
4	1.784949873499084748	4.416159263032214247
5	2.246862811581559822	7.697365524791131239
6	2.652369245805526341	11.316804686237629556

Таблица III.1.2.3

 z_3

n	N_{zeroes}	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}
2	31	4	4	4	4	10
3	6891	8	12	16	16	6
4	12202161	20	28	36	48	120
5	175419087483	40	64	84	160	7200
6	20540753180392401	92	148	210	576	1447200

Таблица III.1.3.1

 z_4

n	μ	σ
2	2.79687500000000000000	2.559783239724606056
3	6.109222412109375000	6.138192039956106639
4	14.919017292559146881	16.059005978712416643
5	39.819210512430558424	45.569066801578674689

Таблица III.1.3.2

 Z_4

n	a_x	e_x
2	0.810534272911460348	-0.157405621900795924
3	1.463946053246321625	2.483382993104105121
4	1.994015696540611561	5.628043059971980607
5	2.437560488209177739	9.167505659226191251

Таблица III.1.3.3

 Z_4

n	N_{zeroes}	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}
2	64	9	9	9	9	14
3	49246	27	36	45	54	6
4	507095392	72	108	140	243	120
5	71807805575944	215	336	462	1215	7200

Таблица III.1.4.1

 Z_5

n	μ	σ
2	4.742400000000000000	4.184452442076501841
3	13.064140800000000000	12.858002378199164106
4	40.168875043690905600	42.923903337468575875
5	135.173981182320644802	154.816003085345231418

Таблица III.1.4.2

 Z_5

n	a_x	e_x
2	0.870332402179229033	0.010645452549275562
3	1.537356345566000078	2.802825785848694488
4	2.059572423519816236	6.054288692980405900
5	2.495691683283471961	9.688922417390611432

Таблица III.1.4.3

 Z_5

n	N_{zeroes}	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}
2	113	16	16	16	16	18
3	228737	56	75	96	128	6
4	9290375857	196	292	384	768	120
5	7862484960624245	728	1160	1602	5120	7200

Таблица III.1.5.1

 Z_6

n	μ	σ
2	7.174382716049382716	6.201514992258539875
3	23.810713877457704618	23.215354453973362912
4	88.192412607870885000	94.053631651954700496

Таблица III.1.5.2

 Z_6

n	a_x	e_x
2	0.904459597409072425	0.097275803534411959
3	1.572689250835981968	2.959221918095041820
4	2.088436254879582788	6.255140189993080792

Таблица III.1.5.3

 Z_6

n	N_{zeroes}	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}
2	170	25	25	25	25	22
3	716214	100	137	175	250	6
4	85050353952	434	646	850	1875	120

Таблица III.1.6.1

 Z_7

n	μ	σ
2	10.082465639316951270	8.622290103678547714
3	39.130355112989032182	38.010726232622458359
4	169.564421797322588764	180.797972501186174491

Таблица III.1.6.2

 Z_7

n	a_x	e_x
2	0.920702049446233308	0.142195178585597405
3	1.588323186200479898	3.035937319046540793
4	2.102245896395610846	6.359777312460325712

Таблица III.1.6.3

 Z_7

n	N_{zeroes}	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}
2	255	36	36	36	36	26
3	2110081	168	225	288	432	6
4	648455378113	836	1248	1644	3888	120

Таблица III.1.7.1

 Z_8

n	μ	σ
2	13.476562500000000000	11.434914218462408299
3	59.853044629096984863	57.994508779946783627
4	296.939121310665427699	316.592209293358829567

Таблица III.1.7.2

 Z_8

n	a_x	e_x
2	0.932140637286703739	0.171220495948236718
3	1.598127489151361376	3.083896568560445499
4	2.110537479793381640	6.424060279120329539

Таблица III.1.7.3

 Z_8

n	N_{zeroes}	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}
2	336	45	49	49	49	30
3	4663844	255	344	441	686	6
4	3121506469744	1464	2190	2891	7203	120

Таблица III.1.8.1

 Z_9

n	μ	σ
2	17.348574912360920591	14.648634887447936934
3	86.766202610414855988	83.960728095617512981
4	484.931183766668242844	517.068917581763323872

Таблица III.1.8.2

 Z_9

n	a_x	e_x
2	0.938158765926220649	0.188602143971110685
3	1.603400776422065656	3.112223875936083922
4	2.115583552106265278	6.464937543561519349

Таблица III.1.8.3

 Z_9

n	N_{zeroes}	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}
2	449	57	64	64	64	34
3	10289331	372	504	638	1024	6
4	14154477941217	2391	3584	4732	12288	120

Таблица III.1.9.1

 Z_{10}

n	μ	σ
2	21.703000000000000000	18.258006216452003388
3	120.686649408000000000	116.673080248489596690

Таблица III.1.9.2

 Z_{10}

n	a_x	e_x
2	0.942298126218372410	0.200533249097426580
3	1.606885551567747237	3.131363120174291193

Таблица III.1.9.3

 Z_{10}

n	N_{zeroes}	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}
2	570	72	81	81	81	38
3	19945864	515	702	888	1458	6

Таблица III.1.10.1

 Z_{11}

n	μ	σ
2	26.537804794754456662	22.265329925143875358
3	162.415450414671645911	156.911508394379205528

Таблица III.1.10.2

 Z_{11}

n	a_x	e_x
2	0.944833376358564109	0.208605316713637435
3	1.609107828359423557	3.144310536833966624

Таблица III.1.10.3

 Z_{11}

n	N_{zeroes}	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}
2	719	90	100	100	100	42
3	37518971	696	943	1197	2000	6

Далее приводятся стохастические параметры для модулей определителей матриц порядка n с элементами из $Z_{-m}; m$.

Таблица III.2.1.1

 $Z_{-1; 1}$

n	μ	σ
2	0.691358024691358024	0.641024937567761459
3	0.924249352232891327	0.961010360336900091
4	1.462834765045170339	1.612716711303005637
5	2.611405551662677127	2.997170362283034800
6	5.1129297808856042678	6.08833520750483672589

Таблица III.2.1.2

 $Z_{-1; 1}$

n	a_x	e_x
2	0.384328369885927124	-0.706727848268453539
3	1.008887257134802750	0.840606464857119561
4	1.549832706960095662	3.284105819120528889
5	2.033541419734499046	6.272124877395181557
6	2.4642605713872132098	9.70354047279395464183

Таблица III.2.1.3

 $Z_{-1; 1}$

n	N_{zeroes}	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}
2	33	2	2	2	2	8
3	7875	4	4	4	4	480
4	15099201	7	10	12	16	768
5	237634987683	14	20	28	48	61440
6	30805715676309201	28	46	64	160	14745600

Таблица III.2.2.1

 $Z_{-2; 2}$

n	μ	σ
2	2.188800000000000000	1.791411331883328240
3	5.047836672000000000	4.745455187103968893
4	13.614500702217830400	14.094160869995425269

Таблица III.2.2.2

 $Z_{-2; 2}$

n	a_x	e_x
2	0.782548417787264608	0.290956178830600785
3	1.450036716015181376	2.609868320737125754
4	1.976610828310890748	5.652706111887407998

Таблица III.2.2.3

 $Z_{-2; 2}$

n	N_{zeroes}	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}
2	129	8	8	8	8	8
3	305381	20	28	32	32	1056
4	14711905729	64	96	124	256	768

Таблица III.2.3.1

 $Z_{-3; 3}$

n	μ	σ
2	4.424822990420658059	3.524335611635870440
3	14.352970033137310377	13.341373663452439088
4	54.453699371944585808	56.380800142512005867

Таблица III.2.3.2

 $Z_{-3; 3}$

n	a_x	e_x
2	0.916261939503201248	0.575334537123072343
3	1.554578200588150215	3.055716529590034636
4	2.055299174857970899	6.175336915556261668

Таблица III.2.3.3

 $Z_{-3; 3}$

n	N_{zeroes}	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}
2	289	15	18	18	18	8
3	2840071	60	81	99	108	1632
4	1060046767489	261	390	510	1296	768

Таблица III.2.4.1

 $Z_{-4; 4}$

n	μ	σ
2	7.393994817863130620	5.849592252653347011
3	30.890306867585415700	28.697852174059700539
4	151.079194320944041452	156.788023939144781546

Таблица III.2.4.2

 $Z_{-4; 4}$

n	a_x	e_x
2	0.963699940556234679	0.681452557876964385
3	1.586797552879578928	3.211369843774818830
4	2.080591136032480449	6.363449793976508630

Таблица III.2.4.3

 $Z_{-4; 4}$

n	N_{zeroes}	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}
2	545	24	32	32	32	8
3	15787785	128	176	217	256	2208
4	27449509271169	726	1089	1440	4096	768

Таблица III.2.5.1

 $Z_{-5; 5}$

n	μ	σ
2	11.104705962707465337	8.757026063784968857
3	56.742130095031018226	52.728840991231499004

Таблица III.2.5.2

 $Z_{-5; 5}$

n	a_x	e_x
2	0.987584462426746949	0.735016711570535951
3	1.601509428672458493	3.286027824348883556

Таблица III.2.5.3

 $Z_{-5; 5}$

n	N_{zeroes}	$\det_{0,99}$	$\det_{0,999}$	$\det_{0,9999}$	$\det_{\text{max}}$	N_{max}
2	833	37	45	50	50	8
3	54304331	237	327	400	500	2784

Приложение IV

Вычисление числа π

Во многих формулах и математических константах часто фигурирует число π , в силу трансцендентности [21] которого задать его можно только численно. В [11] указано довольно точное значение π , но если потребуется большая точность, более тысячи десятичных знаков, то следует обратиться к формуле Мэчина [21] или модифицировать её подобно Л. Эйлеру. Изложим способ вычисления числа π с помощью последовательности, как можно быстрее сходящейся к числу π , но заведомо использующей рациональные дроби с числителем и знаменателем, представленными довольно большими числами.

Для этого необходимо взять $\operatorname{tg} \varphi = p$ и $\operatorname{tg} n\varphi = q$, откуда, согласно Мэчину, при $n = 4$ и $p = 0,5$:

$$\frac{\pi}{4} = n\varphi + \arctan \frac{1-q}{1+q} \quad (\text{IV.1})$$

Возможно меньшие φ и $\frac{1-q}{1+q}$ дают более быстро сходящиеся ряды, поэтому

нас будут интересовать q , как можно более близкие к единице. Соответствующие φ и q довольно быстро отыскиваются в виде рациональных выражений. Например, можно взять $p = 1/651$ и $n = 512$, так что в формуле IV.1 оба члена имеют аргументы почти на порядок меньшие, чем у Мэчина, соответственно и сходятся на порядок быстрее. Следующий порядок скорости сходимости дают $p = 1/1335088$ и $n = 1048576$, но числитель и знаменатель $\operatorname{tg} n\varphi$ уже занимают не страницу формата A4, а больше 4000 данных страниц.

