A red crosshair graphic consisting of a vertical line on the left and a horizontal line across the middle, intersecting at the left edge of the page.

Методы передачи данных на основе многих несущих

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ,
СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»
(СПбГУТ)

СПб ГУТ)))

МЕТОДЫ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ МНОГИХ НЕСУЩИХ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Научно-технологические
2024

УДК 621.391
ББК 32.88-01я73
М54

Авторы:

И. В. Гришин, Д. В. Окунева, А. А. Калинкина, А. Ю. Матюхин

Рецензенты:

Е. А. Кучерявый, доктор технических наук;

А. Г. Владыко, кандидат технических наук

М54 **Гришин И. В.**

Методы передачи данных на основе многих несущих: учебное пособие / И. В. Гришин, Д. В. Окунева, А. А. Калинкина, А. Ю. Матюхин. – СПб.: Научное издание, 2024. – 100 с.

ISBN 978-5-907946-02-6

В пособии изложены основные вопросы формирования, передачи и приёма сигналов в системах передачи с ортогональным частотным мультиплексированием. Рассмотрен ряд вопросов, посвящённых структуре радиоинтерфейса сети 5G NR.

Пособие предназначено для подготовки бакалавров и магистров по направлениям: 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи».

*Утверждено редакционно-издательским советом СПбГУТ
в качестве учебного пособия*

УДК 621.391
ББК 32.88-01я73

- © Гришин И. В., Окунева Д. В., Калинкина А. А., Матюхин А. Ю., 2024
- © Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича», 2024

ISBN 978-5-907946-02-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ.....	4
1. ОДНОЧАСТОТНАЯ МОДУЛЯЦИЯ	5
1.1. Описание принципов модуляции.....	5
1.1.1. Модуляция BPSK.....	5
1.1.2. Модуляция QPSK.....	7
1.1.3. Модуляция MQAM.....	8
1.2. Отображение бит в значения сигнала	10
1.3. Демодуляция сигнала.....	12
1.4. Вероятность символьной ошибки на приёме	15
1.4.1. Вероятность ошибки для угловых точек созвездия MQAM	19
1.4.2. Вероятность ошибки для внутренних точек созвездия MQAM.....	20
1.4.3. Вероятность ошибки для точек на периферии созвездия MQAM	21
1.4.4. Полная вероятность ошибки на приёме символа MQAM	21
1.4.5. Вероятность символьной ошибки для QPSK	22
1.4.6. Вероятность символьной ошибки для BPSK	22
1.5. Вероятность битовой ошибки на приёме.....	23
1.6. Пропускная способность каналов с АБГШ	24
1.7. Искажения сигнала при передаче	29
2. СИГНАЛЫ СО МНОГИМИ НЕСУЩИМИ	35
2.1. Согласование передающего оборудования с каналом связи	35
2.2. Организация независимых гауссовых каналов без памяти.....	37
2.3. Оборудование передачи/приёма для многочастотных систем	41
2.3.1. Сторона передачи	41
2.3.2. Сторона приёма.....	50
2.4. Влияние длины циклического префикса на приём сигналов.....	52
2.5. Пик фактор сигналов	56
2.5.1. Влияние пик-фактора на усилитель мощности сигналов OFDM.....	58
2.5.2. Нелинейные помехи сигналов OFDM, возникающие в УМ.....	60
2.6. Влияние нестабильности частоты	62
2.7. Достоинства и недостатки технологии OFDM.....	68
2.8. Структура цикла в сетях 5G NR.....	68
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	78
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	80
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	97

Список сокращений

5G (5-th Generation Networks) – сети беспроводной связи пятого поколения;
NR (New Radio) – новые радиointерфейсы;
BPSK (Binary Phase Shift Keying) – двоичная фазовая манипуляция;
CDF (Cumulative Distribution Function) – функция распределения;
CCDF (Complementary Cumulative Distribution Function) – дополнительная функция распределения;
DMT (Discrete MultiTone) – дискретная мультитоновая модуляция;
eMBB (Enhanced Mobile BroadBand) усовершенствованная подвижная широкополосная связь;
FR1 (Frequency Range 1) – частотный диапазон 1 (410 – 7125 МГц);
FR2 (Frequency Range 2) – частотный диапазон 2 (24250 – 52600 МГц);
ICI (InterCarrier Interference) – межканальная интерференция;
ISI (InterSymbol Interference) – межсимвольная интерференция;
QPSK (Quadrature Phase Shift Keying) – квадратурная фазовая манипуляция;
MQAM (M-Qadrature Amplitude Modulation) – квадратурная амплитудная модуляция с M разрешёнными состояниями сигнала;
mMTC (Massive Machine-Type Communications) – массовые межмашинные коммуникации;
OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing)– технология мультиплексирования с ортогональным частотным разделением;
URLLC(Ultra-Reliable and Low Latency Communications) – сверхнадежная связь с малыми задержками;

АБГШ– аддитивный белый гауссовый шум;
АЧИ– амплитудно-частотные искажения;
АЧХ– амплитудно-частотная характеристика;
АЦП– аналого-цифровой преобразователь;
БПФ– быстрое преобразование Фурье;
ВБП– верхняя полоса частот;
ДПФ– дискретное преобразование Фурье;
ЗГ– задающий генератор;
МДХ– мгновенная динамическая характеристика;
МКИ – межканальная интерференция;
МСИ – межсимвольная интерференция;
НБП – нижняя полоса частот;
НЧЭ – низкочастотный эквивалент;
ОБПФ– обратное быстрое преобразование Фурье;
ОДПФ– обратное дискретное преобразование Фурье;
ПРВ– плотность распределения вероятности;
ПЧ– преобразователь частоты;
РУ– решающее устройство;
СКО – среднеквадратическое отклонение;
УМ – усилитель мощности;
ФЧИ– фазо- частотные искажения;
ФЧХ– фазо-частотная характеристика;
ЦАП– цифро-аналоговый преобразователь;
ЦП– циклический префикс;

1. Одночастотная модуляция

1.1. Описание принципов модуляции

В технической спецификации TS 38.211 [1], посвященной вопросам организации физических каналов и модуляции в сетях 5G, перечислены следующие виды модуляции с одной несущей частотой: $\pi/2$ BPSK, BPSK, QPSK ($M=2, 4$), MQAM ($M=16, 64, 256, 1024$), где M – количество разрешенных состояний сигнала. Для сетей связи 4G виды модуляции определяются спецификацией TS 36.211 [2], которая включает QPSK и MQAM ($M=16, 64, 256$). Описание данных видов модуляции приводится ниже.

1.1.1. Модуляция BPSK

Двухпозиционная фазовая манипуляция BPSK (Binary Phase Shift Keying) является одним из простейших видов модуляции. Количество разрешённых состояний, которые может принимать сигнал, в данном случае равно двум: $M=2$. Таким образом, с помощью одного символа BPSK может быть передан $\log_2(M)=1$ бит информации. Стандартно сигналы в системах BPSK модуляцией имеют вид:

$$s(t)=k_M \sum_{i=-\infty}^{+\infty} d(i)p(t-iT)e(t)=\sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} d(i)\Pi(t-iT)\cos(2\pi f_0 t)=\sqrt{\frac{2}{T}}d(t)\cos(2\pi f_0 t), \quad (1)$$

где $d(i) \in \{-1, 1\}$ – значение сигнала в отсчётный момент времени iT ;

$d(t)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} d(i)\Pi(t-iT)$ – огибающая сигнала $s(t)$; $e(t)=\sqrt{2/T}\cos(2\pi f_0 t)$ –

несущее колебание на частоте f_0 ; T – тактовый интервал. Для рассматриваемых здесь и далее случаев выполняются следующие условия: $\forall T^{-1} \ll f_0$ или $Tf_0 \in \mathbb{N}$. Импульс $p(t)$ определяет форму огибающей символа и обладает энергией $E_p = \int_0^T p^2(t) dt$. В (1) выражении введён импульс прямоугольной формы $p(t)=\Pi(t)$ такой, что $\Pi(t)=1, t \in [0, T]$; и $\Pi(t)=0, t \notin [0, T]$.

Коэффициент $k_M = k_2 = \sqrt{2/T}$ введён в выражение (1) с целью нормировки энергии сигнала, которая может быть определена как:

$$E_{BPSK} = \int_0^T s^2(t) dt = \int_0^T \cos^2(2\pi f_0 t) dt = \int_0^T \frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\cos(4\pi f_0 t)}{8\pi f_0} \Big|_0^T \approx \frac{T}{2}. \quad (2)$$

В TS 38.211 [1] сигнал BPSK содержит как синфазную, так и квадратурную составляющие, что требует преобразования выражения (1) к виду:

$$\begin{aligned} s(t) &= k_M \operatorname{Re} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \dot{d}(i)p(t-iT) \dot{e}(t) = k_M \operatorname{Re} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \dot{d}(i)p(t-iT) \exp(j2\pi f_0 t) = \\ &= k_M \sum_{i=-\infty}^{+\infty} p(t-iT) (d_I(i) \cos(2\pi f_0 t) - d_Q(i) \sin(2\pi f_0 t)) = k_M |\dot{d}(t)| \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)), \quad (3) \end{aligned}$$

где $\dot{d}(i) \in \{-1-j, 1+j\}$ для BPSK и $\dot{d}(i) \in \{-1-j, -1+j, 1-j, 1+j\}$ для $\pi/2$ BPSK; $\dot{e}(t) = e_i(t) + j e_q(t) = \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)$; $|\dot{d}(i)| = \sqrt{d_I^2(i) + d_Q^2(i)}$ – амплитуда огибающей модулированного сигнала на интервале времени $iT \dots (i+1)T$; $\varphi(t)$ – начальная фаза несущего колебания, определяемая модулирующим (информационным) сигналом:

$$\varphi(i) = \arccos(d_I(i)/|\dot{d}(i)|) = \arcsin(d_Q(i)/|\dot{d}(i)|) = \arctg(d_Q(i)/d_I(i)).$$

Следует отметить, что выражение (3) также справедливо для описания сигналов с QPSK и MQAM модуляцией. В общем случае форма импульса должна быть нормирована по ортам базисных функций. Покажем, что данное условие выполняется для $\forall T^{-1} \ll f_0$ или $Tf_0 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \int_0^T p^2(t) \cos^2(2\pi f_0 t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^T p^2(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T p^2(t) \cos(4\pi f_0 t) dt = \\ &= \frac{E_p}{2} + \frac{1}{2} p^2(t) \frac{\sin(4\pi f_0 t)}{4\pi f_0} \Big|_0^T - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\sin(4\pi f_0 t)}{4\pi f_0} 2p(t) dp(t) dt \approx \frac{E_p}{2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T p^2(t) \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^T p^2(t) \sin(4\pi f_0 t) dt = \\ &= \frac{1}{2} p^2(t) \frac{\cos(4\pi f_0 t)}{4\pi f_0} \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\cos(4\pi f_0 t)}{4\pi f_0} 2p(t) dp(t) dt \approx 0, \end{aligned} \quad (5)$$

В выражениях (4,5) в силу того, что $4\pi f_0 \gg 1$, слагаемые с $4\pi f_0$ в знаменателе стремятся к 0. Результат для базисной функции $\sin(2\pi f_0 t)$ аналогичен результату (4) и поэтому здесь не приводится.

Энергия, отводимая на передачу одного символа BPSK, является постоянной величиной и с учётом выражений (4,5) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} E_{BPSK} &= \int_{(i-1)T}^{iT} k_2^2 p^2(t) (d_I(i) \cos(2\pi f_0 t) - d_Q(i) \sin(2\pi f_0 t))^2 dt = \\ &= k_2^2 \int_{(i-1)T}^{iT} p^2(t) (d_I^2(i) \cos^2(2\pi f_0 t) - d_I(i) d_Q(i) \sin(4\pi f_0 t) + d_Q^2(i) \cos^2(2\pi f_0 t)) dt = (6) \\ &= k_2^2 (d_I^2(i) + d_Q^2(i)) = k_2^2 |\dot{d}(i)|^2 E_p / 2 = k_2^2 E_p \end{aligned}$$

Аналогичный результат получается в случае представления сигнала BPSK в более компактной комплексной форме:

$$E_{BPSK} = \int_{(i-1)T}^{iT} \dot{s}(t) \dot{s}^*(t) dt = k_2^2 \int_{(i-1)T}^{iT} \dot{d}(i) \dot{d}^*(i) p^2(t) e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f_0 t} dt = k_2^2 |\dot{d}(i)|^2 \frac{E_p}{2}. \quad (7)$$

На рис.1 представлено сигнальное созвездие $\pi/2$ BPSK, где разными цветами выделены символы, которые ставятся в соответствие поступающему на вход модулятора биту в чётные и нечётные дискретные моменты времени. Как видно из рисунка, проекции на оси синфазной и квадратурной составляющих, равные $+1$ и $+j$ равны $\sqrt{E_{BPSK}}/2$, норма сигнала равна

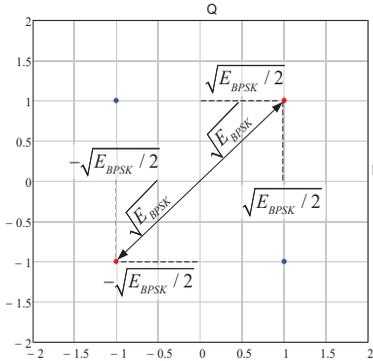


Рис.1 Сигнальное созвездие $\pi/2$ BPSK

откуда минимальное евклидово расстояние может быть определено как:

$$\rho_{min} = 2\sqrt{E_{MPSK}} \sin(\pi/M), \quad (9)$$

1.1.2. Модуляция QPSK

Для случая четырёхпозиционной фазовой манипуляции QPSK, где $M=4$, огибающая синфазной и квадратурной составляющих задаётся аналогично BPSK: $d_I(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} d_I(i)\Pi(t-iT)$, $d_Q(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} d_Q(i)\Pi(t-iT)$, где $d_I(i), d_Q(i) \in \{-1, +1\}$ (рис.2.а). Разрешённые состояния сигнала QPSK могут быть также представлены в комплексном виде $\{-1-j, -1+j, 1-j, 1+j\}$. Модулированный сигнал в данном случае может быть описан выражением вида (3), где начальная фаза несущего колебания может принимать значения $\varphi(i) \in \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$ (рис.2.б), откуда $\varphi(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varphi(i)\Pi(t-iT)$.

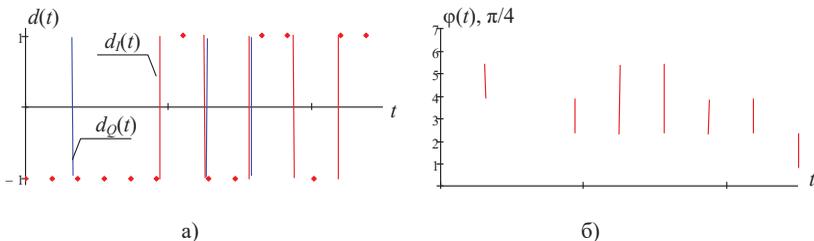


Рис.2 а) Фрагменты огибающих синфазной и квадратурной составляющих QPSK; б) Фаза сигнала QPSK.

Полоса пропускания QPSK определяется согласно выражению:

$$S(f) = T/2 \left[\text{sinc}^2((f-f_0)T) + \text{sinc}^2((f+f_0)T) \right]. \quad (10)$$

Модуляцию QPSK можно рассматривать как модуляцию 4QAM.

$|\dot{d}(i)|^2 = E_{BPSK}^{1/2} = 2$, следовательно, для нормировки E_{BPSK} масштабирующий коэффициент k_2 будет равен: $k_2 = \sqrt{1/E_p} = 1/|\dot{d}(i)| = \sqrt{1/2}$. Иная методика расчёта коэффициента k_2 приведена в разделе 1.2.

Евклидово расстояние между точками сигнального созвездия MPSK может быть определено как:

$$\rho_{mn} = \sqrt{|\dot{d}_n - \dot{d}_m|^2} = \sqrt{E_{MPSK}} \cos\left(2\pi \frac{n-m}{M}\right), \quad (8)$$

1.1.3. Модуляция MQAM

В случае модуляции MQAM используются созвездия квадратной формы. Таким образом, количество амплитуд для синфазной $d_I(i) = |\dot{d}(i)|\cos(\varphi(i))$ и квадратурной составляющей $d_Q(i) = |\dot{d}(i)|\sin(\varphi(i))$ совпадает. В зависимости от порядка модуляции значения амплитуд синфазной и квадратурной составляющих могут варьироваться в диапазоне от -31 до $+31$ с равномерным шагом 2 между разрешёнными значениями.

Для MQAM модуляции мощность и энергия передачи каждого символа из ансамбля не являются постоянными величинами. Определим средние значения энергии и мощности, отводимых под передачу символов MQAM [4]. Среднее значение энергии в общем виде может быть представлено выражением:

$$E_{MQAM} = E_p / 2 \cdot \mathbb{E}\{|\dot{d}(i)|^2\}, \quad (11)$$

Конкретизация среднего значения энергии для сигналов MQAM разного порядка производится в следующем подразделе.

Структурная схема квадратурного амплитудного модулятора представлена на рис.3. Данную схему можно рассматривать как обобщение для всех рассматриваемых здесь видов модуляции.

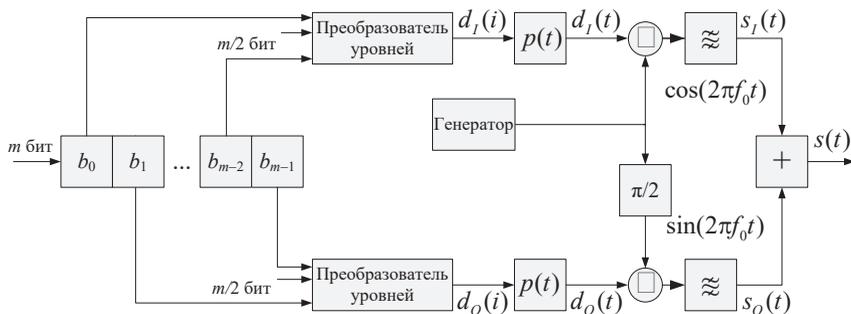


Рис.3 Схема MQAM модулятора

Двоичный поток данных поступает на вход m -разрядного преобразователя последовательного кода в параллельный.

Сигнальные линии параллельного интерфейса последовательно-параллельного преобразователя подключены к преобразователям уровней синфазной ($m/2$ чётных разрядов) и квадратурной ($m/2$ нечётных разрядов) составляющих. В преобразователях уровней производится отображение поступающих бит в разрешённые $2^{m/2}$ значения сигнала (рис.4.а). Описание правила отображения приводится в следующем подразделе.

С выхода преобразователя уровней сформированные символы синфазной $d_I(i)$ и квадратурной $d_Q(i)$ составляющих поступают на входы фильтров с импульсной характеристикой $p(t)$.

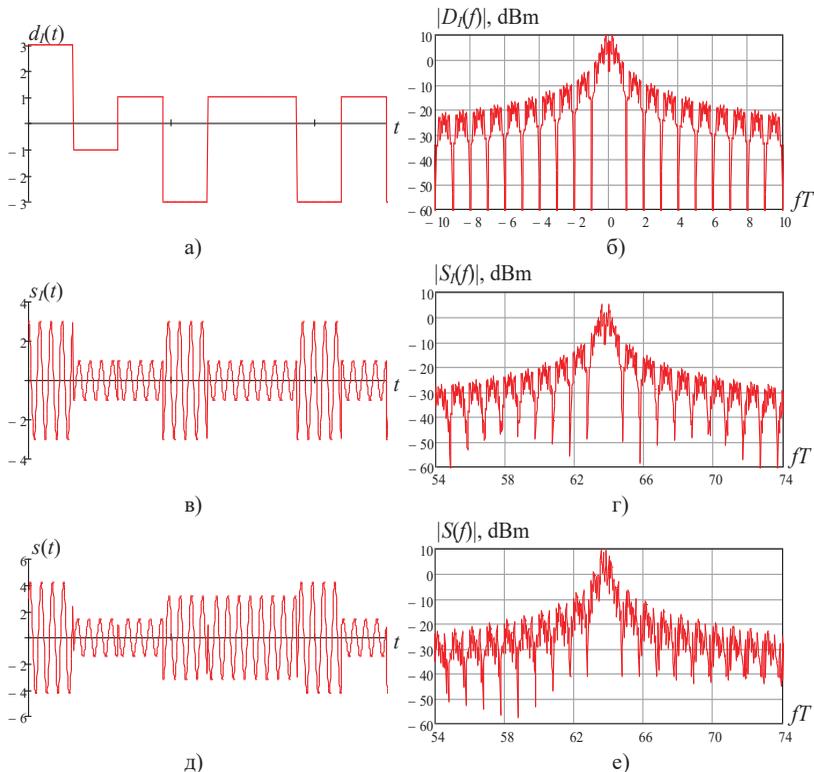


Рис.4 а) огибающая синфазной составляющей MQAM; б) спектр синфазной составляющей MQAM; в) синфазная составляющая на выходе смесителя частоты; г) спектр синфазной составляющей MQAM на выходе смесителя частоты; д) сигнал MQAM; е) спектр сигнала MQAM

Назначение данных фильтров заключается в формировании огибающей передаваемого символа заданной формы, с целью уменьшения влияния искажений в процессе передачи сигнала по каналу связи.

С выходов фильтров символы синфазной и квадратурной составляющих подаются на входы смесителей частоты, на вторые входы которых подаются гармонические колебания несущей частоты f_0 , вырабатываемые генератором. Как видно из рис.4.в, на выходах смесителей частоты наблюдаются модулированные по амплитуде сигналы.

Несущее колебание для квадратурной составляющей предварительно подаётся на преобразователь Гильберта, в котором осуществляется сдвиг фазы несущего колебания на $\pi/2$, что обеспечивает ортогональность несущих колебаний синфазной и квадратурной составляющих сигнала. Смеситель частоты осуществляет перенос спектра низкочастотной огибающей

сигнала (рис.4.б) в область частоты несущего колебания f_0 (рис.4.г). В приведённом в качестве примера рисунке частота несущего колебания f_0 равна 64 гармонике основной частоты $1/T$. Полосовой фильтр подавляет побочные продукты преобразования.

В сумматоре осуществляется объединение ортогональных друг другу синфазной $s(t)$ и квадратурной $s_Q(t)$ составляющих (рис.4.д,е), после чего сигнал может быть передан в канал связи.

1.2. Отображение бит в значения сигнала

Отображение бит информационного потока $b(i)$ в комплексные значения сигнала $\dot{d}(i)$ для разных видов модуляции осуществляется как [1]:

$\pi/2$ BPSK

$$\dot{d}(i) = 2^{-0.5} \exp(j\pi/2(i \bmod 2)) [(1 - 2b(i)) + j(1 - 2b(i))], \quad (12)$$

BPSK

$$\dot{d}(i) = 2^{-0.5} [(1 - 2b(i)) + j(1 - 2b(i))], \quad (13)$$

QPSK

$$\dot{d}(i) = 2^{-0.5} [(1 - 2b(2i)) + j(1 - 2b(2i + 1))], \quad (14)$$

16QAM

$$d(i) = 10^{-0.5} \{ (1 - 2b(4i)) [2 - (1 - 2b(4i + 2))] + j(1 - 2b(4i + 1)) [2 - (1 - 2b(4i + 3))] \}, \quad (15)$$

64QAM

$$d(i) = 42^{-0.5} \{ (1 - 2b(6i)) [4 - (1 - 2b(6i + 2))] [2 - (1 - 2b(6i + 4))] + j(1 - 2b(6i + 1)) [4 - (1 - 2b(6i + 3))] [2 - (1 - 2b(6i + 5))] \}, \quad (16)$$

256QAM

$$d(i) = 170^{-0.5} \{ (1 - 2b(8i)) B_{2,4,6}(i) + j(1 - 2b(8i + 1)) B_{3,5,7}(i) \}, \quad (17)$$

где

$$B_{2,4,6}(i) = 8 - (1 - 2b(8i + 2)) [4 - (1 - 2b(8i + 4))] [2 - (1 - 2b(8i + 6))],$$

$$B_{3,5,7}(i) = 8 - (1 - 2b(8i + 3)) [4 - (1 - 2b(8i + 5))] [2 - (1 - 2b(8i + 7))].$$

1024QAM

$$d(i) = 682^{-0.5} \{ (1 - 2b(10i)) [16 - (1 - 2b(10i + 2)) B_{4,6,8}(i)] + j(1 - 2b(10i + 1)) [16 - (1 - 2b(10i + 3)) B_{5,7,9}(i)] \}, \quad (18)$$

$$\text{где } B_{4,6,8}(i) = 8 - (1 - 2b(10i + 4)) [4 - (1 - 2b(10i + 6))] [2 - (1 - 2b(10i + 8))],$$

$$B_{5,7,9}(i) = 8 - (1 - 2b(10i + 5)) [4 - (1 - 2b(10i + 7))] [2 - (1 - 2b(10i + 9))].$$

Множитель, стоящий в выражениях (12–18), представляет собой масштабирующий коэффициент k_M (рис.5). Назначение k_M заключается в нормировании среднего значения энергии сигнала. Произведём оценку энергии ансамбля сигналов MQAM с учётом следующих фактов:

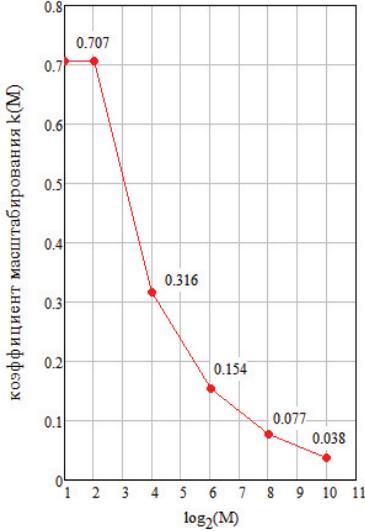


Рис.5 Масштабирующий коэффициент k_M

- количество точек сигнального созвездия в каждом из квадрантов одинаково, следовательно, выводы, сделанные для одного квадранта, будут справедливы и для остальных квадрантов $M / 4$;

- для квадратных сигнальных созвездий количество возможных состояний сигнала для синфазной и квадратурной составляющих является одинаковым, следовательно, можно утверждать, что энергии синфазной и квадратурной составляющих сигнала равны;

- в каждом квадранте количество компонент синфазной и квадратурной составляющих равно $\sqrt{M / 4}$, элементы алфавита MQAM в общем виде описываются как:

$$d_{MQAM} = \{\pm(2l-1) \pm j(2l-1)\}, l=1 \dots \sqrt{M/4}.$$

Тогда среднее значение энергии сигнала MQAM может быть рассчитано как сумма энергий синфазной и квадратурной составляющих:

$$\begin{aligned} E_{MQAM} &= \mathbb{E}\{|\dot{d}|^2\} = \mathbb{E}\{|\operatorname{Re}(\dot{d})|^2\} + \mathbb{E}\{|\operatorname{Im}(\dot{d})|^2\} = 2\mathbb{E}\{|\operatorname{Re}(\dot{d})|^2\} = \\ &= 2 \frac{\sqrt{M/4}}{M/4} \sum_{l=1}^{\sqrt{M/4}} (2l-1)^2 = \frac{2}{3}(M-1) = \frac{2}{3}(2^{2m}-1), \text{ Дж/символ} \end{aligned} \quad (19)$$

Так для созвездий MQAM значение энергии будет равно:

$$\begin{aligned} E_{16QAM} &= \frac{2\sqrt{16/4}}{16/4} (1^2 + 3^2) = \frac{2 \cdot 2}{4} 10 = 10 = \frac{2}{3}(16-1), \\ E_{64QAM} &= \frac{2\sqrt{64/4}}{64/4} (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2) = \frac{2 \cdot 4}{16} 84 = 42 = \frac{2}{3}(64-1), \\ E_{256QAM} &= \frac{2\sqrt{256/4}}{256/4} (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 13^2 + 15^2) = \frac{2 \cdot 8}{64} 680 = 170 = \frac{2}{3}(256-1), \\ E_{1024QAM} &= \frac{2\sqrt{1024/4}}{1024/4} \sum_{i=0}^{15} (2i+1)^2 = \frac{2 \cdot 16}{256} 5456 = 682 = \frac{2}{3}(1024-1). \end{aligned}$$

На основании полученных расчётов выражение энергии сигнала для квадратного созвездия MQAM может быть описано выражением:

$$E_{MQAM} = 2/3(M-1). \quad (20)$$

Из (20) масштабированный коэффициент для MQAM будет равен:

$$k_M = \sqrt{1.5(M-1)^{-1}} \quad (21)$$

Сигналы QPSK эквивалентны 4QAM, аналогичное допущение может быть сделано относительно сигналов $\pi/2$ BPSK, что позволяет использовать для расчётов выражение (21).

Энергия сигналов BPSK (6) рассчитывается как:

$$E_{BPSK} = 2\mathbb{E}\{| \operatorname{Re}(\dot{d}) |^2\} = 2 \frac{\sqrt{M/2}}{M/2} \sum_{l=1}^{\sqrt{M/2}} (2l-1)^2 = 2(M-1)^2 = 2.$$

Тогда значения масштабирующих коэффициентов для BPSK и QPSK модуляций составят: $k_2 = k_4 = \sqrt{1/2}$.

Среднее количество энергии на бит, при разных видах модуляции, может быть рассчитано согласно выражению:

$$E_b = E_{\text{сymb}} M^{-1} = E_{\text{сymb}} (2^m)^{-1}, \text{ Дж/бит} \quad (22)$$

Расположение точек в сигнальных созвездиях в зависимости от входной двоичной комбинации и изображения самих сигнальных созвездий (рис.П1.1) представлены в Приложении 1.

1.3. Демодуляция сигнала

Передача сигналов в канале неизменно сопровождается шумами и искажениями. На первом этапе достаточно рассмотреть сигнал на выходе канала, в котором присутствует только аддитивный белый гауссовый шум (АБГШ), искажения в сигнал в данном случае не вносятся, и символ на выходе канала зависит только от символа на входе канала. Такой канал называется каналом без памяти и выражение, связывающее вход и выход такого канала, имеет вид:

$$\dot{y}(t) = y_I(t) + jy_Q(t) = \dot{s}(t) + \dot{w}(t). \quad (23)$$

где $\dot{w}(t) = w_I(t) + jw_Q(t)$ – комплексный шум, с плотностью распределения вероятностей которого по синфазной и квадратурной составляющей вида:

$$f(w_I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left(-\frac{(w_I - \mu_w)^2}{2\sigma_w^2}\right) = f(w_Q), \quad (24)$$

где математическое ожидание μ_w и дисперсия σ_w^2 АБГШ имеют вид:

$$\begin{aligned} \mu_w &= \mathbb{E}\{w_I\} = \mathbb{E}\{w_Q\} = \mathbb{E}\left\{\int_0^T p(t)w_I(t)dt\right\} = 0, \quad (25) \\ \sigma_w^2 &= \mathbb{E}\{w_I^2\} = \mathbb{E}\{w_Q^2\} = \frac{1}{4E_p} \mathbb{E}\left\{\int_0^T p(t)w_I(t)dt \int_0^T p(\tau)w_I(\tau)d\tau\right\} = \\ &= \frac{1}{4E_p} \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}\{w_I(t)w_I(\tau)\} p(t)p(\tau)dt d\tau = \frac{1}{4E_p} \int_0^T \int_0^T K(t,\tau)p(t)p(\tau)dt d\tau = \\ &= \frac{N_0}{4E_p} \int_0^T \delta(t-\tau)p(t)p(\tau)dt = \frac{N_0}{4E_p} \int_0^T p^2(t)dt = \frac{N_0}{4E_p} \frac{E_p}{2} = \frac{N_0}{2}. \end{aligned}$$

$$E\{w_I w_Q\} = \mathbb{E}\{w_Q^2\} = \frac{1}{4E_p} \mathbb{E}\left\{\int_0^T p(t)w_I(t)dt \int_0^T p(\tau)w_Q(\tau)d\tau\right\} = 0. \quad (27)$$

где $\delta(t)$ – дельта функция; $K(t, \tau) = N_0/2 \cdot \delta(t - \tau)$ – автокорреляционная функция случайного процесса; $\mathbb{E}\{\}$ – процедура статистического усреднения; N_0 – спектральная плотность АБГШ.

