



НИКИФОРОВ А. А.  
БАЙБУРИН В. Б.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА  
ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ  
ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ  
И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ  
С ПРИМЕНЕНИЕМ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ  
РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет  
имени Ю. А. Гагарина»

А. А. Никифоров, В. Б. Байбурин

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ТЕХНИЧЕСКОГО  
СОСТОЯНИЯ ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ И  
УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЧИСЛЕННЫХ  
МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Учебное пособие

Электронное издание  
локального распространения

Санкт-Петербург  
Наукоемкие технологии  
2025

© Никифоров А. А., Байбурин В. Б., 2025  
ISBN 978-5-907946-47-7

УДК 517.962.1:004.94(075.8)

ББК 22.193я73

Н62

Рецензент:

*Марина Вячеславовна Сысоева*, доктор физико-математических наук, доцент,  
профессор кафедры физики института физики и математики  
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого

Н62 Никифоров А. А., Байбурин В. Б. Математические методы анализа технического состояния информационно-измерительных и управляющих систем с применением численных методов решения дифференциальных уравнений [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. А. Никифоров, В. Б. Байбурин. – Электрон, текстовые дан. (2,8 Мб). – СПб.: Научно-технологические технологии, 2025. – 95 с. – 1 электрон., опт. диск (CD-ROM).

ISBN 978-5-907946-47-7

В учебном пособии представлен комплексный подход к изучению и применению математических инструментов для диагностики и прогнозирования технического состояния современных систем управления и измерений. В книге подробно рассмотрены теоретические основы и практические методики, используемые для построения математических моделей, анализа состояния систем и прогнозирования их поведения с помощью численных методов решения дифференциальных уравнений.

Учебное пособие предназначено для бакалавров и магистрантов обучающихся по направлениям подготовки 11.03.01 Радиотехника (бакалавриат), 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи (бакалавриат), 11.04.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи (магистратура) по дисциплинам «Системы искусственного интеллекта», «Основы научных исследований», «Синтез технических систем», «Вычислительная техника и информационные технологии», «Теория систем и системный анализ», «Теоретико-множественный и теоретико-информационный анализ сложных систем», «Программное и математическое обеспечение систем анализа, управления и обработки информации».

Текстовое электронное издание

Минимальные системные требования:

- процессор: Intel x86, x64, AMD x86, x64 не менее 1 ГГц;
- оперативная память RAM ОЗУ: не менее 512 МБайт;
- свободное место на жестком диске (HDD): не менее 120 МБайт;
- операционная система: Windows XP и выше;
- Adobe Acrobat Reader;
- дисковод CD-ROM;
- мышь.

УДК 517.962.1:004.94(075.8)

ББК 22.193я73

ISBN 978-5-907946-47-7

© Никифоров А. А., Байбурин В. Б., 2025

Учебное издание

**Никифоров Александр Анатольевич**  
**Байбурин Вил Бариевич**

**Математические методы анализа технического состояния  
информационно-измерительных и управляющих систем  
с применением численных методов решения  
дифференциальных уравнений**

Учебное пособие

Электронное издание  
локального распространения

Издательство «Наукоемкие технологии»  
ООО «Корпорация «Интел Групп»  
<https://publishing.intelgr.com>  
E-mail: [publishing@intelgr.com](mailto:publishing@intelgr.com)  
Тел.: +7 (812) 945-50-63  
Интернет-магазин издательства  
<https://shop.intelgr.com/>

Подписано к использованию 26.03.2025 г.  
Объем издания – 2,8 Мб.  
Комплектация издания – 1 CD.  
Тираж 500 CD.

ISBN 978-5-907946-47-7



9 785907 946477 >

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
ГЛАВА 1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ОДУ).....	9
1.1. Постановка задачи. Методы решения.....	9
1.2. Виды представления ОДУ.....	12
1.3. Численное решение ОДУ методом Эйлера (одношаговый метод)...	13
1.4. Метод Рунге – Кутты (одношаговый метод).....	20
1.5. Метод Адамса.....	21
1.6. Решение краевой задачи.....	22
1.7. Сходимость, аппроксимация, устойчивость.....	23
ГЛАВА 2. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ (МКР).....	25
2.1. Основные уравнения математической физики.....	25
2.2. Решение уравнения Лапласа.....	26
2.3. Конечно-разностный метод Хокни решения уравнения Пуассона ..	29
2.4. Решение волнового уравнения.....	33
2.5. Решение уравнения теплопроводности.....	39
2.6. Неявная абсолютно устойчивая схема для уравнения теплопроводности.....	43
ГЛАВА. 3. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.....	46
3.1. Функционал и уравнение Эйлера.....	46
3.2. Метод Ритца.....	49
3.3. Решение уравнения Пуассона методом Ритца.....	51
3.4. Решение дифференциальных уравнений методом Бубнова – Галёркина.....	53
3.5. Пример решения уравнения Пуассона методом Бубнова – Галёркина.....	56
ГЛАВА 4. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	58
4.1. Этапы применения метода конечных элементов.....	58
4.2. Пример решения уравнения теплопроводности.....	68

ГЛАВА 5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЕГО ЭТАПЫ .....	73
5.1. Исходные определения. Классификация моделей.....	73
5.2. Этапы математического моделирования .....	81
5.3. Требования к математической модели .....	84
ГЛАВА 6. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ И ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС.....	86
6.1. Исходные определения.....	86
6.2. Система Лоренца.....	88
6.3. Странный аттрактор Лоренца .....	90
6.4. Дискретные отображения.....	93
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	95

## ВВЕДЕНИЕ

Современные информационно-измерительные и управляющие системы играют ключевую роль в обеспечении надежности и эффективности различных технологических процессов. Их техническое состояние напрямую влияет на безопасность и производительность оборудования, что делает своевременную диагностику и прогнозирование неисправностей критически важными задачами. Для анализа технического состояния таких систем применяются разнообразные математические методы, среди которых особое место занимают численные методы решения дифференциальных уравнений.

При построении математических моделей, описывающих процессы в исследуемых объектах различной природы, используются дифференциальные уравнения математической физики. К основным из них принято относить уравнения: Лапласа, Пуассона, волновое, теплопроводности и др.

При этом в практически важных задачах: нестационарных, многомерных, с областями сложной формы получить точные аналитические решения, как правило, не удается. В связи с этим возрастает роль численных методов, интенсивно развивающихся в последние годы, чему способствуют постоянно растущие возможности вычислительной техники.

Целью данного учебного пособия является ознакомление студентов технических специальностей с сутью указанных методов, в частности, наиболее распространенных из них, например, как метод конечных разностей, метод конечных элементов и др.

Учебное пособие состоит из шести глав.

В ГЛАВЕ 1 рассматриваются методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Изложены классические модификации одношаговых методов Эйлера, Рунге – Кутты, многошагового метода Адамса, решения краевой задачи. Рассмотрены также такие понятия как сходимость, устойчивость, аппроксимация, явные и неявные схемы.

ГЛАВА 2 посвящена решению дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка методом конечных разностей (МКР). Рассмотрены решения следующих уравнений: Лапласа, Пуассона, волнового, теплопроводности.

В ГЛАВЕ 3 рассмотрены вариационно-разностные методы. Определено понятие функционала. Изложена суть методов Ритца и Бубнова – Галёркина. Приведены примеры решения дифференциальных уравнений в частных производных.

В ГЛАВЕ 4 изложен метод конечных элементов. Приведены этапы его применения. В качестве примера рассмотрено решение уравнения теплопроводности.

ГЛАВА 5 Посвящена изложению основных понятий связанных с математическим моделированием. Предложена возможная классификация математических моделей и рассмотрены типичные этапы построения математических моделей.

В ГЛАВЕ 6 приведены некоторые исходные понятия, связанные с хаосом в детерминированных динамических системах: странный аттрактор, предельный цикл и др.

Учебное пособие ориентировано на студентов технических вузов, обучающихся по направлениям, связанным с автоматизацией, вычислительной техникой и управлением сложными систе-



мами. Оно также будет полезно инженерам и исследователям, работающим в области разработки и эксплуатации информационно-измерительных и управляющих систем.

Материал представлен в доступной форме, сочетающей теоретический материал с примерами практического применения рассматриваемых методов. Это позволит читателю получить глубокие знания в области математического анализа технического состояния систем и научиться эффективно применять эти знания в реальных инженерно-технических задачах.

# ГЛАВА 1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ОДУ)

## 1.1. Постановка задачи. Методы решения

Многие задачи физики, механики, химии и других отраслей науки и техники при их математической формулировке сводятся к дифференциальным уравнениям.

Дифференциальные уравнения делятся на две существенно различные категории:

1. обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), которые содержат только одну независимую переменную; искомая функция  $u = u(t)$  или  $u = u(x)$ ;

2. уравнения с частными производными, содержащие несколько независимых переменных; искомая функция  $u = u(t, x, y, z)$ .

Обычно в указанных уравнениях:  $t$  – время,  $x, y, z$  – пространственные переменные.

Полная математическая постановка задачи наряду с дифференциальными уравнениями требует задания дополнительных условий. Если решение ищется в ограниченной области значений независимых переменных, то задаются условия на границах области, которые называются граничными. Если одной из независимых переменных является время, то задаются некоторые условия в начальный момент времени – это начальные условия. Если задаются и граничные и начальные условия, то такие задачи называются нестационарными (или смешанными) краевыми задачами.

## ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Аналитические методы – дают возможность провести непосредственное интегрирование дифференциальных уравнений, то есть решение в квадратурах – в виде формул и путем аналитических преобразований – однако, это возможно только в простых случаях.

Приближенные методы – они используют различные упрощения самих дифференциальных уравнений, например, путем отбрасывания содержащихся в них членов или выбором некоторых специальных классов искомых функций. К ним относятся:

- Метод возмущений. Решение ищется в виде основного решения + малой добавки (возмущения).
- Метод малого параметра: решение ищется в виде ряда по некоторому малому параметру, содержащемуся в данной задаче.
- Методы минимизации невязок.

Суть их заключается в следующем. Пусть задано дифференциальное уравнение с некоторыми граничными условиями. Выбирается некоторая линейно независимая (базисная) система функций  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  (запись для обыкновенных дифференциальных уравнений); где  $\varphi_0(x)$  удовлетворяет граничным условиям,  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  – нулевым граничным условиям.

Искомое решение представляется в виде линейной комбинации базисных функций

$$y(x) = \varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_n\varphi_n(x) \quad (1.1)$$

Подставляя это выражение в исходное дифференциальное уравнение, можно найти разность между его левой и правой частями, которая называется невязкой:  $r(x, a_1, \dots, a_n)$ .  $a_1, \dots, a_n$  подбираются так, чтобы невязка была минимальной. Способ минимизации и определяет ту или иную модификацию метода.

- Метод коллокаций. Выбираются точки  $x_1, \dots, x_n$ , в которых невязки полагаются равными нулю. Получается система линейных алгебраических уравнений, из которых определяются  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и подставляются в решение (1.1).

- Метод наименьших квадратов. Минимизируется сумма квадратов невязок – также определяется система линейных алгебраических уравнений, из которых находятся  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Наряду с изложенными методами, особенно в случае сложных задач, также используются следующие численные методы: метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ), вариационные методы. Последние два метода будут рассмотрены в последующих главах.

Вначале рассмотрим МКР и его применение для решения ОДУ и дифференциальных уравнений в частных производных.

Метод конечных разностей (применяется как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для дифференциальных уравнений в частных производных). Состоит из следующих этапов:

1. Построение дискретного аналога непрерывной среды (наложение на область разностной сетки, переход к дискретным значениям аргументов и искомой функции). Значения функции в узлах сетки называются сеточными функциями.

2. Аппроксимация системы дифференциальных уравнений. Производные заменяются разностными аналогами и записываются во внутренних узлах.

3. Конечно-разностная аппроксимация начальных и граничных условий. В итоге получается система алгебраических уравнений, число которых равно числу внутренних узлов.

4. Решение получающейся системы алгебраических уравнений и получение дискретных значений искомой функции. Эта система алгебраических уравнений бывает очень высокого порядка, но матрица коэффициентов бывает сильно разреженной.

5. Построение приближающей (аппроксимирующей) функции по полученным дискретным значениям исходной функции.

В последующих параграфах показано применение МКР для решения ОДУ.

## 1.2. Виды представления ОДУ

Как уже отмечалось, ОДУ – уравнения, содержащие одну независимую переменную  $t$ , в общем случае, производные различных порядков по этой переменной. Таким образом, ОДУ можно записать в виде

$$F(t, u, u^{(I)}, u^{(II)}, \dots, u^{(n)}) = 0, \quad (1.2)$$

где  $u^{(I)} = \frac{du}{dt}$ ;  $u^{(II)} = \frac{d^2u}{dt^2}$ ; ...;  $u^{(n)} = \frac{d^nu}{dt^n}$ ;  $(n)$  называется порядком уравнения.

Например:  $F(t, u, u^{(I)}) = 0$  – уравнение первого порядка;

$F(t, u, u^{(I)}, u^{(II)}) = 0$  – уравнение второго порядка.

В ряде случаев из общей записи (1.2) удастся выразить старшую производную в явном виде. Например,

$$u^{(I)} = f(t, u)$$

$$u^{(II)} = f(t, u, u^{(I)})$$

$$u^{(n)} = f(t, u, u^{(I)}, \dots, u^{(n-1)}).$$

Так как многие численные методы решения ОДУ разработаны для ОДУ первого порядка, имеет смысл представить ОДУ  $n$ -

го порядка системой (n) уравнений первого порядка путем замены переменных.

Например, пусть имеем ОДУ третьего порядка

$$u^{III} = f(t, u, u^{(I)}, u^{(II)}).$$

Тогда введем обозначения

$$\begin{cases} u' = u_1 \\ u'' = u_1' = u_2 \\ u''' = u_2' \end{cases}$$

и получим

$$\begin{cases} u_2' = f(t, u, u_1, u_2) \\ u' = u_1 \\ u_1' = u_2 \end{cases}$$

То есть из уравнения третьего порядка получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

### 1.3. Численное решение ОДУ методом Эйлера (одношаговый метод)

Пусть дано ОДУ первого порядка:

$$\frac{du}{dt} = f(u, t), \quad (1.3)$$

где  $f(u, t)$  – известная функция;  $t$  – независимая переменная (часто она имеет смысл времени). Независимая переменная может иметь смысл пространственной переменной  $x$ , но от этого суть метода не меняется.

Как уже отмечалось выше, для полной формулировки задачи необходимо задать дополнительное условие. Если  $t$  – время, то это должно быть начальное условие при  $t = t^0$ :

$$u(t = t^0) = u^0,$$

где  $u^0$  – заданное значение. Необходимо найти  $u = u(t)$ . Отметим, что в изложенной формулировке поставленная задача называется задачей Коши. Для решения применим МКР.

В соответствии с методом перейдем к дискретным значениям  $u$  и  $t$ :

$$u^0, u^1, u^2, \dots, u^i, u^{i+1}, \dots$$

$$t^0, t^1, t^2, \dots, t^i, t^{i+1}, \dots$$

При этом  $t^{i+1} - t^i = \Delta t$ , где  $\Delta t$  – шаг по времени. Далее в соответствии с МКР заменим дифференциальный оператор разностной аппроксимацией

$$\frac{du}{dt} \approx \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}$$

и получим с учетом (3.1)

$$\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t} = f(u^i, t^i);$$

отсюда

$$u^{i+1} = u^i + \Delta t \cdot f(u^i, t^i) \quad (1.4)$$

Из этого соотношения видим, что если нам известно  $u^i$ , то есть значение  $u$  на предыдущем шаге, мы легко определим  $u^{i+1}$  значение искомой функции на последующем шаге. Отметим, что указанное соотношение (схема расчета) называется явной!