$\operatorname{tg} \varphi = 1 / 651$;

$\operatorname{tg} (512\varphi) = 21877851439980017849557329294745347098553054032209727367894320$
494325024556900235735421205622092373858673564269370685656013212567579879
276195433142366943168060406542186560255498094826894403775059726062138001
589534306867983463753351634367535570298053670145373482689848107147167642
578708783893746669945936811221581775035964556990081046100994613969668103
391398362478206480689031918535775072202090825850141086081317869858470356
720775726770358467884936157208611471728819088754822952369663981327445855
476434859496438561143395300702664901322421177329938941765083648471594018
453821134550333209757433823208861925290959187161216118491282342392030245
932229614405380193095390237807844632224930160348676618145949071486703253
922134801685339847428668527683748360282815214269454315203530837575602869
557363611315062333191207680387724119712746793311457676430601320647232897
419744453208562053399702184132562938999110349091959424572774167021933062
234249338909344636255298497223600581502621943824064478592576993174681905

938305905833817580053660340341988997149250968904199115631089735999408966
425148552501071110107126464906579989443346366736432592072610773434778421
187135067223544534605977318340966152753261172903403715318299264049512624
762668075620991357065409296119606097757273990184950335757890964292033730
559638402531068375870095277333898108610012910987666228991470046420905244
953600 /
218304911210351458068455865850480140564536861342627689270616163269649794
145429148296003165499046683989457668747153608947851047410210642751468698
854724736298677429976132177477693800964696535301362199430217673040480064
559858443429381977416888936181795756602552528910841372293708614760340730
636382666946250872012982478506576329873937855065842306345210199237387752
026878465243957531979273350737824548329130716508854862535627445849649541
743780758872682879193947108590993564290781963903277910046556378706807523
694147895022394880536440899104462892425660703326520826952746270331108986
135025088800108584664302454026773639800562846374935286696515861310210573
095474290421176128137243935965135757940436378902204325416238268553578101
400055269492862379656419804447915846223656996199775869982490942040211210
036269662377017560539547907837043931665636881198974994303688238965992142
620816040647242704229066002987549541557674320199430047749294849464106997
239617827235447215329939344523045244934409409110988618895966158585785788
023140592855045437338782432773820053801151837901436072939923288432943396
571459865996109145865713619183196174451558732572291856940037571512221370
946466511072379928103392883359632631005812716729062620564194619235843469
019045543269245101125359921595931207874746980678051527945883573501791616
33561929523124610714283886774620560542950820264023002411499880166401

$\text{tg}(512\varphi - \pi/4) = 473603189448720427117427096973330420993678979469584408327$
041673600451423573209058208890721877054597277973946553247612281078265588
150010485632568944695381926635445733425077287147304247502449235061191162
342854863004119976194104134366258466766798740944851182297987639699177967
811026747108301084032513117240202835271853069240026872605944103833351470
834676595872755186341646361653378477371283083710172280144304323836049076
121358107725959803919976678692892167608697197323257447559793361903227902
176057541071270237716411558126490208114119748880873728714324315657763193
914207102359368307008774229647424316798882818231811598338537888137223786
598012085570958327640532726249941202386284165845546329802557286389450794
270667769915453343204793822897181063798380236296470886155835532505773537
753533424903114353669535059243337693289290424001448939883107038212168640
735231452389464804493349779137096563387003553949361919925528311622470035
772878386391853828535317537756906066470503174193306235376814781312850852
900797273270315035207681557966081107538718689635240839318409461287054166
375818542128439251235075155503200086275250267492912767188153815877407746
640359129301288978834987393255306268644172979098028224436453930019930931
628390837287190868027384847860070701055976808693974756376900858114974453

732094592408975064463469706666196142218353923504447154087274470440094053
64787199 /
437083425610151636564029158797933611550067401664724962949559368212900039
714431505650215221719970422576193311440860465507983173086009435513423030
278394167979281495397997780032674749233640573051959460051597688935823133
239693080962898321092244639162332458056287355809322443765385040547428569
573849366405618984228800228866221899774748316075788446041891233151371376
808943272134276717337024072758732806830541577322033561120331013057406809
447365437722044451280061825879184451839011487599917723321014933471156118
658533506456347887563089912328674665725050120977357311668686454869320331
638357186374446816752921706936365511412724031287758710616818320632506717
149276221375078506215690258214437361427202560361695040283270807774926118
253453743779547656493903407276067988918200148235084245738519637613847323
186892994289094364416789104964511864780213645504988200776017213163436674
70643657464426454554695392978653032477268565927171717968625471806600386
333064189788432187565945159549264683175054195036758550642785217968844846
361316393391648840758672404266329742843142994212333432934012952684428921
582170967067373794931513513616659841815884653298399591287821783383572043
181911857132153111513054410892244360039849869912055261059320866862524225
228959113923338062321420899168671109724250338256961170866220879098175641
64630305393219888048181995384633471530617049255493048832405125120001

Приведем также численное значение числа π с точностью 10^{-3100} :

$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078$
164062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095505822317
253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644288109756
659334461284756482337867831652712019091456485669234603486104543266482133
936072602491412737245870066063155881748815209209628292540917153643678925
903600113305305488204665213841469519415116094330572703657595919530921861
173819326117931051185480744623799627495673518857527248912279381830119491
298336733624406566430860213949463952247371907021798609437027705392171762
931767523846748184676694051320005681271452635608277857713427577896091736
371787214684409012249534301465495853710507922796892589235420199561121290
219608640344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317
328160963185950244594553469083026425223082533446850352619311881710100031
378387528865875332083814206171776691473035982534904287554687311595628638
823537875937519577818577805321712268066130019278766111959092164201989380
952572010654858632788659361533818279682303019520353018529689957736225994
138912497217752834791315155748572424541506959508295331168617278558890750
983817546374649393192550604009277016711390098488240128583616035637076601
047101819429555961989467678374494482553797747268471040475346462080466842
590694912933136770289891521047521620569660240580381501935112533824300355
876402474964732639141992726042699227967823547816360093417216412199245863
150302861829745557067498385054945885869269956909272107975093029553211653
449872027559602364806654991198818347977535663698074265425278625518184175

746728909777727938000816470600161452491921732172147723501414419735685481
613611573525521334757418494684385233239073941433345477624168625189835694
855620992192221842725502542568876717904946016534668049886272327917860857
843838279679766814541009538837863609506800642251252051173929848960841284
886269456042419652850222106611863067442786220391949450471237137869609563
643719172874677646575739624138908658326459958133904780275900994657640789
512694683983525957098258226205224894077267194782684826014769909026401363
944374553050682034962524517493996514314298091906592509372216964615157098
583874105978859597729754989301617539284681382686838689427741559918559252
459539594310499725246808459872736446958486538367362226260991246080512438
843904512441365497627807977156914359977001296160894416948685558484063534
220722258284886481584560285060168427394522674676788952521385225499546667
278239864565961163548862305774564980355936345681743241125150760694794510
965960940252288797108931456691368672287489405601015033086179286809208747
609178249385890097149096759852613655497818931297848216829989487226588048
575640142704775551323796414515237462343645428584447952658678210511413547
357395231134271661021359695362314429524849371871101457654035902799344037
420073105785390621983874478084784896833214457138687519435064302184531910
484810053706146806749192781911979399520614196634287544406437451237181921
799983910159195618146751426912397489409071864942319615679452080951465502
252316038819301420937621378559566389377870830390697920773467221825625996
615014215...

Приведем также численное значение экспоненты с точностью 10^{-3000} :

$e = 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240$
766303535475945713821785251664274274663919320030599218174135966290435729
003342952605956307381323286279434907632338298807531952510190115738341879
307021540891499348841675092447614606680822648001684774118537423454424371
075390777449920695517027618386062613313845830007520449338265602976067371
132007093287091274437470472306969772093101416928368190255151086574637721
112523897844250569536967707854499699679468644549059879316368892300987931
277361782154249992295763514822082698951936680331825288693984964651058209
392398294887933203625094431173012381970684161403970198376793206832823764
648042953118023287825098194558153017567173613320698112509961818815930416
903515988885193458072738667385894228792284998920868058257492796104841984
443634632449684875602336248270419786232090021609902353043699418491463140
934317381436405462531520961836908887070167683964243781405927145635490613
031072085103837505101157477041718986106873969655212671546889570350354021
234078498193343210681701210056278802351930332247450158539047304199577770
935036604169973297250886876966403555707162268447162560798826517871341951
246652010305921236677194325278675398558944896970964097545918569563802363
701621120477427228364896134225164450781824423529486363721417402388934412
479635743702637552944483379980161254922785092577825620926226483262779333
865664816277251640191059004916449982893150566047258027786318641551956532
442586982946959308019152987211725563475463964479101459040905862984967912

874068705048958586717479854667757573205681288459205413340539220001137863
009455606881667400169842055804033637953764520304024322566135278369511778
838638744396625322498506549958862342818997077332761717839280349465014345
588970719425863987727547109629537415211151368350627526023264847287039207
643100595841166120545297030236472549296669381151373227536450988890313602
057248176585118063036442812314965507047510254465011727211555194866850800
368532281831521960037356252794495158284188294787610852639813955990067376
482922443752871846245780361929819713991475644882626039033814418232625150
974827987779964373089970388867782271383605772978824125611907176639465070
633045279546618550966661856647097113444740160704626215680717481877844371
436988218559670959102596862002353718588748569652200050311734392073211390
803293634479727355955277349071783793421637012050054513263835440001863239
914907054797780566978533580489669062951194324730995876552368128590413832
411607226029983305353708761389396391779574540161372236187893652605381558
415871869255386061647798340254351284396129460352913325942794904337299085
731580290958631382683291477116396337092400316894586360606458459251269946
557248391865642097526850823075442545993769170419777800853627309417101634
349076964237222943523661255725088147792231519747780605696725380171807763
603462459278778465850656050780844211529697521890874019660906651803516501
792504619501366585436632712549639908549144200014574760819302212066024330
09641270489439039717719518069908699860663658323227870...

Приложение V

Числа Бернулли

В данном приложении приводятся первые 254 четных числа Бернулли, смотри (1.4.8).

Таблица V.1

Числа Бернулли

N	B_N , числитель и знаменатель
1	- 1
	2
2	1
	6
4	- 1
	30
6	1
	42
8	- 1
	30
10	5
	66
12	- 691
	2730
14	7
	6
16	- 3617
	510
18	43867
	798
20	- 174611
	330
22	854513
	138
24	- 236364091
	2730
26	8553103
	6
28	- 23749461029
	870
30	8615841276005
	14322
32	- 7709321041217
	510
34	2577687858367
	6
36	- 26315271553053477373
	1919190
38	2929993913841559
	6

40	– 261082718496449122051
	13530
42	1520097643918070802691
	1806
44	– 27833269579301024235023
	690
46	596451111593912163277961
	282
48	– 5609403368997817686249127547
	46410
50	495057205241079648212477525
	66
52	– 801165718135489957347924991853
	1590
54	29149963634884862421418123812691
	798
56	– 2479392929313226753685415739663229
	870
58	84483613348880041862046775994036021
	354
60	– 1215233140483755572040304994079820246041491
	56786730
62	12300585434086858541953039857403386151
	6
64	– 106783830147866529886385444979142647942017
	510
66	1472600022126335654051619428551932342241899101
	64722
68	– 78773130858718728141909149208474606244347001
	30
70	1505381347333367003803076567377857208511438160235
	4686
72	– 5827954961669944110438277244641067365282488301844260429
	140100870
74	34152417289221168014330073731472635186688307783087
	6
76	– 24655088825935372707687196040585199904365267828865801
	30
78	414846365575400828295179035549542073492199375372400483487
	3318
80	– 4603784299479457646935574969019046849794257872751288919656867
	230010
82	1677014149185145836823154509786269900207736027570253414881613
	498
84	– 2024576195935290360231131160111731009989917391198090877281083932477
	3404310
86	660714619417678653573847847426261496277830686653388931761996983
	6

88	– 1311426488674017507995511424019311843345750275572028644296919890574047 61410
90	117905727902108279988412335124921508377525494966964711623154521572 7922535 272118
92	– 1295585948207537527989427828538576749659341483719435143023316326829 946247 1410
94	122081380657974446960730167941320120395850841520269662143621510528 4649447 6
96	– 21160044959726651309759772810982423367304395438906023415063873342 0050668349987259 4501770
98	679082606729054956240511175464036056073421957285044875090739612499 92947058239 6
100	– 94598037819122125295227433069493721872702841533066936133385696204 311395415197247711 33330
102	320401941086090707824302078211624177549181719715271745067900250108 6861530836678158791 4326
104	– 31953363136383001128710335279617427467118960607827273832710347016 2849568365549721224053 1590
106	363739031726174144081518201515934271692312986405816900389308163782 81879873386202346572901 642
108	– 34693422478478287895520886593238525413997667857604911468700058913 71501266319724897592306597338057 209191710
110	764599294048474289224813424672434750052875241341230790668359387075 9797606269585779977930217515 1518
112	– 26508796021550997133525972146851620144431514991925098964517884276 80966756514875515366781203552600109 1671270
114	217378323193691633333107610866529914757211566790908313608061101149 33605484234593650904188618562649 42
116	– 30955391657184297691251345803384141686900412806432984424550404572 1008957524571968271388199595754752259 1770
118	366963119969713111534947151585585006684606361080699204301059440676 414485045806461889371776354517095799 6
120	– 51507486535079109061843996857849983274095170353262675213092869167 199297474922985358811329367077682677803282070131 2328255930