Процедура демодуляции сигнала на стороне приёма на интервале времени $(i-1)T \leq t \leq iT$ осуществляется согласно выражению свёртки:

$$\hat{d}_I(i) = \int_{(i-1)T}^{iT} p(t-\tau)y(t)e_I(\tau)d\tau, \quad \hat{d}_Q(i) = \int_{(i-1)T}^{iT} p(t-\tau)y(\tau)e_Q(\tau)d\tau \quad (28)$$

где $p(t)$ – импульсная характеристика фильтра нижних частот, в данном случае $g(t)$ принята равной $g(t) = \Pi(iT - t)$ для $(i-1)T \leq t \leq iT$, тогда:

$$\begin{aligned} \hat{d}_I(i) &= \int_{(i-1)T}^{iT} p(t-\tau)(s(\tau) + w(\tau))\cos(2\pi f_0 \tau)d\tau = \\ &= \int_{(i-1)T}^{iT} \Pi(iT - t + \tau) \left(k_2 p(\tau) (d_I(i) \cos(2\pi f_0 \tau) - d_Q(i) \sin(2\pi f_0 \tau)) + w(\tau) \right) \cos(2\pi f_0 \tau) d\tau \end{aligned}$$

Приняв за отсчётный момент времени $t = iT$ и учитывая (4,5), а также требование к масштабирующему коэффициенту k_2 , получим:

$$\begin{aligned} \hat{d}_I(i) &= k_2 d_I(i) \int_{(i-1)T}^{iT} p^2(\tau) \cos^2(2\pi f_0 \tau) d\tau - k_2 d_Q(i) \int_{(i-1)T}^{iT} p^2(\tau) \sin(2\pi f_0 \tau) \cos(2\pi f_0 \tau) d\tau + \\ &+ \int_{(i-1)T}^{iT} p(\tau) w(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) d\tau = d_I(i) + w_I(i), \quad (29) \end{aligned}$$

Как видно из выражения (29), при условии передачи сигнала по каналу с АБГШ синфазная составляющая демодулированного сигнала в отсчётный момент времени iT $\hat{d}_I(i)$ представляет собой сумму мгновенных значений символа $d_I(i)$ и синфазной шумовой составляющей $w_I(i)$. Значение квадратурной составляющей демодулированного сигнала находится аналогичным образом:

$$\begin{aligned} \hat{d}_Q(i) &= k_2 d_I(i) \int_{(i-1)T}^{iT} p^2(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) \sin(2\pi f_0 \tau) d\tau - \\ &- k_2 d_Q(i) \int_{(i-1)T}^{iT} p^2(\tau) \sin^2(2\pi f_0 \tau) d\tau + \int_{(i-1)T}^{iT} p(\tau) w(\tau) \sin(2\pi f_0 \tau) d\tau = d_Q(i) + w_Q(i), \quad (30) \end{aligned}$$

В комплексной форме процедура демодуляции сигнала может быть описана выражением:

$$\hat{d}_I(i) = \operatorname{Re} \left(\int_{(i-1)T}^{iT} p(t-\tau) \dot{y}(\tau) e^{2\pi f_0 \tau} d\tau \right), \quad \hat{d}_Q(i) = \operatorname{Im} \left(\int_{(i-1)T}^{iT} p(t-\tau) \dot{y}(\tau) e^{2\pi f_0 \tau} d\tau \right) \quad (31)$$

Структурная схема квадратурного амплитудного демодулятора представлена на рис.5. Данную схему можно рассматривать как обобщение для всех рассматриваемых здесь видов модуляции.

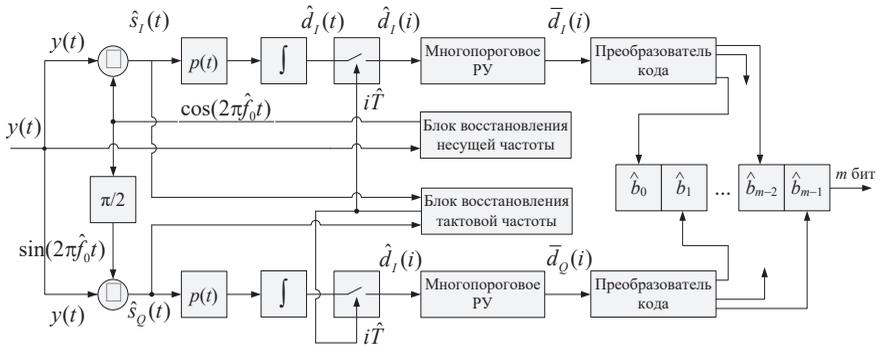


Рис.6 Схема MQAM демодулятора

Сигнал с выхода канала поступает на входы смесителей частоты и вход блока восстановления несущей частоты БВНЧ, в котором производится оценка частоты несущего колебания \hat{f}_0 , и последующая подстройка генератора, управляемого напряжением ГУН, входящего в состав БВНЧ. ГУН формирует гармоническое колебание с частотой \hat{f}_0 , поступающее на вторые входы смесителей частоты.

Преобразователь Гильберта, стоящий перед входом второго смесителя частоты осуществляет сдвиг фазы колебания на $\pi/2$. Таким образом, на вход второго смесителя подаётся гармоническое колебание вида $\sin(2\pi\hat{f}_0 t)$. На выходах смесителей частоты наблюдаются сигналы (рис.7.а), спектры которых содержат как высокочастотные составляющие (верхние боковые полосы ВБП), так и нижние боковые полосы НБП, расположенные в области частот огибающих синфазной и квадратурной составляющих (рис.7.б), для выделения которых (рис.7.г) необходимо пропустить полученные сигналы через фильтры нижних частот, имеющие импульсную характеристику вида $p(t)$.

Полученные низкочастотные символы (рис.7.в), рассматриваемые как оценки символов на передающей стороне поступают на вход многопорогового решающего устройства, в котором выносится решение об исходном значении символа синфазной $\bar{d}_i(i)$ и квадратурной составляющих $\bar{d}_o(i)$ передаваемого в отсчётный момент времени iT .

Данные сигналы поступают на вход преобразователей кода, на выходах которых формируются $m/2$ двоичные кодовые комбинации, однозначно соответствующие значению поступивших символов. Выходы преобразователей кодов соединены со входами параллельно-последовательного преобразователя. На чётные входы преобразователя поступают биты с выходов преобразователя кода синфазной составляющей, на нечётные – с выходов преобразователя кода квадратурной составляющей.

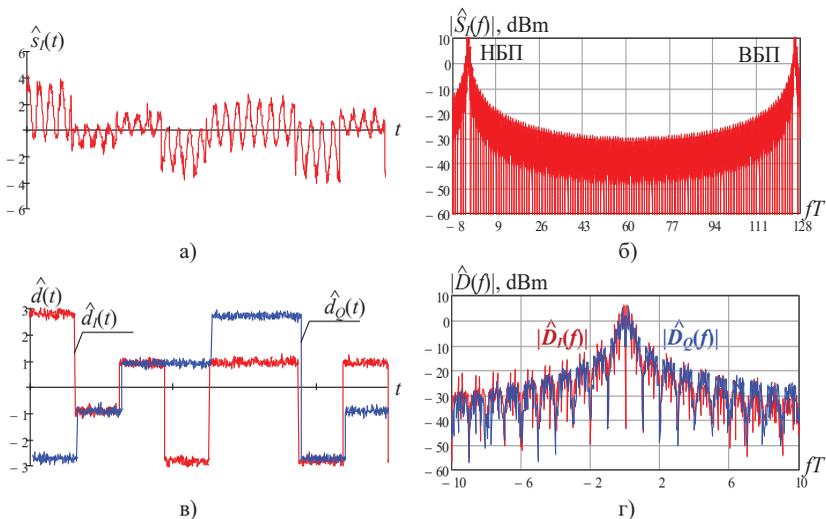


Рис.7 а) Синфазная составляющая сигнала на выходе смесителя частоты;
 б) Спектр синфазной составляющей сигнала на выходе смесителя частоты;
 в) Демодулированные сигналы синфазной и квадратурной составляющих сигнала MQAM; г) Спектры демодулированных сигналов

Вероятность принятия многопороговым РУ неверного решения отражается на последовательности бит, которые представлены как оценки бит, поступающих на вход последовательно-параллельного преобразователя, входящего в состав схемы модулятора (рис.3). С выхода параллельно последовательного преобразователя двоичная последовательность поступает к получателю сообщения.

1.4. Вероятность символьной ошибки на приёме

Как видно из рис.П1.1, по мере увеличения точек в сигнальном созвездии расстояние между ними уменьшается, что увеличивает вероятность ошибки регистрации символа на приёмной стороне при наличии в канале связи шумов и искажений. Так на рис. 8.а представлена аддитивная смесь сигнала 16QAM и АБГШ. Серыми линиями разграничены области принятия правильных решений для каждой точки сигнального созвездия. Гистограмма распределения принимаемого сигнала (без учёта масштабирующего коэффициента k_M) представлена на рис.5.б. Как видно из рисунка, распределение вероятностей для каждого символа принимаемого MQAM сигнала из-за наличия шумовой составляющей подчиняется нормальному закону, наиболее вероятные ошибки решающего устройства (РУ) вызваны переходом принимаемого сигнала в области соседних символов.

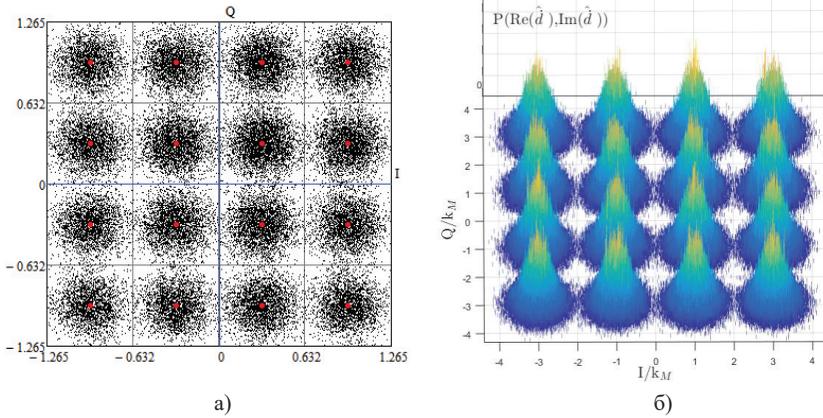


Рис. 8 а) сигнал 16QAM на фоне шумов;
 б) гистограмма распределения принимаемого 16QAM сигнала

Для нормального распределения справедливо правило трёх сигм, согласно которому почти достоверно, что случайная величина (сигнал+шум) отклоняется от центра рассеяния (в данном случае точки сигнального созвездия) по абсолютной величине больше чем на $3\sigma_w$ в 99,73% случаев.

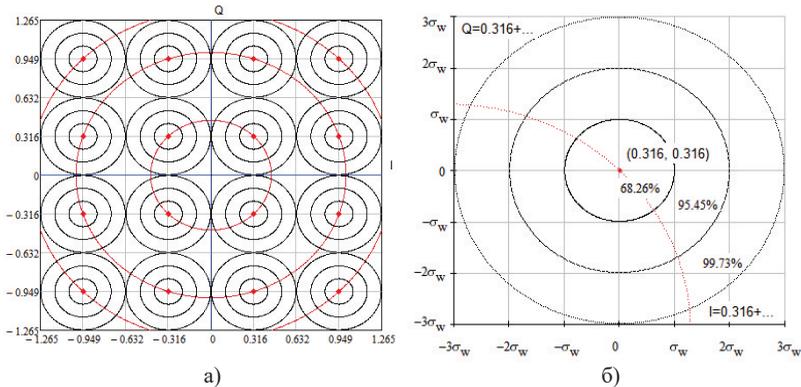


Рис. 9 а) сигнал 16QAM и окружности на плоскости IQ, соответствующие сечению плотности распределения 16QAM для значений СКО σ_w , $2\sigma_w$, $3\sigma_w$ относительно точек созвездия сигнала; б) окружности сечений плотности распределения принимаемого 16QAM сигнала в области точки сигнального созвездия с координатами $(k_{16}, j_{k_{16}})$

На рис.9 представлены сечения плотности распределения для 16QAM (рис.8.б) для значений среднеквадратического отклонения (СКО) относительно каждой точки сигнального созвездия на величину σ_w , $2\sigma_w$, $3\sigma_w$. На рисунке приводится случай, когда окружность с радиусом $3\sigma_w = 3\sqrt{N_0 / 2}$

вписана в квадрат области правильного принятия решения. В оставшихся 0,27% случаев значения принимаемого сигнала для заданной точки созвездия выходят за границы $3\sigma_w$ и могут быть распределены по углам области правильного принятия решения, а также выйти за её пределы. Оценим вероятность ошибки при регистрации символа на приёме на примере сигнального созвездия 64QAM, которое представлено на рис. 10.

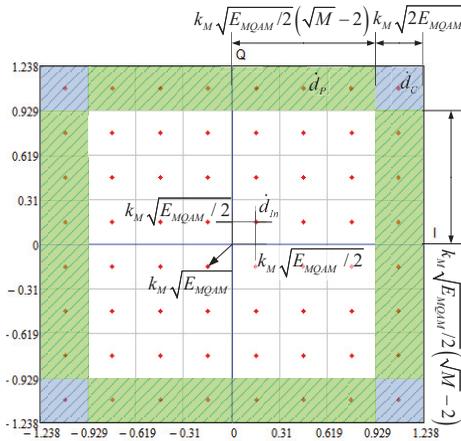


Рис. 10 Пространственная диаграмма MQAM

выделены зелёным цветом), условное обозначение количества точек – \tilde{M}_p .

Как видно из рисунка, в сигнальном созвездии можно выделить три типа точек [3]:

- точки, расположенные в углах сигнального созвездия (области данных точек выделены голубым цветом), условное обозначение количества данных точек – \tilde{M}_c ;
- внутренние точки сигнального созвездия, располагающиеся в области (обозначенной на рисунке белым цветом), условное обозначение количества данных точек – \tilde{M}_i ;
- периферийные точки сигнального созвездия (выделены

Количество точек, размещенных в углах, на периферии и внутри сигнального созвездия MQAM. $\tilde{M}_c = 4$, $\tilde{M}_p = 4(\sqrt{M} - 2)$, $\tilde{M}_i = (\sqrt{M} - 2)^2$.

Стороны области принятия корректного решения для каждой точки сигнального созвездия равны $2k_M \sqrt{E_{MQAM}}$.

Влияние шумовой составляющей на ошибки при регенерации сигнала также оценить с помощью глазковой диаграммы. Так на рис.11 представлены глазковые диаграммы синфазной составляющей сигнала 64QAM при разном соотношении сигнал/шум. Данные диаграммы представляет собой результат многократного наложения символов на прилегающих временных интервалах, снятых на выходе демодулятора, поступающих на вход решающего устройства. В качестве огибающей символов использовалась функция приподнятого косинуса.

По оси ординат отложены значения демодулированного сигнала. По оси абсцисс отложены номера дискретных моментов времени, на который разбивается интервал наблюдения, равный в данном случае удвоенному времени длительности импульса. Поэтому на рисунке можно наблюдать два момента раскрытия глазковых диаграмм. Ширина глазковой диаграммы определяет время принятия решения.

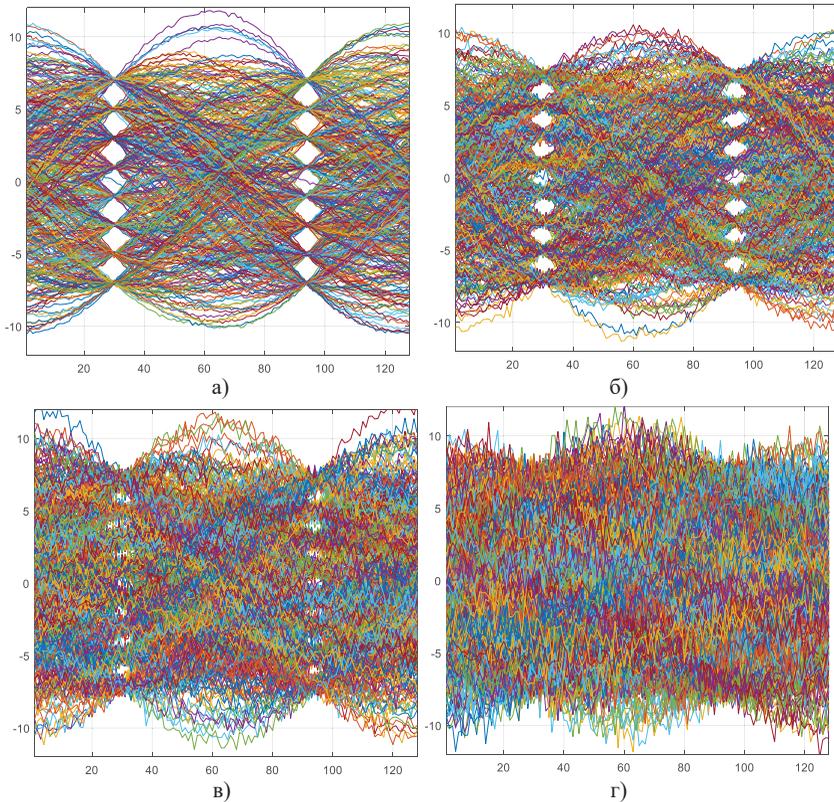


Рис. 11 Глазковая диаграмма синфазной составляющей 64QAM для разных отношений сигнал/шум а) $\gamma=20$, дБ; б) $\gamma=10$, дБ; в) $\gamma=5$, дБ; г) $\gamma=0$, дБ

Из первого графика видно, что оптимальным моментом стробирования является момент времени, в который наблюдается наибольший раскрыв глазковой диаграммы. В данном случае вероятность ошибочного принятия решения будет минимальной. Также из первой диаграммы можно сделать вывод о том, что порог принятия решения должен быть равен по значению точкам максимума сигнала нижележащего уровня на интервале принятия решения (в данном случае вершины четырёхугольника, соответствуют моментам времени начала и завершения принятия решения).

Как можно увидеть из 2-й и 3-й диаграммы рис.9, повышение уровня шума приводит к изменению формы, уменьшению раскрыва глазковой диаграммы, и нахождению сигнала в момент стробирования за пределами порога принятия корректного решения. На 4-й диаграмме раскрыва глаз при наличии шума не наблюдается, что приводит к вероятности ошибки близкой к 1.

Расчёт вероятностей ошибок для каждого типа символов и полной вероятности символьной ошибки на приёмной стороне приводится ниже.

1.1.4. Вероятность ошибки для угловых точек созвездия MQAM

Для синфазной $\hat{d}_I = \text{Re}(\hat{d})$ и квадратурной $\hat{d}_Q = \text{Im}(\hat{d})$ составляющих точек демодулированного сигнала, расположенных в углах сигнального созвездия, плотность условного распределения вероятностей может быть оценена на примере правой верхней точки сигнального созвездия. Данная точка обозначена на рис.10 как \hat{d}_C , координаты данной точки на плоскости имеют вид $(k_M \sqrt{E_{MQAM}}/2(\sqrt{M}-1), k_M \sqrt{E_{MQAM}}/2(\sqrt{M}-1))$:

$$f(y_I | \text{Re}(\hat{d}_C) = \hat{d}_I) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(\hat{d}_I - k_M \sqrt{E_{MQAM}}/2(\sqrt{M}-1))^2}{N_0}\right). \quad (32)$$

Вероятность принятия правильного решения можно записать в виде:

$$P_s(\text{corr} | \hat{d}_C) = P_s(\text{corr} | \text{Re}(\hat{d}_C))P_s(\text{corr} | \text{Im}(\hat{d}_C)) = P(\hat{d}_I > k_M \sqrt{E_{MQAM}}/2(\sqrt{M}-2))P(\hat{d}_Q > k_M \sqrt{E_{MQAM}}/2(\sqrt{M}-2)) \quad (33)$$

$$\begin{aligned} P_s(\text{corr} | \text{Re}(\hat{d}_C)) &= P(\hat{d}_I > k_M \sqrt{E_{MQAM}}/2(\sqrt{M}-2)) = \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^{k_M \sqrt{E_{MQAM}}/2(\sqrt{M}-2)} \exp\left(-\frac{(\hat{d}_I - k_M \sqrt{E_{MQAM}}/2(\sqrt{M}-1))^2}{N_0}\right) d\hat{d}_I = \\ &= P_s(\text{corr} | \text{Im}(\hat{d}_C)) = P(\hat{d}_Q > k_M \sqrt{E_{MQAM}}/2(\sqrt{M}-2)) \end{aligned} \quad (34)$$

Интеграл (34) может быть решён методом замены переменной y_I на u :

$$u = (N_0/2)^{-1/2} (\hat{d}_I - k_M \sqrt{E_{MQAM}}/2(\sqrt{M}-1)), \quad (35)$$

$$d\hat{d}_I = (u\sqrt{N_0}/2 + k_M \sqrt{E_{MQAM}}/2(\sqrt{M}-1))' du = \sqrt{N_0}/2 du, \quad (36)$$

нижний предел интегрирования по u при $y = k_M \sqrt{E_{MQAM}}/2(\sqrt{M}-1)$ будет:

$$\begin{aligned} (N_0/2)^{-1/2} (y - k_M \sqrt{E_{MQAM}}/2(\sqrt{M}-1)) = \\ = (N_0/2)^{-1/2} k_M \sqrt{E_{MQAM}}/2((\sqrt{M}-2) - (\sqrt{M}-1)) = -k_M \sqrt{E_{MQAM}}/N_0, \end{aligned}$$

Тогда вероятность правильного принятия решения определяется как:

$$\begin{aligned} P_s(\text{corr} | \text{Re}(\hat{d}_C)) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-k_M \sqrt{E_{MQAM}}/N_0} \exp(-u^2/2) du = \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_M \sqrt{E_{MQAM}}/N_0}^{\infty} \exp(-u^2/2) du = 1 - Q(k_M \sqrt{\gamma}) \end{aligned} \quad (37)$$

где $Q(\arg) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\arg}^{\infty} \exp(-u^2/2) du$ – Q-функция, являющаяся дополнением

до 1 гауссовой интегральной функции, $\gamma = E_{MQAM}/N_0$.

С учётом (33, 34, 37) получим вероятность правильного принятия решения РУ для угловых точек сигнальных созвездий MQAM:

$$P_s(corr | \dot{d}_c) = \left(1 - Q(k_M \sqrt{\gamma})\right)^2 = 1 - 2Q(k_M \sqrt{\gamma}) + Q^2(k_M \sqrt{\gamma}), \quad (38)$$

Вероятность ошибки с учётом (38) составит:

$$P_s(err | \dot{d}_c) = 1 - P_s(corr | \dot{d}_c) = 2Q(k_M \sqrt{\gamma}) - Q^2(k_M \sqrt{\gamma}). \quad (39)$$

1.1.5. Вероятность ошибки для внутренних точек созвездия MQAM

Вероятность ошибки в символе для внутренних точек созвездия может быть рассмотрена на примере точки $\{k_M \sqrt{E_{MQAM}}/2, k_M \sqrt{E_{MQAM}}/2\}$. Как видно из рис.8 и рис.9, для корректной регистрации символа необходимо, чтобы значения синфазной и квадратурной составляющих находились в границах $y_I, y_Q \in (0, 2k_M \sqrt{E_{MQAM}}]$. Вероятность данного события определяется выражением:

$$\begin{aligned} P_s(0 < \hat{d}_I \leq 2k_M \sqrt{E_{MQAM}}) &= P_s(0 < \hat{d}_Q \leq 2k_M \sqrt{E_{MQAM}}) = \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{(\hat{d}_I - k_M \sqrt{E_{MQAM}})^2}{N_0}\right) d\hat{d}_I - \\ &- \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{k_M \sqrt{E_{MQAM}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\hat{d}_I - k_M \sqrt{E_{MQAM}})^2}{N_0}\right) d\hat{d}_I, \end{aligned} \quad (40)$$

Решение (40) также может быть найдено через замену переменной аналогично (35, 36): $u = (N_0/2)^{-1/2} (\hat{d}_I - k_M \sqrt{E_{MQAM}}/2)$, $d\hat{d}_I = \sqrt{N_0/2} du$ с заменой пределов интегрирования на $-k_M \sqrt{E_{MQAM}}/N_0$ и $k_M \sqrt{E_{MQAM}}/N_0$:

$$\begin{aligned} P_s(corr | \text{Re}(\dot{d}_{in})) &= P_s(corr | \text{Im}(\dot{d}_{in})) = \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-k_M \sqrt{E_{MQAM}}/N_0} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du + \int_{k_M \sqrt{E_{MQAM}}/N_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \right) = 1 - 2Q(k_M \sqrt{\gamma}). \end{aligned} \quad (41)$$

В общем виде ситуация, описываемая выражениями (40, 41), представлена на рис.12.

Вероятность корректной регистрации символа РУ на приёмной стороне будет определяться выражением:

$$P_s(corr | \dot{d}_{in}) = \left(1 - 2Q(k_M \sqrt{\gamma})\right)^2 = 1 - 4Q(k_M \sqrt{\gamma}) + 4Q^2(k_M \sqrt{\gamma}), \quad (42)$$

Вероятность ошибки с учётом (42) составит:

$$P_s(err | \dot{d}_{in}) = 1 - P_s(corr | \dot{d}_{in}) = 4Q(k_M \sqrt{\gamma}) - 4Q^2(k_M \sqrt{\gamma}). \quad (43)$$

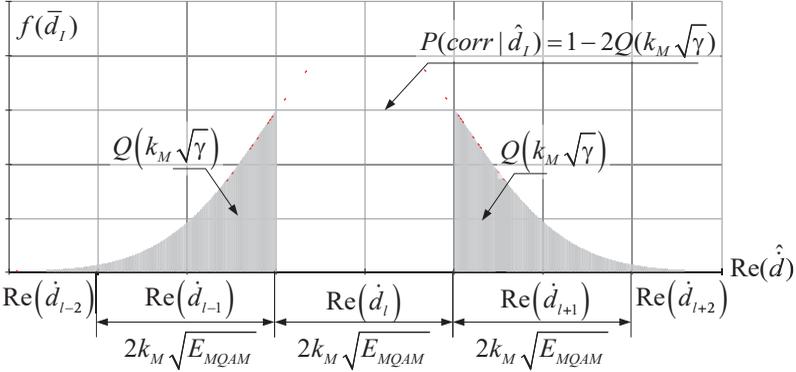


Рис. 12 Вероятности корректной и ошибочной регистрации символа на фоне АБГШ

1.1.6. Вероятность ошибки для точек на периферии созвездия MQAM

Для точек, расположенных на периферии сигнального созвездия MQAM, выражение вероятности ошибки может быть выведено на примере точки \hat{d}_p с координатами $(k_M\sqrt{E_{MQAM}}/2, k_M\sqrt{E_{MQAM}}/2(M-1))$. Для заданной точки сигнального созвездия для корректной регистрации синфазная и квадратурная составляющие принимаемого сигнала должны находиться в пределах: $\text{Re}(\hat{d}(i)) \in (0, k_M\sqrt{2E_{MQAM}}]$, $\text{Im}(\hat{d}(i)) \in (k_M\sqrt{2E_{MQAM}}(M-2), \infty)$.

Вероятности нахождения синфазной и квадратурной составляющих принимаемого сигнала в заданных пределах были определены ранее выражениями (37) и (41). Тогда вероятность корректной регистрации принимаемого сигнала будет иметь вид:

$$\begin{aligned} P_s(\text{corr}|\hat{d}_p) &= P(0 < \hat{d}_1 \leq 2k_M\sqrt{E_{MQAM}})P(\hat{d}_Q > k_M\sqrt{E_{MQAM}}(\sqrt{M}-2)) = \\ &= (1 - Q(k_M\sqrt{\gamma}))(1 - 2Q(k_M\sqrt{\gamma})) = 1 - 3Q(k_M\sqrt{\gamma}) + 2Q^2(k_M\sqrt{\gamma}). \end{aligned} \quad (44)$$

Откуда вероятность ошибки составит:

$$P_s(\text{err}|\hat{d}_p) = 1 - P_s(\text{corr}|\hat{d}_p) = 3Q(k_M\sqrt{\gamma}) - 2Q^2(k_M\sqrt{\gamma}). \quad (45)$$

1.1.7. Полная вероятность ошибки на приёме символа MQAM

Рассчитанные в предыдущих подразделах вероятности ошибок для трёх типов точек квадратного сигнального созвездия MQAM (39, 43, 45) позволяют определить полную вероятность ошибки РУ на приёме:

$$\begin{aligned} P_s(\text{err}|MQAM) &= M^{-1}(\tilde{M}_c P(\text{err}|\hat{d}_c) + \tilde{M}_l P(\text{err}|\hat{d}_l) + \tilde{M}_p P(\text{err}|\hat{d}_p)) = \\ &= M^{-1} \left[4(2Q(k_M\sqrt{\gamma}) - Q^2(k_M\sqrt{\gamma})) + (\sqrt{M}-2)^2(4Q(k_M\sqrt{\gamma}) - 4Q^2(k_M\sqrt{\gamma})) + \right. \\ &\quad \left. + 4(\sqrt{M}-2)(3Q(k_M\sqrt{\gamma}) - 2Q^2(k_M\sqrt{\gamma})) \right] = \\ &= 4M^{-1} \left[\sqrt{M}(\sqrt{M}-1)Q(k_M\sqrt{\gamma}) - (\sqrt{M}-1)^2 Q^2(k_M\sqrt{\gamma}) \right] \end{aligned} \quad (46)$$

1.1.8. Вероятность символьной ошибки для QPSK

Вероятность ошибок для QPSK рассчитывается аналогично вероятности ошибок для угловых точек сигнального созвездия MQAM. Рассмотрим вероятность ошибки на примере точки \hat{d}_C , лежащей в первом квадранте и имеющей координаты $(k_4\sqrt{E_{MQAM}}/2, k_4\sqrt{E_{MQAM}}/2)$. Нижние границы области принятия решения совпадают с положительными полуосями.

$$P_s(\text{corr}|\hat{d}_C) = P(\hat{d}_I > 0 | k_4\sqrt{E_{QPSK}}/2) P(\hat{d}_Q > 0 | k_4\sqrt{E_{QPSK}}/2) \quad (47)$$

$$\begin{aligned} P(y_I > 0 | k_4\sqrt{E_{QPSK}}/2) &= P(y_Q > 0 | k_4\sqrt{E_{QPSK}}/2) = \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_0^{\infty} \exp\left(-N_0^{-1} \left(y_I - k_4\sqrt{E_{QPSK}}/2\right)^2\right) dy = 1 - Q(k_4\sqrt{\gamma}) \end{aligned} \quad (48)$$

Вероятность ошибки аналогично (39) имеет вид:

$$P_s(\text{err}|d_{QPSK}) = 1 - P_s(\text{corr}|d_{QPSK}) = 2Q(k_4\sqrt{\gamma}) - Q^2(k_4\sqrt{\gamma}). \quad (49)$$

1.1.9. Вероятность символьной ошибки для BPSK

Для BPSK вероятность ошибки по синфазной или квадратурной составляющей рассчитывается по формуле (на примере синфазной):

$$f(\text{corr}|\hat{d}_I) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-N_0^{-1} \left(\hat{d}_I \mp k_2\sqrt{E_{BPSK}}\right)^2\right) \Rightarrow P(\text{corr}|\hat{d}_I) = 1 - Q\sqrt{2\gamma}. \quad (50)$$

$$P_s(\text{err}|d_{BPSK}) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2 M}{M^2-1}}\gamma\right) = Q(\sqrt{2\gamma}). \quad (51)$$

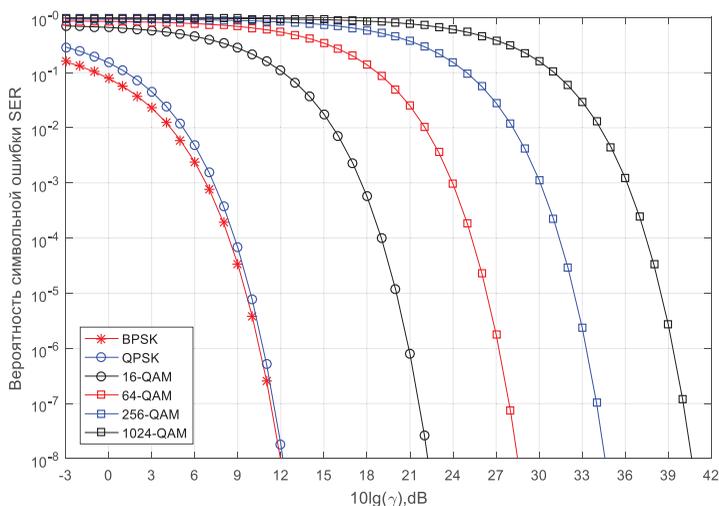


Рис. 13 Зависимость вероятности ошибки символа от соотношения сигнал/шум

На рис. 13 представлены графики зависимости вероятностей символьных ошибок от соотношения сигнал/шум для различных видов модуляции. Следует отметить следующие соотношения между $Q(\arg)$ -функцией, функцией ошибок $\text{erf}(\arg)$ и дополнительной функцией ошибок $\text{erfc}(\arg)$, которые также могут быть использованы для нахождения вероятности ошибки на приёме: $Q(\arg) = 0.5 - 0.5\text{erf}(\arg/\sqrt{2}) = 0.5\text{erfc}(\arg/\sqrt{2})$.

1.5. Вероятность битовой ошибки на приёме

Ошибка многопорогового РУ о значении принимаемого символа в результате действия АБГШ приводит к ошибке в битовой последовательности, формируемой на выходе преобразователя кода. Зависимости вероятности битовой ошибки от отношения сигнал/шум представлены на рис. 14.