Используя начальное условие  $u(t = t^0) = u^0$ , можно последовательно рассчитать значение  $u$  на любом шаге по времени:

$$u^1 = u^0 + \Delta t \cdot f(u^0, t^0)$$

$$u^2 = u^1 + \Delta t \cdot f(u^1, t^1)$$

.....

$$u^n = u^{n-1} + \Delta t \cdot f(u^{n-1}, t^{n-1})$$

Оценим устойчивость решения и погрешность схемы Эйлера. Напомним, что решение будет устойчивым, если неизбежная на каждом шаге погрешность не будет нарастать от шага к последующему шагу. Пусть  $\xi^i$  – погрешность на  $i$ -м шаге,  $\xi^{i+1}$  – погрешность на  $(i+1)$ -м шаге. Введем эти погрешности в схему Эйлера (1.4):

$$u^{i+1} + \xi^{i+1} = u^i + \xi^i + f(u^i + \xi^i, t^i) \cdot \Delta t \quad (1.5)$$

Используем разложение  $f(u^i + \xi^i, t^i)$  в ряд Тейлора:

$$f(u^i + \xi^i, t^i) = f(u^i, t^i) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{t^i}^{\xi^i} + 0 [(\xi^i)^2]$$

и подставим в (1.5):

$$u^{i+1} + \xi^{i+1} = u^i + \xi^i + f(u^i, t^i) \cdot \Delta t + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{t^i}^{\Delta t \cdot \xi^i} + 0 [(\xi^i)^2] \cdot \Delta t.$$

Далее выразим  $f(u^i, t^i)$  с помощью (3.2) и получим

$$u^{i+1} + \xi^{i+1} = u^i + \xi^i + u^{i+1} - u^i + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{t^i}^{\Delta t \cdot \xi^i}$$

После сокращений получим:



$$\xi^{i+1} = \xi^i \left( 1 + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{t^i \Delta t} \right) \quad (1.6)$$

Из соотношения (1.6) видно, что, если  $\frac{\partial f}{\partial u} > 0$ , то  $\left( 1 + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{t^i \Delta t} \right) > 1$ , т. е. погрешность будет нарастать. Метод Эйлера нельзя применять. Таким образом, необходимо, чтобы  $\frac{\partial f}{\partial u} < 0$ . Тогда должно быть  $\left| \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{t^i \Delta t} \right) \right| \leq 1$ . Отсюда для устойчивости решения необходимо, чтобы

$$\Delta t \leq \frac{2}{\left| \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_i \right|} \quad (1.7)$$

Последнее соотношение означает, что должно быть ограничение на  $\Delta t$  шаг по времени.  $\Delta t$  не может быть по величине больше, чем определяемое соотношение (1.7).

Важное замечание: недостатком всех явных схем является ограничение величины шага по времени.

Рассмотрим пример:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u}{\tau_0}; \text{ дополнительное условие (начальное): } u(t=0) = u^0 =$$

1. Это ОДУ описывает затухание тока в цепи с индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $R$ ;  $\tau_0 = L/R$ . Оно имеет строгое аналитическое решение:

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{\tau_0}; \int \frac{du}{u} = -\int \frac{dt}{\tau_0}; \ln u = -\frac{t}{\tau_0} + C_1; \text{ при } t=0; \ln u^0 = \ln 1 = 0. C_1 = 0.$$

Таким образом, решение имеет вид  $u = 1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_0}}$  (см. рис. 1). Строгое решение представлено плавной сплошной линией.

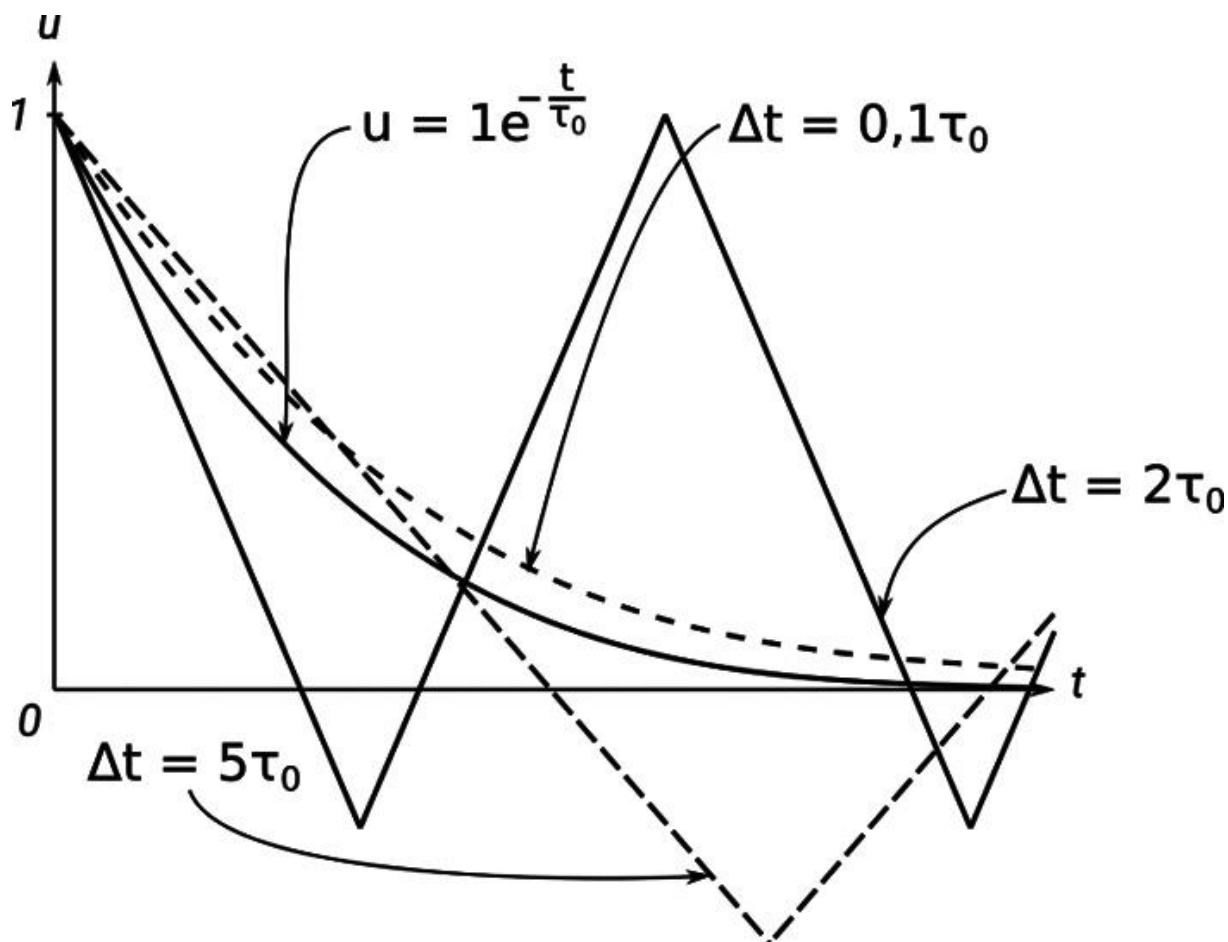


Рисунок 1. Решения, полученные при разных величинах  $\Delta t$

Сравним строгое решение с решением, полученным по схеме Эйлера.

Применим для решения уравнения  $\frac{du}{dt} = -\frac{u}{\tau}$ ; схему Эйлера:

$$u^{i+1} = u^i - \frac{u^i}{\tau_0} \cdot \Delta t;$$

Полагаем  $i = 1$ , тогда:

$$u^1 = u^0 - \frac{u^0}{\tau_0} \cdot \Delta t = u^0 \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_0}\right)$$

$$u^2 = u^1 - \frac{u^1}{\tau_0} \cdot \Delta t = u^1 \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_0}\right) = u^0 \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_0}\right)^2$$

$$u^3 = u^0 \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_0}\right)^3$$

.....

$$u^{i+1} = u^0 \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_0}\right)^{i+1}$$

Из формулы для максимального шага по времени в нашем примере

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{1}{\tau_0};$$

и тогда максимальный шаг по времени

$$\Delta t \leq \frac{2}{\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|}; \Delta t \leq 2\tau_0.$$

Из рис. 3.1 видно, что при  $\Delta t = 0,1\tau_0$  пунктирная линия по схеме Эйлера по существу совпадает с истинным решением. Однако, при шаге  $\Delta t = 2\tau_0$ ,  $\Delta t = 5\tau_0$  имеет место существенное расхождение.

Запишем теперь неявную схему Эйлера:

$$u^{i+1} = u^i + f(u^{i+1}, t^{i+1}) \cdot \Delta t.$$

Проанализируем эту схему, как и выше, введя погрешность  $\xi^{i+1}$ ,  $\xi^i$  на шагах  $(i + 1)$  и  $i$ . В итоге получим:

$$\xi^{i+1} = \frac{\xi^i}{\left(1 - \Delta t \frac{\partial f}{\partial u}\right)}$$

Из соотношения видно, что при  $\frac{\partial f}{\partial u} < 0$ , множитель  $\frac{1}{\left(1 - \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \Delta t\right)}$  будет всегда меньше единицы, т. к.  $\Delta t > 0$ , в то время как в явной схеме мы имели ограничение на шаг по времени  $\Delta t$ .

Таким образом, при  $\frac{\partial f}{\partial u} < 0$  неявная схема будет абсолютно устойчива при любом шаге  $\Delta t$ . Это существенное преимущество неявных схем.

Недостаток в том, что при нелинейной функции  $f$  определение  $u^{i+1}$  может привести к сложному алгебраическому уравнению. Чтобы этого избежать, можно применить модификацию схемы Эйлера.

Схема Эйлера с пересчетом (одношаговая) имеет вид

$$u^{i+1} = u^i + \frac{\Delta t}{2} [f(u^i, t^i) + f(u^{i+1}, t^{i+1})].$$

То есть правую часть мы представляем не как  $\Delta t \cdot f(u^i, t^i)$ , а как среднеарифметическое между  $\Delta t \cdot f(u^i, t^i)$  и  $\Delta t \cdot f(u^{i+1}, t^{i+1})$ . Полученная схема является неявной, т. к. неизвестное значение  $u^{i+1}$  входит и в правую, и в левую часть соотношения.

Для вычисления  $u^{i+1}$  можно применить итерационную процедуру. Считая  $u^i$  начальным приближением, вычислим  $\tilde{u}^{i+1}$  по явной схеме Эйлера

$$\tilde{u}^{i+1} = u^i + f(u^i, t^i)\Delta t.$$

Это значение и подставим в схему с пересчетом

$$u^{i+1} = u^i + \Delta t [f(u^i, t^i) + f(\tilde{u}^{i+1}, t^{i+1})]$$

Затем можно полученное  $u^{i+1}$  опять подставить в правую часть и получить уточненное значение  $u^{i+1}$ . Итерацию можно провести 2-3 раза, а затем перейти к определению  $u^{i+2}$  и т. д.

## 1.4. Метод Рунге – Кутты (одношаговый метод)

Метод получил широкое распространение благодаря высокой точности (низкой погрешности)  $\approx O(\Delta t^4)$ . Имеет IV порядок точности.

Имеем ОДУ:

$$\frac{du}{dt} = f(u, t);$$

начальное условие  $u(t = t^0) = u^0$ ,  $u^0$  – заданная величина.

Решение на некотором  $(i + 1)$  шаге записывается в виде

$$u^{i+1} = u^i + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

где

$$k_1 = f(u^i, t^i);$$

$$k_2 = f(u_i + \Delta t \cdot 0,5 \cdot k_1, t^{i+0,5});$$

$$k_3 = f(u_i + 0,5 \cdot \Delta t \cdot k_2, t^{i+0,5});$$

$$k_4 = f(u_i + \Delta t \cdot k_3, t^{i+1}).$$

Здесь  $t^{i+0,5} = t^i + 0,5 \cdot \Delta t$ .

Эта конечно-разностная схема – явная. Имеет IV порядок точности. Это означает, что если мы используем, например, схему Эйлера, имеющую первый порядок точности, то, чтобы добиться такой же точности, как в схеме Рунге – Кутты, нужно взять для схемы Эйлера шаг  $\Delta t$  в тысячу раз меньше.

Оценим погрешность схемы Эйлера. Пусть  $u^{i+1}$  – точное значение искомой функции в узле  $t^{i+1}$ . Разложим его в ряд Тейлора по времени

$$u^{i+1} = u^i + \frac{du}{dt} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2u}{dt^2} \Delta t^2 + 0(\Delta t^3)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t} + \frac{d^2u}{2dt^2} \Delta t + 0(\Delta t^2)$$

То есть погрешность на каждом шаге пропорциональна  $0(\Delta t^2)$  – имеет второй порядок. После  $n$  шагов погрешность составит:  $n \cdot 0(\Delta t^2)$ , но так как  $\Delta t = \frac{t}{n}$ , окончательное выражение для погрешности будет

$$R \approx n \cdot 0(\Delta t^2) = \frac{t}{\Delta t} 0(\Delta t^2) = 0(\Delta t).$$

То есть по схеме Эйлера имеем первый порядок точности.

Отметим, что схема Эйлера с пересчетом имеет второй порядок погрешности (точности)

$$R \approx 0(\Delta t^2).$$

## 1.5. Метод Адамса

(многошаговый метод решения ОДУ IV порядка точности)

Запишем ОДУ:

$$\frac{du}{dx} = f(x, u).$$

Пусть в четырех узлах:  $x_{i-3}$ ,  $x_{i-2}$ ,  $x_{i-1}$ ,  $x_i$  известны соответственно значения  $u_{i-3}$ ,  $u_{i-2}$ ,  $u_{i-1}$ ,  $u_i$ ; по ним можно найти:

$$f_{i-3}(x_{i-3}, u_{i-3}), f_{i-2}(x_{i-2}, u_{i-2}), f_{i-1}(x_{i-1}, u_{i-1}), f_i(x_i, u_i)$$

и конечные разности:

$$\Delta f_i = f_i - f_{i-1}$$

$$\Delta^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$

$$\Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}$$

Тогда разностную расчетную схему по методу Адамса можно записать в виде

$$u_{i+1} = u_i + hf_i + \frac{h^2}{2} \Delta f_i + \frac{5}{12} h^3 \Delta^2 f_i + \frac{3}{8} h^4 \Delta^3 f_i,$$

где 
$$h = x_i - x_{i-1}$$

Метод Адамса более экономичен, чем метод Рунге – Кутты той же точности, т. к. требует вычисления лишь одного значения правой части на каждом шаге (в методе Рунге – Кутты – четырех).

Недостаток. Расчет может быть начат, если известны в узлах  $x_0, x_1, x_2, x_3$  значения  $u_0, u_1, u_2, u_3$ , только после этого можно найти  $u_4, u_5$  и т. д. Эти первые значения можно найти методом Рунге – Кутты. Кроме того, нельзя менять шаг  $h$  в ходе алгоритма.

### **1.6. Решение краевой задачи ОДУ методом конечных разностей МКР**

Пусть имеем дифференциальное уравнение 2-го порядка, разрешенное относительно второй производной

$$u'' = f(x, u, u'), a \leq x \leq b$$

с граничными условиями, заданными более чем в одной точке (в данном случае в точках  $x = a, x = b$ )

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = A$$

$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = B,$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, A, B$  – заданы.

В этих граничных условиях участвуют и производные первого порядка. В соответствии с МКР переходим к дискретным значениям  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n$ . Заменяем производные в уравнениях и граничных условиях их конечно-разностными аппроксимациями

$$u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}; u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}.$$

В итоге получим

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f(x_i, u_i, u_{i+1}, u_{i-1})$$

$$\alpha_1 u_0 + \beta_1 \frac{u_1 - u_0}{h} = A$$

$$\alpha_2 u_n + \beta_2 \frac{u_n - u_{n-1}}{h} = B$$

Таким образом, решение краевой задачи сводится к решению системы алгебраических уравнений (линейных или нелинейных – зависит от вида  $f$ ).

## 1.7. Сходимость, аппроксимация, устойчивость

Эти понятия относятся не только к решениям, связанным с ОДУ, но и к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$LU = F, \tag{1.8}$$

где  $U$  и  $F$  – функции одной или нескольких переменных, причем  $F$  задано,  $U$  – искомая функция,  $L$  – дифференциальный оператор.



При переходе к дискретным значениям независимых переменных и искомой функции  $U$ , соответствующая разностная схема примет вид

$$L_h U_h = F_h, \quad (1.9)$$

где  $h$  – шаг дискретизации.

Качественно условие сходимости значения сеточной функции в узле  $U_h$  к его истинному значению  $U$  можно записать так

$$|[U]_h - U_h| \rightarrow 0, \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (1.10)$$

Показано, что решение будет сходиться, если дискретный оператор  $L_h U_h$  аппроксимирует дифференциальный оператор  $LU$  и если решение является устойчивым.