122	49633666079262581912532637475990757438722790311060139770309311793150683214100431329033113678098037968564431
	6
124	– 95876775334247128750774903107542444620578830013297336819553512729358593354435944413631943610268472689094609001
	30
126	5556330281949274850616324408918951380525567307126747246796782304333594286400508981287241419934529638692081513802696639
	4357878
128	– 267754707742548082886954405585282394779291459592551740629978686063357792734863530145362663093519862048495908453718017
	510
130	1928215175136130915645299522271596435307611010164728458783733020528548622403504078595174411693893882739334735142562418015
	8646
132	– 410951945846993378209020486523571938123258077870477502433469747962650070754704863812646392801863686694106805747335370312946831
	4206930
134	264590171870717725633635737248879015151254525593168688411918554840667765591690540727987316391252434348664694639349484190167
	6
136	– 84290226343367405131287578060366193649336612397547435767189206912230442242628212786558235455817749737691517685781164837036649737
	4110
138	2694866548990880936043851683724113040849078494664282483862150893060478501559546243423633375693325757795709438325907154973590288136429
	274386
140	– 3289490986435898803930699548851884006880537476931130981307467085162504802973618096693859598125274741604181467826651144393874696601946049
	679470
142	14731853280888589565870080442453214239804217023990642676194878997407546061581643106569966189211748270209483494554402556608073385149191
	6
144	– 3050244698373607565035155836901726357405007104256566761884191852434851033744761276392695669329626855965183503295793517411526056244431024612640493
	2381714790
146	4120570026280114871526113315907864026165545608808541153973817680034790262683524284855810008621905238290240143481403022987037271683989824863
	6
148	– 1691737145614018979865561095112166189607682852147301400816480675916957871178648433284821493606361235973346584667336181793937950344828557898347149
	4470

150	463365579389162741443284425811806264982233725425295799852299807325 379315501572305760030594769688296308375193913787703707693010224101 613904227979066275
	2162622
152	– 37370181411551085021058928884912821658374895314889329517685071271 824097313284720844566536398125301402123553746189173095528249258584 30886313795805601
	30
154	102597186820380210510277942383791844610257386524605692339927764897 508813375068638084486850543226277082454558882490067155166901242288 01409697850408284121
	138
156	– 81718086083262628510756459753673452313595710396116467582152090596 092548699138346942995509488284650803976836337164670494733866559829 768848363506624334818961419869
	1794590070
158	171672676901153210072183083506103395137513922274029564150500135265 308148197358551999205867870374013289728260984269623579880772408522 396975250682773558018919
	6
160	– 42408607942033103760655634923611569499893980870863732147106257784 584419404778399818509288304200292856870667018046454531597674029612 29305942765784122421197736180867
	230010
162	158445149514441642839093424327942614083659647608078631696022238078 423938097479988036436364797816863459041821585441979371654938886590 5348534375629928732008786233507729
	130074
164	– 20538064609143216265571979586692646837805331023148645068133372383 930344948316600591203926388540940814833173322793804325084945094828 524860626092013547281335356200073083
	2490
166	573403296937086092163109531139264573150522235855520849857308891130 300178465212296470320575270919419309524630861126412167883425070446 8082648313788124754168671815815821441
	1002
168	– 13844828515176396081238346585063517228531109156984345249260453934 317772754836791258987516540324983611569758649525983347408589045734 176589270143058509026392246407576578281097477
	3404310
170	195334207626637530414976779238462234481410337350988427215139995707 346979124686918267688171536352650572535330369818176979951931477427 594872783018749894699157917782460035894085
	66
172	– 11443702211333328447187179942991846613008046506032421731755258148 665287832264931024781365962633301701773088470841621804328201008020 129996955549467573217659587609679405537739509973
	5190

174	416616155466204283188495959325071729739561431818256141204818068407 740780331759127083119461929383210748242694565514335790980725185285 9279483176373435697607639883085093246499347128331
	2478
176	– 13693479104867057076456213625128243322203607744765943483569387153 666080445886146575574361317065439484641599479704643460702532782919 89696390096800799614617317655510118710460076077638883999
	1043970
178	112425181661794129002648485120629998277472046771286727529204370161 882982670839574545965417071836318214341831451408542669285701842861 4935412736063946853033094328968069656979232446257101741
	1074
180	– 61731364540162489246405222722634709601995593282906553375302020558 533977917473413123470301419065009937527006122336959545328160182077 217318182252900766702134811028346472546859119172658189559323830933 13
	7225713885390
182	427726927934919254113730440062862934832746813582840229166168301862 245165998959551071291581043623872113954696355865526038432898877321 9688091443529626531335687951612545946030357929306651006711
	6
184	– 85732133352305618013119443734793321643140330573070535901546564928 568143231751401068602907932447965963464238480906171131948102003071 5989009140595170556956196762318625529645723516532076273012244047
	1410
186	222586460984369680506396022218163851815965679185153381699466705005 996122257424875950127758383873315504747512122606361635000867874176 40903770807353228157478339547041472679880890292167353534100797481
	42
188	– 14158277750623758793309386870401397333112823632717478051426522029 712001260747920789473711562165031101665618225654329210473605281619 696918061316240634857984019071572591940586875558943580878119388321 001
	30
190	541155584254425979613188554619678727798783748663875618414914158878 398977451150960873342906751738375070629948682270217167252220310673 099358124277782586420348723842947995728027309390402531995056963397 9493395
	12606
192	– 34646575299758269969019140575095236687192319234095559348648571537 039215489410200040698016252172849250191759801271140216353016651699 111512213139854202905628695985772737356840241702031976191263641164 6719477318166587
	868841610
194	226918682516153296283366508696835996738932142929758833723298675240 976541422347669686319975998161181766073575383132390045649525396183 717592431210887291508953497031060433163648417452639972136596633780 9334021247
	6

196	– 62753135110461193672553106699893713603153054153311895305590639107 017824640241378480484625554578576142115835788960865534532214560982 925549798683762705231316611716668749347221458005671217067357943416 524984438771831113
	171390
198	885279148613480049684005810105305652205445264003395484294398439087 211963495794940692822856626534659899202372531625556665263858264498 628630838340968230530480720029861842546939913366995934689061111582 96442729034119206322233
	244713882
200	– 49838404942833341476492863214039966210849588745720667496805582261 726366962152368756886580230221099913260141269761327939105865452714 534051584009929047802635038280288437171235933798427412286115980028 0019110197888555893671151
	1366530
202	225052532618726454590071446062888513584105044455124711622263141168 154978053023351606995753439457492257929060818042752031823562112368 610947434388785794461184243869839988529515393557495827502171511612 0056995036417537079471
	6
204	– 11063664425085690359097648142279487920051723129954099471537233452 112866971626419633381102570974774619321078682011436902584989734572 253109804276053092265687889155666478216846509556313209231133207309 7630676251482491663634626858373
	281190
206	252529266889140492027942702666896938945638824938988933945560431669 157338428467829362010006692436169366644472233874383919822134793165 191680765119880093594249303819410475996720807371128467104525504752 1429204396148980705984836743
	6
208	– 12407390668433023412711473483696990726334795896412761472587854072 142800403373577087021298541061094633377354326966623278849423631924 808044397822651135905640812063181221280972334965193338438214107578 486417026806166184210160001817890901
	27030
210	470818136852949261411064419795183731720261060834125720420669319524 124520436082287591061301043357213322783174109726161883320653751919 888581225434721915048200554342299722544020404147351818763644224133 2621804718967775203938403965710395632762155
	9225988926
212	– 18561106699473882683893610406897640274641604604366719232531311768 532240877419243784324034427103982476422469022128187496859743366415 29240178398124235554376252514810445260249103561318190166700479496 61636539964662370375622630863327168696307
	3210
214	400574893007015286193582676647685618070647722744862226804205274524 579824253977054633978989954616034159006910946702351708557861898605 596918720273187827168543246070884111850631094386559256879136029424 4451765746911808994482063783730693703607
	6

216	– 11993122770108617858536443322964878003618156069559794803117809279608039120818829088000103355036592864877954563564831932363414886811786054601318517206937549605059298307895591515771731031691422489377098686236263367916404512751010916862894129855138281961
	15270994830
218	5646413644023523531472659729552574911763686780871700375627426663366507837122353997075891736706811337698248660838754243486778190331522785903661556458651175061469825204821206611273990250663647381261360659950519735730925202117606150672170127523599
	6
220	– 8717064809960074651332043679796544474420053189621803209941154764877242575579617540185166306094852502223738126111951612525627910517501081576202264770178546608710937474005742969950212404955732473198451623024108934373488641161751158901712323446768306053
	7590
222	13368053158552172665210852539359893340369870651951497976111882891296650008003955172160792457229376320993686817755409436399268291095350295968657381088168219133490277914269064723832062615431730061224649980566693258603099340996988542301914519271322675688591
	9366
224	– 3018240015081392087620978688311925380399983229633120268872695911807562982111154053235820050168829922189401964755775948260724401542319799566237745986245598102255191922935742610508280966462644022540839619861091049093129359799053781543195492373882916779852781709
	1671270
226	3168221108903401670436878558215734893322849540781208738796672473984272484396317849596978630272031342024194689871467916186898192771267438982228710525079886956295106197431401217357893460897221381410667385636049264583380749631776691121592016493432807733153743581
	1362
228	– 1906502909997888166123201923177385833567729039151413143876271870599057704445939156075718972624235764657102074902610737729027517674632609562387841658709266014329005407533521950744449109807215808770201247724932231495252981632908042371307965561986133763291349835081839
	625170
230	12620737044909818561832856090355555624016887319605261762997689571062646649745107532482632213152948299491122977690702642386377706799989565320538433072623252159464115918057294711396625436506736041542403370025258477205101808063594056759977272469883621048184279331863155
	3102
232	– 2277782962749544647786193093844710000584561145527861043594866852071596440076587235747852022645695523676561694856919437156369375152041285055935622032497285897151359345040171955786899011718891877065760345722163063921177723102631428767500963315657655779698470644544064472947
	412410

234	480867224771001697116513683699011649496855159878152931805742068517 626950204279499281932407966997815888727039144001177194783700618900 740782637516562256421883686495287564849123342843286211825800198337 962453448529082007644439295666002669973893196613894216505936316966 183107269
	63042
236	– 32146713359093658939838057200319619079800062834744366367401920436 103403931501437086988497298140446088827285577323308018648523031654 424654116836446834363196922548032479902806701562176993971844341971 211085796540917994745699497068700513404283590349417256946575167105 7323145801
	30
238	219548280848198162306234273763911549466285105244154784713658316494 872694385654421384523757196976293948861610861990090717450321483556 990976737303775473546317570009246880326744542083860763606992730021 293301610982289626534661120323000565343806091362683474257075373409 96253935261001
	1434
240	– 21219100857918206047856383794546187228737286933313017518832513566 089775948273003544814638885820596659324720557284235627958719084675 892565903864339534439633482134886151859611237360536546092182191540 994943645639475725217311330828877695184401243299271992552200191141 9529928297005743854184672707
	9538864545210
242	453504972831523920502101836282915480003952250254971484084194396063 408499027022553504389213554940860857287751396338453032575810424813 312439295999748584900466316206106590984659821598454767750696159329 288090283032586862751504716828673852724136077821869253525414458377 1935549805772798793
	138
244	– 14806778686788103470621358145747278904909964599031539096126117917 681340159089002531976325439251575599650990055816398835581259851342 429781468735586280105452998791782998569291002171788915241595436738 037854816075409545330575605547042837183200060464248816819341292162 49889269701182688055001
	30
246	262668605206102118430195944953058387315319589613263079853189811674 338644589939356676047394737425651989092115424635212785341601958591 806782599345416064945113338168378810138043832891536358769753916174 695061208903056552776976154338169779827414504134808495078925108569 042616724875466536400029203
	3486
248	– 35074455463752533183426677419496512535169861133496721800954687581 455059211331722442400234194661132774137858007366824589662124293730 958949347520414341197113522151645970948865302784292066370663020315 014124991662636424475422897857232250644377406550975731609222910751 75522551466276032634749948001
	30