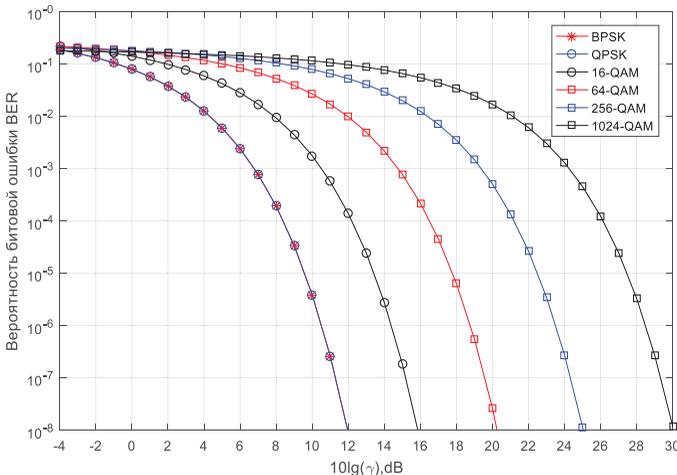


Рис. 14 Зависимость вероятности битовой ошибки от соотношения сигнал/шум

Сравнивая данные графики зависимостей с графиками, приведёнными на рис. 13, можно заметить, что для MQAM созвездий битовая вероятность ошибок оказывается меньше, чем вероятность ошибок по символам. Разница увеличивается при росте порядка модуляции, причиной чего является тот факт, что наиболее вероятные переходы приходятся на символы, отличающиеся одним или двумя битами в двоичной комбинации, которой ставится в соответствие данный символ. На рис. 15 представлены 16 точек сигнального созвездия MQAM, которым ставятся в соответствие 16 4-х битовых кодовых комбинаций для 16QAM согласно выражению (10) и 16 из 64-х 6-ти битовых кодовых комбинаций для 64QAM согласно (11). На примере точки с координатами (+1, +1) можно видеть, что наиболее вероятный переход сигнала в выделенную синим цветом область принятия решения соседней

точки, расположенной по горизонтали или вертикали, приводит к ошибке 1 бита в кодовой комбинации. В случае перехода сигнала в область,

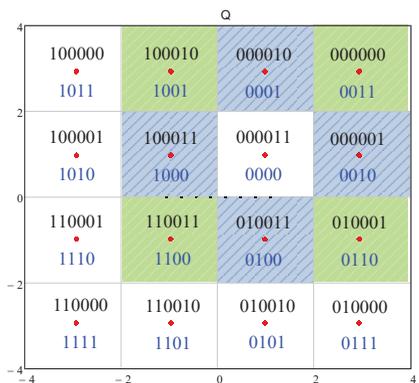


Рис. 15 Точки сигнального созвездия MQAM

расположенную по диагонали от области принятия корректного решения (обозначена зеленым цветом) в момент стробирования, ошибки в кодовой комбинации будут наблюдаться для 2-х бит. Данное правило справедливо для сигнальных созвездий более высокого порядка модуляции MQAM.

1.6. Пропускная способность каналов с АБГШ

Как было показано в предыдущих подразделах, наличие шумовой составляющей в сигнале на выходе канала связи приводит к ошибкам на стороне приёма, которые характеризуются переходными вероятностями. Оценим максимально допустимую скорость передачи данных по каналу с АБГШ (пропускную способность), при которой обеспечивается отсутствие ошибок на приёмной стороне за единицу времени (1,с), далее обозначаемую аналогично интервалу наблюдения за сигналом как T_n . Количество дискретных отсчётов принимаемого комплексного сигнала $\hat{d}(i) = \dot{d}(i) + \dot{w}(i)$ за данный интервал наблюдения определяется величиной $N = T_n / T = WT_n$, где $W = 1/T$ – скорость, с которой источник выдаёт независимые отсчёты сигнала, значение интервала T определяется выражением $T = (2\Delta f)^{-1}$, где Δf – ширина полосы частот, отводимой под передачу сигнала. Комплексный сигнал согласно (15, 16) состоит из синфазной $\hat{d}_i(i)$ и квадратурной $\hat{d}_o(i)$ вещественных составляющих. Таким образом, количество дискретных отсчётов на интервале наблюдения для вещественных составляющих будет равно $N = 2WT_n$. В дальнейших выражениях индексы синфазной и квадратурной составляющих будут опущены. Для данных сигналов справедливо выражение (18), а также, в силу отсутствия корреляции между дискретными отсчётами шумовой составляющей справедливо утверждение об их статистической независимости, откуда:

$$P(\hat{d}(1), \dots, \hat{d}(N) | d(1), \dots, d(N)) = \prod_{i=1}^N P(\hat{d}(i) | d(i)). \quad (52)$$

Выражение (52) описывает каналы без памяти, что подразумевает факт влияния на текущий передаваемый символ только шума при отсутствии влияния на передачу символов, переданных в предыдущие моменты времени. Количество информации, которую содержит принятый символ $\hat{d}(i)$ относительно переданного $d(i)$, может быть найдено согласно [5–7]:

$$\begin{aligned} I(\hat{d}(i); d(i)) &= \log_2 P(\hat{d}(i); d(i)) - \log_2 (P(\hat{d}(i))P(d(i))) = \\ &= \log_2 \left(\frac{P(\hat{d}(i); d(i))}{P(\hat{d}(i))P(d(i))} \right) = \log_2 \left(\frac{P(\hat{d}(i)|d(i))}{P(\hat{d}(i))} \right) = \log_2 \left(\frac{P(d(i)|\hat{d}(i))}{P(d(i))} \right). \end{aligned} \quad (53)$$

В случае, когда символы на входе и выходе канала появляются независимо друг от друга, средняя взаимная информация $I(\hat{d}(i); d(i))=0$, в остальных случаях символ на выходе содержит информацию о символе на входе канала и $I(\hat{d}(i); d(i)) \neq 0$.

Последовательности символов на входе и выходе канала могут быть представлены векторами вида: $\mathbf{d} = (d(1), \dots, d(N))^T$ и $\hat{\mathbf{d}} = (\hat{d}(1), \dots, \hat{d}(N))^T$. Среднее количество информации, которое содержит один символ, в данном случае может быть определено согласно выражению:

$$\begin{aligned} I(\hat{\mathbf{d}}; \mathbf{d}) &= \mathbb{E} \{ I(\hat{d}(i); d(i)) \} = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M P(\hat{d}_k(i)|d_l(i)) I(\hat{d}_k(i); d_l(i)) = \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M P(\hat{d}_k(i)|d_l(i)) \log_2 \left(\frac{P(\hat{d}_k(i)|d_l(i))}{P(\hat{d}_k(i))} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M P(\hat{d}_k(i)|d_l(i)) \log_2 \left(\frac{P(\hat{d}_k(i)|d_l(i))P(d_l(i))}{P(\hat{d}_k(i))P(d_l(i))} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M P(\hat{d}_k(i)|d_l(i)) \log_2 \left(\frac{P(\hat{d}_k(i), d_l(i))}{P(\hat{d}_k(i))P(d_l(i))} \right) = H(\mathbf{d}) - H(\mathbf{d}|\hat{\mathbf{d}}) = H(\hat{\mathbf{d}}) - H(\hat{\mathbf{d}}|\mathbf{d}). \end{aligned} \quad (54)$$

где нижние и индексы k и l определяют k -й и l -й элементы множеств символов на выходе и входе канала. где $H(\mathbf{d})$, $H(\hat{\mathbf{d}})$ – энтропии случайных величин на входе и выходе канала; $H(\hat{\mathbf{d}}|\mathbf{d})$ – условная энтропия случайной величины на выходе канала, которая рассматривается как средняя информация о системе $\hat{\mathbf{d}}$ после наблюдения за системой \mathbf{d} , $H(\mathbf{d}|\hat{\mathbf{d}})$ – средняя информация о системе \mathbf{d} после наблюдения за системой $\hat{\mathbf{d}}$.

Апостериорные вероятности $P(\hat{d}_k(i)|d_l(i))$ определяются параметрами канала связи, в то время как априорная вероятность $P(d_l(i))$ может определяться алгоритмами обработки сигналов на стороне передачи, где источник сигнала, как было показано выше, подаёт символы в канал со скоростью W . Таким образом, скорость передачи находится по формуле: $R = WI(\hat{\mathbf{d}}; \mathbf{d})$, откуда пропускная способность канала C определяется через среднюю взаимную информацию, которая максимизируемую по вероятностям входных символов:

$$C = \max R = W \max I(\hat{\mathbf{d}}; \mathbf{d}) = W \max (H(\hat{\mathbf{d}}) - H(\hat{\mathbf{d}}|\mathbf{d})) = W \max (H(\mathbf{d}) - H(\mathbf{d}|\hat{\mathbf{d}})) \quad (55)$$

Для ограниченного по полосе частот канала с дискретным временем и АБГШ, и переходными функциями плотности распределения вероятностей (ПРВ) вида $p(\hat{d}(i)) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp(-(\hat{d}(i) - d(i))^2 / N_0)$ средняя взаимная информация принимает вид:

$$\begin{aligned} I(\hat{\mathbf{d}}; \mathbf{d}) &= \int \int_{\hat{\mathbf{d}} \mathbf{d}} p(\hat{\mathbf{d}} | \mathbf{d}) p(\mathbf{d}) \log_2 \frac{p(\hat{\mathbf{d}} | \mathbf{d})}{p(\hat{\mathbf{d}})} d\hat{\mathbf{d}} d\mathbf{d} = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\hat{d}(i) | d(i)) \log_2 \frac{p(\hat{d}(i) | d(i))}{p(\hat{d}(i))} d\hat{d}(i) dd(i) \end{aligned} \quad (56)$$

Условие максимума средней взаимной информации (56) выполняется для последовательностей статистически независимых входных символов с нулевым средним и $f(d(i)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_d^2}} \exp(-d(i)^2 / \sigma_d^2)$, где $\sigma_d^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 f(d) dd$.

В таком случае средняя взаимная информация между последовательностями \mathbf{d} и $\hat{\mathbf{d}}$ равна сумме средних взаимных информаций между отдельными дискретными отсчётами последовательностей:

$$\max I(\mathbf{d}; \hat{\mathbf{d}}) = \sum_{i=1}^N I(d(i); \hat{d}(i)). \quad (57)$$

Максимальные значения энтропии входных и выходных символов определяются согласно выражениям:

$$\max H(\mathbf{d}) = \log_2 \sqrt{2\pi e \sigma_d^2}, \quad \max H(\hat{\mathbf{d}}) = \log_2 \sqrt{2\pi e \left(\sigma_d^2 + \frac{N_0}{2} \right)}, \quad \max H(\hat{\mathbf{d}}|\mathbf{d}) = \log_2 \sqrt{\pi e N_0}.$$

С учётом данных выражений, описывающих энтропию, а также с учётом выражений (56–57) пропускная способность канала имеет вид [8]:

$$\begin{aligned} \max I(\mathbf{d}; \hat{\mathbf{d}}) &= \max (H(\hat{\mathbf{d}}) - H(\hat{\mathbf{d}}|\mathbf{d})) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\log_2 \left(2\pi e \left(\sigma_d^2 + \frac{N_0}{2} \right) \right) - \log_2 (\pi e N_0) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \log_2 \left(1 + \frac{2\sigma_d^2}{N_0} \right) = \frac{1}{2} N \log_2 \left(1 + \frac{2\sigma_d^2}{N_0} \right) = W T_n \log_2 \left(1 + \frac{2\sigma_d^2}{N_0} \right). \end{aligned} \quad (58)$$

В случае ограничения средней мощности входных сигналов:

$$\bar{P}_s = T_n^{-1} \int_0^{T_n} |d^2(t)| dt = T_n^{-1} \sum_{i=1}^N |d^2(t)| = T_n^{-1} N \sigma_d^2, \quad (59)$$

следует, что $\sigma_d^2 = \bar{P}_s N^{-1} T_n = (2W)^{-1} \bar{P}_s$. (60)

Подстановка (60) в выражение (58) даёт:

$$\max I(\mathbf{d}; \hat{\mathbf{d}}) = W T_n \log_2 \left(1 + \frac{\bar{P}_s}{W N_0} \right) = W T_n \log_2 (1 + \gamma). \quad (61)$$

Пропускная способность канала может быть получена путём деления

правых частей равенства (61) на интервал наблюдения T_n :

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{\bar{P}_s}{WN_0} \right) = W \log_2 (1 + \gamma). \quad (62)$$

Из выражения (62), которая носит название предела Шеннона, видно, что пропускная способность канала увеличивается при расширении полосы частот, отводимой под передачу, и соотношения сигнал/шум в канале.

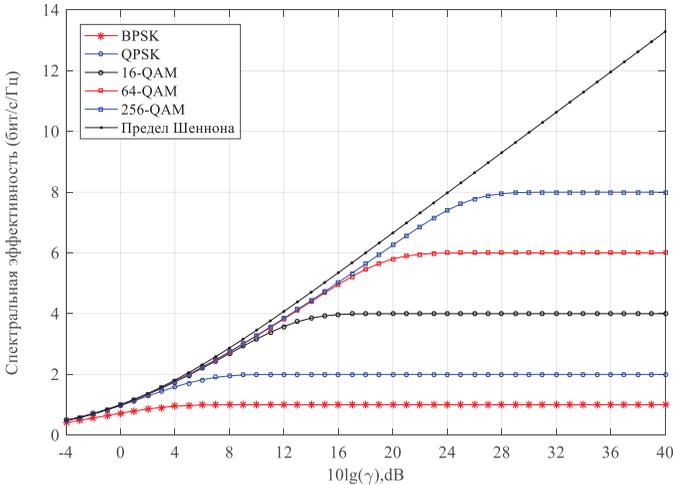


Рис. 16 Зависимость спектральной эффективности системы связи от соотношения сигнал/шум

На рис.16 представлены графики зависимости спектральной эффективности $\eta=C/W$ от соотношения сигнал/шум γ для разных видов модуляции в случае передачи равновероятных символов по каналу с дискретным временем и АБГШ.

Выражение (62) описывает верхнюю границу скорости передачи данных при физически нереализуемых условиях. В реальных каналах связи скорость передачи оказывается меньше пропускной способности $R < C$. Так же следует отметить, что (62) подразумевает отсутствие ошибок на приёмной стороне, в то время как в реальных условиях ошибки присутствуют.

Выражение (62) показывает, что работоспособность системы передачи данных обеспечивается до тех пор, пока скорость передачи не превышает пропускной способности, то есть система обладает избыточностью:

$$\delta_u = (C - R) / R = \max I(\mathbf{d}; \hat{\mathbf{d}}) / I(\mathbf{d}; \mathbf{d}) - 1 > 0. \quad (63)$$

Избыточность определяется отношением максимально возможного количества информации к тому количеству информации, которое обрабатывает система за время T , и является информационным выражением эффективности системы [9]. Оценим системы передачи с точки зрения удельных

затрат, необходимых на передачу единицы информации. Удельные энергетические затраты могут быть определены как:

$$\beta_E = \bar{P}_c T / N_0 = E / N_0. \quad (64)$$

Удельные затраты полосы частот определяются величиной:

$$\beta_W = W / C. \quad (65)$$

С учётом того, что $CT=1$,бит, выражение (62) приводится к виду:

$$\frac{W}{C} \log_2 \left(1 + \frac{\bar{P}_s T}{N_0} \frac{C}{W} \right) = \frac{W}{C} \log_2 \left(1 + \frac{E}{N_0} \frac{C}{W} \right) = \beta_W \log_2 \left(1 + \frac{\beta_E}{\beta_W} \right) = 1, \quad (66)$$

откуда может быть выведено следующее соотношение между β_W и β_E :

$$\beta_E = \beta_W (2^{1/\beta_W} - 1). \quad (67)$$

Из (67) видно, что увеличение одного параметра неизбежно приводит к уменьшению другого. Так при увеличении удельных затрат по полосе частот удельные затраты по энергии уменьшаются, в пределе стремясь к величине $\ln(2)=0.693$.

Показатели качества работы цифровых систем могут быть улучшены за счёт выбора нужных сигнальных конструкций, основанного на предъявляемых к этим системам требований и ряда накладываемых ограничений.

Так для стационарного источника дискретной информации средняя производительность определяется согласно выражению:

$$\max H'(\mathbf{d}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T_n} \log_2 K, \quad (68)$$

где K – количество возможных сообщений, вырабатываемых дискретным источником за время T_n . В том случае, когда количество сигналов, формируемых источником сообщений (основание алфавита), равно M , а длина сообщений, формируемых источником за время T_n , равно N , выражение (68) может быть преобразовано к виду:

$$\max H'(\mathbf{d}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \log_2 M^N = \frac{1}{T} \log_2 M. \quad (69)$$

Из (69) можно сделать вывод о том, что производительность источника определяется основанием алфавита и длительностью тактового интервала [9]. В канале, который согласно Шеннону может считаться оптимальным, источник сигнала согласован с каналом, что означает, что его производительность равна пропускной способности канала: $\max H' = C$, откуда время, затрачиваемое на обработку 1 бита:

$$T_b = T / \log_2 M. \quad (70)$$

Выражение (70) устанавливает связь между временем передачи символов и бит. На основании данного выражения удельные затраты полосы частот в идеальном канале могут быть записаны в виде:

$$\beta_W = W / C = WT_b = WT / \log_2 M = B / \log_2 M. \quad (71)$$

где $B = WT \geq 1$ – база сигнала.

1.7. Искажения сигнала при передаче

В предыдущих разделах было рассмотрено влияние шумов на вероятность ошибки на приёмной стороне и пропускную способность канала передачи. Рассмотренный канал не обладал памятью, и параметры сигнала на выходе канала зависели только от сигнала, поданного на вход канала в текущий момент времени, и не зависели от предыдущих и последующих сигналов. В реальных каналах связи данное условие не выполняется. В данном подразделе в общем виде даётся описание зависимости, связывающей сигналы на входе и выходе канала и оказывающей негативное влияние на скорость передачи данных. Пусть канал передачи описывается низкочастотным эквивалентом импульсной характеристики: $h(t, \tau)$, которая может претерпевать изменения с течением времени t . Аргумент τ определяет величину задержки сигнала. Тогда выражение, описывающее связь низкочастотных эквивалентов сигнала на входе и выходе канала (31), может быть преобразовано к виду:

$$\hat{d}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(t, \tau) \hat{d}(t - \tau) d\tau + \dot{w}(t) = \hat{d}_{\text{out}}(t) + \dot{w}(t). \quad (72)$$

где $\hat{d}_{\text{out}}(t)$ – низкочастотный эквивалент бесшумовой составляющей сигнала на выходе канала. Для физически реализуемых каналов выполняется следующее условие $\hat{h}(t, \tau) = 0, \forall t < 0$. Импульсная характеристика связана с передаточной функцией канала преобразованием Фурье:

$$\dot{H}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(t, \tau) \exp(-j2\pi f t) dt, \quad (73)$$

которая должна удовлетворять критерию Пэли-Винера:

$$\int_0^{\infty} (1 + f^2)^{-1} \ln |\dot{H}(f)| df < \infty.$$

Спектр низкочастотного эквивалента входного сигнала также связан с функцией времени через преобразование Фурье:

$$\dot{D}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{d}(t) \exp(-j2\pi f t) dt. \quad (74)$$

Согласно свойству преобразования Фурье выражение свёртки (72) может быть заменено произведением спектра входного сигнала на передаточную функцию канала:

$$\hat{d}_{\text{out}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{D}(f) \dot{H}(f) \exp(j2\pi f t) df. \quad (75)$$

Передаточная функция канала $\dot{H}(j\omega)$ описывается произведением:

$$\dot{H}(f) = |\dot{H}(f)| \exp(-j\varphi_{\kappa}(f)), \quad (76)$$

где $|\dot{H}(f)|$ – амплитудно-частотная характеристика канала (АЧХ), $\varphi_{\kappa} = 2\pi f t_{\text{cp}}(f)$

определяет фазо-частотную характеристику (ФЧХ), $t_{gp}(f)$ – групповое время замедления. Тогда (74) принимает вид:

$$\hat{d}_{nl}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{D}(f) |\dot{H}(f)| \exp(j(2\pi ft - \varphi_k(f))) dt. \quad (77)$$

Для безыскажённой передачи сигнала по каналу необходимо выполнение следующих условий: $|\dot{H}(f)| = H_0 = const$, $\varphi_k(f) = 2\pi f\tau + \varphi_0$, $\tau, \varphi_0 = const$, для любого значения частоты f , принадлежащей полосе частот, отводимой под передачу. В данном случае все спектральные составляющие сигнала изменяются в H_0 раз и претерпевают задержку по времени, равную τ . Нарушение данного условия приводит к искажениям сигнала, рассматриваемым ниже.

Амплитудно-частотная характеристика существенно влияет на передачу сигналов, поскольку её неравномерность приводит к появлению эхосигналов. В случае метода синхронного приема эхосигналы, вызванные неравномерностью АЧХ, снижают отношение сигнал/шум и препятствуют установке оптимального порога регистрации в решающем устройстве (РУ) на приёмной стороне [29].

Неравномерность АЧХ канала передачи приводит к тому, что спектральные составляющие сигнала претерпевают различное затухание. Таким образом, соотношение между амплитудами спектральных составляющих выходного сигнала, определяющее форму сигнала, будет отличным от соотношения спектральных составляющих входного сигнала. Искажения такого рода называются амплитудно-частотными (АЧИ).

Оценим влияние амплитудно-частотных искажений на форму сигнала, передаваемого в полосе частот W , лежащей в пределах $f_{\min} - f_{\max}$, предполагая на данном этапе, что условие $\tau = const$ для всех спектральных составляющих сигнала выполняется, и зависимость фазы от частоты может быть определена как: $\varphi_k(\omega) = 2\pi f\tau + \varphi_0$, $\varphi_0 = \pm 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$.

АЧХ произвольной формы в заданной полосе частот W может быть разложена в ряд Фурье, где период разложения равен $F = 2f_{\max}$. Учитывая, что АЧХ является четной функцией частоты $|\dot{H}(f)| = |\dot{H}(-f)|$, ряд Фурье будет состоять только из чётных функций:

$$|\dot{H}(f)| = H_0 + H_1 \cos\left(2\pi \frac{1f}{F}\right) + H_2 \cos\left(2\pi \frac{2f}{F}\right) + \dots + H_k \cos\left(2\pi \frac{kf}{F}\right) + \dots \quad (77)$$

Для анализа влияния АЧИ достаточно рассмотреть неравномерную АЧХ, формируемую постоянной составляющей H_0 и n -й гармоникой F^{-1} :

$$|\dot{H}(f)| = H_0 + H_n \cos\left(2\pi \frac{kf}{F}\right).$$

Спектральная функция сигнала на выходе канала с $\dot{H}(f)$ будет равна

$$\begin{aligned}\hat{D}_{nl}(f) &= \dot{D}(f) \left(H_0 + H_k \cos \left(2\pi \frac{kf}{F} \right) \right) \exp(j2\pi f \tau) = \\ &= \dot{D}(f) (H_0 + H_k \cos 2\pi f \tau_k) \exp(j2\pi f \tau)\end{aligned}\quad (78)$$

Подстановка (78) в выражение бесшумовой составляющей сигнала на выходе канала (75) даёт:

$$\begin{aligned}\hat{d}_{wl}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{D}(f) (H_0 + H_k \cos 2\pi f \tau_k) \exp(j2\pi f (t - \tau)) df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{D}(f) H_0 \exp(j2\pi f (t - \tau)) df + 0.5 \int_{-\infty}^{\infty} \dot{D}(f) H_k \exp(j2\pi f (t - \tau - \tau_k)) df + \\ &\quad + 0.5 \int_{-\infty}^{\infty} \dot{D}(f) H_k \exp(j2\pi f (t - \tau + \tau_k)) df = \\ &= H_0 \dot{d}(t - \tau) + 0.5 (H_k \dot{d}(t - \tau - \tau_k) + H_k \dot{d}(t - \tau + \tau_k)).\end{aligned}\quad (79)$$

Из (79) видно, что вследствие воздействия АЧИ, каждая составляющая $H_k \cos 2\pi f \tau_k$ ряда Фурье, в который раскладывается АЧХ канала, вносит в состав выходного сигнала две составляющие, представляющие собой опережающий и запаздывающий на τ_k эхосигналы.

В зависимости от значения n эхосигналы могут накладываться на основной сигнал, изменяя его форму, или могут быть разнесены с основным сигналом по времени. Наличие сложной формы АЧХ ведёт к увеличению членов ряда Фурье, отличных от нуля, что приводит к значительному увеличению числа парных эхосигналов, которые складываются с основным сигналом, определяя форму $\hat{d}_{wl}(t)$.

Оценим влияние фазо-частотных искажений ФЧИ на передаваемый сигнал, предполагая, что амплитудно-частотные искажения в канале отсутствуют: $H(f) = H_0$. Поскольку фазо-частотная характеристика канала передачи является нечетной функцией частоты: $\varphi_k(-f) = -\varphi_k(f)$, то разложение ее в ряд Фурье можно осуществить только по нечётным функциям синусных составляющих:

$$\varphi_k(f) = 2\pi f \tau + \vartheta_1 \sin \left(2\pi \frac{1f}{F} \right) + \vartheta_2 \sin \left(2\pi \frac{2f}{F} \right) + \dots + \vartheta_k \sin \left(2\pi \frac{kf}{F} \right) + \dots \quad (80)$$

Пусть ряд Фурье, описывающий фазо-частотную характеристику, включает в себя только две составляющие:

$$\varphi_k(f) = 2\pi f \tau + \vartheta_k \sin \left(2\pi \frac{kf}{F} \right). \quad (81)$$

Групповое время запаздывания будет определяться как

$$t_{гp}(f) = \frac{d\varphi_k(f)}{df} = \tau + 2\pi \frac{k}{F} \vartheta_k \cos \left(2\pi \frac{kf}{F} \right) = \tau + 2\pi \tau_k \vartheta_k \cos(2\pi f \tau_k). \quad (82)$$

Спектр сигнала на выходе канала будет определяться выражением:

$$\dot{D}(f) = H_0 \dot{D}(f) \exp(-2\pi f \tau - \vartheta_k \sin(2\pi f \tau_k)). \quad (83)$$

Бесшумовая составляющая сигнала на выходе канала с ФЧИ:

$$\begin{aligned} \hat{d}_{wl}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H_0 \dot{D}(f) e^{j2\pi f(t-\tau)} e^{-j\theta_n \sin(2\pi f \tau_k)} df = \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} H_0 \dot{D}(f) e^{j2\pi f(t-\tau)} \left(J_0(\theta_k) + J_1(\theta_k) e^{-j\theta_k \sin(2\pi f \tau_k)} - J_1(\theta_k) e^{j\theta_k \sin(2\pi f \tau_k)} \right) df = .(84) \\ &= H_0 J_0(\theta_k) \dot{d}(t-\tau) + H_0 J_1(\theta_k) \left(\dot{d}(t-\tau-\tau_k) - \dot{d}(t-\tau+\tau_k) \right). \end{aligned}$$

Выражение $\exp(-j\theta_n \sin(2\pi f \tau_n))$ в (79) аппроксимируется рядом из функций Бесселя, и при малых величинах $\theta_k(f)$ функциями Бесселя выше первого порядка в силу малости их значений можно пренебречь.

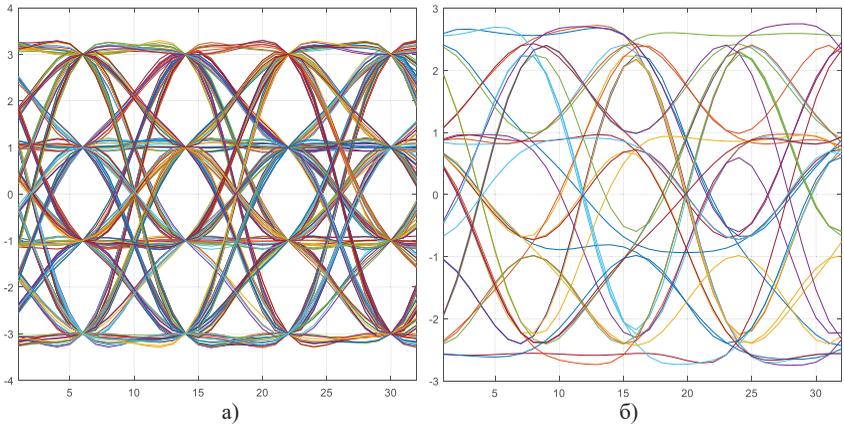


Рис. 17 Глазковая диаграмма синфазной составляющей 16QAM
а) на входе канала; б) на выходе канала с линейными искажениями

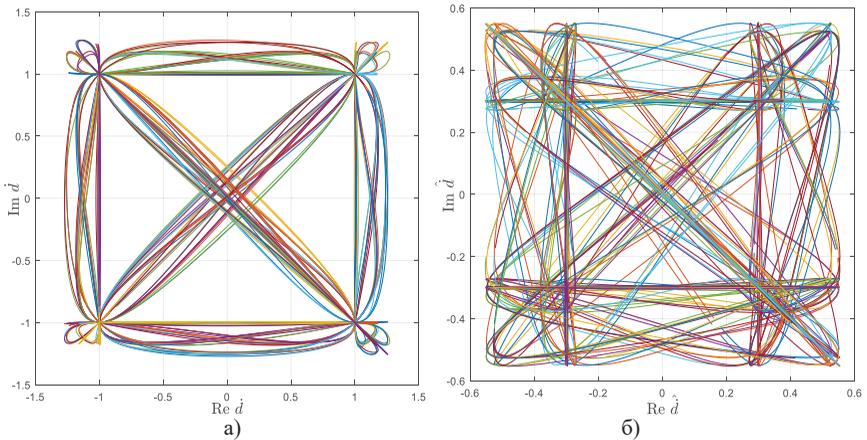


Рис. 18 Векторные диаграммы сигнала QPSK
а) на входе канала; б) на выходе канала с линейными искажениями

Из полученного выражения видно, что ФЧИ в канале аналогично АЧИ приводят к появлению на выходе канала трех составляющих: основного сигнала, а также опережающего и запаздывающего на величину τ_n эхосигналов противоположной полярности, характер влияния которых на основной сигнал аналогичен влиянию эхосигналов, получаемых вследствие наличия в канале АЧИ. Таким образом, в случае наличия в канале искажений сигналов обоих типов, на выходе канала будет наблюдаться аддитивная смесь сигналов, состоящая из основного сигнала, а также парных опережающих эхосигналов одной полярности и парных запаздывающих эхосигналов разной полярности, получаемых для каждого члена рядов Фурье, в которые раскладываются АЧХ и ФЧХ канала. Пример влияния линейных искажений на синфазную составляющую сигнала 16QAM можно оценить с помощью глазковых диаграмм, представленных на рис.17, а также с помощью векторных диаграмм сигнала QPSK, представленных на рис.18.

Как можно увидеть из рисунка глазковой диаграммы, линейные искажения приводят к изменению формы импульса, при этом наблюдается размытие среза импульса таким образом, что он накладывается на последующие передаваемые символы, изменяя их значение в момент принятия решения, что также можно отчётливо увидеть на векторной диаграмме рис. 18.б, где на выходе канала в отсчётные моменты времени диаграмма не фокусируется в заданных точках так, как это показано на рис. 18.а, а образует около них «петли».

Также на рис. 18.б можно увидеть, что вследствие искажений наблюдается поворот сигнального созвездия. Всё это увеличивает вероятность символьной ошибки на стороне приёма и носит название «межсимвольная интерференция» (МСИ), дисперсия которой с учётом (79,84) имеет вид:

$$\sigma_{\text{МСИ}}^2 = T_n^{-1} \int_0^{T_n} \left(\dot{d}_{wl}(t) - H_0 \prod_{k=1}^K J_0(\vartheta_k) \dot{d}(t - \tau) \right) \left(\dot{d}_{wl}(t) - H_0 \prod_{k=1}^K J_0(\vartheta_k) \dot{d}(t - \tau) \right)^* dt. \quad (85)$$

При условии, что импульсная характеристика канала остаётся неизменной, выражение, определяющее пропускную способность канала, (62) с учётом воздействия МСИ должно быть приведено к выражению вида:

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{h_0^2 \bar{P}_s}{\sigma_{\text{МСИ}}^2 + WN_0} \right). \quad (86)$$

$$\text{где } h_0 = H_0 \sum_{n=1}^N J_0(\vartheta_n).$$

Для дискретного времени модель канала (72) принимает вид:

$$\hat{d}(i) = \sum_{l=0}^{L-1} \dot{h}(l) \dot{d}(i-l) + \dot{w}(i) = \dot{h}(0) \dot{d}(i) + \sum_{l=1}^{L-1} \dot{h}(l) \dot{d}(i-l) + \dot{w}(i). \quad (87)$$

где второе слагаемое в правой части уравнения представляет собой МСИ. $\dot{h}(l)$ – отсчёты откликов комплексного эквивалента канала на огибающую сигнала; L – длина импульсной характеристики канала связи.

На интервале времени T_n , за который источник передаёт в канал N символов, связь между низкочастотными эквивалентами (НЧЭ) сигнала на входе и выходе канала может быть описана в векторной форме:

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{H}\dot{\mathbf{d}} + \dot{\mathbf{w}}, \quad (88)$$

где $\dot{\mathbf{d}} = (\dot{d}(i), \dot{d}(i+1) \dots \dot{d}(i+N-1))^T$, $\dot{\mathbf{d}} \in \mathbb{C}^N$ – комплексный вектор НЧЭ сигнала на входе канала; $\hat{\mathbf{d}} = (\hat{d}(i), \hat{d}(i+1) \dots \hat{d}(i+N+L-2))^T$, $\hat{\mathbf{d}} \in \mathbb{C}^{N+L-1}$ – комплексный вектор НЧЭ сигнала на выходе канала; $\dot{\mathbf{w}} = (\dot{w}(i), \dot{w}(i+1) \dots \dot{w}(i+N+L-2))^T$, $\dot{\mathbf{w}} \in \mathbb{C}^{N+L-1}$ – комплексный вектор АБГШ; $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{(N+L-1) \times N}$ – комплексная матрица канала с аperiodической свёрткой вида:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \dot{h}_0 & & & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & & \\ \dot{h}_{L-1} & \dots & \dot{h}_0 & \\ & \ddots & \dot{h}_{L-1} & \ddots & \dot{h}_0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & & \dot{h}_{L-1} \end{matrix}}^N \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} N \\ \\ \\ \\ \\ \\ L-1 \end{matrix} .$$

2. СИГНАЛЫ СО МНОГИМИ НЕСУЩИМИ

2.1. Согласование передающего оборудования с каналом связи

В случае передачи сигналов по каналу с МСИ применяются два подхода. В первом случае с каналом согласуется приёмник, и на стороне передачи не учитывается воздействие МСИ на передаваемый сигнал. Во втором случае данное воздействие учитывается, и согласуется не только приёмник, но и сам передаваемый сигнал, что позволяет уменьшить сложность оборудования на приёмной стороне.