Дискретный оператор (т. е. разностная схема)  $L_h$  аппроксимирует дифференциальный оператор  $L$ , если выполняется

$$|LU - L_h U_h| \rightarrow 0, \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Дискретная схема будет устойчивой, если малому изменению входных соответствует малое изменение решения. Математически это можно записать так:

$$|\xi^{n+1}| = q|\xi^n|, \quad \text{где } q \leq 1.$$

Это условие означает, что ошибка на некотором  $n$  шаге ( $\xi^n$ ) не будет возрастать на следующем шаге ( $n + 1$ ).

## ГЛАВА 2. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

### 2.1. Основные уравнения математической физики

Многие научные и технические задачи приводят к необходимости решения так называемых уравнений математической физики. Основные из них следующие:

#### 1) Волновое уравнение

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = c^2 \left( \frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} \right),$$

где искомая функция  $u(t, x, y, z)$ .

Описывает поведение различных видов волн: упругих, звуковых, электромагнитных и т. д. в различных средах,  $c$  – скорость распространения волны в данной среде.

#### 2) Уравнение диффузии (или теплопроводности)

$$\frac{dU}{dt} = a^2 \left( \frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} \right),$$

где искомая функция  $u(t, x, y, z)$ .

Описывает процесс распространения тепла в однородном изотропном теле.

#### 3) Уравнение Пуассона

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = f(x, y, z),$$

где искомая функция  $u(t, x, y, z)$ .

Описывает установившиеся статические (электрические, магнитные, тепловые) потенциалы, механические напряжения в конструкциях.

Если  $f(x, y, z) = 0$ , то получаем уравнение Лапласа

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} = 0,$$

где искомая функция  $u(x, y, z)$ .

Описывает, в частности, потенциалы поля тяготения, электрического поля в отсутствие масс и электрических зарядов.

Если к каждому из этих уравнений добавить дополнительные граничные и начальные условия, то мы получим краевые задачи математической физики.

## 2.2. Решение уравнения Лапласа

Многие стационарные задачи (течение несжимаемой жидкости, задачи теплопроводности и диффузии в стационарных случаях, форма нагруженной мембраны) сводятся к решению уравнения Пуассона:  $\Delta U = -p(x, y, z)$ , если  $p = 0$ , то получаем уравнение Лапласа:  $\Delta U = 0$ .

Для простоты рассмотрим двумерное уравнение Лапласа:

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} = 0.$$

Пусть  $G$  – область изменения  $x, y$  – ограничена замкнутой линией  $L$ . Граничное условие на границе  $L$  зададим в виде  $U(x, y)|_L = \varphi(x, y)$ .

Задача, состоящая в решении уравнения Лапласа (или Пуассона) при заданных значениях искомой функции на границе расчетной области, называется задачей Дирихле.

Для простоты примем заданную область  $G$  в виде прямоугольника. Крестиками на рис. 2.1 указаны граничные узлы, в которых значения функции  $U(x_i, y_i)$  заданы. Черные кружки соответствуют внутренним узлам, в которых ищутся значения искомой функции.

Нанесем сетку с одинаковым шагом  $h$  по  $x$  или  $y$ . Значения  $U$  в узлах  $(x_i, y_i)$  обозначим значениями сеточной функции  $U_{ij}$ . Тогда, используя конечно-разностную аппроксимацию, можно записать

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} = 0.$$

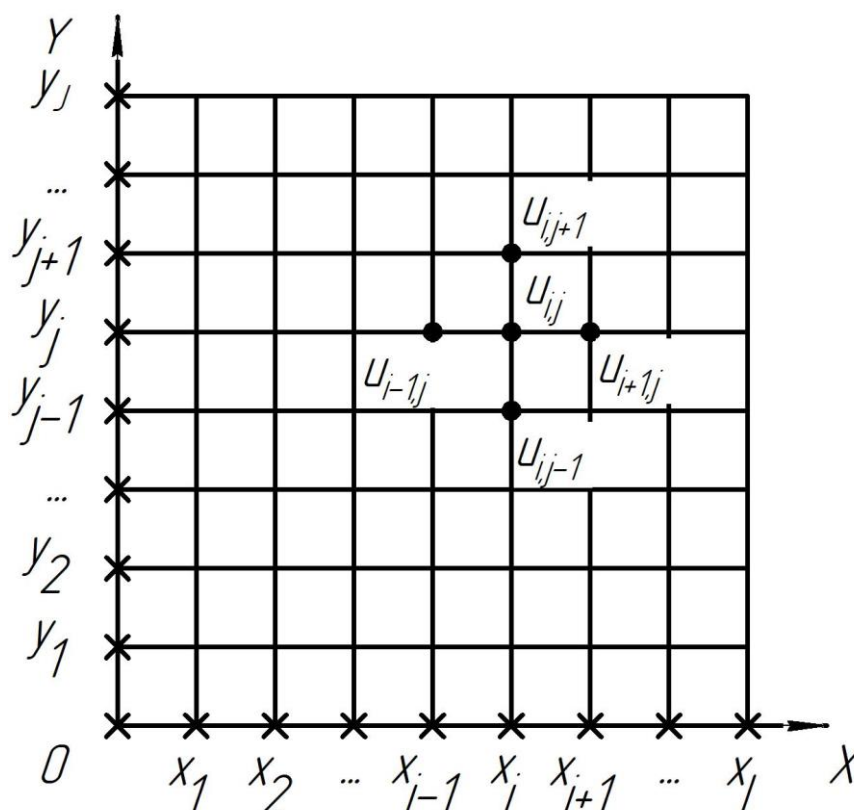


Рисунок 2. Область решения в виде прямоугольника

Число граничных узлов =  $2(I+J)$ , число внутренних узлов =  $(I-1)(J-1)$ , общее число узлов =  $(I+1)(J+1)$

Эту схему можно записать в виде

$$U_{i+1,j} - U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{ij} = 0; i = 1, 2 \dots I - 1; \\ j = 1, 2 \dots J - 1,$$

а также в виде  $u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$ .

Значения сеточной функции в узлах на границе задаются из граничного условия:

$$U_{0j} = \varphi(x_0, y_j); U_{I,j} = \varphi(x_I, y_j); (j = 0, 1 \dots J),$$

$$U_{i0} = \varphi(x_i, y_0); U_{i,J} = \varphi(x_i, y_J); (i = 0, 1 \dots I).$$

В теории разностных схем доказывається, что решение построенной разностной задачи существует, а сама схема устойчива.

Одним наиболее распространенным методом решения такой системы является итерационный метод.

Как следует из записанной выше численной схемы, мы используем систему линейных алгебраических уравнений числом, равным числу внутренних (не граничных) узлов сетки. В общем случае каждое уравнение содержит 5 неизвестных, т. е. матрица коэффициентов этой системы уравнений является пятидиагональной. Такую систему можно решить методом исключения Гаусса.

Вместе с тем можно применять так называемые итерационные методы. В этом случае из разумных допущений задается так называемое начальное приближение, т. е. некоторые значения функции во всех внутренних узлах, а затем они уточняются в ходе итерации.

### 2.3. Конечно-разностный метод Хокни решения уравнения Пуассона

В двумерном случае уравнение Пуассона имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \rho(x,y). \quad (2.1)$$

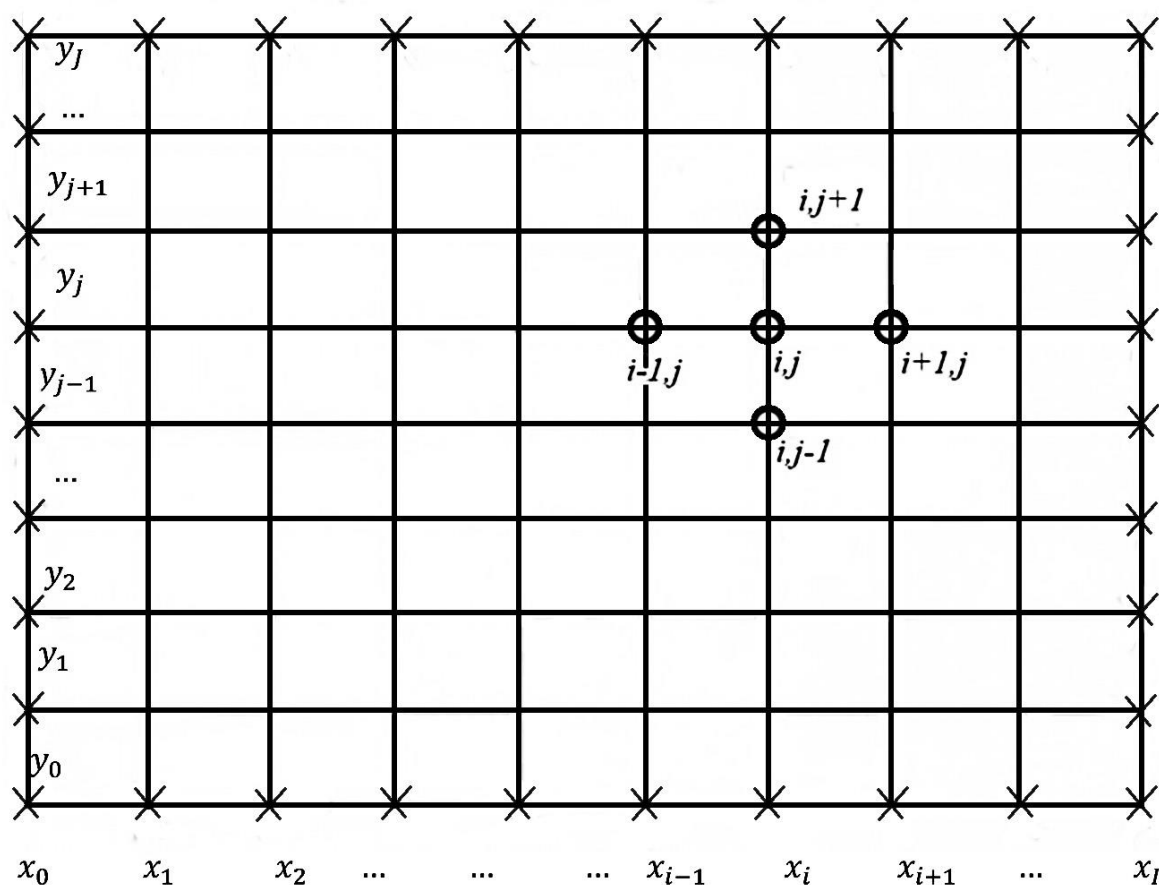


Рисунок 3. Область решения

Свойство симметрии уравнения Пуассона позволяет свести по методу Хокни решение двумерного уравнения к отдельному решению одномерных задач.

Суть метода в том, что применяется преобразование Фурье по одной пространственной переменной, например, ( $y$ ), в результате, по другой пространственной переменной (например,  $x$ ) остаются трёхдиагональные алгебраические уравнения, которые легко решаются методом прогонки.

Область прямоугольная. Переход к дискретному значению переменных:

$$x_i, i = 0, 1 \dots I$$

$$y_j, j = 0, 1 \dots J$$

Шаг дискретизации считаем одинаковым по  $x$  и  $y$

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \Delta y = y_{j+1} - y_j = h, \quad (2.2)$$

примем, что во всех граничных узлах

$$u_{i,J}^* = u_{i,0}^* = u_{0,j}^* = u_{J,i}^* = 0, \quad (2.3)$$

нулевые граничные условия дают возможность в рядах Фурье использовать только функции  $\sin$ .

Искомые значения функции  $u_{i,j}$  во внутренних узлах.

Тогда в конечно-разностной форме уравнение (2.1) примет вид

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = \rho_{i,j}, \quad (2.4)$$

где  $i = 1, 2 \dots I - 1, j = 1, 2 \dots J - 1$ .

Предыдущую схему перепишем в виде

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = h^2 \rho_{i,j}, \quad (2.5)$$

упростим

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 \rho_{i,j}) - \quad (2.6)$$

это пятидиагональная система уравнений. В таком виде решение потребует достаточно много времени. Поэтому применим метод Хокни. Разложим функцию  $u_{i,j}$  в ряд Фурье по переменной  $y$ , т. е. по индексу  $j$

$$u_{i,j} = \sum_{k=1}^J \widehat{u}_i(k) \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) j, \quad (2.7)$$

здесь  $\widehat{u}_i(k)$  коэффициент ряда Фурье для дискретной функции  $u_{i,j}$ .

Аналогично проведем разложение в ряд Фурье для функций

$$u_{i+1,j}, u_{i-1,j}, u_{i,j+1}, u_{i,j-1}$$

$$u_{i+1,j} = \sum_{k=1}^J \widehat{u}_{i+1}(k) \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) j,$$

$$u_{i-1,j} = \sum_{k=1}^J \widehat{u}_{i-1}(k) \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) j,$$

$$u_{i,j+1} = \sum_{k=1}^J \widehat{u}_i(k) \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) (j+1),$$

$$u_{i,j-1} = \sum_{k=1}^J \widehat{u}_i(k) \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) (j-1).$$

На первый взгляд, мы усложнили задачу т. к. ввели в рассмотрение вместо дискретного значения искомой функции их разложения в ряд Фурье, коэффициенты в которых  $\widehat{u}$  – неизвестны.

Аналогично разложим функцию  $\rho_{i,j}$

$$\rho_{i,j} = \sum_{k=1}^J \widehat{\rho}_i(k) \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) j, \quad (2.8)$$



т. к.  $\rho_{i,j}$  известна, известны и коэффициенты  $\rho_i(k)$ :

$$\widehat{\rho}_i(k) = \frac{2}{J} \sum_{j=1}^J \rho_{i,j} \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) j, \quad (2.9)$$

в предыдущих разложениях  $\widehat{u}$  неизвестны. Перенесём правую часть предыдущего уравнения влево. Кроме того, заметим, что везде присутствуют ряды  $\sum_{k=1}^J$ , значит это суммирование можно вынести за скобку. Кроме того, в некоторых членах присутствует множитель  $\sin\left(\frac{\pi k}{J}\right)$ .

В итоге, подставив все указанные разложения в ряд Фурье в исходное конечно-разностное уравнение (3.4), можно получить

$$\sum_{k=1}^J \left\{ [\widehat{u}_{i+1}(k) - 2\widehat{u}_i(k) + \widehat{u}_{i-1}(k)] \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) j + \right. \\ \left. [\widehat{u}_i(k) \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) (i+1) - 2\widehat{u}_i(k) \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) j + \widehat{u}_i(k) \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) (j-1)] + h^2 \widehat{\rho}_i(k) \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) j \right\} = 0.$$

Вынесем  $\widehat{u}_i(k)$  из второй квадратной скобки

$$\widehat{u}_i(k) \left[ \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) (j+1) - 2 \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) j + \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) (j-1) \right].$$

Рассмотрим отдельно  $\sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) (j+1) + \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) (j-1) = 2 \sin\left(\frac{\pi k j}{J}\right) \cos\left(\frac{\pi k}{J}\right)$ .

В итоге получим

$$\sum_{k=1}^J \left[ \widehat{u}_{i+1}(k) - \widehat{u}_i(k) (4 - 2 \cos\left(\frac{\pi k}{J}\right)) + \widehat{u}_{i-1}(k) \right. \\ \left. + h^2 \widehat{\rho}_i(k) \right] \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) j = 0, \quad (2.10)$$

чтобы равенство (2.10) выполнялось, при любом  $j$  нужно приравнять выражение в квадратных скобках к нулю.

$$\widehat{u_{i+1}}(k) - \widehat{u_i}(k) \left(4 - 2 \cos\left(\frac{\pi k}{J}\right)\right) + \widehat{u_{i-1}}(k) = -h^2 \widehat{\rho_i}(k) \quad (2.11)$$

В итоге для каждого  $k$  мы получили систему трёхдиагональных уравнений. После решения всех систем трёхдиагональных уравнений мы получим значения  $\widehat{u_{i+1}}(k)$  для всех  $i$  и всех  $k$ .

То есть значение искомой функции в каждом внутреннем узле определится суммой ряда Фурье

$$u_{i,j} = \sum_{k=1}^J \widehat{u_i}(k) \sin\left(\frac{\pi k}{J}\right) j. \quad (2.12)$$

Общее число операций в изложенном методе:  $N = IJ \log_2 J$ .