250	305398541476219870310202097566753518188029437398257035838426271221 609901363012738122606467124897016870116484185917763513956122037310 231627371098075740929503923169736053673611338047351599358018820496 680832320177208166869532131642597750371393389493439935134824091841 1922863059423248058823372368106375
	16566
252	– 89774288871630307843644520580598652632613559409413344033893019938 898862113876440183943307724290509165539815764354254584162176909463 971675189351699717189454959415964995262823025743004001915975128242 680213612581748367743077774468104545056300803334120339537905702856 877606246855867891786763741486735368783092237
	303940201110
254	288475927665009418601327222425958443336780218384521796912166525343 199653643741385071648802697148074702258018293194081203547275234385 399948381645601295755112081211522401848061769539868110287053579527 883204733070961095295256696235478785408798512762919109488007863543 4933391568643930279007460403102076327
	6
256	– 10420343529764180091550759280313876989633312749149053292953116663 295845057275192902608053345653138256874663042880583989860613170550 372271256737917283581349758270676379026329737258680437265409027141 273365440974202940525915613066356041259991383151833840038529076091 3773448329773518728092595019422753511174189569
	131070
258	560816935868894622750515894474846176826564862624656938221811727855 242183389516419087179801847095478850602189080685680007767678343600 704293008338796627070692724581737458833163463691962707616413251768 387381536061759636653832166267249693705096501283271578621212755876 66040290047452303859942885949047756404247033
	42
260	– 52185074799615138018905963924212613610369356243122583250653791432 959483008120407038487660958369745987347624723006386258028842570827 868839566798249640108415650511751677174517473289119352826395839723 724701055871877364950555012087015220999213632393173736178542170504 35670713936357978555246779460902210809009009539232173
	2291190
262	622550040888110279751004332803496946630442596485148079658896834534 561624905603547908048969132352959776937712723791032662610635363964 043086266275827603715581831379736192606305678462935734624605008567 491048471233121195548340050738694449261417549751282380319150802908 8188458205305675244351279445756172428826335261196513
	1578
264	– 25979004081628960587105726589498185244682192669312918354799594180 948901208037074689002813251247045355274429081010226159305052120280 939800030619411634939979483674733012699371525411902546788214149798 007597852152403087730605687705633337526147415796739090613225744140 39421772773951907381124389083123642187877106727324831409104559
	374416770

266	743337820546538894237434692131526557991431731044216817199531402800 995392956733413976365927247137853973343729917073065389318854618909 823909913619556446903714345180086262670567138988563504494715187706 346245681886987341996878486341365778158840076516605461553766026518 78199847336975669075705029220024942988801596540479832623
	6
268	– 18121528775296329759164902885826628159615932054330150400342559863 769706153804052269612601823798365932970051669673914884135191295717 452578531541414442913659155413121570056032594973325695467481314969 978301631841533809439574315293254272325683088307163832595736919499 1055197776850603497527503600109515880553950890416293966947553269
	8070
270	304652093569699557351582424227270111775477430579008410834478870463 481039153775224667338604913378382139548609623914841564172219962317 795636679913331453104140202134556279925445988685657134103647044753 614334935369430918736361622260584801249029282896383086802177414096 389808044696195892779475052668197740921058080633490270742330291089 0705
	73743978
272	– 53894792870198288590122004423433261923555090123821679974442219394 992023405819324285337251403239394790479999494366822480012449671547 071048962691366825823925821104849723394085108222300354124301728909 256582301520849549038261433905888543184581857295068894172448913713 854826606588348929250895845018332534765377444002838644081736458328 02729
	69870
274	876921640102601760383168273082801324788039055564836901409234298002 253995782034121007322766508391364331313364222035613918206397636790 569250311165509441010945170696883786500399759308075144882184008248 023432975450281978336106603716700929424210717924897570827498252893 067062775490058563356806930680935200945326351681714440032862515566 687
	6
276	– 13881827727534802245242595435384260232947811201198407667609939504 562972565375367623583141284254359096353980778118825391996627114711 856553358072636756492428173490832774755190357868951071267640494075 493598567122492351235864685925413281150997608511781357922622804381 689654027749281367895511669634011244727825222020582968808728541261 56007513528607131
	4940319930
278	328857427279132598370725819664839537059630575834169974223889322544 055053987991009800242616447893566775966690766963898661670913779920 037716055951612581279545712499250778556026626546917239932911324742 106976560473082284930318446400772765940702148679818892725313917604 616677818147266999416190027867185569102403891670455996654618675174 2476372279
	6

280	– 84902282425953111991199205658490097602177910235727989182663743505 502463662254351445408958629242698780965263768889888964732791909554 325665111734112057467123976921878875377794377181730501589511059242 543228757754984497914367693119677413274896369856948742814605160820 752892957243055128003864562992419070492706366794698154891061027861 58831873003971980149529
	7828173870
282	258755934993481288332208572565441338431091999426291726615715758318 960090027173793149931105389128887599322616388833977905312995850844 269731569137799157818485563115558189277550714226378727412391466965 017246647885654192510025002480363963126562979934219968114070293868 470634397823116179818182065463110411429913123226197172618783159790 33851316268092742291
	11886
284	– 13295996358352661255842318299770257824204789208962575424138758702 193899502076656398999018598710998206478613627640240679560898154064 413300556884559873370102726713493089587220775607893710741660512332 309274991118076352427194097515731256809193773918568106617890110582 238573956619101280583583926569442900013510405117319703922446105036 4993416415448157657001
	30
286	126278634076474383654365036637418027325807360984154344178778167568 854188198424926836032501251016791828641266571078533249500247025672 453545120151858426136328454462608877814028135357480684003645692740 424404849750633939325832438637957404856278182520979962826152749259 155504922969148153871308133172384546212074592864141066892305299209 6071568118182416749081409
	138
288	– 44261581220159976569180812286675898014998089409708979243070868702 526468759488416522389239336744890657868066723423215370127516740848 218464586854296181832145252892766580125943491547962849601205964238 118312590414109656617177099586590621475345831716711416551820165801 993644854496297324384695425011536895179579067630361698803005635269 20600913900347892060168169080524563821
	231026334630
290	158378960459933745353732673983377704622086418682000111407542005580 986544145352715435649528631197645211762019722767661122078958064217 177336225880988737955740461066476486097551548991955116319546315427 449493825430704787375985685635337262886136570504412827663590990198 163434342208367501561777230870660164068668650416176368657029205310 526817730948015526849382859712055
	3894
292	– 76949627123221704856645440345111965377390635489206089348129371378 410795184701985731073976777046307651656057524961962165971898564612 696403965998182557764622530118908228726419813478701353817417838395 849447373427701258680935193078127734529094298582769002601914474898 611631914344896299769866501879199406421759770471170974869567890860 4180272686662449493086793580970828093
	8790

294	344977368185637380304333898730614153996525419281986770522385915720 139215554847760949870834982202303432587625997234795118134923343663 265548204594792841811439303451011251437993865656175552484850145014 444202587617378736472160288579064961864004275382498994164923679644 150818450558302750885234058860046684381556954878962153088786251490 404112306387375170114820733240249707147
	1806
296	– 18885755901584959964401084339267889588594504495058270691085292219 117376054910942421281803049663561651622901731030440927025822179597 721781836062214168671403551064767990946535511234698279062816902280 476046778388084857526581969649350313795875565304276803065378797203 774793108173185847447115224533870726276484388302002857283209360981 94745411999104991803838665658699650727659349
	4470
298	568317561152869660708006247807250182070325080252096361133974001632 808414508589817525161635934316859585810862416776213167968141697789 553602500376100759891317727978927107188060064388530290767057228836 881638543921870779372555512626937709064548401318404626538932971944 952366322152909276489470381381517789798026874501189337189906137894 0560801507189664711567121796987700152153839
	6
300	– 18638789952048590119950453418481560661821918466359059375187153206 557759581743605231349907569223034108104826005287694796420210012184 158790061643029553704608291464348079647177371953569351441515834248 331542500477474335755849990291267751862933887215149701833511298099 769716032276339304349238439848295803115933725653985747628800282891 67635570012415606941367995702212211519561707046505473575241
	866054419230
302	297329146520053263080690382990468772281659474892857753982327755543 268216549972842549545414367597556191869298188789624191797871606941 483604518179978113231893217305704368472385273922040800836707137461 041231809273634503655528337433968870029668842968489134811327855866 831207323698585971530762611279750764065644595186958217886353617114 63230165952857117226399909961673058570176834883271
	6
304	– 58967523029715869528178801375535480375229521013857178622198695979 595407147082354062336321225366774464262462956921196844860368892353 996875539794848862544269335876370804510037897699613232981352579536 578917217268540854988864027790319217013641804271283467197395422033 631069206034361852569708825449477940420431948151136936008147461897 09447821507079960920412101317160689806936226622681106017
	510
306	689735739192864790938869842200448522491622174065530181755219067505 817267965189978776569968680399983089600630968341102178380777713630 583306140103562669027424552384203113812510243331805627699809267240 054344772443480095752572066698167737729190346148297831547431732607 091731942172905658944645576233950351675859756367833238423434368779 109181349635099892383418900862720397266277623080279813067604999
	25233558

308	– 13100283138785679071146924959083157031211917559111311119843602680 103392919585277896322814259877204200513048105433736578815747973536 959976256255769924352509541156474190755449447360548540157110742488 736861553733277769463486445670491299841448071987802341072787338596 281453347319521157985517681018177534437360236590803482490014503681 40437083583099127029870537678245450148711191680759214684176445667
	20010
310	326060623527685119509943704770791601228005470937007771505231289601 147634706642631375690614792997632463961748707903818271831585058691 299868189004015410121702360174635854844213935688176120949187934444 814423547102451991673028031440640119705775285069412480178159820513 333826942625956461118235807447513926664677946033546970055943488454 040648529963201334469035270085004893561367749336415260134747897695 5
	20526
312	– 21931022192349608512492182380840457515521571951988074381726218735 984667680872093396349619328732044131213547998124308541078032992055 259574625170697945292955424940928320898831030553117958335524295334 473124061085211019948034784218328090588160639378688334766157874711 038071346890086062662745851773579782072910105211379539947751637633 050888910210616306772000397333935931430274985745331562077270678050 5888813811597
	561706691910
314	583196321165522746909636404700087978519135693938516160268026999487 925708004265149553133462036989943133118975504983324268417007316797 864310870601916632468844711222777875778441595662461445780848421256 813210893747663034424053574110541569291103276700103002755811885585 505795208977791085358642307758278183106055415717555509523363007690 145563107391988802071146528369753692973289956876952538574597547315 5407
	6
316	– 23306762036180954707239902303733182709978468580325093149239040051 634149745258544596562134540960231525935441270015799599621135682414 015382311861534597843756730857227145200622246509066032795288017634 942726754909458234645264430702930529842456653080378544365215066466 596986953601385998432554535709196917229350478449221406496506432167 664369239478872974247912601100426306339312275565475595669640092216 631914518917
	9510
318	281229670901952879810550195237464210261746111546066078814108345538 215711956000771563881395040508170723183521353360149371335044883445 910336373788751754888608421422002155449524574622515517283055458627 031464716474833941385057429898633362315957646003394188662183226812 852669018179772845695730446045418724225177361957030693830156382145 713785460923209113823851416341601568617830951146736552123997237657 43717305197851
	4494

320	– 37218229811479635434736287217181603896753958974375037792268078604 825666912147059590162399518901934867582325375975916422796544599208 577160186019983780157109674580025076608606245689244483284525608083 767962245418996857568217934343211388385129253072164205547039831711 715407953871007998093533905191076477179762130327527528151598157393 221210415276866767743347823281587733144522066786877707454869768445 81551304048486668867
	230010
322	119470112025136837677231044892714710978685018733997588875143369345 928228299766467021619093096802376602019986692946175520096384642444 327094416513779796276967963858882633059158119246167943030934495504 166401076413042315715523222043632291104972992360343965836819066579 851981773029725780276881173824476618480834762832968933566379909999 766070596581902711013867088764774559688802711813534490211201746722 79118531405266405457
	282
324	– 38293938266948514423679636053459864146441231941490551267132383695 211998830325843775561639846027759658992946200281609482095042290981 956042436619498597170875505407499412061150205464900091758847003071 995515741074078554024242076867751557265792454970218345516996785538 046511770957862495936722362407444221955537113329542049423998838793 29051596664648871055498926344110331259953108731512847719623099162 37507813788879633942447325937291
	34098248730
326	180838307251539286213037013563537200013162679309314888077928764992 882029376850859270752105562802770827616582970567083806403106857452 761293079907898157867679112901521943879321373403686342611036062390 075785581242602354115977490536551875669202650821380366878981957023 415109458621164019663349961706394166147086047956000347487542767906 175017384350968552835315182614668440553520650493613602679603036528 8231301797295663647612503
	6
328	– 20389209557321667045635446758715392985346645488323445949404192110 310046862448879801299907228334819069965749950062722837729895522517 116453395298246746722957213874449897651970943566256862772587598875 290638840634417294644666953048171548797539360133602448144701712553 128604200524594565959666773961651323019066288183077444549449353888 349251083706785927354944948124114388000131004422267048878047360571 00084506757161238437561170752083
	2490
330	164507402617612014882865140866663413858444125808139497240001550383 088701887207196581198764512079310327480308111899113384034952018799 17853940007783445223543411867488322718098218284092982079687391392 270146095981067032374720432289322985638009843968659437557957583690 829548884373028665004080971091630185556556976955941146881924211415 993136891897784276903596652562839482572912454645567415562645581833 30312680675299274129472749543281530376155
	7305236862