Было показано, что если для канала не выполняются условия постоянства АЧХ и линейной зависимости ФЧХ от частоты в полосе частот, отводимой под передачу, то на выходе канала наблюдается межсимвольная интерференция, представляющая совокупность опережающих и запаздывающих эхосигналов, полученных для каждого элемента ряда Фурье (77, 80), на который раскладываются $|\dot{H}(f)|$ и $\varphi_k(f)$. Очевидно, что чем больше членов ряда Фурье требуется, чтобы аппроксимировать АЧХ и ФЧХ, тем большее количество эхосигналов наблюдается на выходе канала. В реальных каналах связи влияние МСИ увеличивается по мере расширения полосы частот W и приводит к неэффективному использованию потенциальных возможностей данных каналов.

Разбиение предоставляемой под передачу полосы частот на N подканалов с одинаковой шириной полосы $\Delta f = N^{-1}W$, в которых осуществляется передача данных (рис. 19), приводит к преобразованию выражения (86):

$$R < \sum_{n=1}^N \Delta f \log_2 \left(1 + \frac{h_{0,n}^2 \bar{P}_s}{\sigma_{\text{МСИ},n}^2 + \Delta f N_0} \right). \quad (89)$$

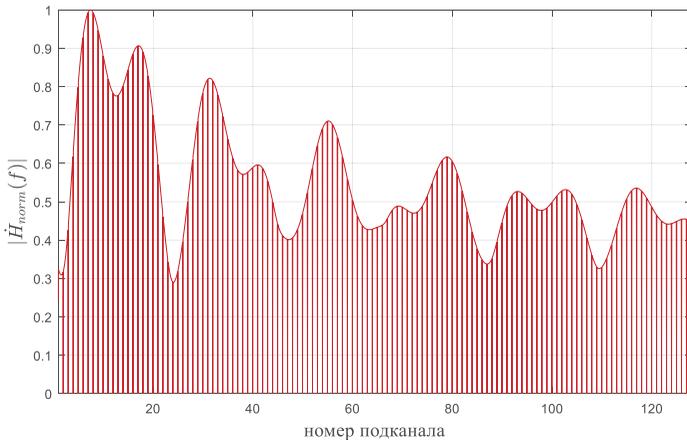


Рис. 19 АЧХ канала при разбиении полосы W частот на подканалы

Как можно увидеть из рис.19, на котором представлена нормированная АЧХ канала в заданной полосе частот W , разбиение данной полосы частот на подканалы ($N=128$) позволяет аппроксимировать АЧХ многих подканалов как $|\dot{H}_n(f)| = H_{0,n} + \tilde{H}_n f$, где $H_{0,n}$, \tilde{H}_n – некоторые константы,

$$\begin{aligned} \hat{d}_{wl,n}(t) &\approx \int_{(n-1)\Delta f}^{n\Delta f} \dot{D}_n(f)(H_{0,n} + \tilde{H}_n f) \exp(j2\pi f(t - \tau)) df = \\ &= H_{0,n} \int \dot{D}(f) \exp(j2\pi f(t - \tau)) df + \tilde{H}_n \int \dot{D}(f) f (\exp(j2\pi f(\tau - t))) df =. \quad (90) \\ &= H_0 \dot{d}(t - \tau) + \tilde{H}_n \dot{d}(t - \tau)(1 + \Delta f) = H_0 \dot{d}(t - \tau) + \tilde{H}_n \dot{d}(t - \tau)(1 + T^{-1}). \end{aligned}$$

Второе слагаемое в (90) получено с помощью интегрирования по частям, где $u = f$ и $dv = \dot{D}(f) \exp(j2\pi f t - \tau) df$. Как видно из выражения, выходной сигнал для такого подканала не содержит в своём составе запаздывающих и опережающих эхосигналов. Изменение фазы в таких подканалах также описывается линейной зависимостью от частоты и также не приводит к появлению эхосигналов. Для подканалов, для которых справедливы выражения (78– 84), как можно видеть из рис.15, постоянная составляющая $H_{0,n}$ оказывается много больше остальных коэффициентов $H_{k,n}$ ряда Фурье, в который раскладывается АЧХ. Также имеет место значительное уменьшение значений и количества коэффициентов ряда Фурье $\mathfrak{D}_{k,n}$, в который раскладывается ФЧХ данных подканалов. Таким образом, влияние МСИ на сигналы на выходе подканалов оказывается значительно меньшим, чем в случае последовательной передачи сигналов в полосе частот W , и выражение (1.1) может быть приведено к виду

$$R \approx \sum_{n=1}^N \Delta f \log_2 \left(1 + \frac{|\dot{H}_{0,n}|^2 \bar{P}_{s,n}}{\sigma_{msi,n}^2 + \Delta f_n N_0} \right). \quad (91)$$

При последующем увеличении N условия передачи в каждом подканале стремятся к условиям, при которых линейные искажения отсутствуют, и МСИ можно пренебречь. Также следует отметить, что дисперсия АБГШ в подканалах уменьшается в N раз.

Устремляя ширину полосы частот подканалов Δf к нулю, можно перейти в выражении (91) от суммы к интегралу

$$R = \int_{f_n}^{f_s} \log_2 \left(1 + \frac{|\dot{H}(f)|^2 \bar{P}_{s,n}}{N_0} \right) df \rightarrow C \quad (92)$$

Основываясь на выражениях (91, 92) для пропускной способности каналов с ограниченным спектром, можно вывести условие согласования передаваемых сигналов с каналом. Канал должен быть разбит на независимые подканалы, в каждом из которых может быть выбран оптимальный спектр передаваемого сигнала. Чем большее количество подканалов будет содер-

жаться в канале, тем лучше передаваемый сигнал будет согласован с каналом. Такой способ передачи данных называют параллельным. Реальная скорость передачи в каналах связи зависит как АЧХ, так и от ФЧХ канала. Однако, при параллельном способе передачи, особенно при большом количестве подканалов ФЧХ не оказывает практического влияния на реальную скорость передачи. В таком случае влияние на скорость передачи в каждом подканале оказывает только АЧХ данного подканала, в пределах которого она считается неизменной. Также уменьшается шумовая составляющая, которая попадает в подканал и зависит от ширины его полосы.

Всё это даёт возможность передавать информацию с высокой скоростью в подканалах, в которых значение модуля коэффициента передачи велико, и снижать скорость передачи в подканалах с малым значением модуля коэффициента передачи или вообще не использовать их для передачи.

2.2. Организация независимых гауссовых каналов без памяти

Реальные каналы связи могут быть достаточно хорошо описаны как линейная система с некоторым откликом, и в процессе передачи по каналам с памятью цифровой поток может быть представлен последовательностью блоков длительностью T_n каждый, состоящих из N символов, которые источник подаёт в канал со скоростью $1/T=N/T_n$. Как было показано в подразделе 1.7, вход и выход канала могут быть связаны между собой в данном случае выражением (88), из которого видно, что длина вектора сигнала на выходе канала $\hat{\mathbf{d}}^i$ больше длины вектора \mathbf{d}^i (рис.20.а) на входе и равна $N_0 = N + L - 1$. Таким образом, на каждый i -й ($i \neq 1$) передаваемый блок из N символов \mathbf{s}^i будут накладываться $L-1$ отсчётов блока с номером $i-1$ (рис.20.б). С учётом этого факта (88) может быть приведено к выражению:

$$\hat{\mathbf{s}}^i = \mathbf{H}_0 \mathbf{s}^i + \mathbf{H}_1 \mathbf{s}^{i-1} + \mathbf{n}^i, \quad (93)$$

где i – номер блока; $\hat{\mathbf{s}}^i \in \mathbb{C}^{N \times N}$ – вектор i -го блока на выходе канала;

$$\mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} \dot{h}_0 & & & & \mathbf{0} \\ \vdots & \dot{h}_0 & & & \\ \dot{h}_{L-1} & \dots & \dots & \dots & \\ \mathbf{0} & \dot{h}_{L-1} & \dots & \dot{h}_0 & \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} \dot{h}_{L-1} & \dots & \dot{h}_1 \\ \dots & \dots & \vdots \\ \mathbf{0} & & \dot{h}_{L-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times N} \text{ – ленточная и верхняя тре-}$$

угольная матрицы откликов канала на блоки символов i и $i-1$; $\mathbf{n}^i \in \mathbb{C}^N$ – вектор отсчетов АБГШ.

Временной интервал T_n , отводимый под передачу блока символов, может быть разбит на два интервала: временной интервал, на котором блок символов подвержен влиянию межсимвольной интерференции от предыдущего блока символов $T_{\text{мси}} = (L-1)T$ и интервал свободный от влияния МСИ $T_0 = (N-L+1)T$; $T_n = T_{\text{мси}} + T_0$.

Таким образом, чтобы снизить влияние МСИ, блоки символов следует разделить защитным временным интервалом $T_3 = N_3 T$ (рис.20.в). При условии превышения длительности защитного интервала памяти канала передачи $T_3 \geq T_{\text{мси}} (N_3 \geq L-1)$ отсчёты МСИ от $i-1$ блока не оказывают влияние на символы, передаваемые в блоке i (рис.20.г). Введение защитного интервала возможно для блоков любой длины, однако вносит проигрыш по скорости передаваемой информации, особенно ощутимый при малом N .

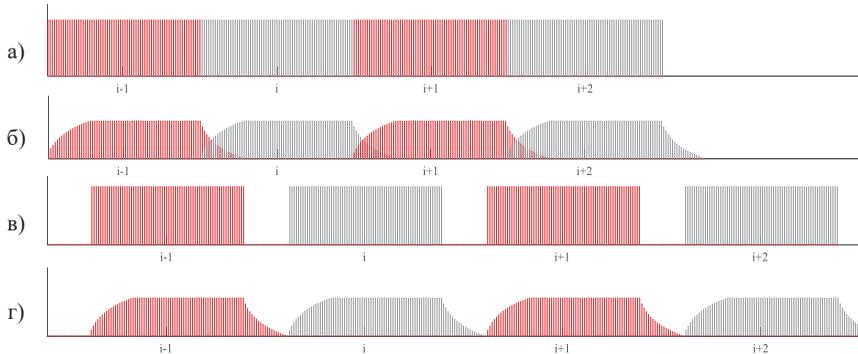


Рис. 20 Блоки символов на входе и выходе канала в случае отсутствия и наличия защитного интервала

Далее в тексте блоки из N символов $\hat{\mathbf{s}}^i$ будут рассматриваться как символы, дискретизированные N отсчётами, где в качестве отсчётов выступают символы, входящие в состав данных блоков.

В настоящее время весьма широкое распространение нашёл способ, согласно которому защитный интервал заполняется N_3 элементами, повторяющимися элементами вектора $\hat{\mathbf{s}}^i$ на позициях $N-N_3 \dots N-1$: $\hat{\mathbf{s}}^i_{N-N_3:-1} = \hat{\mathbf{s}}^i_{N-N_3:N-1}$. В дальнейшем для упрощения математических выкладок будем предполагать, что $N_3=L-1$. Таким образом, $N+N_3 = N+L-1 = N_0$. Данная совокупность символов получила название «циклический префикс» (ЦП). В дальнейшем для упрощения математических выкладок будем предполагать, что $N_3=L-1$. Добавление циклического префикса в векторной форме описывается выражением вида:

$$\hat{\mathbf{s}}^i_{N_0} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{s}}^i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (94)$$

где $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{N_3 \times N-N_3} & \mathbf{I}_{N_3} \\ \mathbf{I}_N & \end{pmatrix}$, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N_0 \times N}$ – матрица блочной структуры.

Тогда при условии введения ЦП i -й символ на выходе канала с МСИ, ранее представленный выражением (93), преобразуется к выражению вида:

$$\hat{\mathbf{s}}^i_{N_0} = \tilde{\mathbf{H}}_0 \hat{\mathbf{s}}^i_{N_0} + \tilde{\mathbf{H}}_1 \hat{\mathbf{s}}^{i-1}_{N_0} + \tilde{\mathbf{n}}^i = \tilde{\mathbf{H}}_0 \mathbf{M}\hat{\mathbf{s}}^i + \tilde{\mathbf{H}}_1 \mathbf{M}\hat{\mathbf{s}}^{i-1} + \tilde{\mathbf{n}}^i, \quad (95)$$

где $\tilde{\mathbf{H}}_0, \tilde{\mathbf{H}}_1 \in \mathbb{C}^{N_0 \times N_0}$ – матрицы, для которых условия, накладываемые на элементы, аналогичны условиям, накладываемым на матрицы $\dot{\mathbf{H}}_0, \dot{\mathbf{H}}_1; \tilde{\mathbf{n}}^i \in \mathbb{C}^{N_0}$ – вектор АБГШ.

На приёмной стороне происходит удаление циклического префикса из символа $\hat{\mathbf{s}}_{N_0}^i$, и для $N_s \geq L-1$ будет справедливо выражение:

$$\hat{\mathbf{s}}^i = \mathbf{S}^T \hat{\mathbf{s}}_{N_0}^i = \mathbf{S}^T \left(\tilde{\mathbf{H}}_0 \mathbf{M} \mathbf{s}^i + \tilde{\mathbf{H}}_1 \mathbf{M} \mathbf{s}^{i-1} + \tilde{\mathbf{n}}^i \right) = \dot{\mathbf{C}} \mathbf{s}^i + \mathbf{O} \mathbf{s}^{i-1} + \dot{\mathbf{n}}^i, \quad (96)$$

где $\mathbf{S}^T = (\mathbf{0}_{N \times N_s}, \mathbf{I}_N)$ – матрица удаления циклического префикса блочной структуры, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N_0 \times N}$; $\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{H}}_0 \mathbf{M}$, $\dot{\mathbf{C}} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ – циркулярная канальная матрица (матрица отклика канала на i -й символ); $\mathbf{O} = \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{H}}_1 \mathbf{M}$, $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ – нулевая канальная матрица (матрица отклика канала на $i-1$ -й символ). Циркулярная матрица отклика канала в данном случае имеет вид:

$$\dot{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} h_0 & & h_M & \dots & h_1 & & \\ & \vdots & & \ddots & & \ddots & \\ h_M & & & \ddots & & & h_{M-1} \\ & & & \ddots & & \ddots & \\ & & & & h_M & \dots & h_0 \end{pmatrix}.$$

В такой матрице каждая последующая строка образуется путём сдвига элементов текущей строки на одну позицию вправо $\dot{C}_n^{m+1} = \dot{C}_{n-1}^m$. При этом последний элемент в текущей строке переносится в первый столбец $\dot{C}_1^{m+1} = \dot{C}_N^m$. Таким образом, с помощью циклического префикса, длина которого не меньше памяти канала $L-1$, осуществляется переход от канала с аperiодической свёрткой к каналу с циклической свёрткой.

От выражения канала с циклической свёрткой (96) можно перейти к совокупности независимых гауссовых каналов без памяти, осуществив спектральное разложение циркулярной матрицы $\dot{\mathbf{C}}$:

$$\dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{W}}^H \dot{\mathbf{\Lambda}} \dot{\mathbf{W}}, \quad (97)$$

где $\dot{\mathbf{W}} = (\dot{W}_n^m) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ – матрица собственных векторов матрицы $\dot{\mathbf{C}}$, в качестве которой выступает матрица дискретного преобразования Фурье (ДПФ): $\dot{W}_n^m = N^{-0.5} \exp(-j2\pi mnN^{-1})$; $[\]^H$ – оператор эрмитова сопряжения матрицы; $\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{W} \dot{\mathbf{C}} \mathbf{W}^H = \text{diag}\{\dot{\lambda}_0, \dots, \dot{\lambda}_{N-1}\}$ – диагональная матрица собственных значений циркулярной матрицы $\dot{\mathbf{C}}$; $\dot{\lambda}_n = \sum_{l=0}^{N-1} h_l \exp(-j2\pi nlN^{-1})$ – передаточная функция канала для $f_n = nT_n^{-1}$, соответствует $\dot{H}_{0,n}$ в выражении (91).

Визуализация вещественной и мнимой составляющих матрицы ДПФ для $N=64$ представлена на рис.21. Из рисунка видно, что матрица $\dot{\mathbf{W}}$ является дискретной версией всех несущих НЧЭ сигналов, передаваемых в заданной полосе частот, разделённой на подканалы (рис.15).

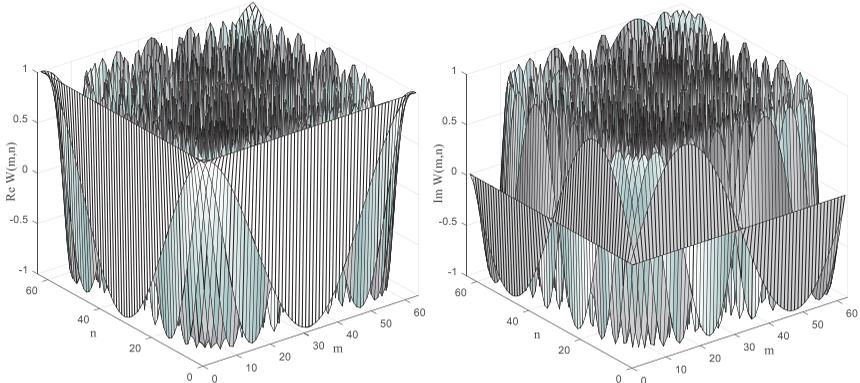


Рис. 21 Вещественная и мнимая составляющие матрицы ДПФ

Вектор $\hat{\mathbf{s}}^i$ может быть представлен суммой произведений гармонических колебаний на узкополосные сигналы:

$$\hat{\mathbf{s}}_n^i = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{d}_m^i \dot{W}_n^m = \dot{\mathbf{W}}(,n)^T \hat{\mathbf{d}}^i \Rightarrow \hat{\mathbf{s}}^i = \dot{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{d}}^i, \quad (98)$$

где $\dot{\mathbf{W}}(,n)$ – n -й столбец матрицы ДПФ.

Вектор шума также может быть представлен аналогично (98):

$$\hat{\mathbf{n}}^i = \mathbf{W}^H \hat{\mathbf{w}}^i \quad (99)$$

Тогда выражение (96) с учетом (97–99) можно привести к виду

$$\hat{\mathbf{s}}^i = \dot{\mathbf{W}}^H \hat{\Lambda} \dot{\mathbf{W}} \dot{\mathbf{W}}^H \hat{\mathbf{d}}^i + \dot{\mathbf{W}}^H \hat{\mathbf{w}}^i \quad (100)$$

Умножив слева обе части равенства (100) на $\dot{\mathbf{W}}$ с учётом $\mathbf{W}\mathbf{W}^H = \mathbf{I}$:

$$\hat{\mathbf{d}}^i = \mathbf{W} \hat{\mathbf{s}}^i = \hat{\Lambda} \hat{\mathbf{d}}^i + \hat{\mathbf{w}}^i \quad (101)$$

Структурная схема преобразования канала связи в совокупность независимых каналов без памяти изображена на рис.22.

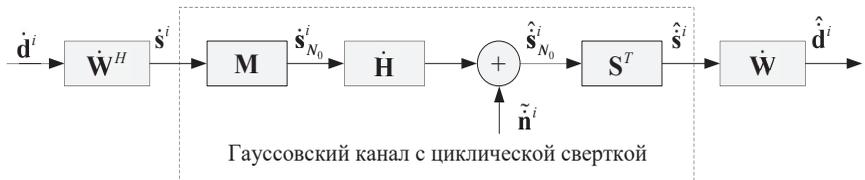


Рис. 22 Преобразование гауссового канала с МСИ в совокупность независимых гауссовых каналов без памяти.

2.3. Оборудование передачи/приёма для многочастотных систем

Представленная на рис. 22 схема преобразования канала с аperiodической свёрткой в совокупность гауссовых каналов без памяти позволяет построить схему передающей и приёмной частей многочастотных систем передачи дискретной информации, которая выведена на рис. 23. В последующих подразделах приводится описание оборудования на сторонах передачи и приёма.

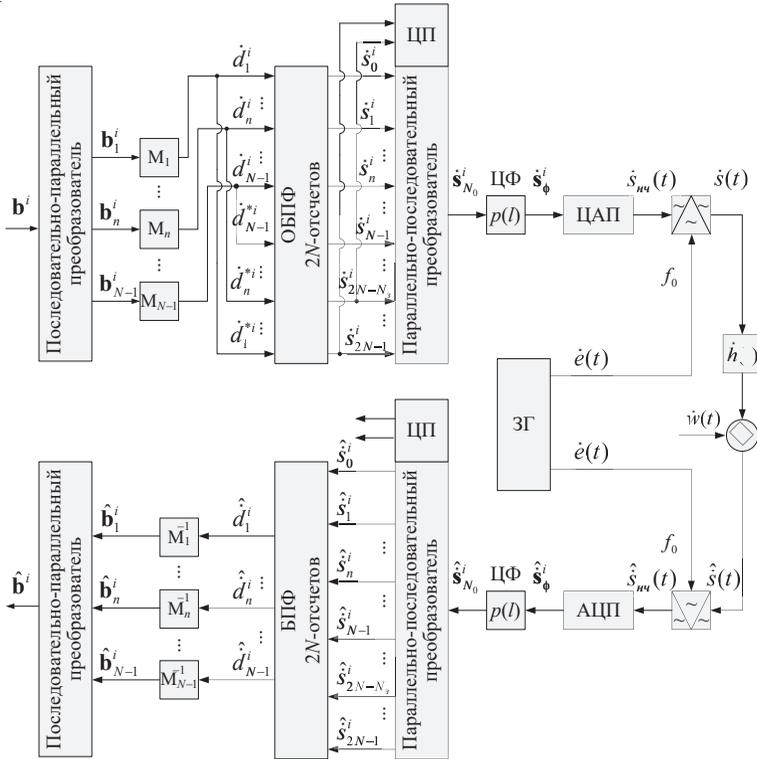


Рис. 23 Структурная схема приемопередающего оборудования многочастотной системы передачи дискретной информации.

2.3.1. Сторона передачи

Поток двоичных данных \mathbf{b}^i от источника сообщений поступает на вход преобразователя последовательного кода в параллельный. Сигнальные линии параллельного интерфейса последовательно-параллельного преобразователя подключены к $N-1$ преобразователям уровней синфазной ($m_n/2$ чётных разрядов) и квадратурной ($m_n/2$ нечётных разрядов) составляющих двумерных сигналов, которые осуществляют отображение бит пространственных

потоков двоичных данных $\mathbf{b}_n^i = (b_1^i, b_2^i, \dots, b_{m_n}^i)^T$ в комплексные значения сигнала согласно выражениям (12–18). Сформированный комплексный кадр данных $\dot{\mathbf{d}}^i = (\dot{d}_1^i, \dot{d}_2^i, \dots, \dot{d}_{N-1}^i)^T$, поступает на блок ОДПФ. На практике вместо процедур ДПФ/ОДПФ применяются процедуры быстрого прямого и обратного преобразований Фурье БПФ/ОБПФ, обладающие значительным преимуществом по количеству вычислений ($O(N \log_2 N)$ для БПФ/ОБПФ и $O(N^2)$ для ДПФ/ОДПФ). Следует отметить, что для передачи сигналов на N поднесущих размерность ОБПФ должна быть $2N$. Пример спектра символов, входящих в состав комплексного кадра данных, представлен на рис.4.б. Длительность символов по времени составляет T_n .

Блок ОБПФ выполняет функции переноса спектров символов $\dot{d}_1^i \dots \dot{d}_{N-1}^i$ в полосы частот подканалов $1 \dots N-1$ так, как это представлено на рис.4.г. Разнесёние по частоте комплексных значений BPSK, QPSK и MQAM сигналов осуществляется на величину $\Delta f = T_n^{-1}$. Также в блоке ОБПФ осуществляется объединение полученных модулированных сигналов.

Размерность быстрого преобразования Фурье $2N$ обусловлена тем, что для точек n и $N-n$, на которые разбивается окружность единичного радиуса (рис.24.а), значения проекций на ось абсцисс равны по модулю и по знаку, на ось ординат – равны по модулю и противоположны по знаку:

$$\cos\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) = \cos\left(2\pi \frac{m(N-n)}{N}\right), \quad \sin\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) = -\sin\left(2\pi \frac{m(N-n)}{N}\right).$$

Дискретное представление по 32 отсчётам 2-й и 30-й гармоник основной частоты T_n^{-1} , использующихся как поднесущие, приведено на рис.24.б.

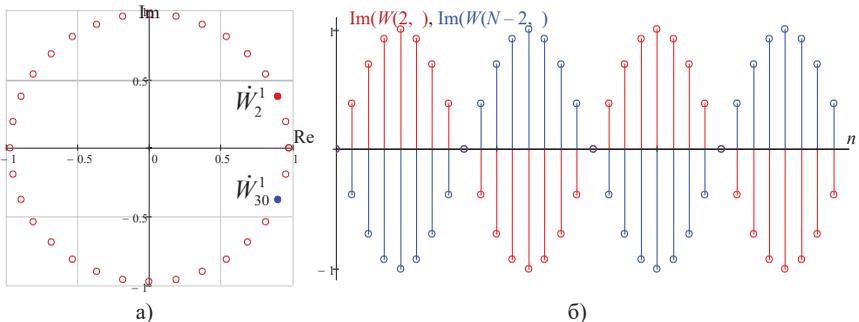


Рис. 24 а) представление отсчётов \dot{W}_2^1 и \dot{W}_{30}^1 на комплексной плоскости
 б) мнимые составляющие 2-й и 30-й строк матрицы $\dot{\mathbf{W}}$.

Сама процедура дискретизации 2-й и 30-й гармоник частоты T_n^{-1} представлена на рис.25.а. Спектры непрерывных и дискретных по времени сигналов представлены на рис.25.б–г. Частота дискретизации $f_0 = NT_n^{-1}$.

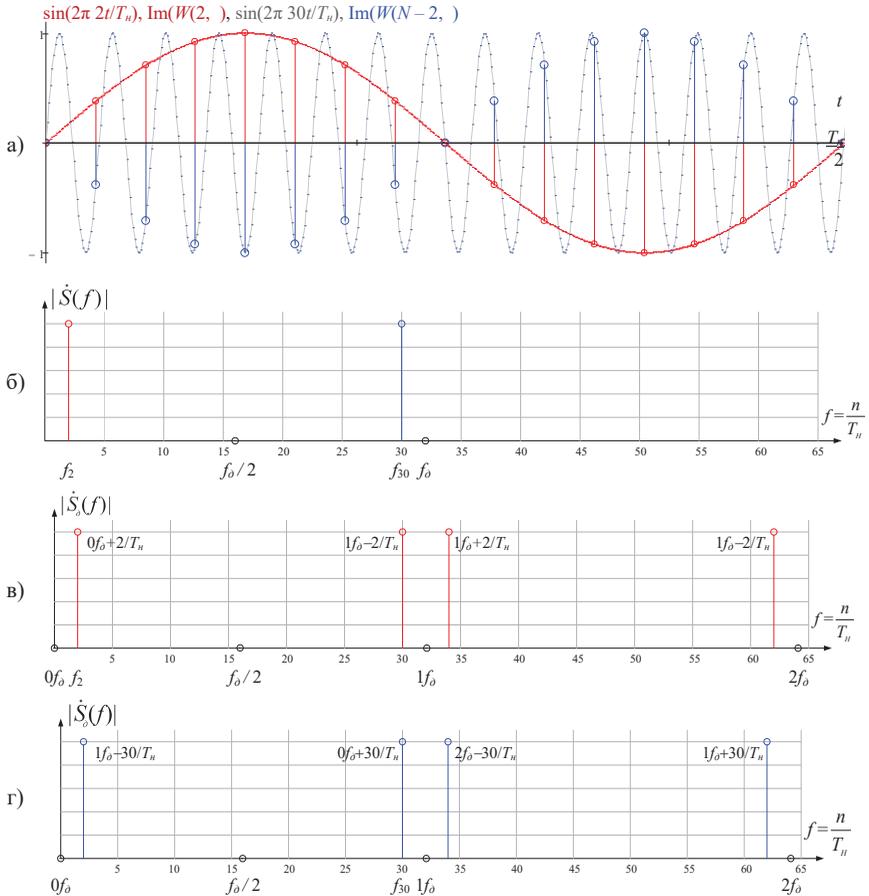


Рис. 25 а) дискретизация гармонических колебаний с частотами $2/T_n$ и $30/T_n$, частота дискретизации $f_0 = 32/T_n$; б) нормированные спектры гармонических колебаний; в) нормированный спектр дискретизированного колебания с частотой $2/T_n$; г) нормированный спектр дискретизированного колебания с частотой $30/T_n$

Спектральный состав дискретизированных низкочастотных сигналов включает в себя бесконечное множество верхних и нижних боковых полос, представляющих собой копии спектра исходного сигнала, которые располагаются относительно гармоник частоты дискретизации, включая нулевую. Для восстановления непрерывной формы сигнала необходимо в спектре дискретного сигнала подавить все составляющие, расположенные выше частоты Найквиста, равной половине частоты дискретизации. Данная процедура производится цифро-аналоговым преобразователем (ЦАП).

Из графиков нормированных спектров амплитуд дискретных сигналов

видно, что нижняя боковая частота (БЧ) относительно первой гармоники частоты дискретизации f_δ второго сигнала совпадает с верхней боковой частотой нулевой гармоники f_δ , верхняя БЧ нулевой гармоники f_δ второго сигнала совпадает с нижней БЧ первой гармоники f_δ первого сигнала и т.д. Таким образом, сигналы оказываются линейно зависимыми, и выделение данных на приёмной стороне, передаваемых на данных поднесущих, становится невозможным. Как видно из рис. 25.а, частота Найквиста в данном случае совпадает с $N / 2$ -й гармоникой основной частоты T_n^{-1} , для которой $\text{Re}(\dot{W}_{N/2}^m) = -1^{\text{mod}(m,2)}$, $\text{Im}(\dot{W}(, N/2)) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^N$ Также следует отметить, что $\text{Re}(\dot{W}(, 0)) = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^N$, $\text{Im}(\dot{W}(, 0)) = \mathbf{0}$, где $\mathbf{1}$ – вектор, состоящий из 1, т.е. $\dot{W}(, 0)$ соответствует постоянной составляющей и не может использоваться для передачи полезной информации. Поскольку синфазная составляющая для $N/2$ -й поднесущей равна нулю, передача пользовательских данных на этой частоте также не осуществляется.

Увеличение разрядности БПФ/ОБПФ в 2 раза обеспечивает передачу данных для требуемого количества подканалов. При этом необходимо отметить тот факт, что, несмотря на то, что на рис.24 во всех точках временной области схемы сигнал представлен в комплексном виде, передаваемый в линию сигнал является вещественной функцией времени. Для того чтобы генерировать вещественные значения на выходах блока ОБПФ, входные значения ($N-1$ комплексных значений плюс нуль на постоянном токе и одно действительное значение для частоты Найквиста, если используется) должны быть дополнены до $2N$ таким образом, чтобы комплексный кадр данных обладал Эрмитовой симметрией, т.е. $\dot{d}_{2N-n}^i = \dot{d}_n^{i*}$, тогда:

$$\begin{aligned} \dot{d}_n^i \dot{W}_n^m &= \dot{d}_n^i \exp\left(j2\pi \frac{mn}{N}\right) = (d_{n,I}^i + jd_{n,Q}^i) \left(\cos\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) + j \sin\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) \right) = \\ &= d_{n,I}^i \cos\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) - d_{n,Q}^i \sin\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) + j \left(d_{n,Q}^i \cos\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) + d_{n,I}^i \sin\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) \right), \\ \dot{d}_{2N-n}^i \dot{W}_{2N-n}^m &= \dot{d}_{2N-n}^i \exp\left(j2\pi \frac{m(2N-n)}{N}\right) = (d_{n,I}^i - jd_{n,Q}^i) \left(\cos\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) - j \sin\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) \right) = \\ &= d_{n,I}^i \cos\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) - d_{n,Q}^i \sin\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) - j \left(d_{n,Q}^i \cos\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) + d_{n,I}^i \sin\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) \right), \\ \dot{d}_n^i \dot{W}_n^m + \dot{d}_{2N-n}^i \dot{W}_{2N-n}^m &= 2d_{n,I}^i \cos\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) - 2d_{n,Q}^i \sin\left(2\pi \frac{mn}{N}\right). \end{aligned}$$

Как видно из представленных уравнений, за счёт Эрмитовой симметрии мнимые составляющие, содержащиеся в результатах произведений $\dot{d}_n^i \dot{W}_n^m$ и $\dot{d}_{2N-n}^i \dot{W}_{2N-n}^m$, взаимно компенсируются, а вещественные составляющие складываются, формируя удвоенное мгновенное значение символа BPSK, QPSK или MQAM, передаваемого на n -й поднесущей.