## 2.4. Решение волнового уравнения методом конечных разностей

Рассмотрим одномерный случай волнового уравнения, когда искомая функция зависит только от одной пространственной переменной ( $x$ ):

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (2.13)$$

$u(x, t)$  – искомая функция

Функция  $u(x, t)$  – искомая функция, описывающая положение струны в момент времени  $t$ ,  $a = T/\rho$ , где  $T$  – натяжение струны,  $\rho$  – линейная (погонная плотность), сопротивление среды не учитывается, далее будем учитывать только параметр  $a$ .

Уравнение (2.13), в частности, описывает колебания струны длины  $l$  закрепленной на концах рис. 4.

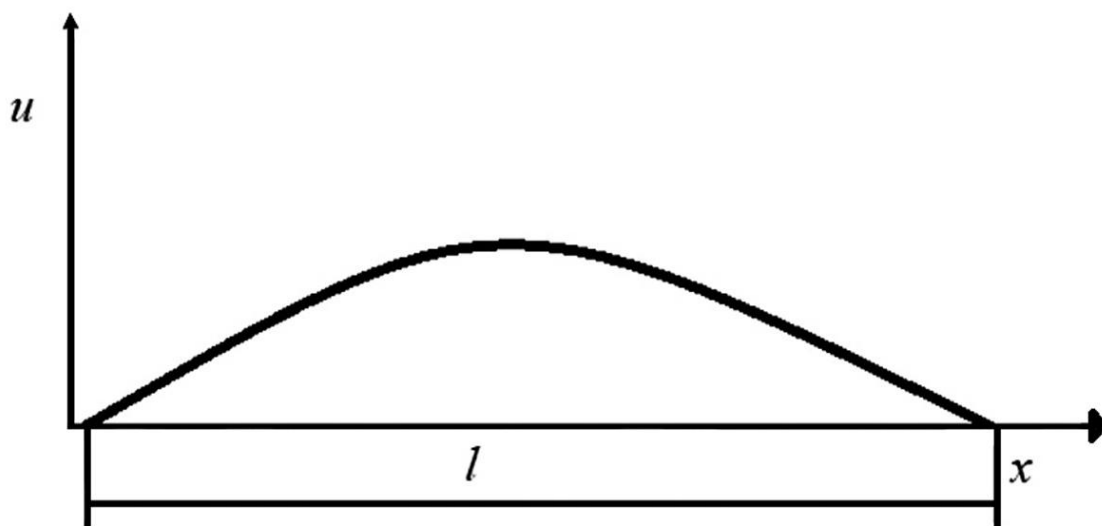


Рисунок 4. Отклонение струны от положения равновесия

Необходимо задать так называемые краевые условия (начальные и граничные условия). Их число равно сумме порядков производных в уравнении. Зададим начальные условия.

Мы имеем  $\Pi$  порядок производной по времени. Следовательно, должно быть два начальных условия, т. е. при  $t = 0$ .

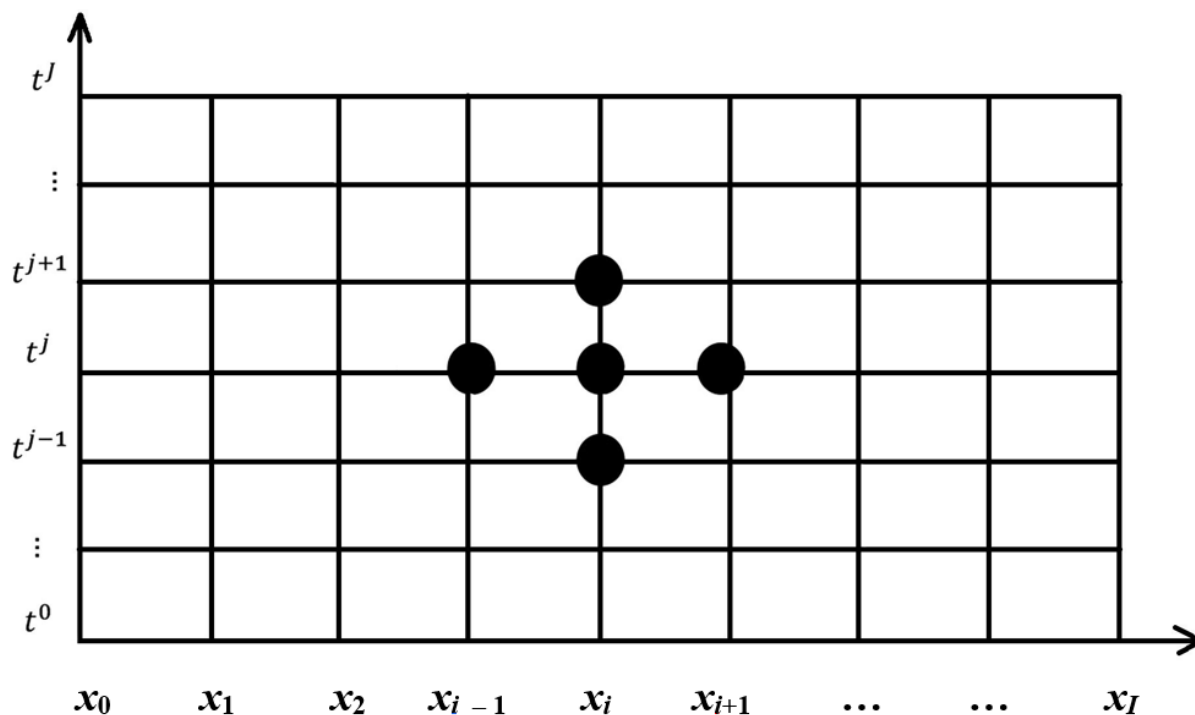


Рисунок 5. Область решения

$$u(t = 0, x) = \varphi_1(x), \partial u / \partial t|_{t=0} = \varphi_2(x) \quad (2.14)$$

Физический смысл начальных условий – отклонение струны в начальный момент времени от положения равновесия.

Граничные условия определялись тем, что концы струны закреплены.

Граничные условия:

$$u(x = 0, t) = 0; u(x = l, t) = 0, \quad (2.15)$$

то есть в любой момент времени концы струны неподвижны.

Рассмотрим две разностные схемы решения этой задачи.

В соответствии с методом конечных разностей (МКР) перейдём к дискретным значениям независимых переменных  $t$  и  $x$  ( $x_i, t^j$ ); обычно индексы, относящиеся ко времени, записываются вверху ( $t^j$ ).

Дискретным значениям  $x_i, t^j$  соответствуют дискретные обозначения искомой функции  $u(x_i, t^j) = u_i^j$

При этом дискретные шаги записываются как

$$\Delta t = t^{j+1} - t^j = t^j - t^{j-1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J \quad (2.16)$$

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = h, \quad i = 0, 1, 2, \dots, I$$

Теперь аппроксимируем дифференциальные операторы в уравнении (4.1) конечными разностями, т. е. в данном случае производные II порядка – в волновом уравнении. Их конечно-разностная аппроксимация имеет вид

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta t^2} = a^2 \left( \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \right) \quad (2.17)$$

Производные слева и справа взяты в узле  $(i, j)$ , где

$$i = 1, 2, 3, \dots, I - 1$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, J - 1$$

Таким образом, мы перешли к системам алгебраических уравнений, в которых неизвестными являются значения функции во внутренних узлах  $u_i^j$ , кроме граничных узлов.

Теперь мы должны записать в дискретной форме начальные и граничные условия.

В непрерывных значениях первое начальное условие было записано как

$$u(t = 0, x) = \varphi_1(x) \quad (2.18)$$

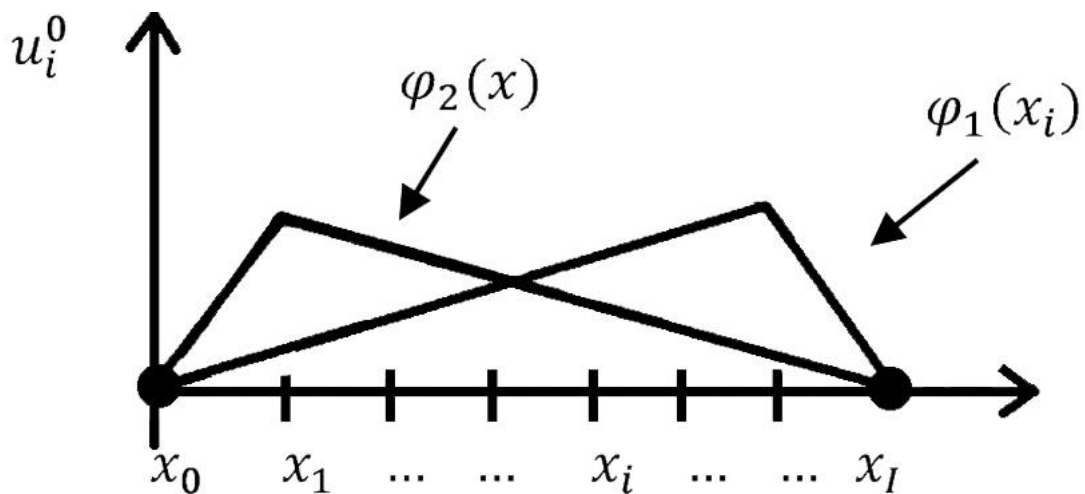


Рисунок 6

В дискретной форме

$$u_i^0 = \varphi_1(x_i) = \varphi_{1i} \quad (2.19)$$

Второе начальное условие в непрерывной форме

$$\frac{du}{dt} = \varphi_2(x) \quad (2.20)$$

В дискретной форме

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\Delta t} = \varphi_2(x_i) = \varphi_{2i}, \quad u_i^1 = u_i^0 + \Delta t \varphi_{2i} \quad (2.21)$$

$$i = 0, 1, 2 \dots I$$

Граничные условия в непрерывной форме:

$$u(x = 0, t) = u(x = l, t) = 0 \quad (2.22)$$

В дискретной форме

$$u_0^j = u_l^j = 0 \quad (2.23)$$

Итак, мы записали исходное дифференциальное уравнение и начальные и граничные условия в дискретной форме.

Теперь мы можем найти явное выражение для значения сеточной функции на  $(j + i)$  шаге по времени, исходя из предыдущей вычислительной схемы:

$$u_i^{j+1} = 2(1 - \lambda)u_i^j + \lambda(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - u_i^{j-1} \quad (2.24)$$

где  $\lambda = \frac{a^2 t^2}{h^2}$ .

Из соотношения (2.19) следует: чтобы знать значение функции  $u$  на некотором шаге ( $u_i^{j+1}$ ), нужно знать эти значения на двух предыдущих шагах:  $u_i^j, u_i^{j-1}$ .

Из начального условия (2.19) мы знаем  $u_i^0$  т. е. отклонение струны от положения равновесия в каждой точке. Из начального условия (2.20) мы также знаем отклонение струны на первом шаге при  $j = 1$ .

Следовательно, мы можем, используя конечно-разностное рекуррентное выражение, определить положение струны при  $j + 1 = 2$ :

$$u_i^2 = 2(1 - \lambda)u_i^1 + \lambda(u_{i+1}^1 + u_{i-1}^1) - u_i^0 \quad (2.25)$$

$$u_i^3 = 2(1 - \lambda)u_i^2 + \lambda(u_{i+1}^2 + u_{i-1}^2) - u_i^1$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, I-1$$

и так далее.

Указанная разностная схема имеет второй порядок погрешности  $\approx O(h^2 + \Delta t^2)$  Так как схема явная, т. е. имеются ограничения на шаг по времени:

$$\left(\Delta t < \frac{h}{a}\right).$$

Преимущество явной схемы: не надо решать систему алгебраических уравнений. Используется простое рекуррентное соотношение.

**Неявная схема.** Эта схема абсолютно устойчива. То есть, снимаются ограничения на величину шага, но алгоритм, естественно, усложняется.

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta t^2} = \frac{a^2}{2} \left( \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{h^2} \right)$$

Производная по  $x$  заменяется полусуммой аппроксимаций на  $(j + 1)$  и  $(j - 1)$  временных шагах (слоях).

Отсюда, учитывая введение  $\text{const } \lambda = \frac{a^2 t^2}{2h^2}$ , можно записать, перенеся влево значения функции на  $(j + 1)$  шаге (слое), а в правой части сосредоточив значения функции на шагах  $j, j-1$ :

$$\begin{aligned} -\lambda u_{i+1}^{j+1} + u_i^{j+1}(1 + 2\lambda) - \lambda u_{i-1}^{j+1} \\ = 2u_i^j + \lambda(u_{i+1}^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}) - (1 + 2\lambda)u_i^{j-1} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Здесь неизвестная функция на временном шаге  $j + 1$  в трех узлах:  $u_{i+1}^{j+1}, u_i^{j+1}, u_{i-1}^{j+1}$ .

Нужно знать значения функции в этих узлах на двух предыдущих шагах  $(j)$  и  $(j - 1)$  При этом  $j = 1, 2, 3, \dots, I - 1$ .

Исходя из начальных условий, нам известны

$$u_i^0 = \varphi_{1i}, u^1 = u_i^0 + \Delta t \varphi_{2i}, (i + 1 = 2).$$

Следовательно, для значений функции на 2-м шаге по времени получим

$$\begin{aligned} -\lambda u_{i+1}^2 + u_i^2(1 + 2\lambda) - \lambda u_{i-1}^2 \\ = 2u_i^1 + \lambda(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0) - (1 + 2\lambda)u_i^0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Т. к.  $i$  меняется:  $i = 1, 2, 3, \dots, I - 1$  на каждом шаге по времени, приходится решать трёхдиагональную систему уравнений. Она решается методом прогонки. Нет ограничения шага по времени – это преимущество. Эта разностная схема устойчива. Погрешность схемы пропорциональна сумме квадратов шага по времени и шага по переменной  $x$ :  $\approx O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ .

## 2.5. Решение уравнения теплопроводности методом конечных разностей

Запишем его для случая двух пространственных переменных  $(x, y)$ .

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.28)$$

Положим  $a = 1$ .

Искомая функция  $u = u(x, y, t)$  – имеет смысл температуры.

Рассмотрим случай, когда область, для которой решается уравнение теплопроводности, представляет собой бесконечно тонкую квадратную пластину:  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ , со сторонами равной 1. Тогда нашу систему координат можно представить так (см. рис. 7).



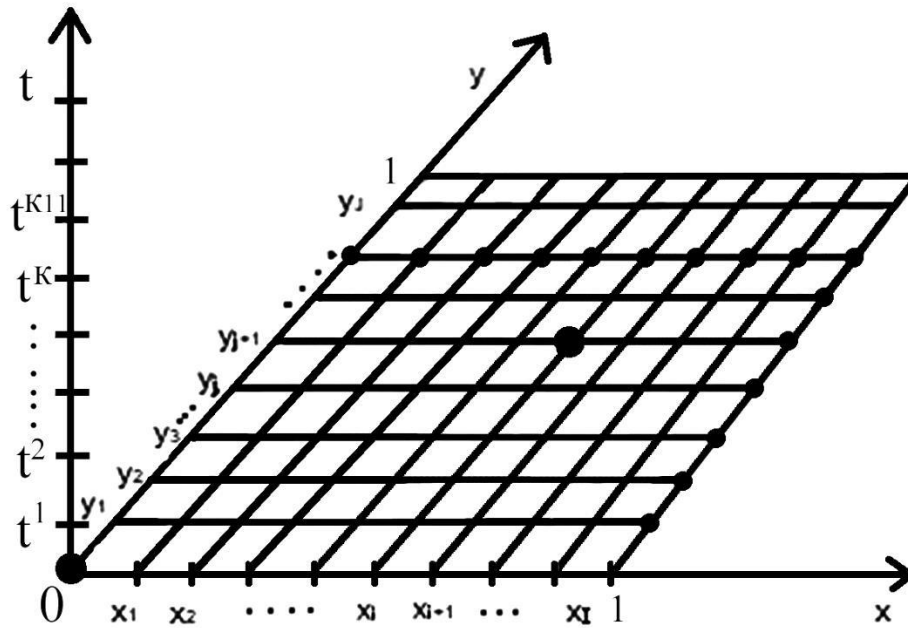


Рисунок 7. Область решения

Мы должны задать начальные и граничные условия. Начальные условия в данном случае – это заданная температура в каждой точке пластины.

$$u(t = 0, x, y) = \varphi(x, y).$$

Граничные условия по физическому смыслу – это распределённая температура, которая поддерживается в любой момент времени на краях пластины. Математически это выглядит так:

на нижней стороне пластины:

$$u(x, y = 0) = f_1(x) \text{ – на нижней стороне пластины:}$$

$$u(x, y = 1) = f_2(x) \text{ – на верхней стороне пластины:}$$

$$u(x = 0, y) = f_3(y) \text{ – на левой стороне пластины:}$$

$$u(x = 1, y) = f_4(y) \text{ – на правой стороне пластины:}$$

Таким образом, мы сформулировали в полном виде задачу:

- записали дифференциальное уравнение в частных производных;
- записали начальные и граничные условия.