332	– 31404740573139387013607323899060788461129734403267877740839079468 522117216337083625061725107066347029224470970177830290797457104821 060170534363148276651160571699094881049180803660482733644591278636 224534484481850814754420273709821201199908209760469191567840252247 706876075856090781209456764232767086688491357087469900906692342923 336064928179724546370791109956974800789303951709599892246386582961 297095349501749155074025993332911366367
	5010
334	105959450712139358561614326750678748291627849550191512662380413294 068107407247886566713525350838198788534238121678429166419664041236 233803606051817627731575939553790154021616196778501189528768078400 811107009317850171384096998455082824610437919969197421385189475358 775596537026092374519645052975059595487888618614275545703577191947 383711761849232715855501325445057452043875112980841528855594013764 288125280661970576229405994478822053767
	6
336	– 11096835851855675091056900605910461243632230479329019789647620819 505111397118730425667188261320106354371088749100698920321346886209 572808642132764975792670637537316003247906088141428531680505004999 825009662929869171471233773103313306324489483365057422142133547749 649433179002999712892888327045291234359575683575992108249902771563 318748350822717395442100744573907645221523446395395202937761227509 6135644427285378787750547213980148328191792731369493029
	2203871994870
338	871667613876289947152259213998641324359438367113245978510277002562 210922288209180150151793852558736029189876363096736208315035600167 649273464678134646229708161579214485318416128870291425640987624153 304026736765522468963515580422620761261195314156252082303726799452 238319359220112879725078451979791840912313059346932550771416018721 541922207119333620480831014488368439858212426770461809324187079997 350701358985200574078187666941445255865364959
	6
340	– 13996919937429453218872969370257700000046566493437117903588993203 792722263061516187100856825876085809356021297095551205798370028490 413966298879647158884383791466487133901727883452491575071706997348 776015272296636310318052713919926107295920596057060750434567267503 342681095928874149049165813309919763715174135465371944879525550512 064339416721421380683778520762607799122638334477442228380585462877 4864645574223075309564129905544107459811288704862611
	330
342	999866869350557363722458479004395830847953169240152118030482972984 856254139343285563059710426142001310818604300278555911104883557186 325333153917124330048368249458087059040520529706556642732809436335 612822769043297715578151918469336944179483860946506334004186007324 467864842978559250174108263899703085692274142353761805113570952308 838426945093917953996642662776561930695988488695006166233701104386 823791719249365863288962981240951731129450241042813203
	798

344	– 19435667946412236600006355752680318177378018998686558693047046847 185922842569405850478643326624807107024135785299799674685846584030 230598008329461654964640062557602833521189158599030670653044302429 200521250792329717629531968392422269289900710918148435060503372045 597753741275339144955223007618411222546697775810780747446478661790 743019087588298611993809224843559412437328287256779856482337754827 908028601591041648043989896358637724179061858684905231780173
	5190
346	235748150954047015750061383426778147376111170021891688845146255881 245910883215587004762925614952663164217507306817544268998903832767 678874032674806866276762686859664936770230725545347704885864836420 622598430157374668204179638548021664582329680823828362162120638448 973125051055526263788305040144520884339262399972582801116202897933 606321412120878779459660750339386877371328290404824384630449131038 27680386355585682702291192692673999705957317036687127526488661
	2082
348	– 19469582449264085198199285400353123197940252311543122838469414455 338338856848841859386633597492935289226313513798852883205447465585 588700846710275435424652688012456296382730908464900146964812930581 729452255732499201813217364530626290229816884332335773291274599287 651136063001766488321098751398884549873268866368809884658784106198 822375967811523804893707242952577921043325036965828253730770480865 255839411981737490845873218842325994506284485987111657887488866482 06781
	56213430
350	50217208910963797307990515730851732416604835181035115942237533757433 25735140467421398613651177907627953983227554623895408764986863255199 33386024542998456467504352201616875674226702066988781736776780983675 27071159117853629732758804650111427311592494224008919587727717021114 59554795376045618765306635220614914925481716641298612557284926135378 59772665546205365872403842851465588616941966018356565181922169705164 734493393477247978508055348618032704534473742084629023675
	4686
352	– 12359561245816347333610211154283867476483183549533150243177413535 105007409660645839018994794985589993322495638209045465950652373385 284290988635132496627468482309183354235563610377651291484274983125 139258984606382689516336611547002063107605480007149663462290923330 370699799512513012051585976283946919396000128468579127746706923053 995361653453254989844882738707127566785716478776500725313908794455 149509141863220008487339387394404640749069955014825600846412710922 3283763137247
	368521410
354	445869588001267867904524148334517372764852692176040414939578321538 477487766910195634438758738916857301912257921598085081444059552783 094118393374017592783961746096241926858841239939685011047671843464 779390679038465124395229271596498987619658165252867917288543464856 867274202752925695113115455877050528889889691400313300031512006014 327098936138027297016850729686810907035545615256137867617945870698 810042470808115312986101225890668409233448747808728705068261981791 46216889
	42

356	– 18249520604687390491188873019557839254274215818941916557220148305863171323999328631073000715354712349442824804877473011208435647924577393976121564194070391790525169749128982828132077146902780721841387850162775862442199934474879939605150425883830706636702361084052335568869843628198626221242494076538767614229186803516353130263179834649242288787960314531149564506544752097614513847899020629776701115098262552562151629993531946710430672386743677617308205579019072302696542508379
	5370
358	23698146493089350432280213985162669959262841111102470546871456237323693618435911411642184657663645971277792033537906347762183635901158641375259341789919760310568146035244593237879245436647800609988327386298127942914981131212727307691555784531721623262685912374782653802898934200911324353096490548706043962852465907958751649549222286885339380268684947173053181005751121488921877337975992137735046528729900037937548187674111044469106308867226010497700021930277136809473041010432321
	2154
360	– 778920925563520089023277887716919839298513486135455047496265119151473505464734957690937635048394537294415972122421086877478533967411348994474171388256074145035237797802154822761617528172700015731068657547092679836095543042179681364991968425138238530710252585175316218097390905698054739393609117605669741881868029805237983772228322424502491583995084065878787104609542382045050185577023575049548616444750140539582676309391395859436260664778641733708499657047550739325300732722680932200039559718809
	21626561658972270
362	715341102258098940319912343996707811685084551356244645540933308810413928160891724298276851619649551829973697033587181069271380692407132317161739109284011945227649892560360729074672778640720680874112214109997197387525352062913504682830983772725393570468326491083187300331970668449041594296073065276692887678729691114916079642579900288026881432235979137544823640729868705093774645241454622836223176904124630526882732099120398430089179339282190314646212515622936459121100998906169917551
	6
364	– 18399470428456050908014333117886494595730651014055636288722717429950917809500136272557117402977052839042105693597404693257617634201600598895359708213302738206862242849606975947076539483777341046657860376203296993121539300815161693660027527850273081527494673550440357634430596208643360358204371232957151165657607509017253243152916116719712350843286172274487990507840124030754833011930721808729659207188165402273267771908929719004881279785191361391914450528631012111465559730900716078151518537
	46110

366	208132436796701974026578645947003622483331056287355745054077487521 943292103633640299040454986839202747859043917118863682964912263420 747609368917895299528283537128619646155369384340380796319852058383 198301591487844668907655774787107504112390867072793141133404235025 281510895382567746572928950673725604338682612859326696437844619128 850349843527450121343248512668807180114664932080245723088399660184 314807010670380724658486771064683185071514502241671483171013576410 51334844151154035628560478914687
	15414
368	– 11072523087988132187956805481179752626711516618653830902982613313 730811527732420727057104026344192026238624207634205694904786635353 451426698002441237043422018735956006205049344045722103544008922604 669601469021912275106915663076431336096076158785671600069013109857 110590804523998808170490848166012686380976324375781606334943102133 253663258729865339977292053566107401323967095342608874283325265349 976365444693844705084679004587031711205053444484096877881567670717 5954631059728590843972403931253118799
	23970
370	105436468101926712183015966237342027981822548065378183914917892056 155580681320203026900330529498978410421348989042633250982811992039 971268918718464971168941583528038472099497987423279686033847352373 713634524328902029631237087627685630315840422522565122391280523543 475578415123567558920642396486080328677738780748081096335514622972 327452414694848941788411853785238697682675444724646915348071662104 156310859630089274744684862265845975500290596918123665582220429778 3975692352381312064835994355860201685
	66
372	– 56868988747972506254659596935683883463716573524427146597376366171 981802233487630537261600452515928180502785214820124586232687460333 822056190451678107485446400177877446417556715711032055230455854240 595868388654451080202675047744244991416192115524025084813812227930 163123287145588705727429456779082968390877093897979160965323905993 195706278985485896440595636775123847679345910845046714163301325224 520710766325936895600819434580574518875433796519293151389916795779 147962584026929392606854485528272956190655743
	1018290
374	272335219988441174665711644416817037788222316888226564189208490175 239816964949116186510825827071430823770205468882164078844664808347 805830968230876961416199262466469270666791566377066677591980435489 655129480366457251098317170822303846655426605965362124131884076377 822163533931299954525682197137509183234465716344628166664461061213 432417726255707234519256021790376040458134340655641181955634260392 208809071001560270930905476873636208670386352442356434023554492321 21698090257432456131056504444320853157345201
	138

376	– 21144886325968847421136862640933605790730878065158231117894812330764874940817232709655287449203776974910988576503561661800249278991319113309582335281592647442495030553208258548341339318764197461147432848991686338242711098654931144304725148541437215370995347051713517773502906169174089944259231510484935144428438091067266131242394201122670888252772064856423958372374082615970685597386991737179844349495505700142239123902982043714578671787314293339023048726217119025452344630237832665698519639606247957083240801
	30
378	4202152324841490851582198491734154054898910989229835692416027795481485467411812516892366095348619673337490550280425989691409092856177027846893427878738640633197809375983848427036487478678839362355759610808529212110936501477008097429319817529927993776215011685533261432410077791728458394351343228912812829117361997697793433448908490531697660725893829519644454139967318758247135377025444352170089166553939801451419735179550891309557305319624844923751198154628001739638691998206529289924753014269328705445340396548203417533
	1651635762
380	– 585016197049150516429606755440285431916223316191798033687181061470667150509536113671258201054717866226570169976401850360230659699699301963057743166370714339259000981058060988677132844370590538962044247092297537672905410985648312911796535010450651733583075122028847986584025427113069993778348629306554503407744980050377057969061170508810412927919930789637438916383763636475443274955653725558963454824998976936559504337387796596709727547538729277633022545136032386860825147973153846428111580196229784765036789760566304701
	63030
382	78631979609289345055469501119395008379118096513723589634568877004799927202495863945986283823608714469880713486237817037414979036031006235383025032476262083964387973243898060840722936009590301165543812264089314197515688838727901018644687053389435289951515626740339208758682375061416597195951759290458697298602770109818453665947288873748972700580769864649544946817207071904078063454972954577208463927530056857030200986057709786810533019838606174872050746460837475834260566055441410395805129523481902672214740177851314801113
	2298
384	– 110754162756402172153014550168566972984876925083693264831143127544432717811904992984077240231351850620045442158975752476209437945003921292257289655906112174208294630503691959241009346814626779961417257948400146389011140929210993075671069409245612465372014808443841918963732454979635619634196765514065569765406021995951240364020270070411437377187081353045931837302854850452592893523482298799136698133585855070465304605234654821626817847160151252277371211732021978740981118935331815732788765628347320001270460720535171080710693555387
	868841610