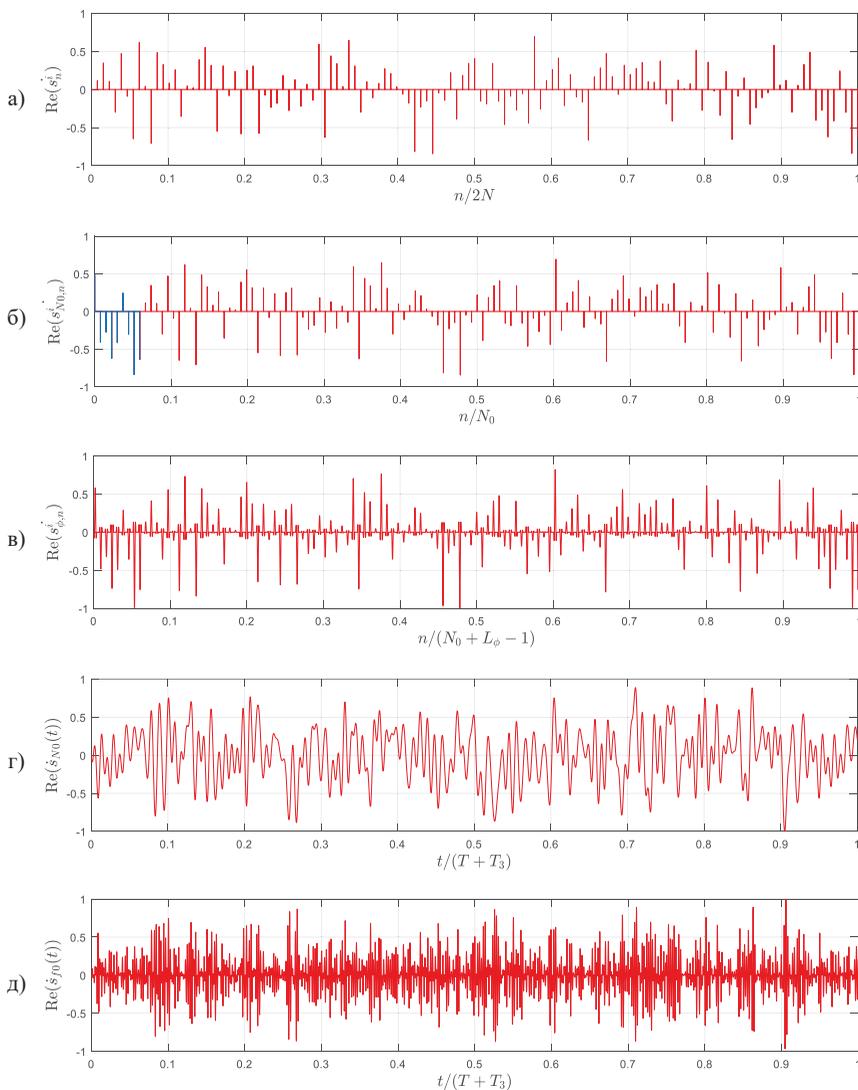


Рис. 26 Сигналы на выходе элементов оборудования стороны передачи:
 а) блок ОБПФ; б) параллельно-последовательный преобразователь;
 в) ЦФ; г) ЦАП; д) преобразователь частоты

Сформированные вещественные дискретные значения символа \mathfrak{s}^i (рис.26.а) поступают с $2N$ выходов блока ОБПФ на входы параллельно-последовательного преобразователя, откуда последовательно считываются на

вход цифрового фильтра. Формирование циклического префикса осуществляется путём подключения выходов $N-N_3 \dots N-1$ блока ОБПФ к первым N_3 входам параллельно-последовательного преобразователя (рис.26.б).

К выходу параллельно-последовательного преобразователя может быть подключён цифровой фильтр (ЦФ), который осуществляет обработку сигнала $\dot{s}_{N_0}^i$, с целью достижения требуемых показателей по уровню спектральных составляющих, расположенных вне полосы частот, отведённой под передачу. На рис.26.в представлена последовательность отсчётов сигнала на выходе фильтра приподнятого косинуса \dot{s}_ϕ^i . Спектры сигналов, при отсутствии и наличии обработки символа ЦФ представлены на рис.27.

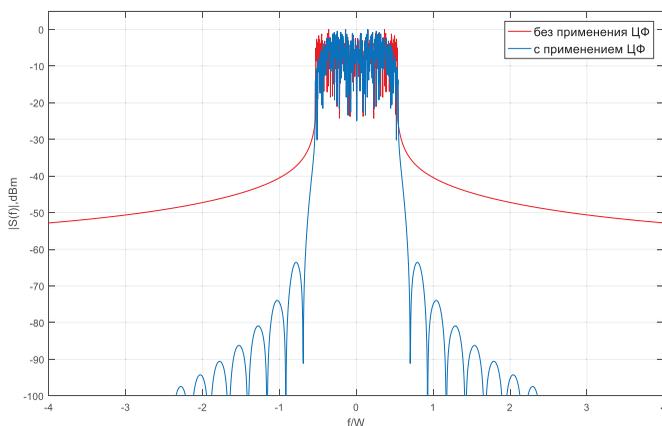


Рис. 27 Спектр сигнала для случаев использования и отсутствия цифрового фильтра на стороне передачи

Как видно из графиков спектров, применение фильтра приподнятого косинуса уже на частотах, примыкающих к границам основной полосы, обеспечивает ослабление уровней спектральных составляющих, превышающее 60 дБ. В случае, когда обработка сигнала не осуществляется, можно говорить о применении прямоугольной оконной функции. Как видно из рисунка, ослабление уровней спектральных составляющих сигнала в таком случае происходит значительно медленнее.

В источнике [14] можно ознакомиться с нормами на ширину полосы радиочастот и внеполосные излучения радиопередатчиков гражданского применения.

Под внеполосным излучением понимается нежелательное излучение на частотах, непосредственно примыкающих к необходимой ширине полосы частот, которое является результатом процесса модуляции, но не включает

побочных излучений. К побочным излучениям относятся гармонические излучения, паразитные излучения, продукты интермодуляции и частотного преобразования.

Под полосой частот радиоизлучения на уровне X дБ понимается полоса частот излучения радиопередающего устройства, за пределами которой любая дискретная составляющая спектра внеполосных радиоизлучений или спектральная плотность мощности внеполосных радиоизлучений ослаблены относительно заданного уровня 0 дБ до уровня не менее чем X дБ.

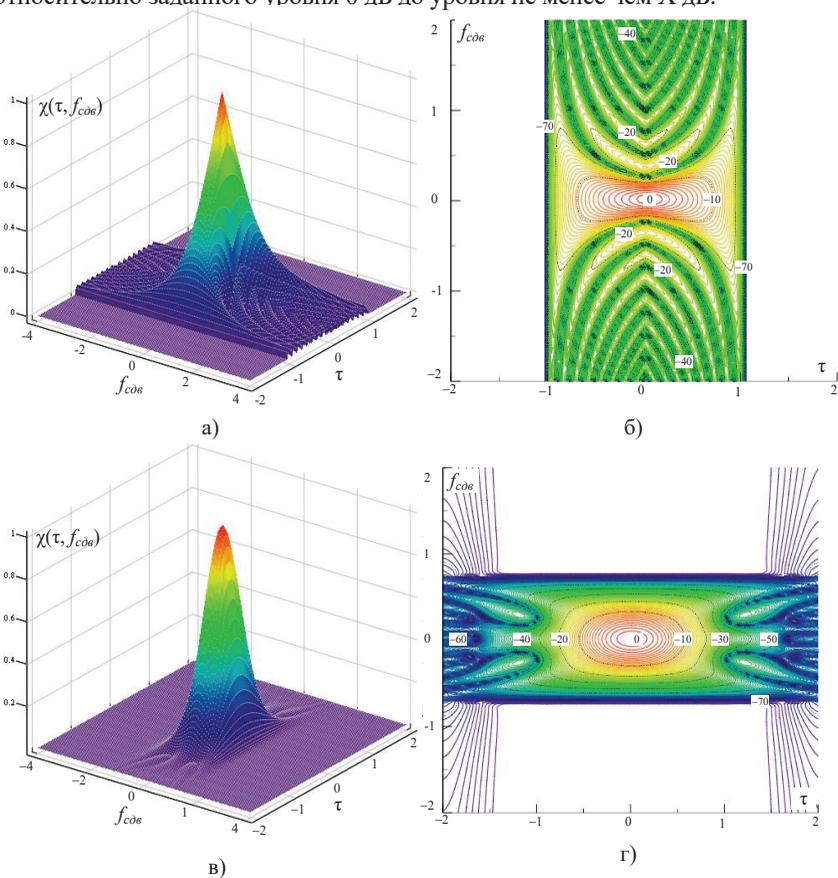


Рис. 28 Прямоугольный импульс: а) тело неопределённости (линейный масштаб); б) изолинии функции неопределённости (логарифмический масштаб); Импульс приподнятого косинуса: в) тело неопределённости (линейный масштаб); г) изолинии функции неопределённости (логарифмический масштаб).

На рис. 28 представлены модули двумерных корреляционных функций $\chi(\tau, f_{\text{сдв}})$ огибающих сигнала прямоугольной формы и приподнятого косинуса, формируемого ЦФ. Модули данных функции носят название функций неопределённости. Сами функции описываются выражением свёртки сигнала со своей комплексно-сопряжённой копией, сдвинутой по времени и по частоте:

$$\chi(\tau, f_{\text{сдв}}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) p^*(t - \tau) \exp(j2\pi f_{\text{сдв}} t) dt .$$

Графики представлены в линейном масштабе. Изолинии функций неопределённости представлены в логарифмическом масштабе, который позволяет отобразить значения функции, не отображаемые в линейном масштабе. По осям абсцисс и ординат отложены нормированные значения сдвигов по времени τ и частоте $f_{\text{сдв}}$, которые возникают в процессе передачи сигналов. Графики обеих функций неопределённости имеют ограниченную протяжённость вдоль оси временного сдвига и обладают ярко выраженными максимумами в точках нулевого сдвига $\chi(0,0) = 1$. При этом объём, ограниченный поверхностью $\chi^2(\tau, f_{\text{сдв}})$, равен 2π [15]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^2(\tau, \omega_{\text{сдв}}) d\omega_{\text{сдв}} dt = 2\pi , \quad \omega_{\text{сдв}} = 2\pi f_{\text{сдв}} .$$

Таким образом, сжатие функции неопределённости по одной переменной приводит к её расширению по второй, повышая чувствительность оборудования приёма к частотному или временному сдвигу принимаемого сигнала. Применение ЦФ направлено на формирование огибающей импульсов сигнала, обладающей лучшей локализацией тела функции неопределённости по сравнению с импульсами прямоугольной формы. Как можно видеть из рис. 28, тело функции неопределённости для приподнятого косинуса показывает значительно лучшую частотно-временную локализацию по сравнению с прямоугольной оконной функцией. Так уровень функции неопределённости достигает значения в -40 дБ. Следовательно, применение данной огибающей делает системы связи менее чувствительными к нарушениям частотной или временной синхронизации.

Последующие графики приведены для случая прямоугольной оконной функции, подразумевающее отсутствие обработки сформированного символа цифровым фильтром.

Последовательность отсчетов с выхода ЦФ подаётся на цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП), который формирует низкочастотный аналоговый сигнал (рис.26.г), поступающий на преобразователь частоты (ПЧ). На второй вход преобразователя подаётся высокочастотное несущее колебание, модуляция которого обеспечивает перенос спектра сигнала в заданную полосу частот. Формирование несущего колебания осуществляется задающим генератором (ЗГ). Спектр сигнала на выходе ПЧ, а также спектры сигналов на отдельных поднесущих представлены на рис.29.

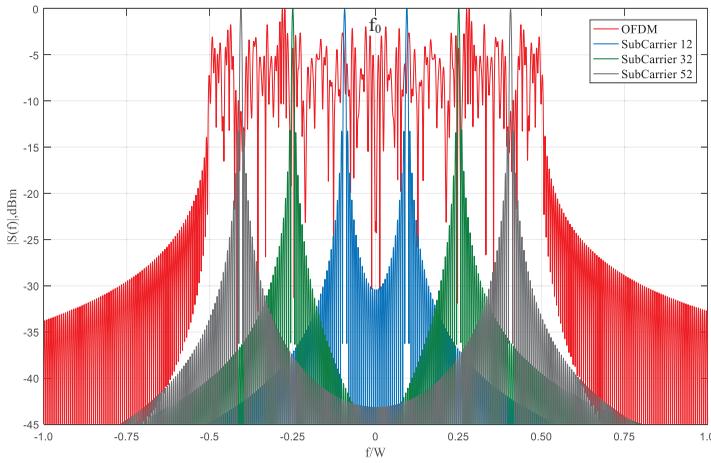


Рис. 29 Спектр амплитуд сигнала OFDM и сигналов, передаваемых на поднесущих

Как можно видеть из данного рисунка, спектры передаваемых на поднесущих сигналов оказываются перекрывающимися между собой. Однако,

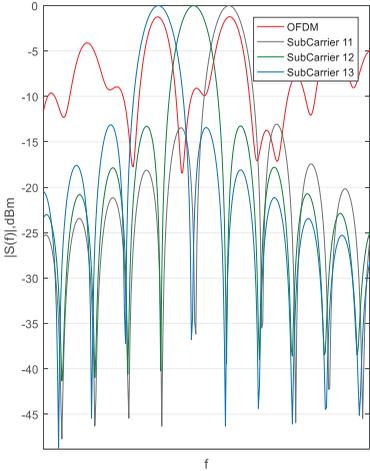


Рис. 30 Спектр амплитуд сигналов, передаваемых на соседних поднесущих

представленный на рис.30 фрагмент спектра амплитуд сигнала, на котором изображены спектры сигналов, передаваемых на трёх соседних поднесущих, позволяет увидеть, что в значениях частоты nT_n^{-1} значения спектров сигналов, передаваемых на других поднесущих, стремятся к нулю. Таким образом, взаимное влияние между сигналами, передаваемыми в разных подканалах, отсутствует, то есть сигналы являются ортогональными. Такая технология передачи данных получила название технологии мультиплексирования с ортогональным частотным разделением (OFDM– Orthogonal Frequency Division Multiplexing). Данная технология применяется в системах

беспроводной связи. В системах проводной связи применяется аналог технологии OFDM–дискретная мультионовая модуляция (DMT– Discrete MultiTone), в схеме которой ПЧ отсутствует.

С выхода ПЧ радиопульс $\hat{s}(t)$ передаётся в канал, упрощённые математические модели которого приведены в подразделах 1.6,1.7.

2.3.2. Сторона приёма

На приёмной стороне (рис.23) наблюдается аддитивная смесь искажённого сигнала и шума $\hat{s}(t)$, которая подаётся на вход преобразователя частоты. Преобразователь осуществляет перенос спектра поступающего сигнала из области частоты f_0 в область нуля. Полученный низкочастотный эквивалент принятого сигнала $\hat{s}_{нч}(t)$ дискретизируется и преобразуется в цифровую форму $\hat{\mathbf{s}}_{\phi}^i$ в аналого-цифровом преобразователе (АЦП).

Обнаружение в дискретной последовательности начала символов на приёмной стороне возможно с помощью корреляционного анализа: поскольку циклический префикс представляет копию N_3 последних отсчётов символа, то коэффициент автокорреляции сигнал при временном сдвиге равном $2N$ будет стремиться к 1.

Так на рис.31 приведены графики коэффициента автокорреляции для исходного сигнала и сигнала, прошедшего через канал с АБГШ и межсимвольной интерференцией. Интервал наблюдения брался в интервале от 5 до 6 символов. Пунктирной линией обозначены моменты времени, соответствующие началам символов в данных последовательностях отсчётов.

Отношение сигнал/шум принимаемого сигнала соответствовало значению 0 дБ. Моделирование производилось при длинах циклического префикса, составляющих 1/16 и 1/8 от величины $2N$, где $N=1024$.

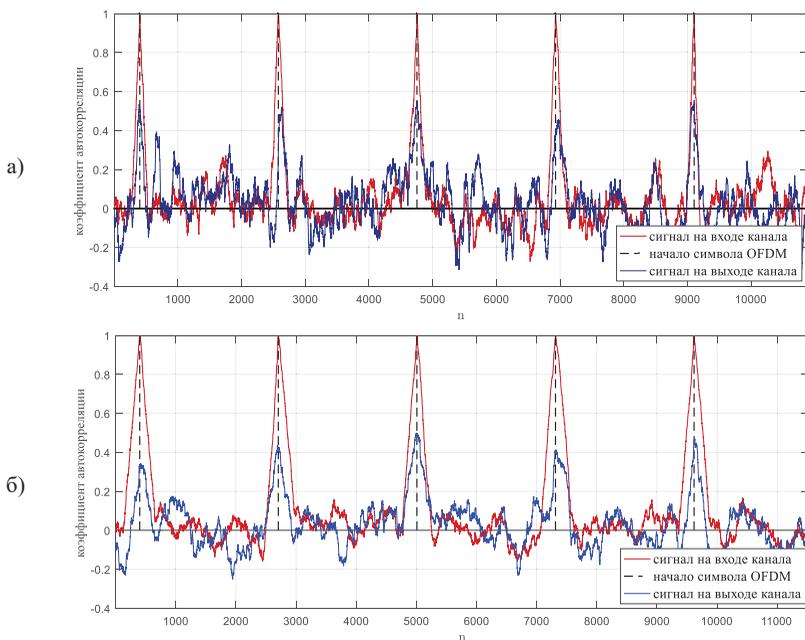


Рис. 31 Коэффициент автокорреляции сигнала при длине ЦП а) 1/16 $2N$; б) 1/8 $2N$

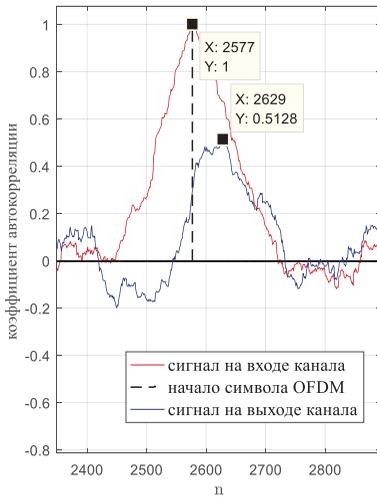


Рис. 32 Фрагмент графика, представленного на рис.27.а

Как видно из графика, поиск начала символов, основанный на вычислении коэффициента автокорреляции, позволяет определить моменты начала символов данных шумоподобных сигналов с погрешностью в оценке, не превышающей, как показала серия экспериментов для первой конфигурации, 60 отсчётов. Увеличенный фрагмент первого графика, соответствующий второму максимуму коэффициента автокорреляции, с приведёнными значениями представлен на рис.32. Длина циклического префикса влияет на точность вычисления начала символа, и как видно из графиков, для циклического префикса, равного $1/8$ от $2N$ точность оценок повышается.

Для исходного сигнала погрешность в оценке начала символов исчислялась единицами периодов дискретизации. В последующей обработке принимаемого сигнала устраняются временной и частотные сдвиги, присутствующие в сигнале. Подробное рассмотрение вопросов синхронизации в данном пособии не рассматривается.

Цифровой фильтр на приёмной стороне осуществляет оконную обработку принимаемого низкочастотного символа с целью подавления интерференционных составляющих и уменьшения вероятности ошибки на приёмной стороне.

Сигнал с выхода ЦФ $\hat{\mathbf{s}}_{N_0}^i$ (рис.23) поступает на блок последовательно-параллельного преобразования, в котором осуществляется отбрасывание циклического префикса и подача $2N$ отсчётов сигнала на блок БПФ.

Блок БПФ осуществляет формирование комплексного кадра данных $\hat{\mathbf{d}}^i$ на основе полученных вещественных отсчётов символа $\hat{\mathbf{s}}^i$. Количество выходов. Комплексный кадр данных содержит $N-1$ оценок символов BPSK, QPSK или MQAM, представляющих, как было показано в подразделе 2.2, сумму произведений комплексных значений \hat{d}_n^i на коэффициент передачи канала для n -й поднесущей $\hat{H}_{0,n}$ с мгновенными значениями АБГШ.

Довольно часто в литературе, посвящённой технологии многочастотной модуляции, оборудование, расположенное до входов блока ОБПФ передающей стороны и после выходов блока БПФ стороны приёма, называется оборудованием частотной области (frequency domain). Оборудование,

расположенное на схеме между выходами блока ОБПФ стороны передачи и входами блока БПФ приёмной стороны, носит название оборудования временной области (time domain).

Между блоком БПФ и демодуляторами может быть включён эквалайзер, предназначенный для компенсации искажений, вносимых в сигнал по причине неидеальности АЧХ и ФЧХ канала, и уменьшения евклидова расстояния между оценкой сигнала и его исходным значением. Значение коэффициента передачи эквалайзера для каждой поднесущей должны иметь вид: $\hat{E}_n^i = \hat{H}_{0,n}^{-1}$, где $\hat{H}_{0,n}$ – оценка коэффициента передачи канала для n -й поднесущей. Параметры таких эквалайзеров способны динамически изменяться, исходя из изменения условий передачи в каналах или изменения требований, предъявляемых к системе. С вопросами адаптивной обработки сигналов можно ознакомиться в источниках [16,17].

Комплексный кадр данных $\hat{\mathbf{d}}^i$ поступает на входы демодуляторов, которые содержат многопороговые РУ и преобразователи кода. В РУ выносятся решение об исходном значении символов синфазной $\bar{d}_{1,n}^i$ и квадратурной составляющих $\bar{d}_{Q,n}^i$ передаваемых в отсчётный момент времени iT . Преобразователи кода значениям синфазных и квадратурных составляющих ставят в соответствие двоичные последовательности $\hat{\mathbf{b}}_n^i$, которые поступают на входы параллельно-последовательного преобразователя, формирующего высокоскоростной двоичный поток данных $\hat{\mathbf{b}}^i$, поступающий конечному пользователю.

2.4. Влияние длины циклического префикса на приём сигналов

В подразделе 2.2 показывалось, что преобразование гауссовского канала с памятью в совокупность гауссовских каналов без памяти возможно путем добавления защитного интервала, количество отсчетов в котором должно быть не меньше памяти канала. В случае превышения длины памяти канала M заданной величины защитного интервала N_3 в первом слагаемом выражения (96) произведение матриц $\mathbf{S}^T \dot{\mathbf{H}} \mathbf{M}$ не будет давать циркулярной матрицы $\dot{\mathbf{C}}$, во втором слагаемом произведение матрицы циклического продолжения и матрицы отклика канала на символ предыдущего момента времени не даёт нулевой матрицы: $\mathbf{S}^T \check{\mathbf{H}}_1 \neq \mathbf{0}$. Вид матриц $\check{\mathbf{H}}_0$ и $\check{\mathbf{H}}_1$ для случая $M > N_3$ представлен ниже:

При недостаточной длине циклического префикса перестают выполняться следующие условия: $\mathbf{S}^T \check{\mathbf{H}}_0 \mathbf{M} \neq \dot{\mathbf{C}}$, $\mathbf{S}^T \check{\mathbf{H}}_1 \mathbf{M} \neq \mathbf{0}$, и данные матрицы принимают вид:

$$\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{H}}_0 \mathbf{M} = \begin{pmatrix} h_0 & \dots & 0 & h_{N_3} & \dots & h_1 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & h_{M-1} & \dots & h_{N_3} \\ h_{M-1} & h_0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & h_{M-1} \\ 0 & \ddots & & h_0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{M-1} & \dots & h_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{H}}_1 \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & h_{M-1} & \dots & h_{N_3+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & h_{M-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Визуализация данных матриц представлена на рис.33.

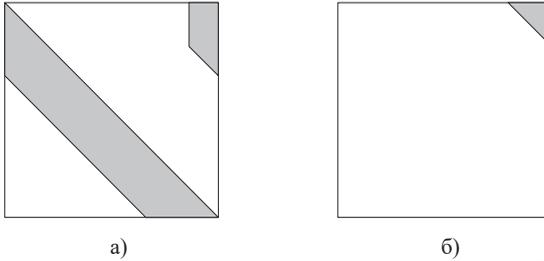


Рис. 33 Матрицы отклика канала при недостаточной длине ЦП а) $\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{H}}_0 \mathbf{M}$; б) $\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{H}}_1 \mathbf{M}$

В силу того, что матрицы перестают быть циклической и нулевой, их спектральное разложение приводит к получению недиагональных и ненулевых матриц: $\tilde{\mathbf{W}} \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{H}}_0 \mathbf{M} \tilde{\mathbf{W}}^H = \dot{\mathbf{\Lambda}}_0 \neq \text{diag}\{\dot{\lambda}_{0,0}, \dots, \dot{\lambda}_{0,N-1}\}$, $\tilde{\mathbf{W}} \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{H}}_1 \mathbf{M} \tilde{\mathbf{W}}^H = \dot{\mathbf{\Lambda}}_1 \neq \mathbf{O}$.

На рис. 34 приведены изображения матриц $\dot{\mathbf{\Lambda}}_0$ и $\dot{\mathbf{\Lambda}}_1$, полученные для канала с заданной импульсной характеристикой. На приведённых рисунках представлены модули значений комплексных элементов матриц. Поскольку, как было показано выше, данные комплексные значения представляют собой частотные отклики системы на передаваемые в подканалах сигналы, то матрицы на рис.34 являются отображением АЧХ канала для символов, передаваемых в текущий и предыдущий моменты времени.

В случае корректного выбора длины ЦП в матрице $\dot{\mathbf{\Lambda}}_0$ присутствуют элементы, расположенные только на главной диагонали, и представляющие собой АЧХ канала в полосе частот отводимой под передачу (аналогично рис.19). Переходов энергии сигналов между подканалами, как отчётливо видно из рис.34.а,б, не наблюдается. Изображение нулевой матрицы $\dot{\mathbf{\Lambda}}_0$ для данного случая не приводится.

Случай, когда длина ЦП оказывается меньше длины памяти канала, представлен на рис.34.в,г. Как видно из рис.34.в, элементы матрицы $\dot{\mathbf{\Lambda}}_0$, расположенные на главной диагонали всё так же отображают АЧХ канала в полосе частот отводимой под передачу (что видно по форме огибающей

данных элементов), но так же в матрице $\hat{\Lambda}_0$ появляются коэффициенты взаимного влияния сигналов, передаваемых на разных поднесущих.

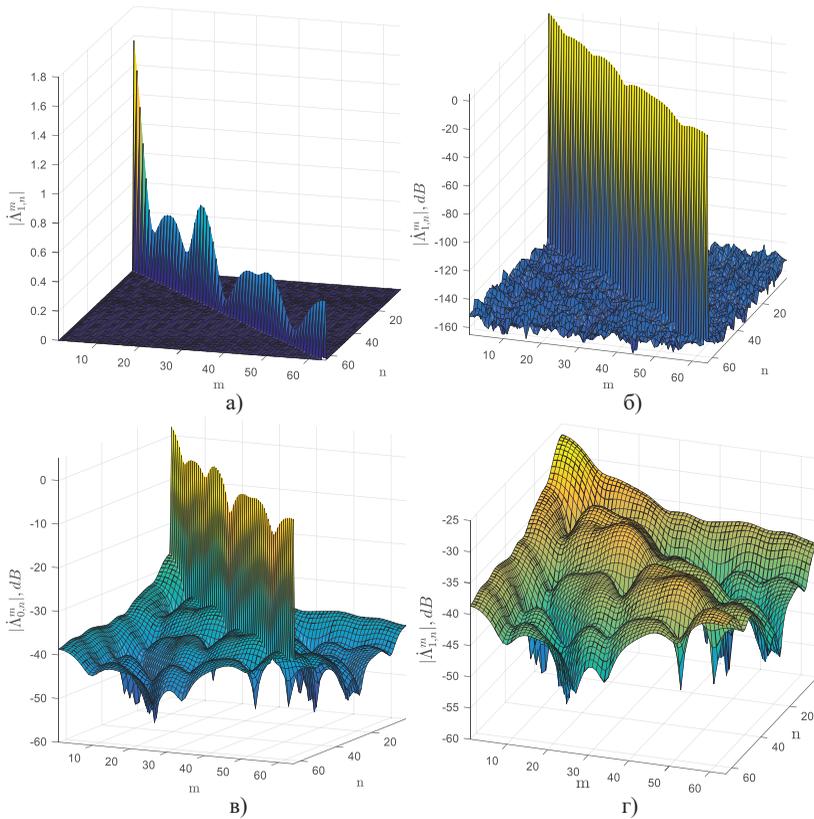


Рис. 34 Матрицы модулей собственных значений канальных матриц ЦП достаточной длины: а) $\hat{\Lambda}_0$ линейный масштаб; б) $\hat{\Lambda}_0$ логарифмический масштаб; ЦП недостаточной длины: а) $\hat{\Lambda}_0$ логарифмический масштаб; б) $\hat{\Lambda}_1$ логарифмический масштаб

Как видно из изображения матрицы, сигнал, передаваемый в n -м подканале, оказывает влияние сигналы, передаваемых во всех остальных подканалах. Данное явление обозначается как интерференция между поднесущими (ICI– InterCarrier Interference) или межканальная интерференция (МКИ). В случае МКИ нарушается условие ортогональности, и значения спектров сигналов, представленные на рис.32, перестают быть отличными от нуля при значениях частоты, равных f_n .

Из рис.34.г видно, что уровень элементов матрицы $\hat{\Lambda}_1$ значительно

ниже уровня элементов матрицы $\hat{\Lambda}_0$. Подобного рода соотношение будет выполняться во всех остальных случаях и не является исключением. Элементы, расположенные на главной диагонали матрицы, определяют величину МСИ (ISI– InterSymbol Interference), элементы, расположенные вне главной диагонали, отображают МКИ, образуемые предыдущим символом. В последующем МКИ, образованные символами i и $i-1$, будут обозначаться МКИ-1 и МКИ-2 (МКИ первого и второго типа).

Тогда принимаемый сигнал на выходе блока БПФ для n -го подканала без учёта шумовой составляющей определяется выражением:

$$\begin{aligned} \hat{d}_n^i &= \dot{\mathbf{W}}(n,)\tilde{\mathbf{H}}_0\dot{\mathbf{W}}(n,)^H d_n^i + \sum_{m \neq n} \dot{\mathbf{W}}(m,)\tilde{\mathbf{H}}_0\dot{\mathbf{W}}(m,)^H d_m^i + \\ &+ \dot{\mathbf{W}}(n,)\tilde{\mathbf{H}}_1\dot{\mathbf{W}}(n,)^H d_n^{i-1} + \sum_{m \neq n} \dot{\mathbf{W}}(n,)\tilde{\mathbf{H}}_1\dot{\mathbf{W}}(n,)^H d_m^{i-1} = \\ &= \dot{H}_{0,n}^n d_n^i + \sum_{m \neq n} \dot{H}_{0,n}^m d_m^i + \dot{H}_{1,n}^n d_n^{i-1} + \sum_{m \neq n} \dot{H}_{1,n}^m d_m^{i-1} \end{aligned} \quad (102)$$

где $\dot{\mathbf{W}}(n,)$ – n -я строка матрицы БПФ.

В (101) первое слагаемое представляет собой полезный сигнал, второе – МКИ-1, третье слагаемое соответствует МСИ, четвертое слагаемое – МКИ-2. Третье слагаемое представляет МСИ между символами, передаваемыми в разные периоды времени на n -й несущей. Четвертое слагаемое отвечает за межканальную интерференцию типа 2 (МКИ-2).

Влияние интерференционных составляющих на принимаемый сигнал продемонстрировано на рис.35. Сигнальные созвездия, представленные на данном рисунке, соответствуют случаям выбора ЦП достаточной длины и длины меньшей памяти канала. Передача сигнала осуществлялась в канале, характеризуемом матрицами, представленными на рис.34.

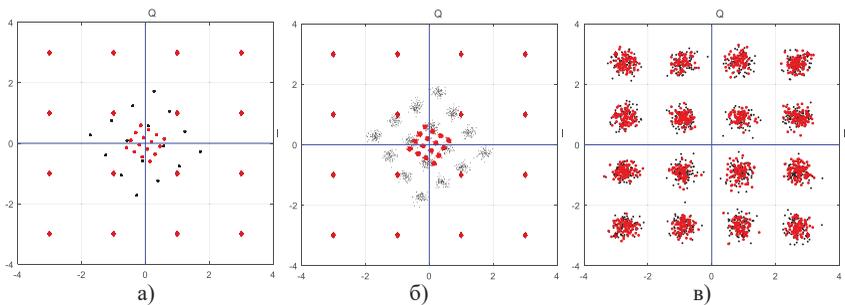


Рис. 35 Сигнальные созвездия 16QAM на стороне приёма для 1-го и 13-го подканалов а) ЦП достаточной длины; б) ЦП недостаточной длины; в) на выходе эквалайзера

Как можно понять из графиков, поворот сигнальных созвездий определяется элементами главной диагонали матрицы $\hat{\Lambda}_0$, интерференционная

составляющая может рассматриваться так же, как и шумовая составляющая, описание которой приведено в подразделах 1.4–1.6.

На рис.34.в представлено сигнальное созвездие, представляющее собой сигнальное созвездие с интерференционными составляющими после процедуры выравнивания вида $\hat{d}_{n,оки}^i = \hat{d}_n^i / \hat{H}_{0,n}^n$, осуществляемой эквалайзером, размещаемым на выходе блока ОБПФ (на схеме рис.23 не приведён). В случае сигнального созвездия на приёме вида рис.34.а восстановление параметров сигнала при отсутствии шума осуществляется полностью. Однако, как видно из рисунка, применение эквалайзера приводит также к усилению интерференционных и шумовых составляющих, что увеличивает вероятность ошибки порогового устройства на приёме.

С учётом вышеизложенного выражение, описывающее скорость передачи в многочастотных системах, должно учитывать влияние МКИ, что приводит данное выражение к виду:

$$R \approx \sum_{n=1}^N \Delta f \log_2 \left(1 + \frac{|\hat{H}_{0,n}|^2 \bar{P}_{s,n}}{\sigma_{МКИ,n}^2 + \sigma_{МКИ,n}^2 + \Delta f_n N_0} \right). \quad (103)$$

Для повышения спектральной эффективности систем связи следует подавить интерференционные составляющие. Решения, которые позволяют это сделать, приводят к повышению сложности схемы эквалайзера.