Теперь в соответствии с методом конечных разностей (МКР) перейдём к дискретным значениям независимых переменных. При этом дискретный шаг по переменным  $x$ ,  $y$  примем одинаковым и равным  $h$ :

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = y_{j+1} - y_j = \Delta y = h$$

$$\Delta t = t^{k+1} - t^k ; i = 0, 1, 2 \dots I$$

$$j = 0, 1, 2 \dots J$$

$$k = 0, 1, 2 \dots K$$

Дискретное значение функции запишем в виде  $u_{i,j}^k$ , т. е. это значение в  $k$ -й момент времени в некотором узле  $i, j$ . Теперь дифференциальное уравнение (5.1) запишем в дискретном виде:

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} = \left( \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h^2} \right) a^2.$$

Введём постоянную  $\lambda = \Delta t/h^2$ ; В левой части уравнения оставим дискретные значения искомой функции в момент времени  $t^{k+1}$ , в правой части сосредоточим значения дискретной функции в момент времени  $t^k$ .

$$u_{i,j}^{k+1} = \lambda(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k) + u_{i,j}^k(1 - 4\lambda)$$

Это явная вычислительная схема. По сути, это не система уравнений, а рекуррентное соотношение. Оно позволяет определить в каждом внутреннем узле значение искомой функции в момент времени  $t^{k+1}$  по известным значениям функции в предыдущий момент времени  $K$ .

Запишем в дискретном виде начальные и граничные условия:

Начальное условие:  $u^0(x_i, y_j) = u_{i,j}^0 = \varphi(x_i, y_j) = \varphi_{i,j}$

Граничные условия на нижней стороне:  $u^k(x_i, y_0) = u_{i,0}^k = f_1(x_i) = f_{1,i,0}$

Граничные условия на верхней стороне:  $u^k(x_i, y_j) = u_{i,j}^k = f_2(x_i) = f_{2,i,j}$

Граничные условия на левой стороне:  $u^k(x_0, y_j) = u_{0,j}^k = f_3(y_j) = f_{3,0,j}$

Граничные условия на правой стороне:  $u^k(x_l, y_j) = u_{l,j}^k = f_{4,l,j}$

Итак, зная из начальных условий значения функций  $u_{i,j}^k = \varphi_{i,j}$  в момент времени  $k = 0; t^0$ , мы можем из предыдущего соотношения (вычислительная схема), пробегая по соответствующим значениям  $i$  и  $j$ , определить значения  $u_{i,j}^1$ , на первом шаге по времени ( $k = 1$ ) во всех внутренних узлах:

$$u_{i,j}^1 = \lambda(u_{i+1,j}^0 + u_{i-1,j}^0 + u_{i,j+1}^0 + u_{i,j-1}^0) + u_{i,j}^0(1 - 4\lambda)$$

↓            ↓            ↓            ↓            ↓

$$u_{i,j}^1 = \lambda(\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1}) + \varphi_{i,j}(1 - 4\lambda),$$

Когда  $i, j$  будут соответствовать граничным узлам, нужно будет подставлять дискретные значения функции  $f$ , из граничных условий.

Далее находим значения на втором шаге:  $k + 1 = 2$  и т. д.

Погрешность  $\approx O(h^2 + \Delta t)$ ,  $\Delta t \leq \frac{h^2}{4a}$ , т. е. имеется ограничение на шаг по времени.

## 2.6. Неявная абсолютно устойчивая схема для уравнения теплопроводности

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} = a \left( \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{h^2} \right) = 0$$

где  $a = 1$ . Введём:  $\lambda = \Delta t/h^2$ , тогда можно переписать это соотношение, перенеся влево все члены с индексом  $(k+1)$ .

$$u_{i,j}^k (1 + 4\lambda) + u_{i,j}^k = -\lambda (u_{i+1,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1})$$

где  $i = 1, 2, \dots, I-1$   $j = 1, 2, \dots, J-1$

Начальные и граничные условия остаются те же. Это пятидиагональная система уравнений, общее число уравнений равно числу внутренних узлов, оно равно  $(I-1)(J-1)$ . Решение пятидиагональной системы уравнений может занять значительное время. Поэтому в данном случае применяют следующую экономичную абсолютно устойчивую неявную схему по методу расщепления (методу дробных шагов). Эта схема позволяет проводить расчёты со сравнительно большим шагом по времени ( $h \approx \Delta t$ ). Основой этого метода является то, что расчёт на одном шаге по времени разбивается на отдельные этапы.

При этом общая вычислительная схема сохраняет преимущества явных схем, т. е. простой вычислительный алгоритм и преимущество неявных схем – возможность счёта с большим шагом по времени.

Одну из таких схем, пригодных для случая двух пространственных переменных  $(x, y)$ , мы рассмотрим.

Суть схемы:

– шаг  $\Delta t$  делится на два полушага, которым соответствуют временные индексы  $(k + \frac{1}{2})$  и  $(k+1)$ :

– на 1-м полушаге вторая производная, например,  $\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}\right)$  аппроксимируется неявно на слое  $(k+\frac{1}{2})$  а другая  $\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}$  аппроксимируется на слое  $(k+\frac{1}{2})$  явно;

– на 2-м полушаге, наоборот,  $\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}$  аппроксимируется явно на слое  $(k+1)$ , а  $\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}$  аппроксимируется неявно.

Запишем это:

$$\frac{u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^k}{\Delta t/2} = \left( \frac{u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h^2} \right),$$

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} = \left( \frac{u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{h^2} \right),$$

введём:  $\lambda = \Delta t/h^2$ , и получим

$$\lambda \left( u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) - u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} (1 + 2\lambda) = u_{i,j}^k (1 - 2\lambda) + \lambda (u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k) + \lambda (u_{i,j+1}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}) - u_{i,j}^{k+1} (1 + 2\lambda) = u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} (1 - 2\lambda) + \lambda (u_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}})$$

Вначале рассматривается первая система уравнений.

Мы видим, что это трёхдиагональная система уравнений. В левой части неизвестны значения функции в трёх узлах, в правой части значения функции на предыдущем шаге  $K$  известны. Система решается методом прогонки, т. е. быстро.

Как и выше, вначале полагаем  $K = 0$ ; При  $K = 0$  нам известны все значения функции во внутренних узлах, исходя из начальных условий.

Из уравнений определяем значения функций при  $(K + 1/2)$  и т. д.

Определив значения искомой функции на  $(K + 1/2)$ , подставляем их во вторую систему уравнения, которая также решается методом прогонки (т. е. трёхдиагональная).

Эта схема справедлива для случая только двух пространственных переменных  $(x, y)$ .

## ГЛАВА 3. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

### 3.1. Функционал и уравнение Эйлера

Известно, что состояния многих физических объектов описываются так называемыми принципами минимума.

Например, положение равновесия механических систем определяется положением, соответствующему минимуму потенциальной энергии.

При решении краевых задач для дифференциальных уравнений, связанных с механическими системами, оказалось, что решение дифференциального уравнения совпадает с функцией, которая обеспечивает минимум определённому интегралу, которым выражается потенциальная энергия этой механической системы.

Описанное совпадение имеет фундаментальный характер. Доказано, что существуют такие пары: функционал в виде определённого интеграла и дифференциальное уравнение, которые имеют общее решение. Иными словами, функция, которая обеспечивает минимум определенного интеграла, одновременно является и решением соответствующего дифференциального уравнения. Это дифференциальное уравнение называется уравнением Эйлера – Лагранжа.

Также такие пары существуют в области обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнениях частных производных.

Чем же отличается функция от функционала? Функция – правило, которое ставит в соответствие одному числу некоторое другое число, пример:

$$y = x^2 \text{ ставит в соответствие } 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 9, 0,5 \rightarrow 0,25.$$

Функционал: правило, которое ставит в соответствие определенной функции некоторое число. Пусть  $u = u(x)$  – некоторая заданная функция, к примеру

$$u(x) = x^2$$

зададим определенный интеграл

$$I = \int_0^2 u * u'_x dx, \text{ где } u'_x = \frac{du}{dx};$$

Это будет функционал, численное значение которого зависит от вида функции  $u = u(x)$ :  $u(x) = x^2 \rightarrow u' = 2x$ , подставим  $u(x)$  и  $u'(x)$  в функционал

$$I = \int_0^2 x^2 * 2x dx = \int_0^2 2x^3 dx = \left. F(x) \right|_0^2 = \left. 2 \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = \frac{2^4}{2} - 0 = 8.$$

Теперь рассмотрим пример:  $u(x) = x^3, u'(x) = 3x^2$ , тогда функционал примет значение

$$I = \int_0^2 3x^3 * x^2 dx = \int_0^2 3x^5 dx = \left. 3 * \frac{x^6}{6} \right|_0^2 = 32.$$

Т. е., как видно из примеров, числовое значение функционала зависит от вида функции. Следует подчеркнуть, что, как правило, функционал в виде определённого интеграла и дифференциальное уравнение отражают в разной форме свойства одного и того же физического объекта или явления.



Основной вывод для нас следующий: существуют сопряженные пары – функционал в виде определенного интеграла и соответствующее ему дифференциальное уравнение. Их сопряженность заключается в том, что функция, при подстановке, обеспечивающая минимальное численное значение определённого интеграла одновременно является решением дифференциального уравнения.

Следовательно, решение дифференциального уравнения можно заменить нахождением функции, дающей минимум интегралу.

Подобный вывод впервые сделал Л. Эйлер.

Применим подобный подход при решении уравнения Пуассона.

Рассмотрим функционал в виде следующего интеграла:

$$I = \iint_S \left[ (u'_x)^2 + (u'_y)^2 + 2f(x, y)u \right] dx dy \quad (3.1)$$

где  $(u'_x)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ ,  $(u'_y)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ .

Эйлер вывел следующую формулу, которая определяет дифференциальное уравнение, решение которого одновременно обеспечивает при подстановке в определённый интеграл его минимальное значение. Обозначим функцией  $F$  подынтегральное выражение в (1.1). Уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_y} \right) - \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \quad (3.2)$$

так как  $\frac{\partial F}{\partial u'_x} = 2 \frac{\partial u}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial F}{\partial u'_y} = 2 \frac{\partial u}{\partial y}$ ;  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_x} \right) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ;  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_y} \right) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2f(x, y)$$

Подставив эти выражения в формулу Эйлера, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

Это уравнение Пуассона. Вместо того чтобы решать уравнение Пуассона, будем искать функцию, дающую минимум определенному интегралу (1.1).

### 3.2. Метод Ритца

Было показано следующее: чтобы решить уравнение Пуассона нужно искать функцию, дающую минимум определенному интегралу.

$$I = \iint_S \left[ (u'_x)^2 + (u'_y)^2 + 2f(x, y)u \right] dx dy \quad (3.3)$$

Суть метода Ритца заключается в следующем: строится проект решения в виде суммы членов, каждый из которых представляет произведение постоянного коэффициента (значение которого в начале неизвестно) на заданную функцию, удовлетворяющую нулевым граничным условиям:

$$\tilde{u} = \sum_{i=0}^n A_i \varphi_i(x, y) = A_0 \varphi_0(x, y) + A_1 \varphi_1(x, y) + \quad (3.4) \\ + A_2 \varphi_2(x, y) + \dots + A_n \varphi_n(x, y),$$

где  $\varphi_0 = \omega(x, y); \varphi_1 = \omega(x, y)x; \varphi_2 = \omega(x, y)y; \varphi_3 = \omega(x, y)xy, \dots, \varphi_n(x, y)x^n$ .

Во все члены входит функция  $\omega(x, y)$ , поскольку  $\tilde{u}$  должна удовлетворять нулевым граничным условиям, то выбирают

$\omega(x, y)$  таким образом, чтобы  $\omega(x, y)$  удовлетворяло нулю на границе области, в которой ищется решение дифференциального уравнения.

Для этого за  $\omega(x, y)$  принимают границы области, например, если границы области – окружность радиуса  $R$  на рис. 8.

Если область – круг, то  $\omega(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$ .

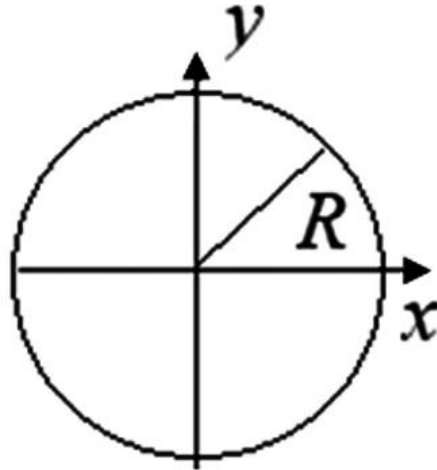


Рисунок 8. Область круг

Если область – прямоугольник, то  $\omega(x, y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$  (рис. 9).

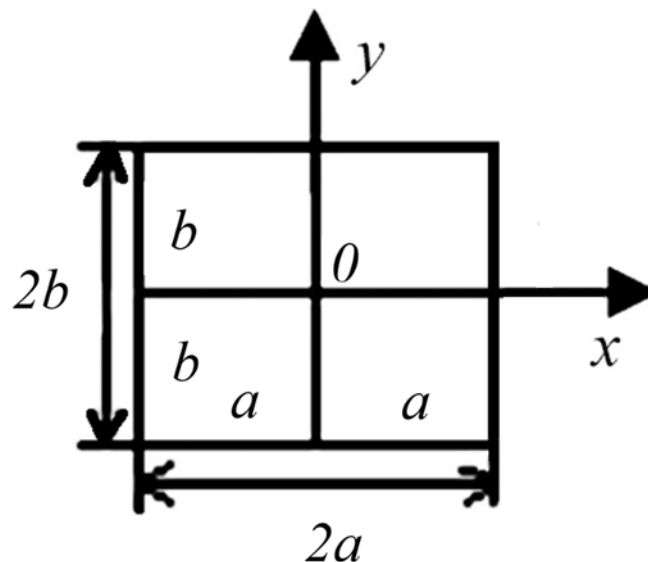


Рисунок 9. Область прямоугольник (Начало координат в центре области)

Учитывая, что в выражении (3.4) функции  $\varphi_i(x, y)$  мы сами задали, можно легко найти  $\tilde{u}'_x, \tilde{u}'_y$ . Подставим выражение (3.4) в интеграл (3.2):

$$I = \iint_d \left[ \left( \sum_{i=0}^n A_i \varphi'_i \right)^2 + \left( \sum_{i=0}^n A_i \varphi'_i \right)^2 - 2f(x, y) \sum_{i=0}^n A_i \varphi_i \right] dx dy, \quad (3.5)$$

После интегрирования переменные  $x$  и  $y$  исчезают, вместо интеграла получаем некоторую линейную функцию от неизвестных постоянных коэффициентов  $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$

$$I = I(A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) \quad (3.6)$$

Получив эту функцию, мы можем найти такие значения  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , которые обеспечивают минимальное значение интеграла (3.5).

Для этого, как известно, нужно приравнять нулю производные  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ . В итоге получим следующую систему уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial A_0} = 0; \frac{\partial I}{\partial A_1} = 0; \frac{\partial I}{\partial A_2} = 0; \dots \frac{\partial I}{\partial A_n} = 0. \quad (3.7)$$

Система уравнений (3.6) является линейной, из неё можно найти неизвестные значения  $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , которые подставляют в проект решения (3.4)

### 3.3. Пример решения уравнения Пуассона методом Ритца

Пусть дано двумерное уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (3.8)$$

Для простоты рассматриваемого решения положим  $f(x, y) = -2$ . Пусть граница области решения представляет собой прямоугольник со сторонами  $2a$  и  $2b$  (рис. 9).