386	287911488318660962082672353206827610413984544982589401994853067608 661834988323324513908466341692945876059703666741371797853002147214 826407059728607061685789318380725915877198087771183697336447022728 991956882235888659007323457891007577518406036718857731183261488700 561235440006367243962998446573535822653586553291070509424213270063 526409629620505237062683825267741874980151807766428939026282896558 562307089700264076891047932443887866093895344106726376456045227910 8930457475258025425810584201571774449957241464340109525100976383
	6
388	– 21299114788094757397153706724714536413292077775222009197296487570 276368549767668483739905654759629794289722059088574391474394384116 388842393472198779890845792835783368209072403070166818305644992935 634095949389005892015797599060514475400351300665686095027668428158 520105490245612578226308332064019874832238296603858849991741989885 454092253889660892754436759635904520725519771622791567806625636568 537908996210911982475409155309551762403125143065067389753960600797 968698009862634474184891040512288957749239742206998790145616588343 479389
	11670
390	103955441220430406099905047184293587166423823612952503105062119790 467319025206181630607678300465219261613352777472349374939446154581 613775167669116563736394493048382631903692742255314133010448329629 034247650705334420681764871912900141730117973018290949463660679599 557615656051706023584759269518272911302323897521884391299653877954 374764999935825260459008934511892125710463944591323621114902453821 635861655611589968733715513678100756311255168497746510831950445025 073543747101134098737166186274141333700051669708961965750478404595 7077408711185
	148218378
392	– 46669563202575178169264801784898787027193871489002325225279123397 961887144097766638563621417199805028759708069457627129371801444758 876779925581757994813015860192020600281853070563114326873197998541 353402410622313952599196293054906353542398900902170725578907915286 894792679874966992635981461714958932030134855752275471759701317716 028945685164959866130371518636665773906707651659334225647461689969 944131254849692510711894112622003445367468796490163284225239013749 165694046133357570561865444096167875830765948963021194148681909180 59336879970513
	171390
394	640808912350356174378073333715330795309912947431801296035514496305 956924194050478724997308276302531933458844716623312895516343306208 024932183790655351844102967791249508631724180677304236114904329953 319103713608769803340518450516179464461284806009110502342220743568 034682133273443656465906102058462073733441986152637932219455262690 498783033366796807895595451968974170018589790265173871732540219203 496470134837096254721957294282692027321105998231580155273075570903 000709400332769684568638209079266772432973508791091418552966827434 770217964847
	6

396	– 98872162196656114876533219362632891391774839342005000436956938726 481191695417122725991435991920485003784886516420949151408274403750 897124053086048470809705387715020563676318491207223028465413318847 625119271235350352217955302858427960756286710348612322463571556662 841990100314844270405671459605112346068263402145070889841697007530 455932282600691314028702416310723147417755942945877131986599840610 369192441659461647425950295710718456957848137284733782503430592302 360661270817820862416426647830439342025098395116603056716015807642 935747540566951812504354652379
	233649143825370
398	101619003132155663199534215913886374023281804253492110488166989803 190728169035211453457262211630841056114503434432211375276907228563 832097081424714523428753465396668635584828350191568047516691169323 227550857214608779387901814143411744215836301698022484098522147248 019397667016267076622299047970087797064375788743369973032382181165 739687722169700364895613737474076301103620208218196808542089296071 120138556683484262445969614805973815951370165282708156036520187784 573149198251820327683607034033844045692608767604589657584378017281 69587522360995301639
	6
400	– 63783639210289998710088973624588233946566075008131539459746377225 328551512763402330278905606150965942861218654753440979855135225080 751599455762303374322801376784474875903535720147084146967619965166 480436166324915138652313161158459147438440579563255414402868679468 643443725452316589751257887343519347376962412796543353378510329227 640325960354800434372777469890448460017461964152127411007649663198 873691188302850776549851095445319674329831032713432828366945325817 352958745749412125525231627662590308189489017131904402298383855303 749523779093820302379681027746367
	9315635010
402	117423983553999455219049751318236053503238758360505726000772200488 305910255795814470494067428749230422624721284905998983391025044512 592203212766543638823953866169848798193251300057957776699932592960 622329147266422457617829171374287272312763285399416954358440327018 623988988393431176607780378714053603130960577262099472015817743248 125473787750109518440297265691774517522666191313087896013861873084 074195816378819585090156084323257364071014313800115972968251161029 118723455461034662171137012134613553412919849230871818555886516631 3048808914617330314355609497
	42
404	– 34590389184269498073201504849339569458532431595953504130530756011 224705219169556649738299535060199984223808721679685660672668574010 266703101840137966112890158844121346238967055265586337720563656945 076973896008866961540151608623371400321941111179385796811579140854 244865453263553410177645878522718843180101522104988830898166680307 909922397174994572751645138154146920723566539084456536425029443946 230331314008122422463051367099273933311113172059726718966311854174 867477988713332082269928383446534212939248934164337945585135890116 11309370041563779286876725823001
	30

406	170003857441113621055924711218201581479060969973774823543550655221 015298985029713903581691625806778175064153013683952617568923683195 904825491671562597778394848940698100060988046881674679194048284424 046096930240621809667552628402886187489064670995742803216624905991 737595831860741767548013712391467620520309900241319253287943675129 083092747241525094828376937402590205346662298390862562643436019735 148452642958172300132516340448730506554851256643796686115524433824 609798825320819953662000059899761347431172299049404919145053054118 348793890650129877368554102264664237
	354
408	– 31826882167847269036795264135997035261326106742393531631262513546 951621739538129483912871462979086464612269631159787510831358937051 013784806855551647371523568233230776308094926266913151377871925647 720334390123342313810138336493293789276924639127443823386014514502 682882716709333886588047556737429630427737978891250291212164857441 066067952971934975332936367526583068834875982474415309122221371543 750940258579267452360489050995048217629796997409692793673935051432 353130414145045187876172429836566644615416398029958336369046123993 446514393441794181039041943485420490171529217309
	15755919270
410	470023752335086806154925750228745182505802165953221881187293885817 790572703578909097576609259612048650107641573576773396406794198010 755293758414058342000758597101515394269857927227651139631987730762 330387103053323761608332245274551978437543782423306631259023542333 183530627992031636037343661358260558335452109436639721004220128711 197262809721530825527742820153163101076758847415912389873295224320 701249956855854697941668782306120097132522916159183941992306442021 676955225747302957641755564639829494709129490024956050913579975992 4479804509908115765709455333043809915382015
	5478
412	– 11040743826790404493224576404749065595646740330120180405527616939 751966233987012633958431345749190631119793349790016898567458017914 318448351928803498972172882935130208207618165362923407728954132436 164579314674396243206195453246793966934264794726704150054916937293 016298909108659529286402365915934008052581798614292831087826773808 537997292525501699755074418416568787798719220098075756592789059661 642000375611862843358745886690470793196946802804639119233251434998 419837436462116298130162652418584624275867011679614022728775282561 10590588675820001821779929699856406082793746601
	30
414	830966056816864165219563221691255172504816245427194942775778460297 239574008254673723276280782798993878568376502765275874049468633347 470545478154168815827272595416765071482194437630416545142455883532 025709379623773918422191234979559992742090527602639659473260751398 640580101548381014113971979542275363074811349527026580264739170503 267212543977947471780118824749687917395812884246155157646166836076 504356150965742303158590029916282708649948973023160673477590749360 021799996465506161348017383225242179003450331850903647117458837892 565999818223864269663453594385683125383821474811083023
	5213334

416	– 18840632174653835864968232583541556084424607654449238363350816356 454780409921315489669153042640423571904583615446707687427327682018 540206290243741793046153140931788677169249364676259458302231885326 120895149522010431725107071591063425627272025446059167464033814661 996655342902404678020463898666363623366708637084399729725592271785 009331862696316729612579245598615561813162507665448387066401343329 999818243511962109583265019621658883154231991893552479038765074765 515515428784392050898556152995633956321371743766583910838111997813 677461374152418833832478425757962198139801618258600291701
	27030
418	177948829071244383748461224300047737954439245366393998814954157666 837290036442548237545354559654248140762601235025124016956688571054 331709927511568833209554328300942088687575803158770352778902946800 416194092364129368960809507136675944946524355529271391513095831833 834095214141413201872443533465259338559071060276534081662109185490 926535115165429017697889522123426359409741271701359896235732490827 288153220352311977810488328925043422296933754175073177948425972950 246944493271200423473793223213272148300689418662045121140562185310 116950518967585206995379939580805302928813353440147414740763
	57822
420	– 61269144493917664631232731022846529813705092483919711268161092758 214660969768016693482387103616477125781797579794147619924400672329 173351640551079207803632629427826334820069999713505912136711091223 317511220813736883913351946252000991006438432445142463832317438732 822582878923363404269407367815872306449957040543350039984259454696 275456856232005509703245340804040654845352999533863372810092715375 280013391796446991954048800316467960953725700286241101314876754678 423357935221212523286127231782649419635501144806157556607901080384 244729183268152978615781109704335461548441469963839071714426175766 38221916277
	446617991732222310
422	370417641649773203811105792421530317349989434553176611030631322780 037740921920903496806496686319103807921979015270437429241936687918 394087764863038019578527638851481686403847480960464641545840936004 289242306394237365086284210791291343989458767793541220855587660095 196948191905734357956461535121861354233393019487098593606068830314 737953863466706245485662337370451037774820208643752612698330292374 600196793018724057118532300846184682702881492970790966220893763118 615367891028920559173128847556946881708070136133779182213573320504 698972245409107308503781210793753700634159761806826499289415831
	6
424	– 9003097048890575494127030554879593002506912552436323149953568434694 09197586598181836315775665695203810817228257767800995208832223406044 28794413438111752864267955248733312825214213137535912179341550821149 65378341674527842845364127243290643142234051593102886646988293391280 75019109308684058290006604682848685269913509631592635991061291910848 58889684960980143159082309872237663332678336264089029481711742800825 08784475345680707062750649392117434306441455312513751211409036469025 67865610094036531542192311798685900713287395549217317410664958760801 352234360088468504559813801913565013476710034147368107
	3210

426	540225378036603052990346199510807018158832443697480204250735647980 528769665424434313990872758579010452107244811015945468601296416203 994681028077935333710904631550194393763004260011111100825548574063 403788483396960128246802587868245758939531860810951947380313150279 879015996990630764008503734609295336446716698563835417186829599083 092840489872534295498661581692604738992833247348405554718444514715 819066290814050483578753507554646952863979076391383441009893119692 913361907939161706063270762791744758589293326376202474981797215714 041228104976085973923103417416892300182603205767389405804194718860 26121
	42
428	– 17863183260190853617100455803276109629660355564206933702246665794 822461822000046286081930744725503842501272304257099063615939316292 048926549694588184341522319708903955839904623041272213447056418545 452654669216892885664400985467889256537888411656349639391150600279 180375692537203498404243624489047740843454616456444012315957511838 273176212054134924390070879239743698307160207828581365942506665915 636569024245707446222626747837424424339538052675049519121854488886 188014302086591652005516738315892240048612873997724972623635473846 803653266728372008395154343488099259782903356490457504062918241873 9065389001
	30
430	791452428000395052990463674367408774641299277169449382275797418384 963666743647706199968141726577699871535620647877271680371011363641 725875016441804003162706216814077280766553803448788712737779201122 868425785256450531121303233116813021906603098871081632396261587905 577208955217566658493203885877312418398060846091120975165767009344 894679683148265158035296420969642632188332444968324025169811975004 853721487927435823390089679208323886268818820308870377103259885100 640557295098484358112295185600733503211183865432570364543715288518 332255545140994972346903247999234036372815320143622542006284391778 075614230370915
	28446
432	– 14750577990707069090892640643627890396790588057597932870361312797 605339877218555318290483697927533647647152620207786705312787195868 985834595937926758107692208298403338603695989231215167692521223914 659443461688651180043473122600527834618929052569980773595567060954 830287077779819370475900148020136696922033144977602316267162377565 896641961582226753571000379259049438007003714263998786954349001656 043288757745179230747108219268158244213583535560775121257993743283 335146172958812409641851314398652207671071800026121000251318559834 563893238437683153099891646143428578083417759291169439869395337214 083816200847999672131739013721
	112409792943630

434	374777948723013249190078483967036070262196995319721004950125135841 911814198619011549356410270085469095562024553680419264421054828395 920348232957623922946064229211025115849670614254096564246170554453 262384472539133699367436058609043489926484940433001535924350976694 798538284096205775504449181934303253795061219432435260009742614505 900088509170788373024679338732454965657850652041060078316582665978 147857775596653790453928593902453563143158355566291115657291683041 742729879139219276250481332199401859588498140624220600217158361818 255902856801921431578477123793591885984116771323001247572605682737 2638626381963585567
	6
436	– 90024360230387232926513776967323326794697521699014742623495978698 606015115117275163938036449925194916848722477911818639649193586017 040660336424190717814222779195576374240102808595115759449145109628 358599211511306846046027111627976699604296466038648254628913968475 783753631135765609682725844055075467512860033319632741902401109514 097069147699670253945763189080474357381924555174022637039432337932 007567967360013189225484557699891500723386807516891972255376800483 482791579348941380904127063436404359870716285253826928676282091132 256974170075250937201408937099856598602948280585945432968199829410 867368026769199252595801
	30
438	268255361246337126367778228815259545045868431029437849645589178925 638795843497414272945160749514714084165426561127725005493039810079 480452517290207498185200717509668055892683546318815665341535697032 808106797631781867079778636900617376382054640817598394038676153517 033958597909974830544311249490853122270098045783563026899566057862 076965478508567587449877041567729076139718636854981066664507897053 160317558190734639340443419436918626125596334898307900637096349388 220502296543130848656587202710882968136604232104512201075293126007 959863944130551986019010434312311477565523149656237135607816533477 227160969517648113475415388407
	18438
440	– 19715495615154980459452817077813587252020524188204692102871003751 244086350528899585284214622061489980403636043149166921083159707663 176823601945686976515979399929426086078632404364406705872638988259 004550091480475956798374617998494653436871385910480449607892403682 828980142908790826218589612379019283823666710200371893951931734113 704220880589401237201138758287974113485818995566859389757540809367 751356391407473035208862841761173489205172040416753626411623999255 765766532917832477449875734367104295945920968153138079263522926627 628616750652570561155210360770367067264550444012255785591209217959 44351508096992367201543994966078858397
	27695910