2.5. Пик фактор сигналов

Многокомпонентные сигналы характеризуются весьма значительным динамическим диапазоном, что вызывает ряд трудностей в случае их практической реализации. Так можно отметить значительную сложность цифро-аналогового и аналого-цифрового преобразования таких сигналов и снижение эффективности высокочастотных усилителей мощности для поддержания линейности радиотракта, поскольку требует от усилителя большого динамического диапазона. На практике для описания изменений амплитуды сигналов используют понятие пик-фактора, который определяется отношением значений пиковой мощности к средней:

$$PAPR = \frac{\max |\dot{s}(t)|^2}{\mathbb{E}\{|\dot{s}(t)|^2\}} = \frac{\max |\dot{s}(t)|^2}{P_{av}}, \quad (104)$$

Под пиковой мощностью сигнала $\max |\dot{s}(t)|^2$ понимается мгновенная мощность высокочастотного гармонического колебания в точке максимума значения огибающей сигнала. Значение мгновенной мощности определяются значениями модулирующих сигналов с квадратурной амплитудной модуляцией QAM на множестве поднесущих:4

$$|\dot{s}(t)|^2 = \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} \dot{d}_l \dot{d}_m^* \exp \left(j2\pi(l-m) \frac{t}{T} \right). \quad (105)$$

График значений мгновенной мощности сигнала, взятых на интервале наблюдения, равном длительности символа OFDM с $N=256$ поднесущих, приведён на рис.36.а. На рис.36.б представлена плотность вероятности мгновенной мощности сигнала OFDM, полученная для рассматриваемого на рис.36.а случая.

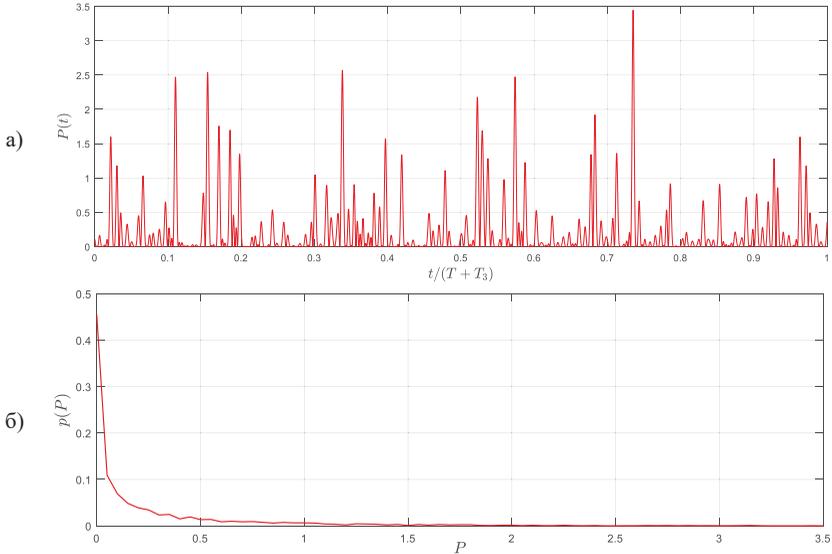


Рис. 36. а) мгновенные значения мощности сигнала OFDM;
 б) плотность распределения мощности сигнала OFDM

Полученная в ходе вычислений плотность распределения вероятностей подтверждает факт того, что для сигналов OFDM значения мощности имеют распределение хи-квадрат с двумя степенями свободы.

Значение средней мощности для одного символа сигнала OFDM имеет рассчитывается согласно выражению:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{s}(t) \dot{s}^*(t) dt = \frac{1}{T} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} \dot{a}_l \dot{a}_m^* \int_0^T \exp\left(j2\pi(l-m)\frac{t}{T}\right) dt. \quad (106)$$

Поскольку при передаче на множестве ортогональных поднесущих для любых $l, m \in \mathbb{Z}$ справедливо $\frac{1}{T} \int_0^T \exp\left(j2\pi(l-m)\frac{t}{T}\right) dt = \delta_{l,m}$, выражение средней энергии символа (106) может быть приведено к уравнению вида:

$$\bar{P} = \sum_{l=1}^{N-1} |\dot{a}_l|^2. \quad (107)$$

Средняя мощность сигнала на всём интервале наблюдения определяется согласно выражению:

$$P_{av} = \mathbb{E}\{\bar{P}\} = N_{\text{symp}}^{-1} \sum_{m=1}^{N_{\text{symp}}} \bar{P}_m.$$

Функция распределения $PAPR$ $CDF(PAPR)$ (Cumulative Distribution Function) для сигналов OFDM описывается выражением:

$$CDF(PAPR) = P(PAPR \leq PAPR_{\text{lim}}) = (1 - \exp(-PAPR_{\text{lim}}))^N. \quad (108)$$

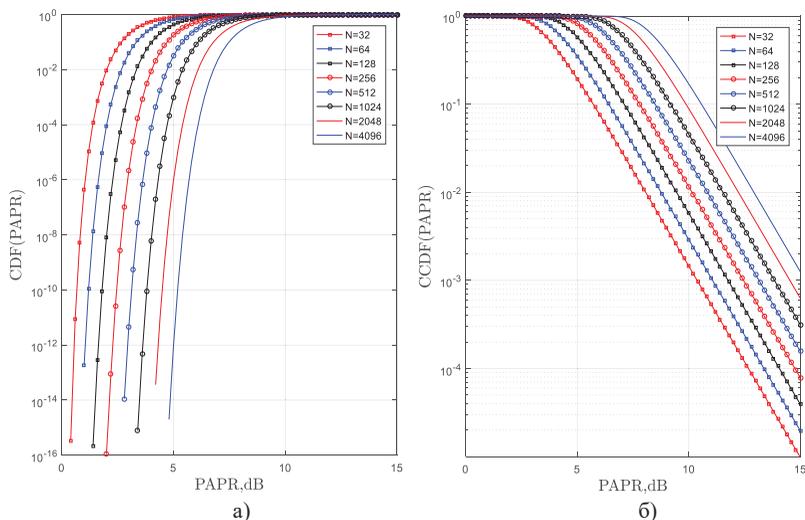


Рис. 37. Зависимости функций от количества поднесущих:

а) функция распределения PAPR; б) дополнительная функция распределения PAPR

Выражение (108) определяет вероятность того, что на интервале наблюдения значение пик-фактора окажется ниже порогового значения. Вероятность превышения установленного порогового значения описывается дополнительной функцией распределения $CCDF(PAPR)$ (Complementary Cumulative Distribution Function):

$$CCDF(PAPR) = P(PAPR > PAPR_{\text{lim}}) = 1 - (1 - \exp(-PAPR_{\text{lim}}))^N. \quad (109)$$

Таким образом данные функции определяют процентное соотношение символов OFDM с пик-фактором выше или ниже порогового значения. Графики зависимостей функций $CDF(PAPR)$ и $CCDF(PAPR)$ для разного количества поднесущих представлены на рис.37.

2.5.1. Влияние пик-фактора на усилитель мощности сигналов OFDM

Для оценки влияния пик-фактора на работу усилителя мощности (УМ) следует рассмотреть амплитудные характеристики (АХ) типовых УМ, приведённых на рис.37. Выражения, описывающие АХ $G_1(A)$ и $G_2(A)$ без учета влияния фазовой модуляции $\phi(A(t))=0$, имеют вид:

$$G_1(A) = \begin{cases} A, & \forall A \leq 1 \\ 1, & \forall A > 1 \end{cases} \quad G_2(A) = \begin{cases} A - 0,148A^3, & \forall A \leq 1,5 \\ 1, & \forall A > 1,5 \end{cases}. \quad (110)$$

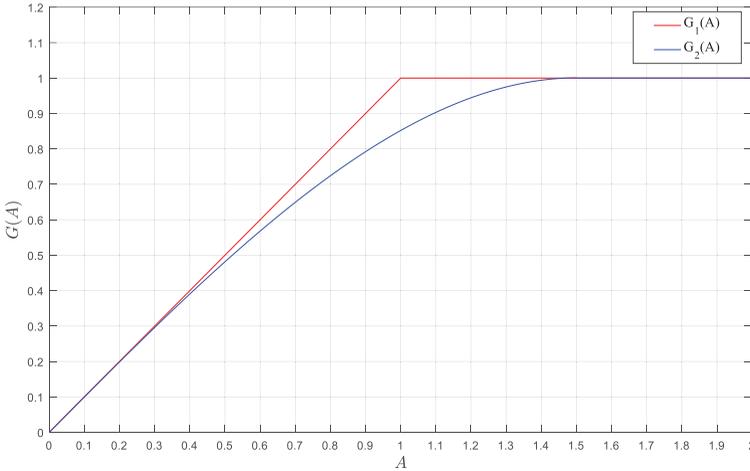


Рис. 38. Амплитудные характеристики усилителей мощности

Как видно из (110) и графиков, представленных на рисунке, АХ УМ являются нелинейными. Тем не менее, в области малых амплитуд наблюдаются линейные участки амплитудных характеристик. Поэтому для зависимости мощности сигнала на выходе усилителя от мощности на входе вида $P_{\text{вых}}(P_{\text{вх}}) = k_{\text{yc}} P_{\text{вх}}$, обеспечивающей отсутствие нелинейных искажений сигнала, как средняя, так и пиковая мощности должны попадать в линейную область АХ, то есть значения пик-фактора должно быть как можно меньшим. В противном случае усилитель может войти в режим насыщения, что будет сопровождаться значительными нелинейными искажениями сигнала на выходе. Параметр A (110), представляет огибающую радиоимпульса OFDM на приёмной стороне $\hat{s}_{N_0}(t)$. С учётом этого параметра выражение для любого радиоимпульса OFDM может быть переписано как:

$$\begin{aligned} \hat{s}_{f_0}(t) &= \hat{s}_{N_0} \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)) = \\ &= \left| N^{-1/2} \sum_{l=1}^{N-1} \hat{a}_l \exp(j2\pi l N^{-1}) \right| \cos \left(2\pi f_0 t + \arg \left(N^{-1/2} \sum_{l=1}^{N-1} \hat{a}_l \exp(j2\pi l N^{-1}) \right) \right). \end{aligned} \quad (111)$$

Влияние нелинейности УМ может быть представлено как:

$$\dot{s}_{\text{yc}}(t) = G(\hat{s}_{N_0}(t)) \exp(j\varphi(t) + \phi(\hat{s}_{N_0}(t))), \quad (112)$$

где АХ УМ $G(\hat{s}_{N_0}(t))$ и фазовая модуляция $\phi(\hat{s}_{N_0}(t))$, возникающая из-за

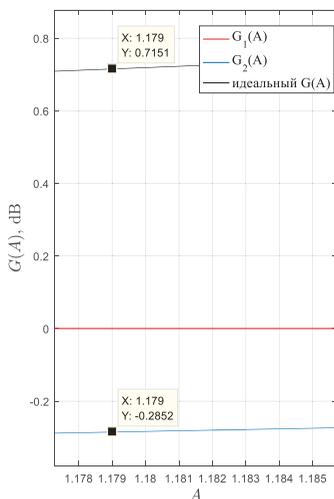


Рис. 39. Точка компрессии в 1 дБ
 Для УМ₂ в области $A=1,179$. Пороговое значение огибающей символов OFDM для заданного коэффициента компрессии определяется как:

$$\hat{s}_{yc,lim} = \sqrt{\frac{1 - 10^{0,05K_{сжм}}}{0,148}}. \quad (113)$$

Для мгновенных значений сигналов OFDM плотность распределения вероятностей может считаться релейской. Тогда вероятность превышения огибающей символа OFDM значения $\hat{s}_{yc,lim}$ (113) определяется как:

$$P(\hat{s}_{yc} \geq \hat{s}_{yc,lim}) = \exp(-\hat{s}_{yc,lim}^2 / (2\sigma_{oc}^2)),$$

где σ_{oc}^2 – дисперсия огибающей $\hat{s}_{N_0}(t)$.

2.5.2. Нелинейные помехи сигналов OFDM, возникающие в УМ

Графики огибающей части радиопульса OFDM на входе и выходе усилителей двух типов, а также их спектры представлены на рис.40, 41.

Как было показано ранее, нелинейные помехи или искажения в сигналах OFDM возникают на выходе четырехполосников, чья мгновенная динамическая характеристика отличается от линейной. Так, для УМ мгновенная динамическая характеристика описывается полиномом третьей степени, что в общем виде может быть представлено как:

$$\hat{s}_{yc}(\hat{s}_{N_0}(t)) = \sum_{k=1}^3 b_k \hat{s}_{N_0}^k(t). \quad (114)$$

где b_k – постоянные вещественные весовые коэффициенты. Раскрытие выражения (114) с учетом (4.6) принимает вид:

амплитудно-фазовой конверсии, могут быть скомпенсированы линеаризатором.

Нормировка входных воздействий и выходных реакций УМ по максимальным значениям, при котором наблюдается насыщение АХ УМ (110) соответствует коэффициенту усиления $k_{yc}=1$.

Согласно (3.29) и графику, представленному на рис.38, точке АХ УМ $A=1$ соответствует $G_2(A)=0,85$, что позволяет определить коэффициент компрессии усилителя мощности в данной точке как:

$$K_{сжм} = 20 \lg\left(\frac{G_2(A)}{A}\right) = 20 \lg\left(\frac{0,85}{1}\right) = -1,41 \text{ дБ},$$

при этом максимум $G_2(A)=1$ достигается для входного значения $A \geq 1,48$.

На рис.39 приводится точка компрессии в 1 дБ, которая, как видно из рисунка, находится для УМ₂ в области $A=1,179$.

$$\begin{aligned}
s_{yc}(s_{N_0}(t)) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^3 b_k \left(\operatorname{Re} \sum_{m=1}^{N-1} \dot{d}_m \exp(j2\pi m t T^{-1}) \right)^k = \\
&= \sum_{k=1}^3 b_k \left(\sum_{m=1}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} p(t-iT)(d_{l,m}(i) \cos(2\pi f_m t) - d_{Q,m}(i) \sin(2\pi f_m t)) \right)^k =, \quad (114) \\
&= \sum_{k=1}^3 b_k \left(\sum_{m=1}^{N-1} |\dot{d}(t)| \cos(m2\pi \Delta f t + \varphi_m(t)) \right)^k
\end{aligned}$$

где $|\dot{d}_m(t)| = \sqrt{d_{m,I}^2(t) + d_{m,Q}^2(t)}$, $\varphi_m(t) = \arctg(d_{m,Q}(t) / d_{m,I}(t))$.

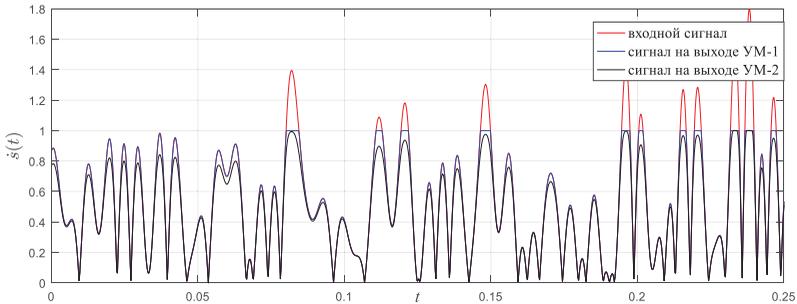


Рис. 40. Модуль фрагмента огибающей радиопульса OFDM на входе УМ

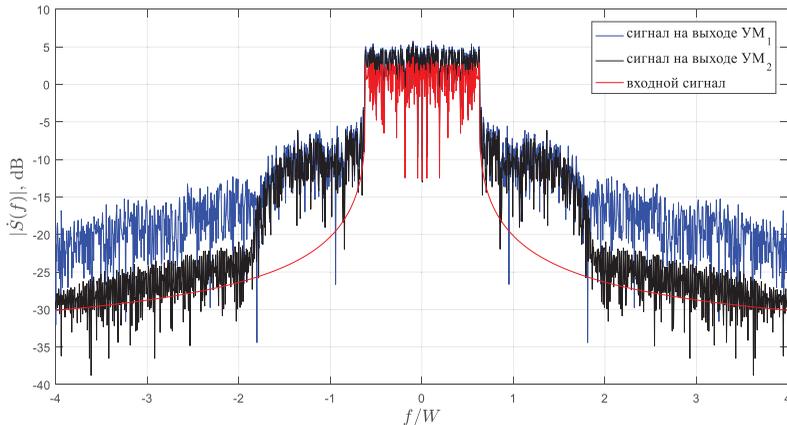


Рис. 41. Спектры сигналов OFDM на входе и выходе УМ

Как видно из рис.41, нелинейность МДХ УМ приводит к возникновению продуктов нелинейности и комбинационных продуктов 2-го и 3-го порядков в спектре сигнала на выходе УМ, которые присутствуют как вне полосы частот, отводимой под передачу, но и внутри самой основной полосы, приводя к межканальной интерференции сигналов OFDM. Для каждой под-

несущей величина составляющей МКИ определяется количеством поднесущих. Для систем OFDM с большим количеством поднесущих нахождение количества продуктов нелинейности и значений их мощности является трудно решаемой задачей. Число возможных продуктов нелинейности в выходном сигнале определяется выражением:

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}. \quad (115)$$

В таб.1 приведены данные по количеству продуктов нелинейности в спектре выходного сигнала [18], где f_k соответствует значениям гармоник и комбинационным продуктам исходных частот, N_k соответствует количеству данных продуктов нелинейности.

Таблица 1. Параметры продуктов нелинейности

f_k	f_l	$2f_l$	$3f_l$	$f_l \pm f_m$	$2f_l \pm f_m$	$f_l \pm f_m \pm f_n$
N_k	N	N	N	$N(N-1)$	$2N(N-1)$	$N(N-1)(N-2)$

2.6. Влияние нестабильности частоты

Случай, когда на стороне приёма может наблюдаться погрешность частотной и временной синхронизации оборудования, что приводит к возникновению сдвигов по времени и по частоте ε_f . С целью упрощения последующей оценки влияния нестабильности частоты дискретизации на демодуляцию сигналов OFDM делается допущение, что символ OFDM на стороне приёма является точной копией символа OFDM на стороне передачи.

Значение фазы низкочастотного сигнала MQAM, передаваемого на n -й поднесущей приёма в момент времени t , соответствующий l -му моменту дискретизации $t = l\hat{T}_o$ на приёмной стороне принимает вид:

$$\begin{aligned} \varphi(l\hat{T}_o) &= 2\pi\hat{f}_n l\hat{T}_o = 2\pi(f_n + \varepsilon_f)(lT_o + \varepsilon_t) = 2\pi(f_n + \varepsilon_f)(l + \varepsilon_t T_o^{-1})T_o = \\ &= 2\pi f_o^{-1}(f_n + \varepsilon_f)(l + \varepsilon_t T_o^{-1}) = 2\pi(f_n f_o^{-1} + \varepsilon_f f_o^{-1})(l + \varepsilon_t T_o^{-1}), \end{aligned} \quad (115)$$

где $\hat{f}_n = f_n + \varepsilon_f$, $\hat{T}_o = T_o + \varepsilon_t = f_o^{-1} + \varepsilon_t$ – значения частоты n -го несущего колебания и периода дискретизации на стороне приёма. Учитывая, что без учёта циклического префикса низкочастотный эквивалент символа OFDM представляется $2N$ дискретными отсчётами, выражение (115) может быть приведено к виду:

$$\begin{aligned} \varphi(l\hat{T}_o) &= 2\pi \left(\frac{n\Delta f}{2N\Delta f} + \frac{\varepsilon_f}{2N\Delta f} \right) \left(l + \frac{\varepsilon_t}{T_o} \right) = \frac{\pi}{N} \left(n + \frac{\varepsilon_f}{\Delta f} \right) \left(l + \frac{\varepsilon_t}{T_o} \right) = \\ &= \frac{\pi}{N} (n + \vartheta_f)(l + \vartheta_t) = \frac{\pi}{N} (nl + \vartheta_f l + n\vartheta_t + \vartheta_f \vartheta_t), \end{aligned} \quad (116)$$

где $\vartheta_f = \varepsilon_f / \Delta f$ – относительная нестабильность частоты поднесущей; $\vartheta_t = \varepsilon_t / T_o$ – относительная погрешность периода дискретизации.

Как видно из выражения (116), при равенстве частот и периода дискретизации на сторонах передачи и приёма, в выражении остаётся только первое слагаемое, остальные слагаемые обращаются в 0. При этом в данном случае выполняется условие ортогональности сигналов, передаваемых на разных поднесущих. Второе слагаемое определяет сдвиг по частоте в поднесущей и меняется с течением времени. Третье слагаемое определяет сдвиг во времени и зависит от номера гармоник основной частоты Δf , что приводит к вращению сигнальных созвездий на стороне приёма. Четвёртое слагаемое определяет сдвиг по фазе принимаемого сигнала на n -й поднесущей, неизменный во времени.

Рассмотрим влияние вносимой погрешности в период дискретизации на приёмной стороне при отсутствии сдвига по частоте. В данном случае символ для n -й поднесущей описывается выражением:

$$\begin{aligned}
 \hat{d}_n^i &= \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{l=0}^{2N-1} \hat{s}_l^i \exp\left(-j \frac{2\pi l f_\Delta n}{2N} (T_\Delta + \varepsilon_l)\right) = \\
 &= \frac{1}{2N} \sum_{l=0}^{2N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{d}_k^i \exp\left(j \frac{\pi k l f_\Delta}{N} T_\Delta\right) \exp\left(-j \frac{\pi n l f_\Delta}{N} (T_\Delta + \varepsilon_l)\right) = \\
 &= \frac{1}{2N} \sum_{l=0}^{2N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{d}_k^i \exp\left(j \frac{\pi(k-n)l f_\Delta}{N} T_\Delta\right) \exp\left(-j \frac{\pi n l f_\Delta}{N} \varepsilon_l\right) = \\
 &= \frac{1}{2N} \sum_{l=0}^{2N-1} \sum_{k=0}^{2N-1} \dot{d}_k^i \exp\left(j \frac{\pi l(k-n)}{N}\right) \exp\left(-j \frac{\pi n l}{N} \frac{\varepsilon_l}{T_\Delta}\right) = \\
 &= \frac{1}{2N} \sum_{l=0}^{2N-1} \sum_{k=0}^{2N-1} \dot{d}_k^i \exp\left(j \frac{\pi l(k-n)}{N}\right) \exp\left(-j \frac{\pi n l}{N} \vartheta_l\right),
 \end{aligned} \tag{117}$$

Пусть погрешность периода дискретизации является малой величиной, для которой справедливо утверждение $\vartheta_l \ll 1$. В данном случае $\exp(-j\pi n l N^{-1} \vartheta_l)$ можно заменить выражением:

$$\exp(-j\pi n l N^{-1} \vartheta_l) \approx 1 - j\pi n l N^{-1} \vartheta_l. \tag{118}$$

Путем подстановки (118) в (117) можно прийти к выражению:

$$\hat{d}_n^i = \dot{d}_n^i - \frac{j}{2N} \sum_{l=0}^{2N-1} \sum_{k=0}^{2N-1} \dot{d}_k^i \frac{\pi n l}{N} \vartheta_l \exp\left(j \frac{\pi(k-n)}{N}\right) = \dot{d}_n^i + \zeta_n^i. \tag{119}$$

Как видно из (119), сигнал на приёмной стороне представляет собой сумму полезного сигнала и сигнала помехи, вызванной временной погрешностью в периоде дискретизации ζ_n^i . Данная помеха представляет собой сумму произведений всех комплексных передаваемых символов и некоторой величины, зависящей от относительной погрешности периода дискретизации ϑ_l . В случае $n=k$ сигнал помехи принимает вид:

$$\zeta_n^i = -j \dot{d}_n^i \frac{\pi n \vartheta_l}{2N^2} \sum_{l=0}^{2N-1} l = -j \dot{d}_n^i \Theta_n, \tag{120}$$

$$\Theta_n = \frac{\pi n}{2N^2} \vartheta_l \sum_{l=0}^{2N-1} l = \frac{\pi n}{2N^2} \vartheta_l N(2N-1) \approx \pi n \vartheta_l. \tag{121}$$

Подстановка (120) в (119) позволяет привести (119) к виду:

$$\hat{d}_n^i = \check{d}_n^i (1 - j\Theta_n) \quad (122)$$

Предположение о незначительной погрешности периода дискретизации и, как следствие, малом значении ϑ_t позволяет прийти к допущению о малости величины Θ_n , что, в свою очередь, даёт возможность представить выражение (122) в виде:

$$\hat{d}_n^i \cong \check{d}_n^i (\cos \Theta_n - j \sin \Theta_n) = \check{d}_n^i \exp(-j\Theta_n). \quad (123)$$

Из (123) можно сделать вывод о том, что нестабильность частоты дискретизации приводит к повороту сигнального созвездия на угол Θ_n , прямо пропорциональный произведению номера несущей n и относительной погрешности периода дискретизации ϑ_t . Направление поворота сигнального созвездия в данном случае определяется знаком ϑ_t .

Без допущения о малых значениях величины ϑ_t принимаемый символ можно представить как:

$$\hat{d}_n^i = \frac{\check{d}_n^i}{2N} \sum_{l=0}^{2N-1} \exp\left(-j \frac{\pi l}{N} n \vartheta_t\right) \quad (124)$$

Сумма по l в выражении (124) представляет собой дискретное преобразование Фурье по частоте с номером $n\vartheta_t$. от импульса длительностью $2N$ временных отсчетов, амплитуды $(2N)^{-1}$. Такой импульс имеет спектр вида $\text{sinc}(n\vartheta_t)$, что позволяет перейти от (124) к выражению вида:

$$\hat{d}_n^i = \check{d}_n^i \text{sinc}(n\vartheta_t). \quad (125)$$

Из (124, 125) видно, что сигнал в каждом подканале будет подвержен влиянию селективной по частоте мультипликативной помехи. При увеличении номера подканала амплитуда мультипликативной помехи уменьшается, что приводит к уменьшению амплитуды полезного сигнала, при этом можно выделить несколько значений произведения $n\vartheta_t$ [19]:

1. При $|n\vartheta_t| \ll 1$ величина $\text{sinc}(n\vartheta_t) \approx 1$. Амплитуда мультипликативной помехи уменьшается незначительно, и имеет место лишь незначительный поворот сигнального созвездия на угол Θ_n .

2. При $0.1 < |n\vartheta_t| < 1$ происходит сильное уменьшение амплитуды полезного сигнала и осуществляется поворот сигнального созвездия на значительный угол Θ_n .

3. При значении $|n\vartheta_t| \in \mathbb{Z}$ величина $\text{sinc}(n\vartheta_t) \rightarrow 0$. Происходит полная потеря полезной информации.

В случае, когда $n \neq k$, сигнал помехи будет определяться выражением:

$$\check{\zeta}_t^i = - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2N-1} \check{d}_k^i \frac{j}{2N} \sum_{l=0}^{2N-1} \frac{\pi l}{N} n \vartheta_t \exp\left(j \frac{\pi l}{N} (k - n)\right). \quad (126)$$

Таким образом, помеха представляет собой суммарный сигнал, образованный переходами сигналов с соседних $2N - 1$ подканалов, умноженных

на величину $\sum_{l=0}^{2N-1} \frac{\pi l}{N} n \vartheta_l \exp\left(j \frac{\pi l}{N} (k-n)\right)$.

Помеха, образованная в случае $n \neq k$, вызвана межканальной интерференцией и описывается как гауссовский случайный процесс. В [19] показано, что с увеличением номера подканала n величина ошибки, вносимой межканальной интерференцией (МКИ), увеличивается.

На рис.42. изображены сигнальные созвездия принятых 10000 символов, переданных на 4, 16, 32, и 63-й поднесущих, для $2N=128$, $\vartheta_r = +10\text{ppm}$. На пространственных диаграммах виден рост влияния МКИ на принимаемые сигналы с увеличением номера подканала. Также прослеживается изменение угла поворота сигнального созвездия с течением времени для поднесущих 16, 32, и 63.

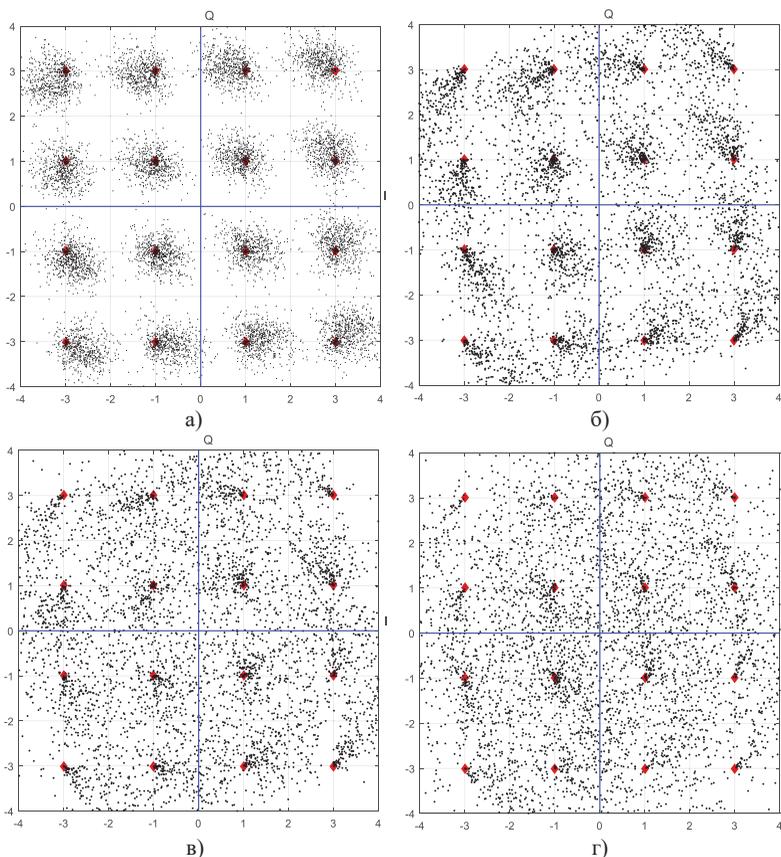


Рис. 42 Сигнальные созвездия 16QAM на стороне приёма для 1-го и 13-го подканалов
а) 4-го подканала; б) 16-го подканала; в) 32-го подканала; г) 63-го подканала

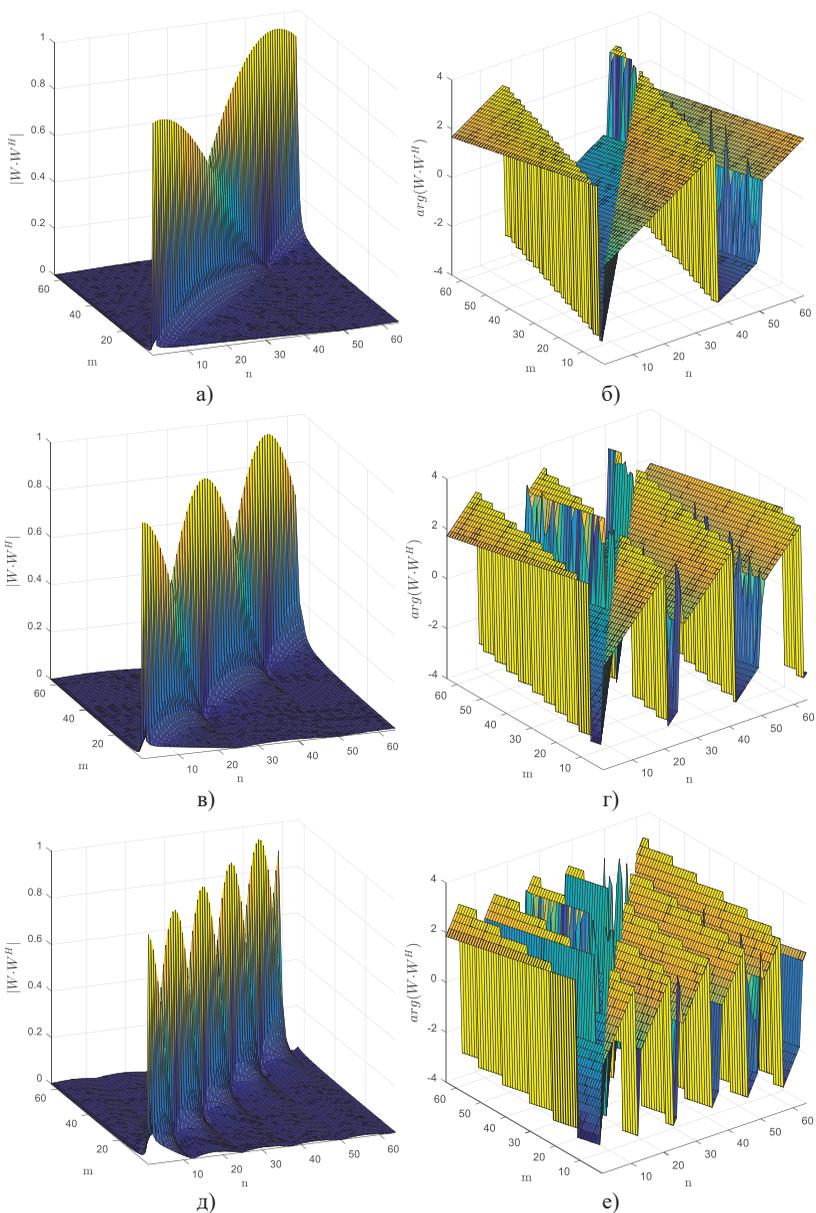


Рис. 43 Изменение структуры матрицы произведения матриц БПФ и ОБПФ при наличии сдвига по частоте $\vartheta_t = +100\text{rpm}$:
 матрицы модуля значений произведения а) $i = 200$; в) $i = 800$; д) $i = 2400$;
 матрицы аргумента значений произведения б) $i = 200$; р) $i = 800$; е) $i = 2400$;

На рис.43 представлены матрицы значений модуля и аргумента комплексных значений матрицы, полученной произведением матриц БПФ/ОБПФ при сдвиге по частоте $\mathbf{W}\mathbf{W}^H$.