С точки зрения физики уравнение (3.8) описывает кручение призматического стержня: прямоугольник – сечение стержня. Граничные условия:  $u|_{\Gamma} = 0$

В соответствии с методом Ритца решение будем искать в виде:

$$\tilde{u} = \sum_{i=0}^n A_i \varphi_i(x, y) = A_0 \omega(x, y) + A_1 \omega(x, y)x + A_2 \omega(x, y)y + \dots \quad (3.9)$$

Ограничимся для простоты только первым членом ряда (3.9)

$$\tilde{u} = A_0 \omega(x, y), \quad (3.10)$$

В соответствии с методом выберем в качестве  $\omega(x, y)$  уравнение границ прямоугольника:  $\omega(x, y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$ , тогда проект-решения примет вид:

$$\tilde{u} = A_0 (a^2 - x^2)(b^2 - y^2), \quad (3.11)$$

где  $A_0$  неизвестный коэффициент, в данном случае функционал примет вид:

$$I = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ (u'_x)^2 + (u'_y)^2 + 2f(x, y)u \right] dx dy, \quad (3.12)$$

где  $u'_x = [(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)A_0]' = -2x(b^2 - y^2)A_0$

$$u'_y = [(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)A_0]' = -2y(b^2 - y^2)A_0$$

подставив данные выражения в функционал  $I$ , получим, зная  $f(x, y)$ :

$$I = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ (-2x(b^2 - y^2)A_0)^2 + (-2y(b^2 - y^2)A_0)^2 - 4(a^2 - x^2)(b^2 - y^2) \right] dx dy, \quad (3.13)$$

В итоге интеграл  $I$  можно представить в виде суммы интегралов

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \quad (3.14)$$

Запишем эти интегралы и возьмём их:

$$I_1 = \int_{-a}^a \int_{-b}^b [4x^2(b^2 - y^2)A_0^2] dx dy = \frac{128}{45} a^3 b^5 A_0^2$$

$$I_2 = \int_{-a}^a \int_{-b}^b -[4y^2(b^2 - y^2)A_0^2] dx dy = \frac{128}{45} a^3 b^5 A_0^2$$

$$I_3 = \int_{-a}^a \int_{-b}^b -[4(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)] dx dy = -\frac{64}{9} a^3 b^3 A_0$$

$$I = A_0^2 \frac{128}{45} a^3 b^3 (a^2 + b^2) - \frac{64}{9} a^3 b^3 A_0$$

Сложим результаты и, чтобы найти  $A_0$ , в соответствии с методом, найдём производную по  $A_0$  и приравняем её нулю

$$\frac{\partial I}{\partial A_0} = 0 \rightarrow \frac{\partial I}{\partial A_0} = \frac{128}{45} A_0 a^3 b^3 (a^2 + b^2) - \frac{32}{9} a^3 b^3 = 0$$

$$A_0 = \frac{64}{9} * \frac{a^3 b^3 * 45}{256 * a^3 b^3 (a^2 + b^2)} = \frac{5}{4} \left( \frac{1}{a^2 + b^2} \right)$$

тогда итоговое решение примет вид

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{5}{4(a^2 + b^2)} (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$$

### 3.4. Решение дифференциальных уравнений методом Бубнова – Галёркина

Ранее мы рассмотрели вариационный принцип Ритца. Однако он очень ограничен по своей сфере применения; здесь мы рассмотрим похожий метод – метод Бубнова – Галёркина, но с более широким спектром применения, пригодным для решения уравне-

ний эллиптического типа (уравнения Лапласа, Пуассона) гиперболического типа (волновое), параболического типа (уравнение теплопроводности).

Кроме того, в данном методе не нужно привлекать функционал и использовать функцию, дающую минимум функционалу. Пусть имеем некоторое дифференциальное уравнение

$$LU = 0 \quad (3.15)$$

где  $L$  – дифференциальный оператор, принимающий разную форму; например, для уравнения Пуассона:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - f(x, y).$$

Пусть уравнение (4.1) решается для некоторой области  $D$  с границей  $\Gamma$ . Пусть задано граничное условие

$$U|_{\Gamma} = 0.$$

Значение функции  $U$  на границе  $D$  области равно 0.

Далее, как в методе Ритца, решение ищем в виде ряда

$$\tilde{U} = \sum_{i=0}^n A_i \varphi_i(x, y),$$

где  $\varphi_i(x, y)$  – функции заданные,  $A_i$  – неизвестные коэффициенты. Далее делается предположение, что  $\tilde{U}$  даёт точное решение дифференциального уравнения. Это означает, что

$$L[\tilde{U}] \equiv 0.$$

т. е. имеется тождественное равенство 0, следовательно выражение  $L[\tilde{U}]$  должно быть ортогонально ко всем функциям  $\varphi_i(x, y)$ .

Учитывая всё вышесказанное, можно перейти к системе уравнений

$$\iint_D L \left[ \sum_{i=0}^n A_i \varphi_i(x, y) \right] \varphi_i(x, y) dx dy = 0,$$

или запишем по-другому:

$$\iint_D L \left[ \sum_{i=0}^n A_i \varphi_i(x, y) \right] \varphi_0(x, y) dx dy = 0,$$

$$\iint_D L \left[ \sum_{i=0}^n A_i \varphi_i(x, y) \right] \varphi_1(x, y) dx dy = 0,$$

$$\iint_D L \left[ \sum_{i=0}^n A_i \varphi_i(x, y) \right] \varphi_2(x, y) dx dy = 0,$$

.....

$$\iint_D L \left[ \sum_{i=0}^n A_i \varphi_i(x, y) \right] \varphi_n(x, y) dx dy = 0.$$

После интегрирования переменные  $x, y$  исчезнут, останутся линейные алгебраические уравнения относительно  $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ .



### 3.5. Пример решения уравнения Пуассона методом Бубнова – Галёркина

Пусть дано двумерное уравнение Пуассона, которое решалось ранее методом Ритца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (3.16)$$

В случае (3.16) дифференциальный оператор выглядит так:

$$L[U] = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - f(x, y).$$

Граница области решения представляет собой прямоугольник со сторонами  $2a$  и  $2b$ , а функция  $f(x, y) = -2$  (см. рис. 9):

Составим проект решения

$$\tilde{U} = \sum_{i=0}^n A_i \varphi_i(x, y). \quad (3.17)$$

Ограничимся первым членом ряда (3.17):

$$\tilde{U} = \sum_{i=0}^n A_i \varphi_i(x, y) = A_0 \omega(x, y). \quad (3.18)$$

Воспользуемся граничным условием

$$U|_{\Gamma} = 0$$

тогда:  $\omega(x, y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$ .

Отсюда:

$$\tilde{U} = A_0(a^2 - x^2)(b^2 - y^2).$$

Отсюда:  $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = -2(b^2 - y^2)A_0$ ,  $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = -2(a^2 - x^2)A_0$ .

Далее в соответствии с методом можно записать

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b L[\tilde{U}] \varphi_0(x, y) dx dy =$$

$$= \int_{-a}^a \int_{-b}^b [-2(b^2 - y^2)A_0 - 2(a^2 - x^2)A_0 + 2] \times \\ \times (a^2 - x^2)(b^2 - y^2) dx dy = 0$$

Интегрируя по переменным  $x, y$ , получим

$$\frac{128}{45} * a^3 b^3 (a^2 + b^2) A_0 - \frac{32}{9} a^3 b^3 = 0,$$

тогда  $A_0$

$$A_0 = \frac{5}{4(a^2 + b^2)}, \tilde{U}(x, y) == \frac{5}{4(a^2 + b^2)} (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$$

## ГЛАВА 4. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### 4.1. Этапы применения метода конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) является численным методом решения дифференциальных уравнений, встречающихся в физике и технике. Возникновение этого метода связано с решением задач космических исследований. Первое формальное изложение метода конечных элементов дано в 1956 г. М. Тэрнером, Р. Клафом, Х. Мартином и Л. Топпом. При исследовании задачи о плоском напряженном состоянии они использовали для описания свойств треугольного конечного элемента уравнения классической теории упругости. Эта работа способствовала появлению других работ; был опубликован ряд статей с применениями метода конечных элементов к задачам строительной механики и механики сплошных сред. Сам термин «конечные элементы» был введен в 1960 г. Р. Клафом.

Основные преимущества:

- применим для областей произвольной формы;
- в результате решения получаются соотношения описывающие значения не только в узлах сетки, но и в любой точке между узлами.

Рассмотрим этапы применения метода.

*Первый этап*

Пусть подготовлена краевая задача.

Задано в общем виде дифференциальное уравнение:

$$L[U] = 0,$$

здесь  $L$  – дифференциальный оператор, символизирующий дифференциальное уравнение в частных производных (например, волновое уравнение, теплопроводности, Лапласа, Пуассона и т. д.).

Пусть задана область, начальные и граничные условия.

1 этап подразумевает разбиение заданной области на отдельные конечные элементы. В случае плоской области это могут быть треугольники. В случае объемных областей это могут быть пирамиды, параллелепипеды, кубы и др. Отметим, что конечные элементы могут иметь криволинейные границы и **необязательно должны быть одинаковыми**.

Разбиения на конечные элементы их вершины (узлы) нумеруются. При нумерации узлов предназначен алгоритм, обеспечивающий минимальную разность между номерами узлов, в каждом отдельном конечном элементе.

Такая необходимость связана со следующим обстоятельством, на конечном этапе МКЭ решается система линейных алгебраических уравнений, матрица коэффициентов такой системы при применении метода является сильно разреженной т. е. все коэффициенты, кроме близко расположенных к диагонали равны 0

$$\begin{pmatrix} X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & X & X & X & 0 & \vdots \\ 0 & X & X & X & X & 0 \\ 0 & X & X & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & X & X \end{pmatrix}$$

где  $x$  – отличные от нуля коэффициенты

Чем уже ширина  $L$  ленты ненулевых элементов, тем меньше нужна память для их запоминания и быстрее идет счет. Оказывается,  $L = N + 1$ , где  $N$  – максимальная разность между номерами узлов для отдельного элемента.

При наличии большого количества элементов (например, нескольких тысяч) задача ручного разбиения и нумерации становится весьма трудоемкой. Поэтому в последнее время стали разрабатываться программы автоматического разбиения и нумерации, которые, например, минимизируют ширину  $L$ .

Рассмотрим область на рис. 10, которая разбита на криволинейные треугольники.

Как видно из рис. 10, область разбита на 18 треугольников (конечных элементов). Их номера указаны в скобках. Общее число вершин – 17. Нумерация вершин неудачна, т. к., например, в конечном элементе номер 8 максимальная разность номеров вершин  $N = 15 - 1 = 14$ , для конечного элемента номер 12  $N$  тоже равна 14.

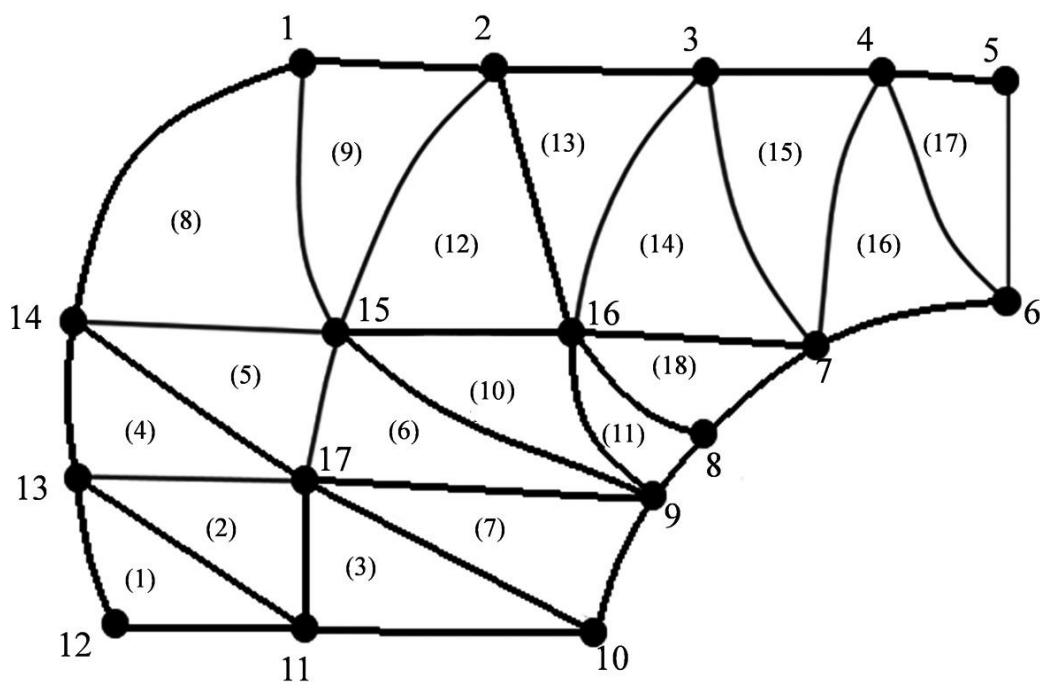


Рисунок 10. Разбиение на конечные элементы

Рассмотрим более удачный пример нумерации вершин конечных элементов, представленный на следующем рис. 11.

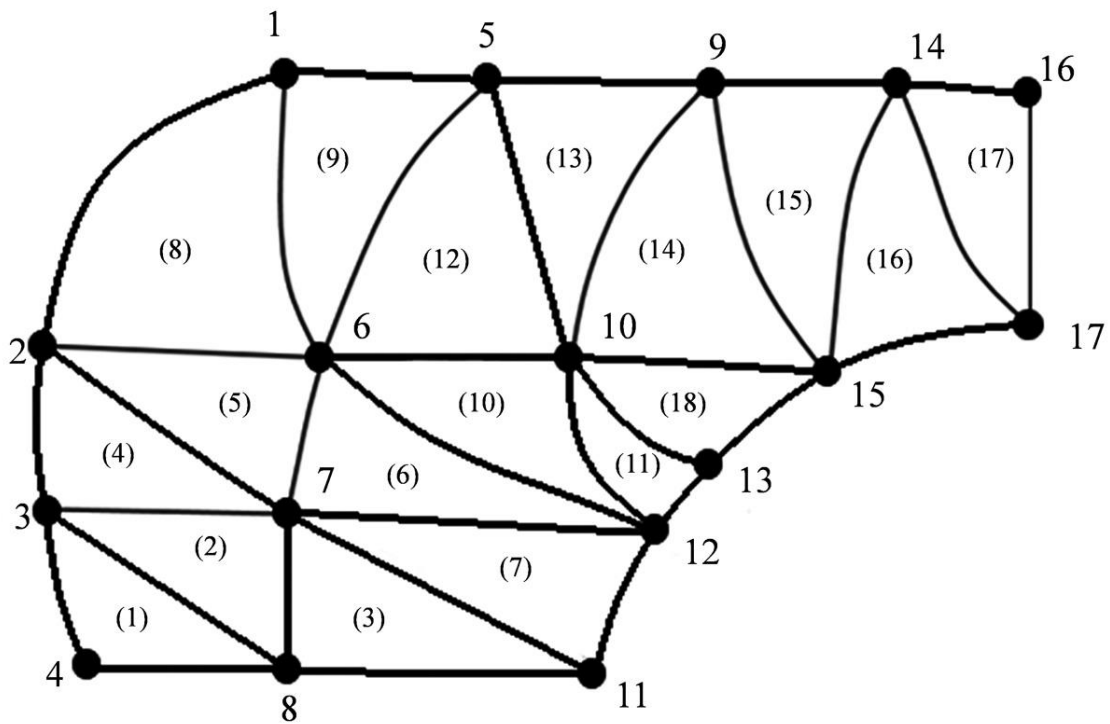


Рисунок 11

Здесь максимальное  $N = 8$  в ячейке (10), т. е. нумерация более удачная.

Далее следует второй этап – определение аппроксимирующей функции для каждого конечного элемента

Под аппроксимирующей функцией в МКЭ понимают функцию, которая по значениям искомой функции в узлах (вершинах) конечного элемента дает возможность определить значение искомой функции в произвольной точке конечного элемента. Рассмотрим случай одномерной и двумерной функции, соответственно одномерной и двумерной области.

Случай: одномерная область, то есть некоторая искомая функция  $\varphi(x)$  зависит только от одной переменной  $x$ . Отметим, что конечной задачей метода МКЭ является определение узловых значений функции, но для данного этапа будем считать, что узловые значения нам известны. Искомая непрерывная функция аппроксимируется

кусочно-непрерывной, определенной на множестве конечных элементов. Важным аспектом МКЭ является то, что для элементов одного и того же типа может быть выбрана одна и та же аппроксимирующая функция. Далее она может использоваться в различных краевых задачах, в которых используются элементы данного типа.