442	934217844394639862121876161182125782629662966798874841047916685310 521671553962326103991809647198275117953002131456853984058360472753 503867675200497447364861473654065939291320525986944570166180778722 315422080724702421323386482784126733369118721815203984881266971497 573448614086191554625693617723971683850141789064565402372607797348 631247017594179350444633051496340472506374723019936564961282558140 233726105870589191017887960191293607258806456016263231512800235871 497605920995641449875958591869460832774676734017514779283735936104 646380107986104389604327378999649850427118391694149262577932479289 635308490619974233553612397882181813
	2658
444	– 15884513568258363731005041437821459579917453953441303555845792718 026065530734393894595077614175726152437775578557838979439071340042 420495522406428742171421030870594907474492959693263224135868826281 372617495874832002579718819122430353590887512946558623409262917580 059224921110632093539405478727276131167150219922452044309887915157 388880177162319288352632892712980762279252833579270031870568954093 329059834770705552249125131464080432069390028121522426230921738743 843126866687505908361602290573917734353242427969592045269189702823 770841024569764278173312430406210407010666920226288834557775357317 8251769219880004565578924500260455594131928657
	90709710
446	528209885509128040714518844918737070776113976790847044417861486065 523050370503309024768313307636182746179481352859499577280286958706 885016518553652932142616657630240045555650852028977769229887492311 638629018181531082647907342532515592291931500381946546168366737012 953996398427116108826232383858541574771504205296861406357221185275 870634782864675061934982893485901402090588484311752574650510906065 640811404322762111072202575605528360242466263121322238792071710641 904217309338297022204687461181166875901729773267778072261484736348 289645852943225603612238964209547490549065264957330998834017258242 47665659378641424764700866014787892724263
	6
448	– 33509969560310951077673300385182939173120218233464878294252193880 216174489593173505823838246617056145585882555706860451887313675357 842060706217782059762885287365030658978615168275599290138352468354 789757259008089648541137547348110439089815672768327313180473534796 888815851856313394644427062261422524265399511451721069073409293158 382781768172256354047772889044225230507510811482737634673210381142 106400974943160605739571810507050337114409751599167906471400307782 233953490003352622899793151422802066630790773271959078676470883432 223098011999197297967048507289842238199051754189231014498571762573 655266437187969662451821328060350075608863875769571341
	750400230

450	939105557276537533708439611731455781771818016618150916127156105912 944358939748508151301842470507147420617416663908235618145482944407 249187787055206269405937884977095844232222346382927098990175046814 460917151621964890278463871213037256971399875889422640315443736454 623704693623448687831344474050891290575999649108540631352967440022 518847124394585064156865971067040227096943080500189484292244044261 855801654249436066126886759733117654755483194526394048285540977346 778871657194623549333136295306513619692533239253726852428181266012 068691690755145607171805900490056294012651565563845883801717978243 3551203385736031994621640626329584486625252298313721425
	41089818
452	– 80367886003297896375549054086064347511517633438276369992393735954 581890880122260874430849108699364318031062443573127550909621163684 824752766942529058158885380840632238599715260765992393585071636995 085421789432768541505622906828564235089007987771127871856234458707 471506151507821724226042138437306887214331971939276543072615576255 171247642872288414211715126345345853916204013357997654583531014637 436039830627861311450176556119145347557042759154627656338570661854 115739997895354051906410549708379824464463142456418392581452461020 213035079331667871265081190069841377288126400576128237805415608480 78401500756860998000273851310662643557278203530509156427
	6810
454	368876510951903593959786317074508977015521801043266751209196096948 205606480304749791711335395378622106620447360266215416790083735323 006951553131505613624795519044102404320708564462639239792995000924 445160289688035381048786725398149812361988544504781753910103380003 537917513832686730720009389442465152773861321405832578561326965585 628471618149969760751747696947486954386325750905868249912842495426 514041322052136702614252272224862643041825606799630387209499955794 229337966949860111353856773833185425305062417310184762307968084455 746993325213661329357449420920637371177199724194463053790418215310 28902499051591918182645467840089773846410376436748099927
	6
456	– 92312514972053377868052801066270353656142374247301601086049246517 369761800757988962152487926542259220316909899899368144286166397990 045855922485165521052287451156007720904696186499491108648744373648 708182228984933645850279283745566527687499813609290582982432057944 956567237481644037817487305790863356387524174312775934732113090770 703598960172747890665505524695476989798280772563893895897652863851 502639463221374357034893227010574133394097159074204010157455592807 699978993507559492935701948115956175397754323008779481310845004697 668037459053318718391181786051206934824835777620032795803227076997 604712792695348593476906103721065773577273539209296247067960740418 23
	285702690

458	102782563538126102508413750951856496256072845013222353952152694881 735363618170265692858382882871743994158244987762266970742990693428 855227829147151891382457095255323436878972460344283856731814144161 565525767681218723995255421790894843807617837791022556048911674883 988696945333769530978168445592814155261158108021694193019296852341 689719506376253855740928753998066125689400939240808935891549697757 662722514885923646850536934200348042836679856933469870621958339639 775704742246667453719619295226718083754990171049093533730911367689 048485760252154477331682127508464792750960273178798985478317008114 8513873085444058741939360926584684355544622280387129474006982319
	6
460	– 65507601541135099553225195203246897628183453093303193720443439469 112063977453165004838124422370144389413352939447500879074058495134 264366249105421140244069500569194474345240967233524480174462973588 737102486174212455700152251212621356120279722841979221537183317765 329450851696108510884378771348780089193419806315312144319917159592 995634280813277622844219943337682519217571886569277042138721714659 255018616038851101990624959298172448640467652403003727820709423068 089313532982373291931040236485237271350256132728603124857597760978 089255617266468746220861206774497387080165950108770491232865752165 171733857958269726695053224661751060647911672444155776451901877831 09558537
	7150110
462	636888658885589052901557315727024332985747392751005503244802979976 675397327773349074380248113124968457448051653670739606434140113483 168871652781295546864249799561246957096519581716048742198568078879 341109614035666197614674515022810207552910234037372348299698326576 660639014386096667011376490283647522704234214085370390269095365373 807109861798705233949400843729425874395370913549860209060750769369 033081150234380435180592172958769468894953076792547254749408568798 780541041050596337349948178559086155130464375195792963986390645158 304544898842071296943008336891954855490348967390487729574523008025 409811403139504028037864592122790238965967453566193132825920147268 4713522055433
	1288550298
464	– 18857298830179974924112770561541616281221221384189502076669076264 976047092808327044455285057264395611449721575261104778730410937517 584780569515178453218485162032064757985570592549670176144846580835 479581397377968080888816781876496470092553884213405439099295600166 922552094277862936626130926947208594986670564424305882222906991140 105027483580040316310589718891869241651684068673823444617158761420 516419921212830316201380950669071896202429509916122408216700391529 207614337322294413686616755640417010114017871014732687567523349487 169987728627933665583187730293169187072702919606093787317858957503 395390909796261383238052409749871941799053230411409317203638562750 3846689476887699
	7010970

466	413664867987222956244209355804553132010737311619873937552617773013 514076367023256312176160835062661892330568050774492900833764272232 882273128949537336490168744752502048943049241434525025420643944559 491826884487174091266835019079457750298308269731643882842579624683 236689298288625957015934020852065186333120537819299541510992711232 749590370342660947186143661434743740645683801183663840994358198551 336011498396150912151423938206307866725487635171065947029616755552 973030152102744795495331947296938243287814790516243968203740094323 906300807997945263580249967044922095488324059855868304323339162224 087731767838889133184638682384777584272685488996638922752221799803 151101166568141
	2802
468	– 10311078417158292583434639119120306980330115269372483557430566896 746976027235401129901729566485900630311432606007240043470650279475 071004884505933907055950965373842725501345625808090366893466647209 730193061076367422321655032236938841399863742043699815440776568111 639881494792583698952007463596848032541544011246226784913225879401 662536883634517612792101458129355569590056170963578841549043151692 170405579892517520980162628979902260722259369702927489002804694624 192390688298028498146165252739471602566624583122435076121844815863 726937122267329555711487461642239402906465097059848815484229929916 442556184583129315171729728249556091038638700500048303589821531561 28215328921678827090764016307
	1261596819210
470	301188512670574409973522039731799774332284237966284386701245748565 406164428681036128926063056095855532173991462477799681429260898037 617758622985941710976235577943559100259786932475830383970536995316 845412258295246742979426181833225367398491810295210078233611825547 244385629725708901995508766557190851612705431746456650510895626334 976810141560416672624945285953742157497174172068239724208754377218 814505115022247180573164262593883452362474468782982223281207823275 802362572430210812017251300349771480681113489830696638136842926883 664618708287688430079713258060558978096084995295625323965331459365 135957743350303225791768643943305879602716567061428469743627314569 410061103860282955485
	66
472	– 77093700457084754271091665056593178961245023585985406136416469901 220305663891805513525989541610727342694879750023289720385307179039 388511646517139387597667369338500087933719821355644779439843478235 265473856312202262464296786457145438381426764887604844959060348011 569368916258075599268611653456366381620350652096950095474135368308 169187117084157285393268445701919072745257938826951876107006601222 563790676659880888913476690687085717049106972752285498760411014020 216570102805631771554675548288828114197906420616111989321355744112 468269784405866286783731771856807463267213940477585067380136750345 013434162873762750805827533103135524687571009218889458146221275327 5513865164976897399277601
	30

474	612952292169890392422509409889449397535534249520258396707026864996 049152742542554628612899465235974779561457672930090119328846836409 835192142589860586599073773776319685962393963038203188490802762813 787704449077187462862978005733804889649294757796800751981500316824 639564346558434304319323788088163599841936858527382357472083749625 528260149699708880312630557525481420723948112481931077760185178000 800453453098222545233027736231153217461521968565187309136079630980 890093898079984304519772412420545970369240469281520685695961466749 815643985486037860603959658552943868977788562886216218700863119242 145030707168058572872807257258094778023952047027577963159032879813 6283209653623721740978652009
	42
476	– 17379423342300736405717844177647822047732929524799274624619402803 309895539459843486368861521991621432430102300109335789374633008390 374420499116665081206184142374648758717528679082279957824121275749 931210032364789980185681658781469425053516060865121420317871519433 082960219631929983049825548102480965351668164793837106964205698945 323849219489946453419457598425921177877747472682590727634267960794 359502992576497468612049383075085881514411101815663974886306567994 459430027969032029548101477476877007773405036794285689450791457171 129992776268303501110154708108211346384015043987844050506209590781 786045225343460048504352183298203921719278001720504314354281288726 7054217968944656636429743815938366731
	207930
478	138736748329237451706365474934079747788120317871624843969222035842 450993638752664103925792499776549015462261382557256828901651664455 343262119677887709650506063356203296293922665090066676360603460808 284039809008707284728447012008490510310327211103838969929939606007 204472641770113794896969220126392340549450464935158306469160755287 789958752638917244223242248711043212927798168660478695941988170755 018313199077763545432669245662313406177262102697135053362285890026 493828211528767698867962376250649399315970878982263876605072991393 852521123682413378659820794625867056567584492629799061524097031158 114255355047037829351791497216828872288610052669325951498101840202 72544138033841220106232249961984874041
	2874
480	– 26012984231082938122321205711106137025736836308811099420978321017 146930273005671218213801512995150233049010223325808387207760652312 185884489040204754381130425223206104908949348483694397053700779323 806598166397483624967026385155584314813089275200872985931085543928 822164664368156111249818285706698582816847860316768251385568355911 376789419906820360322920270272727732554866797105317523759568495736 021299387762599572352567156747373223964524139683333489545030164669 822955224449969772265055374313158826483073058617899550929715104043 848380098396583498089878468223019258239295983312553586622706514962 679548326500707178484227310027019877548445744372693423428185302230 083093969160616600533454208539007576331211435405256579
	925269860885370