Расчёты производились для относительной погрешности в периоде дискретизации $\vartheta_i = +100\text{ppm}$ и размерности матриц $2N=128$. Размерности матриц, представленных на рисунке, $N=64$ были взяты с учётом эрмитова сопряжения элементов матриц ОБПФ и БПФ, описанных в подразделе 2.3.1. Интервал наблюдения также охватывает 10000 символов OFDM.

Представленные на рисунке матрицы позволяют проследить динамику ухудшения качества приёма сигналов при отсутствии мер, направленных на синхронизацию частоты. Также они полностью подтверждают корректность выводов 1–3, приведённых выше.

На рис. 44 представлены пространственные диаграммы 16QAM сигнала, полученные для n -й поднесущей, такой, что $|n\vartheta_i| \rightarrow 1$. В данном случае сигнальное созвездие, представленное на рис. 44.а, получено путём произведения комплексных кадров данных \mathbf{d}^i на диагональную матрицу, элементами которой являются элементы главной диагонали матрицы произведения $\mathbf{W}\mathbf{W}^H$ с учётом сдвига по частоте.

Сигнальное созвездие, представленное на рис. 44.б, получено путём произведения комплексных кадров данных \mathbf{d}^i на матрицы произведения $\mathbf{W}\mathbf{W}^H$, из которой исключена главная диагональ. Данная пространственная диаграмма определяет межканальную интерференцию 1-го типа, значение которой, как видно из рисунка, многократно превосходит по мощности полезный сигнал.

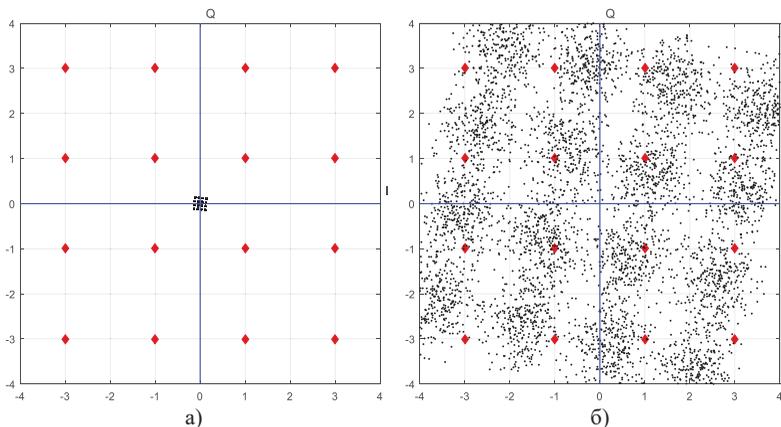


Рис. 44 Сигнальные созвездия 16QAM на стороне приёма для $|n\vartheta_i| \rightarrow 1$
 а) полезная составляющая; б) межканальная интерференция;

2.7. Достоинства и недостатки технологии OFDM

Подводя итог, можно выделить основные достоинства и недостатки технологии OFDM. В качестве достоинств OFDM следует отметить:

- высокую спектральную эффективность технологии;
- гибкость технологии, заключающуюся в возможности использования разных видов модуляции для каждой поднесущей, исходя из условий передачи в каждом подканале;
- способность технологии эффективно устранять межсимвольную интерференцию и бороться с узкополосными помехами;
- простоту практической реализации за счёт применения процедур БПФ/ОБПФ;
- простоту частотного выравнивания сигналов на стороне приёма, требующего одно комплексное умножение на поднесущую в отличие от сложных процедур адаптивной обработки сигналов, применяемых при передаче данных на одной несущей частоте;

В качестве недостатков технологии OFDM следует отметить:

- высокие требования к синхронизации: в то время как синхронизация по времени является относительно простой, синхронизация несущей частоты является сложной задачей, особенно в системах, где предусматривается широкий спектр скоростей передачи данных, и при организации передачи данных несколькими терминалами в сценарии сотовой связи;
- необходимость использования циклического префикса, что приводит к снижению спектральной эффективности систем связи;
- большая чувствительность к смещению и дрейфу несущей частоты, чем у систем с одной несущей,
- высокое значение пик-фактора, что при прохождении сигнала через усилитель приводит к появлению внеполосных излучений, приводящих к интерференции между соседними каналами, и к искажениям внутри основной полосы.

2.8. Структура цикла в сетях 5G NR

В данном подразделе рассматривается структура цикла для систем 5G NR, использующих технологию OFDM для передачи данных.

Основная единица времени в 5G NR определяется согласно выражению [1]: $T_c = 1/(\Delta f_{\max} N)$, где $\Delta f_{\max} = 480$ кГц, $N = 4096$.

Цифровой поток имеет циклическую структуру (рис.45). Длительность каждого кадра (Frame) составляет $T_f = (\Delta f_{\max} N / 100) \cdot T_c = 10$ мс.

Цикл разбивается на два полуцикла длительностью 5 мс каждый. Полуциклы состоят из подциклов (SubFrame), длительность которых определяется выражением $T_{sf} = 10^{-3} T_c \Delta f_{\max} N$.

Таким образом, количество подциклов в цикле $N_{\text{subframe}}^{\text{frame}} = 10$.

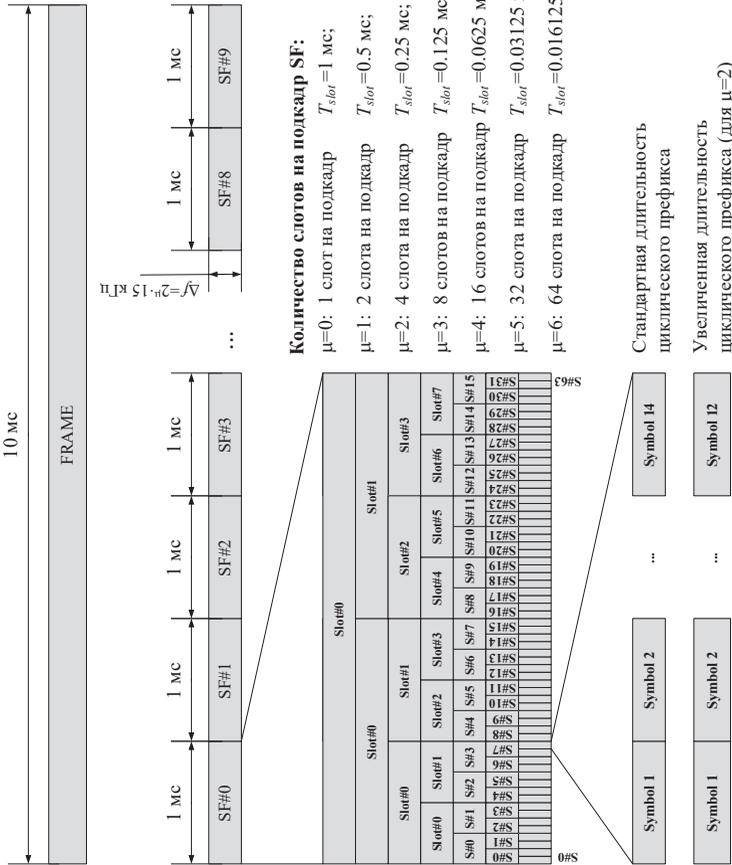


Рис. 45 Структура кадра OFDM в сетях 5G

Подциклы разбиваются на временные слоты (Slot). Количество и длительность каждого слота определяется шириной разноса между поднесущими Δf (нумерологией– μ). Данные о ширине разноса между поднесущими в системах 5G NR для разных значений параметра μ представлены в таблице 2. Количество слотов в подцикле согласно нумерологии определяется выражением $N_{slot}^{subframe,\mu} = 2^\mu$, количество слотов в цикле, в таком случае, определяется как $N_{slot}^{frame,\mu} = N_{subframe}^{frame} N_{slot}^{subframe,\mu} = 10 N_{slot}^{subframe,\mu}$.

В таблице 2 отмечено, что для нумерологий $\mu=0\dots6$ длина циклического префикса задаётся стандартно. Исключением является нумерология $\mu=2$, для которой предусмотрена увеличенная длина ЦП. Для стандартной длины циклического префикса количество символов OFDM в каждом временном слоте равно $N_{symbol}^{slot} = 14$, в случае расширенного циклического префикса количество символов в слоте составляет $N_{symbol}^{slot} = 12$ (таблица 3).

Таблица 2. Нумерология

μ	$\Delta f = 2^\mu \cdot 15$, кГц	циклический префикс
0	15	стандартный
1	30	стандартный
2	60	стандартный, расширенный
3	120	стандартный
4	240	стандартный
5	480	стандартный
6	960	стандартный

Таблица 3. Количество OFDM символов на слот, слотов на цикл и слотов на подцикл

μ	N_{symbol}^{slot}	$N_{slot}^{frame,\mu}$	$N_{slot}^{subframe,\mu}$
	стандартный циклический префикс		
0	14	10	1
1	14	20	2
2	14	40	4
3	14	80	8
4	14	160	16
5	14	320	32
6	14	640	64
2	расширенный циклический префикс		
	12	40	4

В системах 5G NR распределение между восходящими (Uplink) и нисходящими (Downlink) потоками осуществляется на уровне символов, и в рамках одного временного слота часть символов может быть символами нисходящего или восходящего потоков. Всего согласно TS 38.213 [21] насчитывается 256 комбинаций распределения символов в слоте (форматов), первые 55 из которых приведены в таблице 4.

Таблица 4. Формат слотов для стандартного циклического префикса

Формат	Номер символа в слоте													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
1	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
2	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
3	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	F
4	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	F	F
5	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	F	F	F
6	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	F	F	F	F
7	D	D	D	D	D	D	D	D	D	F	F	F	F	F
8	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	U
9	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	U
10	F	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
11	F	F	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
12	F	F	F	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
13	F	F	F	F	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
14	F	F	F	F	F	U	U	U	U	U	U	U	U	U
15	F	F	F	F	F	F	U	U	U	U	U	U	U	U
16	D	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
17	D	D	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
18	D	D	D	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
19	D	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	U
20	D	D	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	U
21	D	D	D	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	U
22	D	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	U	U
23	D	D	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	U	U
24	D	D	D	F	F	F	F	F	F	F	F	F	U	U
25	D	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	U	U	U
26	D	D	F	F	F	F	F	F	F	F	F	U	U	U
27	D	D	D	F	F	F	F	F	F	F	F	U	U	U
28	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	F	U
29	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	F	F	U
30	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	F	F	F	U
31	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	F	F	U
32	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	F	F	U	U
33	D	D	D	D	D	D	D	D	D	F	F	F	U	U
34	D	F	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
35	D	D	F	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
36	D	D	D	F	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
37	D	F	F	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
38	D	D	F	F	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
39	D	D	D	F	F	U	U	U	U	U	U	U	U	U
40	D	F	F	F	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
41	D	D	F	F	F	U	U	U	U	U	U	U	U	U
42	D	D	D	F	F	F	U	U	U	U	U	U	U	U
43	D	D	D	D	D	D	D	D	D	F	F	F	F	U
44	D	D	D	D	D	D	F	F	F	F	F	F	U	U
45	D	D	D	D	D	D	F	F	U	U	U	U	U	U
46	D	D	D	D	D	F	U	D	D	D	D	D	F	U
47	D	D	F	U	U	U	U	D	D	F	U	U	U	U
48	D	F	U	U	U	U	U	D	F	U	U	U	U	U
49	D	D	D	D	F	F	U	D	D	D	D	F	F	U
50	D	D	F	F	U	U	U	D	D	F	F	U	U	U
51	D	F	F	U	U	U	U	D	F	F	U	U	U	U
52	D	F	F	F	F	F	U	D	F	F	F	F	F	U
53	D	D	F	F	F	F	U	D	D	F	F	F	F	U
54	F	F	F	F	F	F	F	D	D	D	D	D	D	D
55	D	D	F	F	F	U	U	U	D	D	D	D	D	D

Форматы 56–254 являются зарезервированными, формат 255 задаётся пользовательским устройством. Условное обозначение D в таблице 4 соответствует символу нисходящего потока, U– восходящего потока, F– соответствует символу с гибкой конфигурацией. В спецификации 3GPP TS 38.104 [21] приводятся значения размерности БПФ/ОБПФ при формировании символов OFDM, для которых количество отсчётов, отводимых под циклический префикс, может быть рассчитано по формуле: $N_3=18N/256$ для стандартного ЦП и $N_3=N/4$ для расширенного ЦП (таблица 5).

Таблица 5. Зависимость длины ЦП от размерности БПФ

N	256	384	512	768	1024	1536	2048	3072	4096
N ₃	стандартный циклический префикс								
	18	27	36	54	72	108	144	216	288
	расширенный циклический префикс								
	64	96	128	192	256	384	512	–	1024

Согласно данным, представленным в таблицах 2,3, могут быть получены данные по длительности слотов и символов. Результаты вычислений приведены в таблице 6.

Таблица 6. Длительность слотов, символов OFDM, ЦП, символов OFDM с ЦП

Нумерология (μ)	0	1	2	3
Длительность слота, мс	1	0.5	0.25	0.125
Длительность символа, мкс	66.67	33.33	16.67	8.33
Длительность стандартного ЦП, мкс	4.7	2.41	1.205	0.57
Длительность расширенного ЦП, мкс	–	–	4.2	–
Длительность символа с ЦП, мкс	71.35	35.68	17.84	8.92
Нумерология (μ)	4	5	6	
Длительность слота, мс	0.0625	0.015625	0.0078125	
Длительность символа, мкс	4.17	2.08	1.04	
Длительность стандартного ЦП, мкс	0.29	0.14	0.07	
Длительность символа с ЦП, мкс	4.46	2.23	1.11	

Структура цикла может быть представлена в виде частотно-временной ресурсной сетки, фрагмент которой изображён на рис.46. Отдельная клетка данной сетки представляет собой наименьшую ресурсную единицу и носит название ресурсного элемента. Ширина клетки соответствует длительности символа OFDM $T+T_3$, высота – полосе частот Δf , отводимой под передачу данных в пределах одного подканала. Ресурсный элемент нумеруется как $(n,i)p,\mu$ – где n – номер поднесущей, i – номер символа OFDM, p – порт антенны, μ – конфигурации расстояния между поднесущими. Базовой ресурсной единицей, которая может быть выделена под передачу данных конечному пользователю, является ресурсный блок, состоящий из 12 примыкающих друг к другу ресурсных элементов.

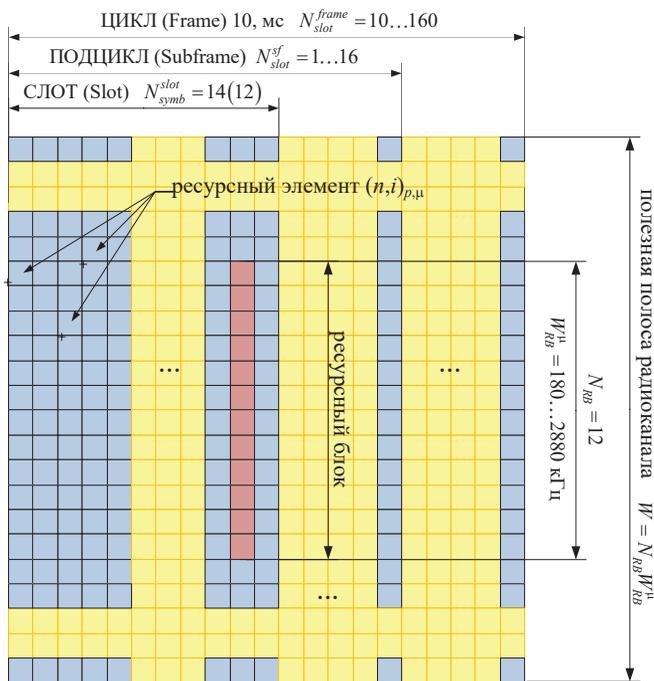


Рис. 46 Сетка частотно-временных ресурсов

Следует отметить, что в TS 38.211 ресурсный блок определяется только для частотной области. Для временной области задаётся только минимальная длина блока ресурсов, которая составляет один символ OFDM. Такой подход обеспечивает гибкость планирования ресурсов во временной области. На рис.47 представлено распределение частотного ресурса для одного канала в сети 5G NR.

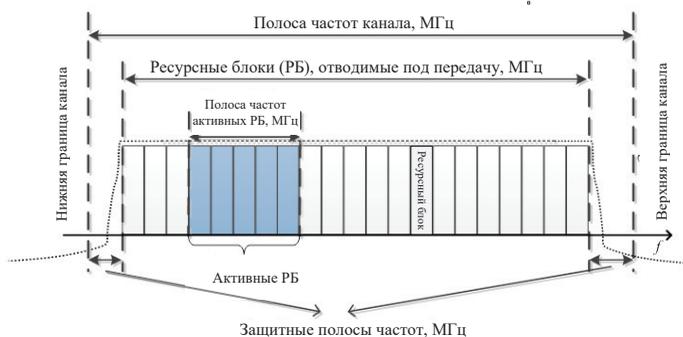


Рис. 47 Распределение частотного ресурса в канале NR

Данные о количестве ресурсных блоков в заданных полосах частот при разных расстояниях между поднесущими приведены в таблице 7.

Таблица 7. Количество ресурсных блоков для диапазонов частот FR1, FR2

FR1 (410 МГц – 7125 МГц)								
Δf , кГц	W , МГц							
	3	5	10	15	20	25	30	35
15	15	25	52	79	106	133	160	188
30	–	11	24	38	51	65	78	92
60	–	–	11	18	24	31	38	44
Δf , кГц	W , МГц							
	40	45	50	60	70	80	90	100
15	216	242	270	–	–	–	–	–
30	106	119	133	162	189	217	245	273
60	51	58	65	79	93	107	121	135
FR2-1 (24250 МГц – 52600 МГц)								
Δf , кГц	W , МГц							
	50	100	200	400				
60	66	132	264	–				
120	32	66	132	264				
FR2-2 (52600 МГц – 71000 МГц)								
Δf , кГц	W , МГц							
	100	400	800	1600	2000			
120	66	264	–	–	–			
480	–	66	124	248	–			
960	–	33	62	124	148			

Как видно из рис. 47, границы полосы частот W отводятся под защитные полосы, параметры которых приведены в таблице 8.

Таблица 8. Ширина защитной полосы для диапазонов частот FR1, FR2, W_{guard} , кГц

FR1 (410 МГц – 7125 МГц)								
Δf , кГц	W , МГц							
	3	5	10	15	20	25	30	35
15	142.5	242.5	312.5	382.5	452.5	522.5	592.5	572.5
30	–	505	665	645	805	785	945	925
60	–	–	1010	990	1330	1310	1290	1630
Δf , кГц	W , МГц							
	40	45	50	60	70	80	90	100
15	552.5	712.5	692.5	–	–	–	–	–
30	905	1065	1045	825	965	925	885	845
60	1610	1590	1570	1530	1490	1450	1410	1370
FR2-1 (24250 МГц – 52600 МГц)								
Δf , кГц	W , МГц							
	50	100	200	400				
60	1210	2450	4930	–				
120	1900	2420	4900	9860				

Продолжение таблицы 8.

FR2-2 (52600 МГц – 71000 МГц)					
Δf , кГц	W , МГц				
	100	400	800	1600	2000
120	2420	9860	–	–	–
480	–	9680	42640	85520	–
960	–	9440	42400	85280	147040

Внедрение нумерологии в сети 5G NR обеспечивает оптимальное распределение сетевых ресурсов, предоставляя пользователям более быстрое и бесперебойное соединение. В сетях связи 5G предусмотрены три основные группы телекоммуникационных услуг:

- усовершенствованная подвижная широкополосная связь (eMBB– Enhanced Mobile BroadBand);
- сверхнадежная связь с малыми задержками (URLLC– Ultra Reliable Low Latency Communications);
- массовые межмашинные коммуникации (mMTC– Massive Machine Type Communications).

Данные группы услуг значительно отличаются требованиями, предъявляемым к характеристикам сети. Некоторые из данных требований приведены в таблице 9.

Поэтому в сетях 5G отошли от жесткой структуры цикла, позволив циклам гибко перестраиваться в соответствии с потребностями каждого приложения, что значительно повышает эффективность сети в целом.

Таблица 9. Требования к характеристикам сети при организации услуг связи

Наименование	eMBB	URLLC	MMTC
Пиковая скорость передачи данных	высокие	низкие	низкие
Пользовательская скорость передачи данных	высокие	низкие	низкие
Спектральная эффективность	высокие	низкие	низкие
Поддерживаемая скорость передвижения	высокие	высокие	низкие
Задержка	средние	высокие	низкие
Плотность устройств	средние	низкие	высокие
Энергетическая эффективность сети	высокие	низкие	средние

Сеть определяет и удовлетворяет различные потребности в подключении, обеспечивая высокоскоростное соединение для потоковой передачи видео, одновременно обеспечивая низкую задержку, необходимую для приложений, предназначенных для беспилотных транспортных средств.

Сеть 5G может динамически регулировать длительность каждого временного интервала в зависимости от потребностей сервиса. Для приложений, работающих с большими объемами данных, сеть выделяет слоты большей длительности, чем для приложений, требующих оперативного реагирования.

Также следует отметить, что сети 5G значительно расширили используемые диапазоны частот по сравнению с сетями предыдущих поколений (таблица 10).

Таблица 10. Рекомендуемые диапазоны частот для реализации услуг системы 5G

Услуга	Высокоуровневые требования	Возможные вопросы, связанные со спектром	Оптимальные диапазоны частот
eMBB	Сверхвысокоскоростные радиоканалы	Сверхширокие полосы несущих	24 ГГц и выше
	Высокоскоростные радиоканалы	Широкие полосы несущих	3,4-3,8 ГГц, 4,4-4,99 ГГц
	Устойчивость к большому доплеровскому сдвигу	Зависит от требований к ёмкости	Все диапазоны
	Сверхмалая временная задержка	Приложения малого радиуса действия	3,4-3,8 ГГц, 4,4-4,99 ГГц, 24 ГГц и выше
	Малая временная задержка	Приложения среднего радиуса действия	3,4-3,8 ГГц, 4,4-4,99 ГГц
	Сверхвысоконадёжные радиоканалы	Существенное влияние атмосферных осадков на надёжность радиоканалов мм-диапазона	Ниже 1 ГГц, 3,4-3,8 ГГц, 4,4-4,99 ГГц
URLLC	Малый радиус действия	Использование радиочастот мм-диапазона	24 ГГц и выше
	Средний радиус действия	-	3,4-3,8 ГГц, 4,4-4,99 ГГц
	Преодоление препятствий радиосигналом на своём пути	-	Ниже 1 ГГц
mMTC	Работа в загромождённой среде	Доминирование дифракции в низких и отражений в высоких частотных диапазонах	Все диапазоны
	Работа около быстро движущихся препятствий	Каналы с частотно избирательным замиранием	Предпочтительные частоты ниже 4 ГГц
	Ячеистые сети	Высокоскоростной распределенный беспроводной backhaul, работающий в или вне полосы	Выше 24 ГГц

Работа в диапазонах частот ниже 7 ГГц (FR1) и выше 24 ГГц (FR2) не позволяет использовать одинаковые расстояния между поднесущими, не снижая при этом эффективность систем связи.

Так, ранее было показано, что условие поддержания ортогональности между поднесущими в системах OFDM имеет решающее значение. В процессе передачи сигналов будет наблюдаться дрейф каждой поднесущей, который возрастает по мере увеличения скорости перемещения пользовательского оборудования. Так, на частоте 48 ГГц и перемещении пользовательского устройства со скоростью 90 км/ч сдвиг по частоте составит 4002.7 Гц. При движении пользовательского устройства со скоростью 150 км/ч сдвиг по частоте составит уже 6671.2 Гц. При таких условиях сдвига частоты необходимо использовать более широкий разнос поднесущих частот. Переход в диапазон миллиметровых длин волн открывает широкие возможности по использованию многоэлементных антенных решёток, позволяющих формировать узкие диаграммы направленности, фокусируя энергию излучаемого сигнала в нужной точке пространства. Поскольку для реализации формирования диаграммы направленности управление фазой сигнала имеет решающее значение, то малая величина разноса между поднесущими вызывает сложности в управлении фазой сигнала. Рост частоты приводит к росту фазового шума. Реализация механизма подавления фазового шума более просто реализуется при широком расстоянии между поднесущими.

Приложение 1

Таблица П1.1

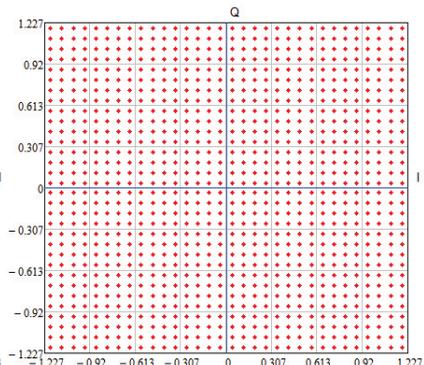
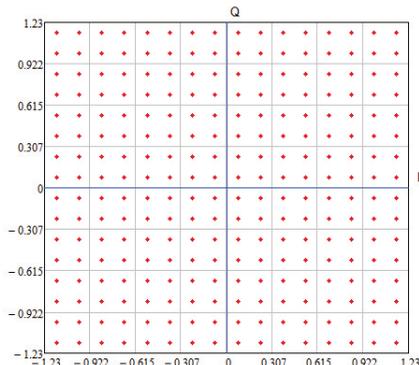
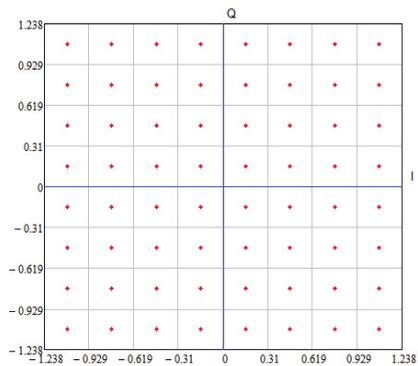
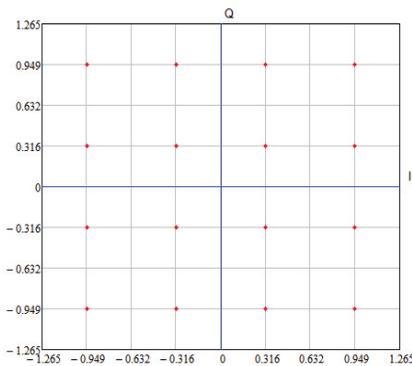
Соответствие амплитуд синфазной составляющей сигналов чётным битам входной последовательности (без учёта масштабирующего коэффициента)

$b(10i)$	$b(10i+2)$	$b(10i+4)$	$b(10i+6)$	$b(10i+8)$	1024QAM	256QAM	64QAM	16QAM	QPSK
	$b(8i)$	$b(8i+2)$	$b(8i+4)$	$b(8i+6)$					
		$b(6i)$	$b(6i+2)$	$b(6i+4)$					
			$b(4i)$	$b(4i+2)$					
				$b(2i)$					
0	0	0	0	0	11	5	3	1	1
0	0	0	0	1	9	7	1	3	-1
0	0	0	1	0	13	3	5	-1	
0	0	0	1	1	15	1	7	-3	
0	0	1	0	0	5	11	-3		
0	0	1	0	1	7	9	-1		
0	0	1	1	0	3	13	-5		
0	0	1	1	1	1	15	-7		
0	1	0	0	0	21	-5			
0	1	0	0	1	23	-7			
0	1	0	1	0	19	-3			
0	1	0	1	1	17	-1			
0	1	1	0	0	27	-11			
0	1	1	0	1	25	-9			
0	1	1	1	0	29	-13			
0	1	1	1	1	31	-15			
1	0	0	0	0	-11				
1	0	0	0	1	-9				
1	0	0	1	0	-13				
1	0	0	1	1	-15				
1	0	1	0	0	-5				
1	0	1	0	1	-7				
1	0	1	1	0	-3				
1	0	1	1	1	-1				
1	1	0	0	0	-21				
1	1	0	0	1	-23				
1	1	0	1	0	-19				
1	1	0	1	1	-17				
1	1	1	0	0	-27				
1	1	1	0	1	-25				
1	1	1	1	0	-29				
1	1	1	1	1	-31				

Таблица П1.2

Соответствие амплитуд синфазной составляющей сигналов чётным битам входной последовательности

параметр	значение							
Определение полярности синфазной составляющей сигнала $d(i)$								
$b(10i)$	0				1			
$\text{Re}(d(i))$	полярность +				полярность -			
Определение модуля амплитуды синфазной составляющей сигнала $d(i)$								
$b(10i+2)$	0				1			
$\text{Re}(d(i))$	1...15				17...31			
$b(10i+4)$	1		0		0		1	
$\text{Re}(d(i))$	1...7		9...15		17...23		25...31	
$b(10i+6)$	1	0	0	1	1	0	0	1
$\text{Re}(d(i))$	1...3	5...7	9...11	13...15	17...19	21...23	25...27	29...31
$b(10i+8)$	1	0	0	1	1	0	0	1
$\text{Re}(d(i))$	1	3	5	7	9	11	13	15
	17	19	21	23	25	27	29	31

Рис.П1.1 Пространственные диаграммы $MQAM$ а) $M=16$; б) $M=64$; в) $M=256$; г) $M=1024$;

Приложение 2

Листинг 1 – Код программы вывода графиков сигнального созвездия MQAM и ПРВ сигнала MQAM при воздействии АБГШ (рисунки 8.а,8.б)

```
clc
clear all;
close all;
N=1e6;
M=16; %16,64,256
t=-50:50;
symb= gammod(floor(rand(1,N)*M),M);
sgnl_rx = symb + (randn(1,N) +j*randn(1,N))*0.3;% менять значение дисперсии АБГШ с 0.3 на большее или меньшее
x = real(sgnl_rx);
y = imag(sgnl_rx);
h = histogram2(x, y, 900,'FaceColor','flat', 'FaceLighting', 'flat')
xlabel('I/k$$ M$$','Interpreter','Latex')
ylabel('Q/k$$ M$$','Interpreter','Latex')
zlabel('P(Re($$\hat{\dot{d}}$$),Im($$\hat{\dot{d}}$$))','Interpreter','Latex')
hold on;
figure
plot(x(1:20000),y(1:20000),'.','Color',[0 0 0]); hold on;
plot(real(symb(1:1000)),imag(symb(1:1000)),'d','MarkerSize',3,'Color',...
... [0.9 0 0],'MarkerFaceColor',[0.839 0 0]); hold on;
plot(t,0*t,'-','LineWidth',1,'Color',[0.2 0 1]); hold on;
plot(0*t,t,'-','LineWidth',1,'Color',[0.2 0 1]); hold on;
grid on; xlabel('I');ylabel('Q','Rotation',0)
%% менять границы графика в зависимости от M (4,8,14)
xlim([-4 4]); ylim([-4 4]);
grid on;
```

Листинг 2 – Код программы вывода глазковой диаграммы сигнала MQAM при воздействии АБГШ (рисунок 11)

```
clc;
clear all;
close all;
N=1e3; % размер блока в количестве символов
k2=8
sps=8*k2; % количество выборок на символ
fltr_rolloff=0.3;
fltr=rcosine(1,sps,'normal',fltr_rolloff); % оконная функция приподнятого косинуса
M=4; % порядок модуляции
symb=gammod(floor(rand(1,N)*M),M); % QAM модуляция
u_frame=upsample(symb, sps); % передискретизация модулированных символов
sgnl_tx = conv(fltr,u_frame); % формирование огибающей сигнала
N1=8048*k2
SNR=30; % значение SNR в дБ
noise=(randn(1,N)+sqrt(-1)*randn(1,N))/sqrt(2);
noise1=(randn(1,N1)+sqrt(-1)*randn(1,N1))/sqrt(2);
noise_var = 10^(-SNR/10) ; % дисперсия АБГШ
sgnl_rx1=sgnl_tx+noise1*sqrt(noise_var);% сигнал+шум

x=vec2mat(sgnl_rx1(100:end-100),sps*2);
plot(real(x(1:end-1,:).'))
title('глазковая диаграмма')
```

Листинг 3 – Код программы вывода графиков зависимости вероятности символической ошибки от соотношения сигнал/шум для разных видов модуляции (рисунок 13)

```

clc;
close all;
EbN0dB=-4:1:44;
EbN0lin=10.^(EbN0dB/10);
colors={'r-*','b-o','k-o','r-s','b-s','k-s', ...
'k-p','b:s','m:d','g:p'};
index=1;

%BPSK
BPSK = 0.5*erfc(sqrt(EbN0lin));
plotHandle=plot(EbN0dB,log10(BPSK),char(colors(index)));
set(plotHandle,'LineWidth',0.5);
hold on;
index=index+1;

%M-PSK
m=2;
M=2.^m;
for i=M,
    k=log2(i);
    serErr = 2*(1-1/sqrt(M))*erfc(sqrt((EbN0lin)))- ...
    (1-2/sqrt(M) + 1/M)*(erfc(sqrt(EbN0lin)).^2);
    plotHandle=plot(EbN0dB,log10(serErr),char(colors(index)));
    set(plotHandle,'LineWidth',0.5);
    index=index+1;
end

%M-QAM
m=4:2:10;
M=2.^m;
Ml=2.^m-1
for i=M,
    k=log2(i);
    serErr=2*(1-1/sqrt(i))*(erfc(sqrt(3*EbN0lin/(2*(i-1)))))- ...
    0.5*erfc(sqrt(3*EbN0lin/(2*(i-1)))).^2);
    plotHandle=plot(EbN0dB,log10(serErr),char(colors(index)));
    set(plotHandle,'LineWidth',0.5);
    index=index+1;
end
legend('BPSK','QPSK','16-QAM','64-QAM','256-QAM','1024-QAM');
axis([-3 42 -8 0]);
set(gca,'XTick',-3:3:42);
ylabel('Вероятность символической ошибки SER');
xlabel('10lg(\gamma), dB');
grid on;