Рассмотрим одномерный случай, представленный ниже на рис. 12.

Здесь в качестве конечных элементов используются отрезки между дискретными значениями  $x : x_i, x_j$ .

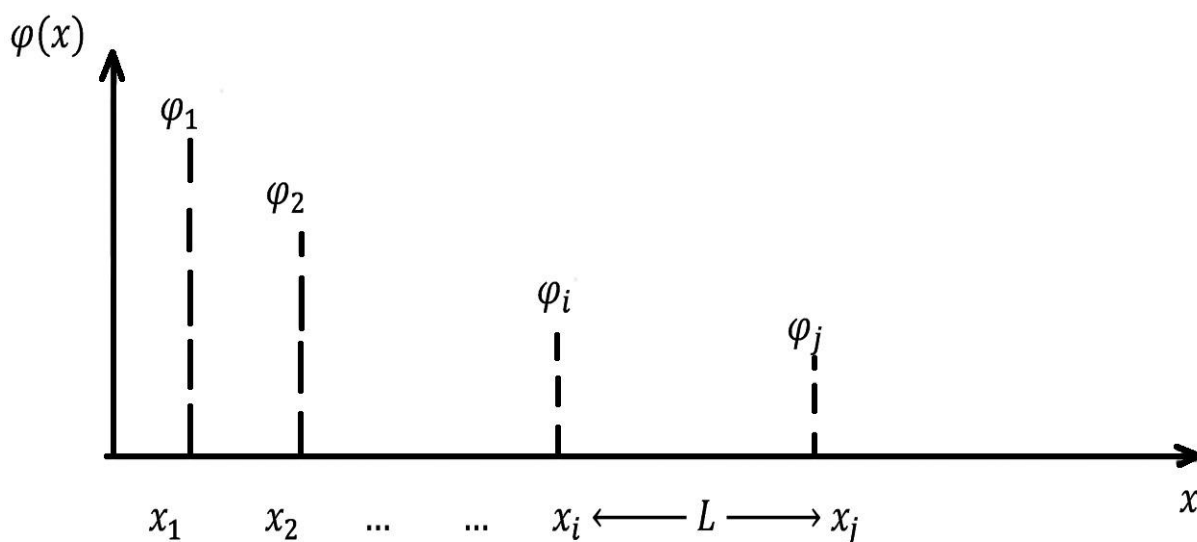


Рисунок 12

Итак, пусть на концах элемента известны значения  $\varphi_i, \varphi_j$ , а аппроксимирующая функция имеет вид

$$\phi = a_1 + a_2x. \quad (4.1)$$

Определим  $a_1$  и  $a_2$ , считая, что  $\varphi_i$  и  $\varphi_j$  известны:

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \varphi(x_i) \\ \varphi_j &= \varphi(x_j) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Подставив (4.2) в (4.1) получим:

$$\varphi_i = a_1 + a_2x_i$$

$$\varphi_j = a_1 + a_2 x_j \quad (4.3)$$

$a_1$  найдем, умножив первое уравнение на  $x_j$  второе на  $x_i$  и вычтем из первого второе:

$$\varphi_i x_j = a_1 x_j + a_2 x_i x_j,$$

$$\varphi_j x_i = a_1 x_i + a_2 x_i x_j,$$

$$\varphi_i x_j - \varphi_j x_i = a_1 (x_j - x_i),$$

$$a_1 = \frac{\varphi_i x_j - \varphi_j x_i}{x_j - x_i} = \frac{\varphi_i x_j - \varphi_j x_i}{L}.$$

$a_2$  найдем, вычитая из первого уравнения второе:

$$\varphi_i - \varphi_j = a_2 (x_i - x_j); a_2 = \frac{\varphi_j - \varphi_i}{L}.$$

Подставим теперь найденные выражения для  $a_1$  и  $a_2$  в аппроксимирующую функцию (1.1):

$$\varphi = \left( \frac{\varphi_i x_j - \varphi_j x_i}{L} \right) + \left( \frac{\varphi_j - \varphi_i}{L} \right) x,$$

преобразуем:

$$\varphi = \left( \frac{x_j - x}{L} \right) \varphi_i + \left( \frac{x - x_i}{L} \right) \varphi_j.$$

Обозначим:

$$\left( \frac{x_j - x}{L} \right) = N_i,$$

$$\left( \frac{x - x_i}{L} \right) = N_j,$$

в итоге можно записать

$$\varphi = N_i \varphi_i + N_j \varphi_j \quad (4.4)$$

$N_i, N_j$  – коэффициенты формы.



Коэффициенты формы обладают свойством: коэффициенты с индексом  $i$  равны 1 в узле с номером  $i$  и равны 0 во всех других узлах.

**Двумерный случай.** Это случай, в котором в качестве конечного элемента используется треугольник, один из которых представлен на рис. 13.

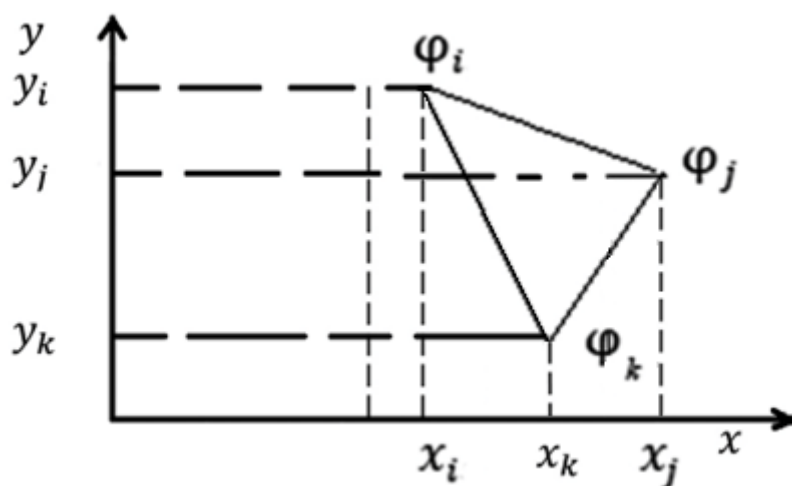


Рисунок 13. Один из конечных элементов

Покажем, что и в этом случае мы приходим к аппроксимирующей функции, которая связывает значение непрерывной функции  $\varphi$  с ее дискретными значениями в узлах сетки.

При этом коэффициенты формы  $N$  зависят от текущих координат  $x$  и  $y$ . Если  $x$  и  $y$  совпадают с координатами узлов, мы получаем значение  $\varphi$  в узлах, а если нет, то между узлами.

Аппроксимирующая непрерывная функция  $\varphi$  элементарного треугольника имеет вид

$$\varphi = a_1 + a_2x + a_3y.$$

Опять полагаем, что значения искомой функции  $\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k$  в вершинах треугольника известны. Составим систему уравнений, в

которых слева значения  $\varphi$  в вершинах элемента, а справа подставляем координаты узлов.

$$\begin{cases} \varphi_i = a_1 + a_2 X_i + a_3 Y_i \\ \varphi_j = a_1 + a_2 X_j + a_3 Y_j \\ \varphi_k = a_1 + a_2 X_k + a_3 Y_k \end{cases}$$

Как и ранее, находим из этой системы коэффициенты  $a_1, a_2, a_3$ , подставляем их в аппроксимирующую функцию и, переходя к коэффициентам формы  $N$ , получим

$$\varphi = N_i \varphi_i + N_j \varphi_j + N_k \varphi_k,$$

где  $N_i = \left(\frac{0,5}{S}\right) (a_i + b_i x + c_i y)$ ;  $N_j = \left(\frac{0,5}{S}\right) (a_j + b_j x + c_j y)$ ;  
 $N_k = \left(\frac{0,5}{S}\right) (a_k + b_k x + c_k y)$ ;  $S$  – площадь конечного элемента;  
 $a_i = x_j y_k - x_k y_j$ ;  $a_j = x_k y_i - y_k x_i$ ;  $a_k = x_i y_j - x_j y_i$ ;  $b_i = y_j - y_k$ ;  
 $b_j = y_k - y_i$ ;  $b_k = y_i - y_j$ ;  $c_i = x_k - x_j$ ;  $c_j = x_i - x_k$ ;  $c_k = x_j - x_i$ .

Аналогично могут быть рассчитаны коэффициенты для других типов элементов.

### 3) этап. Объединение конечных элементов в ансамбль.

В результате этого этапа мы приходим к системе уравнений (алгебраических), которая получается, если мы рассмотрим одновременно уравнения, полученные для каждого из элементов разбиения. Эта система позволяет при известных узловых значениях искомой функции получить значение искомой функции в любой точке области.

Эти уравнения нетрудно получить, если мы заменим в уравнениях индексы  $i, j, k$  на конкретные номера узлов сетки.

Рассмотрим одномерный случай (рис. 14). На рисунке  $L$  – длина элемента, число в скобках – номер элемента ( $l$ ).

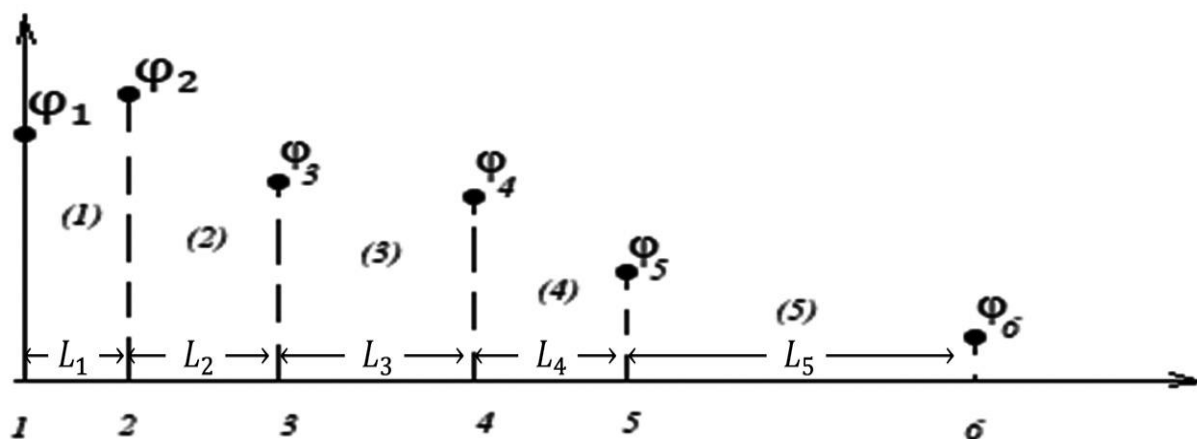


Рисунок 14

Функция отдельного элемента определена уравнением

$$\varphi^l = \varphi_i^l \varphi_i + N_j^l \varphi_j, \text{ где } l - \text{ номер элемента.}$$

Можно написать следующее соответствие.

Элемент  $l = 1, i = 1; j = 2;$

Элемент  $l = 2, i = 2; j = 3;$

Элемент  $l = 3, i = 3; j = 4;$

Элемент  $l = 4, i = 4; j = 5;$

Элемент  $l = 5, i = 5; j = 6.$

Подставив эти номера в  $\varphi^l$ , получим:

$$\varphi^{(1)} = N_1^{(1)} \varphi_1 + N_2^{(1)} \varphi_2 + 0 * \varphi_3,$$

$$\varphi^{(2)} = N_2^{(2)} \varphi_2 + N_3^{(2)} \varphi_3 + 0 * \varphi_4,$$

$$\varphi^{(3)} = N_3^{(3)} \varphi_3 + N_4^{(3)} \varphi_4,$$

$$\varphi^{(4)} = N_4^{(4)} \varphi_4 + N_5^{(4)} \varphi_5,$$

$$\varphi^{(5)} = N_5^{(5)} \varphi_5 + N_6^{(5)} \varphi_6.$$

Естественно, что в выражениях для  $N_i$  и  $N_j$  также надо подставить глобальные номера узлов, например

$$N_3^{(2)} = (x - x_2)/L^{(2)},$$

$$N_3^{(3)} = (x_4 - x)/L^{(3)}.$$

Для двумерного случая. Пусть имеем область (рис. 15).

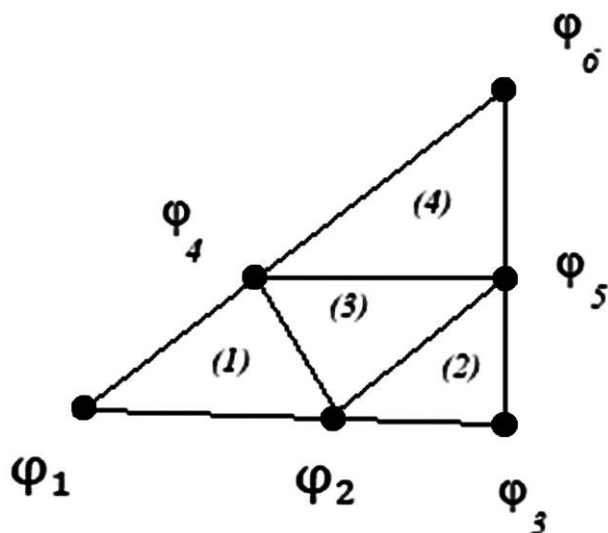


Рисунок 15

Напишем соответствие между глобальными номерами узлов и их обозначениями в элементе  $i, j, k$  (против часовой стрелки).

Элемент (1),  $i = 1; j = 4; k = 2;$

Элемент (2),  $i = 2; j = 5; k = 3;$

Элемент (3),  $i = 2; j = 4; k = 5;$

Элемент (4),  $i = 4; j = 6; k = 5.$

Подставляя эти номера в  $\varphi = N_i\varphi_i + N_j\varphi_j + N_k\varphi_k$ , получим

$$\varphi^{(1)} = N_1^{(1)}\varphi_1 + N_4^{(1)}\varphi_4 + N_2^{(1)}\varphi_2$$

$$\varphi^{(2)} = N_2^{(2)}\varphi_2 + N_5^{(2)}\varphi_5 + N_3^{(2)}\varphi_3$$

$$\varphi^{(3)} = N_2^{(3)}\varphi_2 + N_5^{(3)}\varphi_5 + N_4^{(3)}\varphi_4$$

$$\varphi^{(4)} = N_4^{(4)}\varphi_4 + N_5^{(4)}\varphi_5 + N_6^{(4)}\varphi_6$$

Это сокращенная форма записи системы. В полном расширенном виде эта система имеет вид:

$$\varphi^{(1)} = N_1^{(1)} \varphi_1 + N_4^{(1)} \varphi_4 + 0 * \varphi_3 + N_2^{(1)} \varphi_2 + 0 * \varphi_5 + 0 * \varphi_6,$$

$$\varphi^{(2)} = 0 * \varphi_1 + N_2^{(2)} \varphi_2 + N_3^{(2)} \varphi_3 + 0 * \varphi_4 + N_5^{(2)} \varphi_5 + 0 * \varphi_6,$$

$$\varphi^{(3)} = 0 * \varphi_1 + N_2^{(3)} \varphi_2 + 0 * \varphi_3 + N_4^{(3)} \varphi_4 + N_5^{(3)} \varphi_5 + 0 * \varphi_6$$

$$\varphi^{(4)} = 0 * \varphi_1 + 0 * \varphi_2 + 0 * \varphi_3 + N_4^{(4)} \varphi_4 + N_5^{(4)} \varphi_5 + N_6^{(4)} \varphi_6$$

Для нахождения значений функции в узлах  $\varphi_1, \varphi_2$ , и т. д. можно применить метод Ритца, либо метод Бубнова – Галёркина. В любом методе ансамбль (совокупность) аппроксимирующих функций конечных элементов подставляется в определенный интеграл, границы которого определяются областью решения дифференциального уравнения.

При интегрировании исчезают переменные  $x$  и  $y$ , остаются только коэффициенты. Далее решается система линейных алгебраических уравнений, которые дают возможность определить значения функции в вершинах конечных элементов.

## 4.2. Пример решения уравнения теплопроводности МКЭ

### Постановка задачи

Необходимо найти распределение температуры вдоль однородного тонкого стержня длиной  $L$  с поперечным сечением  $S$  и объёмом  $V$  (рис. 16). Левая сторона стержня жестко закреплена к пластине, к которой подводится тепловой поток  $q$ . На правой стороне стержня реализуется конвективный теплообмен с окружающей средой, с температурой  $T$ . Вдоль боковых стенок стержень теплоизолированный.