482	990616118004405209547336756803741296643221987382321931721822820900 299097210222317336001831102939236490395767769383589450743538317573 906480157831910388399026009549363482047723522295682385225255084608 513720106406633464966275709378145660935302980557499077874664887504 148114522460257788204486783699727500508138689641080038916313291730 518751063292404119140988768624151887967557709255327422581104429283 482510069570158085040668138860662778558327704232203358594262804010 229103345601462990376149249652299540260177492690219461257167020609 270211173637016502365724336529333125021542322561542486553234490872 949324335738034611680591470710376104053043734142034650737431499785 882884589522913671849942865299633710178111
	6
484	– 67458392197424380672758362660572689330500126334347027784764414135 371128371914474839621464346481552772005117663683783064120271503191 255854575127226596345915883267871177757443672510988304868805437789 240803024768655639895225247137834202574101143857509948489634133677 105394616859611760377943300958348608777826109273310209536257529491 481525772329941355298742893062544134997648318206356579338440826646 538047452952053482611495404763075487866804073584961078870988082054 198925090633480011938601417622164022045442694164420267062459959499 741675751425457093003126486309295280353197386087993003289902934257 812485432538519956276512152610321358835931236882845368841797213350 4757523704888418645741605357575301183566273541023
	690
486	369763997577304898527792056092078784633064579850215089906718927953 975408532819407204558577594984146089620623998022051043813802512840 569387856574528038951679028036813020229062675066916989178254799161 955591299056486170972788431152654760791766791190599466061280142672 740585701636947897534361260451582259758691868004875864277790983654 375073056163053627813804545640618169241729192679530964042280652574 338325670662894789508966565337142721844903092886592945025900894162 911247219665577745221033424450158824779569415157792860757313903143 859765449917326253963605938268777389669269349544451932422774330893 531316131993509969738757701435869993709233337662014445697606454995 935095546520785205839498933104702647973917548450654482159
	63346038
488	– 10541816873814096381316169108539113544559806579137816926164708551 453053764421674476779663590418587721548805288914617597594086705240 368673303934588475540778050221133715515127613013536686418819433156 406738624119864020847059082718330372484411485597582033736496792901 481620093071040857138614374070277702490846650695664248028186959784 027234555083365255720079247979950886689963934128030067369716278895 226180485362879082526221980577215262396385617524132279613757092621 411332044486165677804146252629352839983467564429582144636634184191 363198151813999632307770474159980792200412996991870674127149512046 516569338215208475275772897223820007540638044339880428153723968600 21515945936788059415457004917777955610189853432234056001
	30

490	490708060345718168482949551065008296976352341812156850912460754793 773228598743021163789697895339848508047563198613297970895771272423 084451586762411542433689884882582217920150615320261296412657655420 294950882472519077107436411891314989684272827405143453664676299901 282427746214002776016429289992734596941647026794542862610180682813 869753438462413802302318288921935542654412271101075502309306996459 972517715826132089736597584320511669263794701105417099176436055541 622722611853665479429929243382275785136760788118477444370781356616 739167758192241507716005871662971992278037186350173271291067722673 038829083878521474773044108789762491726385320922397469619970046438 378452390321367551511627206765616414040686450916033159995734945
	2300826
492	– 29571068203636866046288982859461223295592495500220152470524852020 659222298589820846856440902464355266331921730127927945659951516772 762515060645001891839736586682662551000383780776223472190722926893 972826075320957895148583235837966175332090509693705495409824532828 283882061200292799982787533794336758250202054566895650111341100127 955540207905539288764843239635727038706673051411859354656143960391 977874255951201590147514647612314156424329132790942850522708114929 089738480080979772959408130779591112576103406337356037191034111930 714511879376223307462677590891465762187531182727331935416048942500 997565555024227597619955118636192752511984670039590742279929660651 924836984103042578319856732472490503675332043765960585840105864135 3
	226590
494	483049520560700249858177567882399789086824383553406567918229500625 907963552412466894489636117289385056013694632157195762896070359698 773642254744021501072670210334726176330024986667395407197260672089 084008686294716524294580787684846264392838844795172809782471928593 994008782969148055489295860549520545509416900467263873853432524745 078962055365592853439992861256734658389110188036769686342340589961 430764533190073583476950977696482241431914136512209884110123657419 72645136470905240747762252236017014987041031403626598657560585240 367052731808496000172034226362765220595663439733476783625903396579 749288087861502113858006100123874110131952296752950967858334783924 23958039918096194458403331849842918089944679987935690252652536647
	6
496	– 25535109222241698972694173193973518774716242178265877234279078154 218306288190453574391345349607020347701104389306082727640662249328 994752154372973422361999092715922759633521270378541507790769763357 456276378726595626459724623679603915577643947700472106673593583118 436960062894166402312867190376592931480464022802240967436286930003 098509086131781553808335933575272888361402715107788113154287996385 861486207257531899222760762747086758473894396360217594584387656887 231071811145643960111628458232775253525983817907496407600357182919 744162523813712195436135703038816616947504736640465073624938220282 345566631808140813969037396579578863663701714202683178828730441933 582773514024218332915875259194767588507001149870106803558286434937 883617
	510

498	109865122848151584611673560594290165754441894276368560548381912845 497638546489943473724236724095238506744474900836564256806367057972 840967346175127292454912528560279504541320374184423042635861675985 398329422741182189709234833344612099575633961637349062044653629889 016751770974632874287029915736629535639003257698478643655378973595 019757875361471141167104505491430542529353951978597591329218845843 547284003410332653298426772099783819705741178585242260541458732945 989862623831443160498317466595792069381575522773601354592978160307 298563892368832435529933879136847223915909126311223045236240031443 275276664068708400030822980635517221018152497164494285989399694041 087509194064920210610906678866380762788743370112481779981143210065 9519242101309
	3499986
500	– 16596380640568557229852123088077134206658664302806671892352650993 155331641220960084014956088135770921465025323942809207851857992860 213463783252745409096420932509953165466735675485979034817619983727 209844291081908145597829674980159889976244240633746601120703300698 329029710482600069717866917229113749797632930033559794717838407415 772796504419464932337498642714226081743688706971990010734262076881 238322867559275748219588404488023034528296023051638858467185173202 483888794342720837413737644410765563213220043477396887812891242952 336301344808165757942109887803692579439427973561487863524556256869 403384306433922049078300720480361757680714198044230522015775475287 075315668886299978958150756677417180004362981454396613646612327019 784141740499835461
	8365830

Список литературы

1. Алферов А. П., Зубов А. Ю., Кузьмин А. С., Черемушкин А. В. Основы криптографии: Учебное пособие. 3-е изд., испр. и доп. – М.: Гелиос АРВ, 2005. – 480 с.
2. Антипин Н. А. Аспекты вычисления детерминантов матриц и их распределений по определителям // Марчуковские научные чтения – 2019: труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» / Институт вычислительной математики и матем. геофизики СО РАН. – Новосибирск, 2019. – с. 14–19.
3. Антипин Н. А. Аспекты распределений матриц из целых чисел порядка от 2 до 6 по их определителям, 3-е изд., доп. – СПб.: Научные технологии, 2022. – 572 с.
4. Антипин Н. А. Теоретические и практические аспекты матриц из нулей и единиц // Альманах мировой науки. – 2018. – № 1(21). – С. 6–35.
5. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. – М.: Государственное издательство технико–теоретической литературы. 1957 г.
6. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва: Наука, 2013. – 222 с.
7. Виноградов И. М. Основы теории чисел: учеб. пособие. – 12-е изд. стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 176 с.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория Матриц. – 5-е изд., – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 560 с. – ISBN 978-5-9221-0524-8.
9. Глухов М. М., Круглов И. А., Пичкур А. Б., Черемушкин А. В. Введение в теоретико-числовые методы криптографии: учеб. пособие – Санкт-Петербург: Лань, 2011. – 400 с.
10. Горлач Б. А. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2013. – 320 с.
11. Гурский Д. А., Турбина Е. С. Вычисления в Mathcad 12. – Санкт-Петербург: Питер, 2006. – 544 с.
12. Дьяконов В. П. MATLAB. Полный самоучитель. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 768 с.
13. Кнут Д. Э. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 3. Сортировка и поиск. – М.: Мир, 1978. – 844 с.

14. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды: Учебник. – 3-е изд. перераб. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 400 с. – ISBN 978-5-9221-0184-4.
15. Маркушевич А. И., Лаптев Б. Л., Медведев Ф. А., Розенфельд Б. А. Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. – М.: Наука, 1981. – 269 с.
16. Миллер Р., Боксер Л. Последовательные и параллельные алгоритмы: Общий подход. Пер. с англ. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 406 с.
17. Симонов Н. И., Ахиезер Н. И., Демидов С. С., Дорофеева А. В., Петрова С. С., Медведев Ф. А., Соловьев А. Д. Математика XIX века. Чебышевское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей. – М.: Наука, 1987. – 318 с.
18. Таненбаум Э. Архитектура компьютера. – 5-е изд. – СПб: Питер, 2013. – 844 с.
19. Таненбаум Э., Бос Х. Современные операционные системы. – 4-е изд. – Санкт-Петербург: Питер, 2019. – 1120 с.
20. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов: в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. – 16-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – Том 1. – 608 с.
21. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов: в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. – 16-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – Том 2. – 800 с.
22. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 685 с. ISBN 5-03-003117-0.
23. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 512 с. ISBN 5-03-001179-X.
24. Чеботарев Н. Г. Теория Галуа. – Изд. 3-е. – Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 152 с.
25. Шарый С. П. Оценка вариабельности решения, полученного с помощью интервальной регуляризации. // Марчуковские научные чтения – 2019: труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» / Институт вычислительной математики и матем. геофизики СО РАН. – Новосибирск, 2019. – С. 550-556.

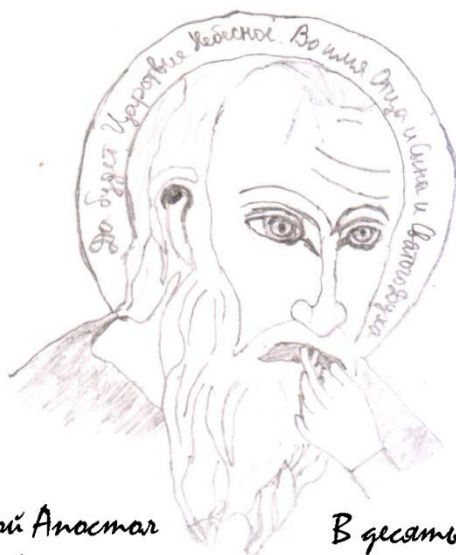
26. Шура-Бура М. Р. Оценка ошибок при численном обращении матриц высокого порядка, УМН, 1951, том 6, выпуск 4 (44), 121–150.

27. Юшкевич А. П., Антропова В. И., Башмакова И. Г., Дорофеева А. В., Майстров Л. Е., Ожигова Е. П., Розенфельд Б. А., Симонов Н. И., Шейнин О. Б. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: т. 3: Математика XVIII столетия. под ред. Юшкевича А. П. – М.: Наука, 1972. – 497 с.

28. Юшкевич А. П., Башмакова И. Г., Майстров Л. Е., Розенфельд Б. А., Чириков М. В., Шейнин О. Б. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: т. 2: Математика XVII столетия. под ред. Юшкевича А. П. – М.: Наука, 1970. – 304 с.

29. Crandall R., Pomerance C. Prime Numbers. A computational Perspective. – M. URSS, 2011. – 664 p. ISBN 978-5-453-00016-6.

30. Gautschi W. On inverses of Vandermonde and confluent Vandermonde matrices, Numer. Math. 1962. vol. 4, p. 117–123.



Святой Анастас
Иоани

В десять дней
мудра сотворил

*Единственной целью науки является честь
человеческого разума и с этой точки
зрения вопрос о числе также важен,
как и вопрос о системе мира.*

К. Г. Я. Якоби к А. М. Лежандру

Научное издание

Антипин Николай Александрович

Начальные стохастические моменты матриц

Монография

Издательство «Наукоемкие технологии»

ООО «Корпорация «Интел Групп»

<https://publishing.intelgr.com>

E– mail: publishing@intelgr.com

Тел.: +7 (812) 945-50-63

Подписано в печать 04.04.2024.

Формат 60×84/16

Объем 16 п.л.

Тираж 500 экз.

ISBN 978-5-907804-42-5



9 785907 804425 >