```

Листинг 4 – Код программы вывода графиков зависимости вероятности битовой ошибки от соотношения сигнал/шум для разных видов модуляции (рисунок 14)

```

clc;
close all;
EbN0dB=-4:1:30;
EbN0lin=10.^(EbN0dB/10);
colors={'r-*','b-o','k-o','r-s','b-s','k-s', ...
'k-p','b:s','m:d','g:p'};
index=1;

%BPSK
BPSK = 0.5*erfc(sqrt(EbN0lin));
plotHandle=plot(EbN0dB,log10(BPSK),char(colors(index)));
set(plotHandle,'LineWidth',0.5);
hold on;

index=index+1;

%M-PSK
m=2;
M=2.^m;

for i=M,
    k=log2(i);
    berErr = 1/k*erfc(sqrt(EbN0lin*k)*sin(pi/i));
    plotHandle=plot(EbN0dB,log10(berErr),char(colors(index)));
    set(plotHandle,'LineWidth',0.5);
    index=index+1;
end

%M-QAM
m=4:2:10;
M=2.^m;

for i=M,
    k=log2(i);
    berErr = 2/k*(1-1/sqrt(i))*erfc(sqrt(3*EbN0lin*k/(2*(i-1))));
    plotHandle=plot(EbN0dB,log10(berErr),char(colors(index)));
    set(plotHandle,'LineWidth',0.5);
    index=index+1;
end

legend('BPSK','QPSK','16-QAM','64-QAM','256-QAM','1024-QAM');
axis([-4 34 -8 0]);
set(gca,'XTick',-4:2:30);
ylabel('Вероятность битовой ошибки BER');
xlabel('10lg(\gamma), dB');
grid on;

```

Листинг 5 – Код программы расчета значений и вывода графиков зависимости спектральной эффективности от соотношения сигнал/шум для разных видов модуляции (рисунк 16)

```

clc;
clear all;
close all;
snri=(-5:1:40);
colors={'r-*','b-o','k-o','r-s','b-s','k-s', ...
'k-p','b:s','m:d','g:p'};
index2=1;
qam=[2,4,16,64,256]%,1024];
capacity = zeros(length(qam),length(snri));

for qami=1:length(qam)
    for index=1:length(snri)
        capacity(qami,index) = QAMCapacity(snri(index),1,qam(qami));
    end
end
figure;
hold
for qami=1:length(qam)
    plotHandle= plot(snri,capacity(qami,:),char(colors(index2)));
    set(plotHandle,'LineWidth',0.5);
    index2=index2+1;
end

GaussianC = zeros(1,length(snri));
for index=1:length(snri)
    GaussianC(index) = log2(1+ 10^(snri(index)/10));
end

index2=index2+1;
plotHandle= plot(snri,GaussianC,char(colors(index2)));
set(plotHandle,'LineWidth',0.5);
index2=index2+1;
set(gca,'FontSize', 12, 'FontName', 'Times New Roman');
grid on;
box on;
legend('BPSK','QPSK','16-QAM','64-QAM','256-QAM', ...
'Предел Шеннона','1024-QAM');
xlabel('10lg(\gamma),dB','FontSize', 14, 'FontName', ...
'Times New Roman');
ylabel('Спектральная эффективность (бит/с/Гц)', ...
'FontSize',14,'FontName', 'Times New Roman');

```

Листинг 6 – Код программы вывода глазковой и векторной диаграмм сигнала MQAM при воздействии линейных искажений (рисунки 17,18)

```

clc;
close all;
N=300; % Количество отсчетов
sps=32;
fill1=rcosine(1,sps,'normal',1);
fill2=rcosine(1,sps,'sqrt',0.3);
for i=1:16
    h(i)=0.7*(0.07-i*0.014)/(i+1)^2; %импульсная хар-ка канала
end
M=16;
symb= qammod(floor(rand(1,N)*M),M);
u_frame=upsample(symb, sps);
sgnl_tx1 = conv(fill1,u_frame);
sgnl_tx2 = conv(fill2,u_frame);
sgnl_rx1 = conv(h,sgnl_tx1);
figure
x=vec2mat(sgnl_rx1(10:end-10),sps*4);
plot(real(x(1:35,:).'))
grid on;
figure
plot(real(x(1:end-1,:).'),imag(x(1:end-1,:).'));

xlabel('Re  $\hat{\dot{d}}$ ','$','FontName','Times New Roman', ... 'Inter-
preter','latex');
ylabel('Im  $\hat{\dot{d}}$ ','$','FontName','Times New Roman', ... 'In-
terpreter','latex');
grid on;

x=vec2mat(sgnl_tx1(100:end-100),sps*4);
figure
plot(real(x(1:end-1,:).'))
grid on;
x=vec2mat(sgnl_tx1(100:end-100),sps*4);
figure
plot(real(x(1:end-1,:).'),imag(x(1:end-1,:).'));
xlabel('Re  $\dot{d}$ ','$','FontName','Times New Roman','Interpret-
er','latex');
ylabel('Im  $\dot{d}$ ','$','FontName','Times New Roman','Interpret-
er','latex');
grid on;

```

Листинг 7– Код программы расчета параметров сигналов OFDM

```

clc;
clear all;
close all;
N=1;
T=4096;
T0=32*T;
N=128; M=16;
alp=qammod(0:M-1,M);
for m=1:M
    alp(m)=3+3i;
end;
symb= qammod(floor(rand(1,N)*M),M);
fc=0*256+0.5*128;
for t=1:T
    s(t)=0;
    for n=1:N
        s(t)=s(t)+real(symb(n))*cos(2*pi*(t-1)*n/T)- ...
        imag(symb(n))*sin(2*pi*(t-1)*n/T);
        sc1(t)=real(symb(12))*cos(2*pi*(t-1)*11/T)- ...
        imag(symb(12))*sin(2*pi*(t-1)*11/T);
        sc2(t)=real(symb(32))*cos(2*pi*(t-1)*12/T)- ...
        imag(symb(32))*sin(2*pi*(t-1)*12/T);
        sc3(t)=real(symb(52))*cos(2*pi*(t-1)*13/T)- ...
        imag(symb(52))*sin(2*pi*(t-1)*13/T);
    end;
end;

for t=1:T0
    if t<=T
        z0(t)=s(t)*cos(2*pi*fc*t/(T));
        sc10(t)=sc1(t)*cos(2*pi*fc*t/T);
        sc20(t)=sc2(t)*cos(2*pi*fc*t/T);
        sc30(t)=sc3(t)*cos(2*pi*fc*t/T);
    else
        z0(t)=0;
    end;
end;

L=1*T/16;
for t=1:T+L
    if t<=L
        x(t)=s(T-L+t);
        sc11(t)=sc10(T-L+t);
        sc21(t)=sc20(T-L+t);
        sc31(t)=sc30(T-L+t);
    else
        x(t)=s(t-L);
        sc11(t)=sc10(t-L);
        sc21(t)=sc20(t-L);
        sc31(t)=sc30(t-L);
    end;
end;
y(t)=N^-0.5*x(t)*cos(2*pi*fc*t/T);

```

```

end;
for t=1:T0
    if t<=T+L
        z(t)=y(t);
        x1(t)=sc11(t);
        x2(t)=sc21(t);
        x3(t)=sc31(t);
    else
        z(t)=0; x1(t)=0; x2(t)=0; x3(t)=0;
    end;
end;

%% Импульсная характеристика фильтра приподнятого косинуса
t=1:4*(T+L);
beta=0.3;
h=sinc((t-2*(T+L))/(T+L)).*cos(beta*pi*(t-2*(T+L))/(T+L)).*(1-
(2*beta*(t-2*(T+L))/(T+L)).^2).^-1;

t=1:17/2*N;
dt1=length(h)*2/(17*N);
hd(t*dt1)=h(t*dt1);

k=16;          %взятие каждого 16-го отсчета (k=16,32,64)
t=1:17/(2*k)*N;
dt2=17/(2*k)*N;
rrc=sinc(4*(t-dt2/2-0.5)/dt2).*cos(4*beta*pi*(t-dt2/2-0.5)/dt2) ...
.*(1-(8*beta*(t-dt2/2-0.5)/dt2).^2).^-1;
figure; stem(4*(t-dt2/2-1)/dt2,rrc(t),'Color',[0 0.4431 0.7373]);
%xlim([0 1]);
xf=conv(x,rrc);

%% Вычисление сигналов
S=T0^-0.5*fft(z);
S0=T0^-0.5*fft(z0); SC1=T0^-0.5*fft(x1);
SC2=T0^-0.5*fft(x2); SC3=T0^-0.5*fft(x3);
XF=T0^-0.5*fft(xf); LFS=T0^-0.5*fft(x);

XF=[XF(floor(length(XF)/2)+1:length(XF)),
XF(1:floor(length(XF)/2))];
LFS=[LFS(floor(length(LFS)/2)+1:length(LFS)),
LFS(1:floor(length(LFS)/2))];
figure

%% рисунок 27
t=1:length(LFS);
plot((t-length(LFS)/2)/(2*N),20*log10(abs(LFS)/max(abs(LFS))), ...
'Color' [0.8980 0 0]);
hold on;
t=1:length(XF);
plot((t-length(XF)/2)/(2*N),20*log10(abs(XF)/max(abs(XF))), ...
'Color', [0 0.4431 0.7373]);
grid on;
xlim([-4 4]); ylim([-100 5]);
xlabel('f/W'); ylabel('|S(f)|,дBr');
legend('без применения ЦФ','с применением ЦФ');
figure;

```

```

xf=xf/max(xf);
t=1:length(xf);
Pf(t)=xf(t).^2;
PAPRf=10*log10(max(Pf)^2/mean(Pf)^2);
plot(t/length(xf),xf,'Color',[0 0.4431 0.7373]);
grid on;
xlabel('t/T'); ylabel('x(t)');
legend('с применением ЦФ');

%% последовательность отсчетов символа OFDM на выходе блока ОБПФ
t=1:2*N;
dt=T/(2*N);
sd(t*32*4)=s(t*dt)/max(abs(s));
sd1(t)=s(t*dt)/max(abs(s));
SD=fft(sd1);
t=1:4*T;

%% рисунок 26.а
figure;
plot(t/(4*T),sd(t),'Color',[0.8980 0 0]);
xlim([0 1]);
grid on;
xlabel('${n/2N}$','FontSize',14,'FontName','Times New Roman', ...
'Interpreter','latex');
ylabel('Re(${\dot{s}^{i_{n}}})$','FontSize',14,'FontName', ...
'Times New Roman','Interpreter','latex');

% последовательность отсчетов символа OFDM на выходе Парр/Посл Пр.
с добавленным ЦП
scp=[sd(15/4*T:4*T) sd(1:4*T)];
%cp=[sd(15/4*T:4*T) 0*sd(1:4*T)];
cp=sd(15/4*T:4*T);
t=1:length(scp);

%% рисунок 26.б
figure
plot(t/length(scp),scp(t),'Color',[0.8980 0 0]);
xlim([0 1]);
grid on;
xlabel('${n/N_0}$','FontSize',14,'FontName','Times New Roman', ...
'Interpreter','latex');
ylabel('Re(${\dot{s}^{i_{N0,n}}})$','FontSize',14,'FontName', ...
'Times New Roman','Interpreter','latex');
hold on;
t=1:length(cp);
plot(t/length(scp),scp(t),'Color',[0 0.4431 0.7373]);

% последовательность отсчетов символа OFDM с ЦП на выходе ЦФ (RRC)
sfilt=conv(scp,rrc);
sfilt=sfilt/max(abs(sfilt));
DF=fft(sfilt);
t=1:length(sfilt);

%% рисунок 26.в
figure
plot(t/length(sfilt),sfilt(t),'Color',[0.8980 0 0]);

```

```

grid on;
xlabel('$\{n/(N_{0}+L_{\phi})-1\}$','FontSize',14,'FontName', ...
'Times New Roman','Interpreter','latex');
ylabel('Re($\{\dot{s}_{i_{\phi,n}}\}$)','FontSize',14,'FontName', ...
'Times New Roman','Interpreter','latex');

%низкочастотный эквивалент символа OFDM
%% рисунок 26.г
figure
t=1:17*T/16;
x=x/max(abs(x));
plot(t/(17*T/16),x(t),'Color',[0.8980 0 0]); xlim([0 1]);
grid on;
xlabel('$\{t/(T+T_{3})\}$','FontSize',14,'FontName', ...
'Times New Roman','Interpreter','latex');
ylabel('Re($\{\dot{s}_{N0}(t)\}$)','FontSize',14,'FontName', ...
'Times New Roman','Interpreter','latex');

%символ OFDM
%% рисунок 36
figure
t=1:17*T/16;
P(t)=0.1*z(t).^2; %Пик-фактор
Pmean=mean(abs(P));
Pmax=max(abs(P));
PAPR=10*log10(Pmax^2/Pmean^2);
z=z/max(abs(z));
plot(t/(17*T/16),z(t),'Color',[0.8980 0 0]);
xlim([0 1]);
grid on;
xlabel('$\{t/(T+T_{3})\}$','FontSize',14,'FontName', ...
'Times New Roman','Interpreter','latex');
ylabel('Re($\{\dot{s}_{f0}(t)\}$)','FontSize',14,'FontName', ...
'Times New Roman','Interpreter','latex');

%Пик-фактор
%% рисунок 36
figure;
plot(t/(17*T/16),P(t),'Color',[0.8980 0 0]);
xlim([0 1]);
grid on;
xlabel('$\{t/(T+T_{3})\}$','FontSize',14,'FontName', ...
'Times New Roman', ...'Interpreter','latex');
ylabel('$\{P(t)\}$','FontSize',14,'FontName', ...
'Times New Roman','Interpreter','latex');

%% Расчёт ПРВ для мощности сигнала
q=1:101;
Pq=(q-1)*0.05;
for q=1:100
    %Pq(q)=(q-1)*0.05;
    count(q)=0;
    for t=1:length(P)
        if P(t)>=Pq(q) & P(t)<Pq(q+1)
            count(q)=count(q)+1;
        else

```

```

        count(q)=count(q);
    end;
end;
count=count/length(P);
figure;
q=1:100;
plot((q-1)*0.05,count(q),'Color',[0.8980 0 0]);
xlim([0 5]);
grid on;
xlabel('$P$', 'FontSize',14,'FontName','Times New Roman', ... 'In-
terpreter','latex');
ylabel('$p(P)$', 'FontSize',14,'FontName','Times New Roman', ...
'Interpreter','latex');

%% Расчёт ПРВ для амплитуд сигнала
q=1:202;
sq=-1+(q-1)*0.01;
for q=1:201
    count(q)=0;
    for t=1:length(P)
        if z(t)>=sq(q) & z(t)<sq(q+1)
            count(q)=count(q)+1;
        else
            count(q)=count(q);
        end;
    end;
end;
count=count/length(P);
figure;
q=1:201;
plot(-1+(q-1)*0.01,count(q),'Color',[0.8980 0 0]);
xlim([-1 1]);
grid on;
xlabel('$P$', 'FontSize',14,'FontName','Times New Roman', ... 'In-
terpreter','latex');
ylabel('$p(\dot{s})$', 'FontSize',14,'FontName','Times New Roman',
... 'Interpreter','latex');

%% Расчёт ПРВ для амплитуд сигнала
q=1:202;
sfq=-1+(q-1)*0.01;
for q=1:201
    %Pq(q)=(q-1)*0.05;
    count(q)=0;
    for t=1:length(xf)
        if xf(t)>=sq(q) & xf(t)<sfq(q+1)
            count(q)=count(q)+1;
        else
            count(q)=count(q);
        end;
    end;
end;
count=count/length(P);

figure;

```

```

q=1:201;
plot(-1+(q-1)*0.01,count(q),'Color',[0.8980 0 0]);
xlim([-1 1]);
grid on;
xlabel('$P$', 'FontSize',14,'FontName','Times New Roman', ... 'In-
terpreter','latex');
ylabel('$p(\dot{s})$', 'FontSize',14,'FontName','Times New Roman',
... 'Interpreter','latex');

%спектр символа OFDM
%% рисунок 29
figure
t=1:T0;
plot1 = plot(t,20*log10(abs(S)/max(abs(S))),t,20*log10(abs(SC1)/
... max(abs(SC1))),t,20*log10(abs(SC2)/max(abs(SC2))),t, ...
20*log10(abs(SC3)/max(abs(SC3))));
set(plot1(1),'DisplayName','OFDM','Color',[0.95 0 0]);
set(plot1(4),'DisplayName','SubCarrier 11','Color', ...
[0 0.447 0.741]);
set(plot1(3),'DisplayName','SubCarrier 12','Color',[0 0.498 0]);
set(plot1(2),'DisplayName','SubCarrier 13','MarkerSize',1, ...
'LineWidth',0.1,'Color',[0.31 0.31 0.31]);
ylim([-45 0]);
legend('OFDM','SubCarrier 11','SubCarrier 12','SubCarrier 13');
grid on;

%% формирование амплитудных характеристик усилителей мощности
A=0:0.001:2;
G1=[A(1:1001) 0*A(1002:length(A))+1];
G2=A-0.148*A.^3;
G2=[G2(1:1501) 0*G2(1502:length(A))+1];

%% рисунок 38
figure
plot(A,10*log10(G1),'Color',[0.95 0 0]);
hold on;
plot(A,10*log10(G2),'Color',[0 0.447 0.741]);
hold on;
plot(A,10*log10(A),'Color',[0 0 0]);
grid on;
xlabel('$A$', 'FontSize',14,'FontName','Times New Roman', ... 'In-
terpreter','latex');
ylabel('$G(A)$', 'FontSize',14,'FontName','Times New Roman', ...
'Interpreter','latex');
legend('G_1(A)','G_2(A)','идеальный G(A)');

%% прохождение сигнала через усилители мощности 1 и 2
t=1:length(x);
Sout1=G1(floor(abs(x)*1800)+1).*sign(x);
Sout2=G2(floor(abs(x)*1800)+1).*sign(x);

%% рисунок 40
figure
plot(t/length(x),abs(x)*1.8,'Color',[0.95 0 0]);
hold on;
plot(t/length(x),abs(Sout1),'Color',[0 0 0.95]);

```

```

hold on;
plot(t/length(x),abs(Sout2),'Color',[0 0 0]);
grid on;
xlabel('t','FontSize',14,'FontName','Times New Roman', ... 'Inter-
preter','latex');
ylabel('$\dot{s}(t)$','FontSize',14,'FontName','Times New Roman',
... 'Interpreter','latex');
legend('входной сигнал','сигнал на выходе УМ-1', ...
'сигнал на выходе УМ-2');
xlim([0 1/4]);

SpSout1=length(x)^-0.5*fft(Sout1);
SpSout2=length(x)^-0.5*fft(Sout2);
SpSin=length(x)^-0.5*fft(x);
SpSout1=[SpSout1(length(x)/2+1:length(x)) SpSout1(1:length(x)/2)];
SpSout2=[SpSout2(length(x)/2+1:length(x)) SpSout2(1:length(x)/2)];
SpSin=[SpSin(length(x)/2+1:length(x)) SpSin(1:length(x)/2)];

%% рисунок 41
figure
plot(t/length(x)-1/2,10*log10(abs(SpSout1)),'Color',[0.95 0 0]);
hold on;
plot(t/length(x)-1/2,10*log10(abs(SpSout2)),'Color',[0 0 0.95]);
hold on;
plot(t/length(x)-1/2,10*log10(abs(SpSin)),'Color',[0 0 0]);
grid on;
xlim([-0.2 0.2]);
xlabel('$f/W$','FontSize',14,'FontName','Times New Roman', ... 'In-
terpreter','latex');
ylabel('$|\cdot S(f)|, dB$','FontName','Times New Roman','Font-
Size',14,'Interpreter','latex');

legend('входной сигнал','сигнал на выходе УМ-1', ...
'сигнал на выходе УМ-2');

```

Листинг 7– Код программы расчета значений и вывода графика коэффициента автокорреляции сигнала при длине ЦП (рисунок 31)

```

clc
clear all;
close all;
N=1024*4;
I=10;
L=2*N/16; %длина циклического префикса
Alphabet=[-3 -1 1 3]; %[-7 -5 -3 -1 1 3 5 7];

for i=1:10
    for n=1:N
        Xc(n)=Alphabet(floor(rand()*length(Alphabet))+1);
        Xs(n)=Alphabet(floor(rand()*length(Alphabet))+1);
        X(i,n)=Xc(n)+1i*Xs(n);
    end;
    X(i,1)=0+0i; X(i,N+1)=0;
end;

for i=1:I
    for n=2:N
        % X(2*N-n+1)=Xc(n+1)-1i*Xs(n+1);
        X(i,N+n)=real(X(i,N-n+2))-1i*imag(X(i,N-n+2));
    end;
end;

for i=1:I
    xfft=N^-0.5*ifft(X(i,:));
    x(i,:)=xfft;
end;

xcp=[x(:,2*N-L+1:2*N) x];
s=reshape(xcp',1,[]);
shift=460;
dshift=60;
s1=[s(shift:shift+400) s]; %добавление произвольного фрагмента
сигнала как фрагмента от предыдущего символа (смещение начала
наблюдаемого сигнала)

for t=1:length(s1)
    if mod(t-shift-1,length(xcp))==0
        begX(t-dshift)=1;
    else
        begX(t)=0;
    end;
end;
w=wgn(length(s1),1,-60);

%прохождение через канал
for m=1:48
    h(m)=(2+m.^1.03)^-1;
end;
y2=conv(s1,h);

```

```

y=y2(1:length(s1))+w';

%%Корреляция по ЦП
for t=1:I*(length(xcp))/2;
    R(t)=corr2(s1(t:t+L),s1(t+2*N:t+2*N+L));
    Rw(t)=corr2(y(t:t+L),y(t+2*N:t+2*N+L));
end;

figure
t=1:length(R);
plot(t,R,'Color',[0.831 0 0]);
hold on;
stem(t,begX(1:length(R)), 'o','MarkerSize',0.5);
xlim([1 length(R)]);
hold on;
plot(t,Rw,'Color',[0.31 0.31 0.31]);
xlabel('n','FontName','Times New Roman','Interpreter','latex');
ylabel('коэффициент корреляции','FontName','Times New Roman');
grid on;
legend('сигнал на входе канала','начало символа OFDM', ...
'сигнал на выходе канала');

```

Листинг 8 – Код программы расчета значений и вывода графиков зависимости функции распределения PAPR и дополнительной функции распределения PAPR (рисунок 37)

```

clc
clear all; close all;
%% Расчет CCDF
Y0=15;
y0=0:0.2:Y0
n=5:13
N=2.^n

CCDF1=1-(1-exp(-y0)).^32;      CCDF2=1-(1-exp(-y0)).^64;
CCDF3=1-(1-exp(-y0)).^128;    CCDF4=1-(1-exp(-y0)).^256;
CCDF5=1-(1-exp(-y0)).^512;    CCDF6=1-(1-exp(-y0)).^1024;
CCDF7=1-(1-exp(-y0)).^2048;   CCDF8=1-(1-exp(-y0)).^4096;

%% Рисунок 37.a
figure
plot(y0,CCDF1,'r-s', 'linewidth', 0.5,'MarkerSize',3); hold on;
plot(y0,CCDF2,'b-s', 'linewidth', 0.5,'MarkerSize',3); hold on;
plot(y0,CCDF3,'k-s', 'linewidth', 0.5,'MarkerSize',3); hold on;
plot(y0,CCDF4,'r-o', 'linewidth', 0.5,'MarkerSize',4); hold on;
plot(y0,CCDF5,'b-o', 'linewidth', 0.5,'MarkerSize',4); hold on;
plot(y0,CCDF6,'k-o', 'linewidth', 0.5,'MarkerSize',4); hold on;
plot(y0,CCDF7,'r-', 'linewidth', 0.5); hold on;
plot(y0,CCDF8,'b-', 'linewidth', 0.5); hold on;
legend('N=32','N=64','N=128','N=256','N=512','N=1024', ...
'N=2048','N=4096');
grid on;
xlabel('PAPR,dB','FontName','Times New Roman','FontSize',14,'Inter-
preter','latex');
ylabel('CCDF(PAPR)','FontName','Times New Roman','Font-
Size',14,'Interpreter','latex');

%% Рисунок 37.б
figure
plot(y0,1-CCDF1,'r-s', 'linewidth', 0.5,'MarkerSize',3); hold on;
plot(y0,1-CCDF2,'b-s', 'linewidth', 0.5,'MarkerSize',3); hold on;
plot(y0,1-CCDF3,'k-s', 'linewidth', 0.5,'MarkerSize',3); hold on;
plot(y0,1-CCDF4,'r-o', 'linewidth', 0.5,'MarkerSize',4); hold on;
plot(y0,1-CCDF5,'b-o', 'linewidth', 0.5,'MarkerSize',4); hold on;
plot(y0,1-CCDF6,'k-o', 'linewidth', 0.5,'MarkerSize',4); hold on;
plot(y0,1-CCDF7,'r-', 'linewidth', 0.5); hold on;
plot(y0,1-CCDF8,'b-', 'linewidth', 0.5); hold on;
legend('N=32','N=64','N=128','N=256','N=512','N=1024', ...
'N=2048','N=4096');
grid on;
xlabel('PAPR,dB','FontName','Times New Roman','FontSize', ...
14,'Interpreter','latex');
ylabel('CDF(PAPR)','FontName','Times New Roman','FontSize', ...
14,'Interpreter','latex');

```

Листинг 9 – Код программы расчета значений и вывода графиков зависимости от частотного сдвига матрицы произведения матриц БПФ и ОБПФ

```

clc;
clear all;
close all;
T=5000;
N=128;
dt=3000*N;
Alphabet=[-3 -1 1 3];
n=1:N;

for t=1:T
    for n=2:N/2
        Xc(n)=Alphabet(floor(rand()*length(Alphabet))+1);
        Xs(n)=Alphabet(floor(rand()*length(Alphabet))+1);
        X(n,t)=Xc(n)+1i*Xs(n);
        X(N-n+2,t)=X(n,t)';
    end;
end;

t=1:T;
df=1+2*10^-5*t;
for n=1:N
    for m=1:N
        mn=2i*pi*n*m/N;
        W(m,n)=N^-0.5*exp(-mn);
        IW(m,n,t)=N^-0.5*exp(mn*df(t));
    end;
end;

for t=1:T
    WIW(:,:,t)=W*IW(:,:,t);
    %Y(:,t)=WIW(:,:,t)*X(:,t);
end;

n=1:N; m=1:N;
for n=1:N
    for m=1:N
        if m==n
            wiw(m,n)=WIW(m,n,2000);
        else
            wiw(m,n)=0;
        end;
    end;
end;

wiw2=WIW(:,:,2000)-wiw;
for t=1:T
    Y(:,t)=wiw2*X(:,t);
end;
logWIW=10*log10(abs(WIW));absWIW=abs(WIW); argWIW=angle(WIW);

```

```

%% Рисунок 43.a
figure
surf(argWIW(:,:,2000));
%surf(abs(L2)/1.6452);
xlim([1 N/2]); ylim([1 N/2]); %zlim([-60 5]);
xlabel('n', 'FontName', 'Times New Roman', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('m', 'FontName', 'Times New Roman', 'Interpreter', 'latex');
zlabel('$\arg(W\{\cdot\}^H)$', 'FontName', 'Times New Roman', ...
'FontSize', 13, 'Interpreter', 'latex');

%% Рисунок 43.б
figure
surf(absWIW(:,:,2000));
%surf(abs(L2)/1.6452);
xlim([1 N/2]); ylim([1 N/2]); zlim([-60 0]);
xlabel('n', 'FontName', 'Times New Roman', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('m', 'FontName', 'Times New Roman', 'Interpreter', 'latex');
zlabel('$|W\{\cdot\}^H|$, dB$', 'FontName', 'Times New Roman', ...
'FontSize', 13, 'Interpreter', 'latex');

%% Рисунок 42
t=1:T;
figure
plot(real(X(2,:)), imag(X(2,:)), 'd', 'MarkerSize', 6, 'Color', ...
[0.9 0 0], 'MarkerFaceColor', [0.839 0 0]);
hold on;
plot(real(Y(24,:)), imag(Y(24,:)), '.', 'MarkerSize', 5, 'LineWidth',
... 1.5, 'Color', [0 0 0]);
hold on;
%plot(real(Y(127,:)), imag(Y(127,:)), '.', 'MarkerSize', 1, 'Col-
or', [0.9 0 0], 'MarkerFaceColor', [0.9 0 0]); hold on;
plot(8*(t-T/2)/T, 0*t, '-', 'LineWidth', 1, 'Color', [0.2 0 1]);
hold on;
plot(0*t, 8*(t-T/2)/T, '-', 'LineWidth', 1, 'Color', [0.2 0 1]);
hold on;
grid on; xlabel('I'); ylabel('Q', 'Rotation', 0)
%xlim([-8 8]); ylim([-8 8]);
xlim([-4 4]); ylim([-4 4]);

```

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. 3GPP TS 38.211 V18.0.0 (2023-09) NR; Physical channels and modulation
2. 3GPP TS 36.211 V17.4.0 (2023-09) Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Physical channels and modulation
3. Lee E. A., Messerschmitt D. G. Digital communication. – Springer Science & Business Media, 2012
4. Burr A. Modulation and coding: for wireless communications. – Pearson Education, 2001.
5. Чечёта С.И. Введение в дискретную теорию информации и кодирования: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям "Криптография" и "Компьютерная безопасность" / С. И. Чечёта. – Москва : Изд-во МЦНМО, 2011.
6. Кудряшов Б. Д. Теория информации : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 230200 "Информационные системы" / Б. Д. Кудряшов. – Москва : Изд-во ООО «Лидер», 2009.
7. Игнатов В. А. Теория информации и передачи сигналов : [Учебник для вузов гражд. авиации] / В. А. Игнатов. – Москва : Сов. радио, 1979.
8. Прокис, Джон Дж. Цифровая связь / Прокис Дж.; Пер. с англ. под ред. Кловского Д.Д. - Москва : Радио и связь, 2000.
9. Коган И. М. Прикладная теория информации / И. М. Коган. - М. : Радио и связь, 1981.
10. Пенин П. И. Системы передачи цифровой информации. Учебное пособие для вузов / П. И. Пенин. - М., «Сов. радио», 1976
11. Голдсмит, А. Беспроводные коммуникации: [монография]: пер. с англ. / А. Голдсмит. – М.: Техносфера, 2011
12. Курицын С.А. Основы построения телекоммуникационных систем передачи: Учебное пособие / С. А. Курицын. – СПб.: Информационный центр «Выбор», 2004
13. Зяблов В.В. и др. Высокоскоростная передача сообщений в реальных каналах/В.В. Зяблов, Д.Л. Коробков, С.Л. Портной. — М.: Радио и связь, 1991
14. Нормы 19-21. Нормы на ширину полосы радиочастот и внеполосные излучения радиопередатчиков гражданского применения" (утв. и введены в действие Решением ГКРЧ при Минцифры России от 29.11.2021 N 21-60-01
15. Тисленко В.И. Статистические методы обработки сигналов в радиотехнических системах / В.И. Тисленко. – Томск : Томск. гос. ун-т систем упр.и радиоэлектроники, 2007
16. Уидроу, Б., Стирнз, С. Адаптивная обработка сигналов. Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1989.

17. Курицын С.А. Адаптивные методы обработки сигналов в цифровых и аналоговых системах передачи: Учебное пособие / С.А. Курицын. – СПб.: СПбГУТ, 2004
18. Кириллов В. И. Многоканальные системы передачи : учеб. пособие / В.И. Кириллов - 2-е изд. - М. : Новое знание, 2003.
19. Hanzo, L. Single- and Multi-carrier Quadrature Amplitude Modulation: Principles and Applications for Personal Communications, WLANs and Broadcasting: second edition / L. Hanzo. – N.Y.: John Wiley & Sons Ltd., 2000.
20. 3GPP TS 38.213 V18.2.0 (2024-03) Physical layer procedures for control
21. 3GPP TS 38.104 V18.5.0 (2024-03) Base Station (BS) radio transmission and reception
22. Приложение к приказу Минкомсвязи России Минкомсвязи России от 27.12.2019 № 923 «Концепция создания и развития сетей 5G/IMT-2020 в Российской Федерации»

Учебное издание

Гришин Илья Владимирович
Окунева Дарина Владимировна
Калинкина Алла Александровна
Матюхин Александр Юрьевич

Методы передачи данных на основе многих несущих

Учебное пособие

Издательство «Наукоемкие технологии»
ООО «Корпорация «Интел Групп»
<https://publishing.intelgr.com>
E-mail: publishing@intelgr.com
Тел.: +7 (812) 945-50-63
Интернет-магазин издательства
<https://shop.intelgr.com/>

Подписано в печать 31.10.2024.
Формат 60x84/16
Объем 6,25 п.л.
Тираж 100 экз.

ISBN 978-5-907946-02-6



9 785907 946026 >