В одномерном случае уравнение теплопроводности имеет вид

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) = 0,$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $T(x)$  – искомая функция,  $x$  – координата.

Граничные условия определяются как:

$$\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q = 0, \text{ при } x = 0$$

$$\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \alpha(T - T_*) = 0, \text{ при } x = L,$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплообмена

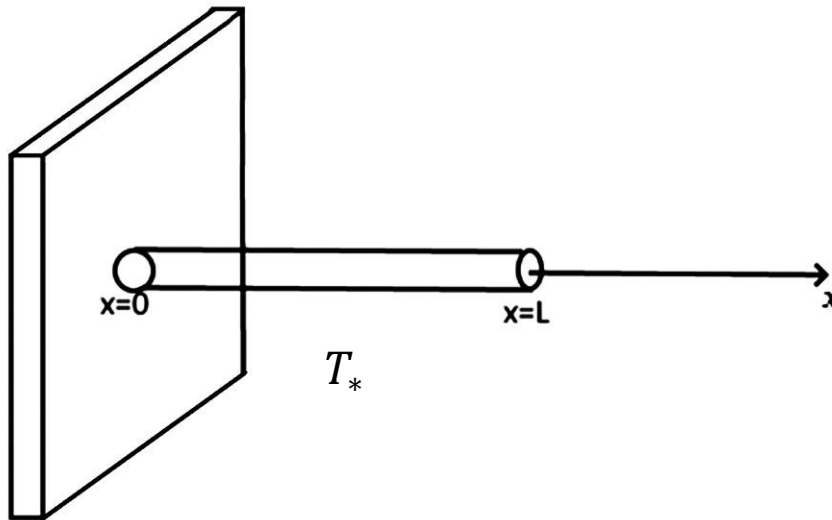


Рисунок 16

В соответствии с методом стержень разбивается произвольным образом на конечные отрезки (элементы), в общем случае неравной длины. На каждом элементе  $T(x)$ , аппроксимируются некоторой линейной зависимостью. Для краткости разобьём стержень на 2 элемента.  $L^{(1)}, L^{(2)}$  (рис. 17).

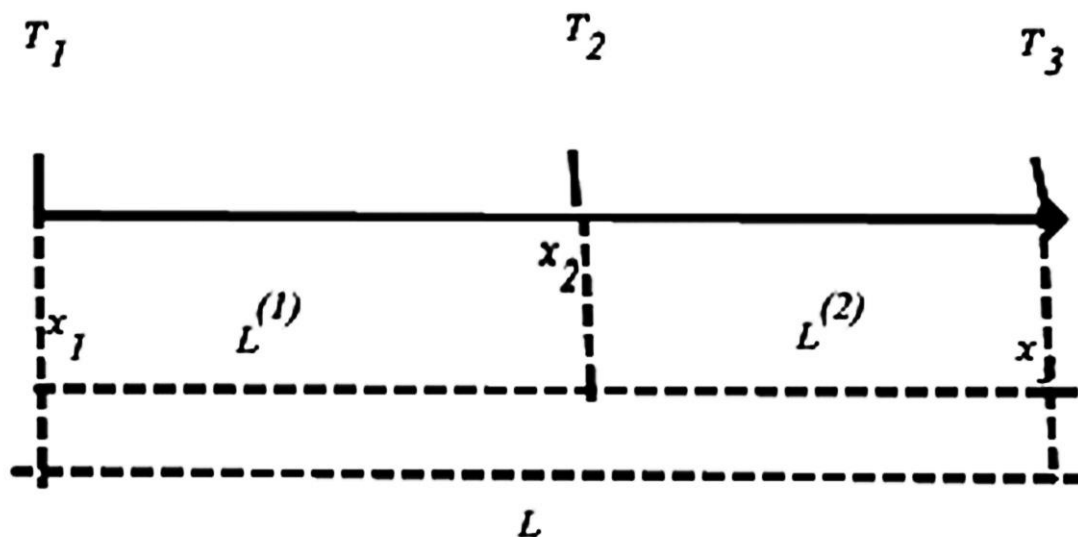


Рисунок 17. Разбиение на конечные элементы-отрезки

Для определения температуры в узлах  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  используем метод Ритца.

Вначале запишем аппроксимирующие функции для каждого из конечных элементов, а потом воспользуемся формулами из второго этапа МКЭ.

$$T^{(1)} = N_1^{(1)}T_1 + N_2^{(1)}T_2; \quad T^{(2)} = N_2^{(2)}T_2 + N_3^{(2)}T_3,$$

где

$$\left(\frac{x_2-x}{L^{(1)}}\right) = N_1^{(1)} \quad \left(\frac{x-x_1}{L^{(1)}}\right) = N_2^{(1)},$$

$$\left(\frac{x_3-x}{L^{(2)}}\right) = N_2^{(2)} \quad \left(\frac{x-x_2}{L^{(2)}}\right) = N_3^{(2)}.$$

В соответствии с методом Ритца запишем функционал в виде определенного интеграла, из которого определим минимальное значение функции, получим систему линейных уравнений. Решение этой системы даст значения  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ .

В нашем случае определенный интеграл имеет вид

$$F = \int_V 0,5\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dV + \int_S [qT + 0,5\alpha(T - T_*)^2] dS.$$

Здесь первый интеграл – интеграл  $I_1$  по объёму стержня, второй интеграл ( $I_2$ ) – интеграл по поверхности стержня. Подставим в первый интеграл выражения для производных конечных элементов

$$I_1 = \int_V 0,5\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dV = \int_{V^{(1)}} 0,5\lambda \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial x}\right)^2 dV^{(1)} + \int_{V^{(2)}} 0,5\lambda \left(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial x}\right)^2 dV^{(2)},$$

из выражений для аппроксимирующих функций найдем соответствующие производные

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial x} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x_2 - x}{L^{(1)}}\right) T_1 + \frac{d}{dx} \left(\frac{x - x_1}{L^{(1)}}\right) T_2 = \frac{-T_1 + T_2}{L^{(1)}},$$

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial x} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x_3 - x}{L^{(2)}}\right) T_2 + \frac{d}{dx} \left(\frac{x - x_2}{L^{(2)}}\right) T_3 = \frac{-T_2 + T_3}{L^{(2)}}.$$

Подставив выражения для производных в интеграл  $I_1$  и считая  $dV = Sdx$ ,  $dx=L^{(1)}$  и  $dx=L^{(2)}$ , получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_V 0,5\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dV = \int_{x_1}^{x_2} 0,5\lambda \left(\frac{-T_1 + T_2}{L^{(1)}}\right)^2 Sdx + \\ &\int_{x_2}^{x_3} 0,5\lambda \left(\frac{-T_2 + T_3}{L^{(2)}}\right)^2 Sdx = \\ &= \frac{0,5\lambda S}{L^{(1)}} (-T_1 + T_2)^2 + \frac{0,5\lambda S}{L^{(2)}} (-T_2 + T_3)^2, \end{aligned}$$



где принято, что  $L^{(1)} = L^{(2)} = dx$ .

Рассмотрим теперь интеграл  $I_2 = \int_S [qT + 0,5\alpha(T - T_*)^2]dS$ . Представим его в виде суммы двух интегралов,  $I_3 + I_4$  учтём, что поверхность стержня теплоизолированная т. е. интегрирование будет вестись по двум сечениям стержня правому и левому, в итоге получим, считая  $dS = S$

$$I_3 = \int_S qT dS = qTS,$$

$$I_4 = \int_S 0,5\alpha(T_3 - T_*)^2 dS = 0,5\alpha S(T_3^2 - 2T_*T_3 + T_*^2).$$

Проведем суммирование всех интегралов и получим

$$F = I_1 + I_2 = 0,5C^{(1)}(T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2) + 0,5C^{(2)}(T_2^2 - 2T_2T_3 + T_3^2) + 0,5C^{(3)}T_1 + 0,5C^{(4)}(T_3^2 - 2T_*T_3 + T_*^2),$$

где  $C^{(1)} = \frac{s\lambda}{L^{(1)}}$ ,  $C^{(2)} = \frac{s\lambda}{L^{(2)}}$ ,  $C^{(3)} = qS$ ,  $C^{(4)} = \alpha S$ . Для минимизации функционала необходимо равенство нулю производных

$$\frac{\partial F}{\partial T_1} = C^{(1)}T_1 - C^{(1)}T_2 + C_3 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial T_2} = 0,5C^{(1)}(-2T_1) + 0,5C^{(2)}(2T_2 - 2T_3) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial T_3} = 0,5C^{(2)}(-2T_2 + 2T_3) + 0,5C^{(4)}(2T_3 - 2T_*) = 0.$$

Отсюда легко могут быть найдены все неизвестные значения  $T_1, T_2, T_3$  в узлах конечных элементов (рис. 17).

## ГЛАВА 5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЕГО ЭТАПЫ

### 5.1. Исходные определения. Классификация моделей

В настоящее время методы математического моделирования наряду с известными методами экспериментальных исследований являются основными методами решения фундаментальных и прикладных проблем науки и техники.

В основе методов математического моделирования лежит понятие математической модели.

Надо сказать, что существуют различные определения понятия «математической модели», в основном совпадающие по смыслу, но отличные в деталях. Примем следующее определение:

**Математическая модель** – это некоторый абстрактный (искусственный) объект, представленный средствами математической символики, который ставится в соответствие некоторому исследуемому объекту (абстрактному или реальному) для описания основных или отдельных свойств этого объекта.

Под математическим моделированием будем понимать процесс формирования математической модели, её применения в научно-исследовательской и инженерной практике, проверки её на адекватность и корректность.

Совершенно очевидно, что в качестве объектов исследования могут служить самые различные явления и процессы окружающей нас действительности: живые и неживые системы, тех-

нические конструкции и устройства, химические, биологические, экономические, социальные процессы и т. д., наконец, сами математические объекты.

Как правило, для описания сложной системы (объекта) требуются и сложные самые разнообразные математические модели. По существу, любой раздел современной математики может служить основой для создания математических моделей. Это подтверждается историей развития математики, из которой видно, что, начиная с работ Архимеда, Евклида, имеет место положительное взаимопроникновение идей и законов физической реальности и соответствующих математических описаний, аксиом, теорем. В работах Архимеда и Евклида впервые последовательно изложено механико-геометрическое описание (моделей) окружающих нас реальных объектов.

Учитывая большое разнообразие возможных математических моделей, представляется целесообразным провести их определенную классификацию. Данный вопрос крайне неоднозначен, общепринятой классификации пока нет, т. к. в этом вопросе нет единого подхода. На первый взгляд, кажется очевидным выбрать в качестве критерия тип используемого математического аппарата, например дифференциального уравнения, но Н. Бор показал, что одно и то же дифференциальное уравнение может описывать и явление радиоактивности, и процесс испарения жидкости в подогретом состоянии.

Другой пример. Максвелл при выводе уравнений электродинамики использовал аналогии из механики: вращение валов, шестеренок и т. д. Поэтому при классификации можно использовать некоторый интуитивный критерий, учитывающий как

особенности математического аппарата, так и свойства моделируемого объекта, а также особенности получения математической модели.

К сожалению, такая классификация не может иметь стройную иерархическую структуру, в которой существуют жесткие перегородки. Скорее, это будет некоторая мозаичная структура разных моделей с невидимыми смысловыми связями, подобная структуре нейронной сети.

Рассмотрим предлагаемую классификацию на рис. 18.

Рассмотрим блок «Структурно-функциональные модели». К этому блоку отнесем математические модели, которые основаны на понимании механизма процессов, протекающих в объекте исследования и моделирования. Это можно продемонстрировать на объекте, имеющем физическую природу.

К математическим моделям первого уровня можно отнести формулы, отражающие основные законы природы, в частности следующие:

Закон всемирного тяготения

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

где  $F$  – гравитационная сила двух материальных точек с массами  $m_1, m_2$ ,  $r$  – расстояние между точками.

Закон Кулона:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2},$$

где  $F$  – сила взаимодействия двух точечных зарядов  $Q_1$  и  $Q_2$  в вакууме,  $r$  – расстояние между зарядами,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная, равная  $10^{-12}$  Ф/м,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды, в случае вакуума и воздуха  $\epsilon = 1$ .

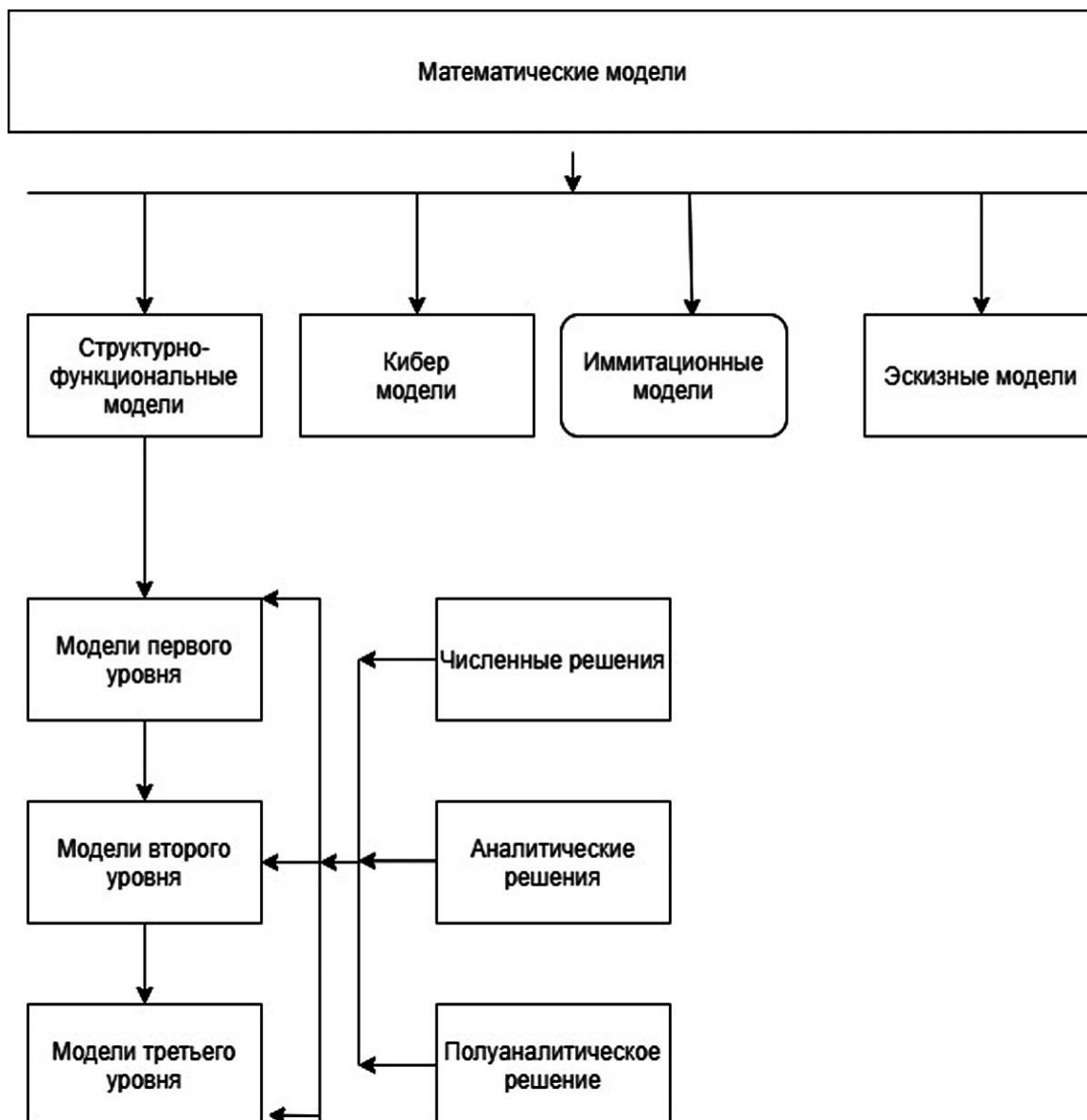


Рисунок 18. Возможная классификация математических моделей

Закон Ома для однородного участка цепи:

$$I = \frac{U}{R},$$

где  $I$  – сила электрического тока,  $U$  – напряжение на участке цепи.

Фазовая скорость распространения электромагнитных волн в среде:

$$V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}},$$

где  $c$  – скорость распространения света в вакууме,  $\varepsilon$  и  $\mu$  – соответственно электрическая и магнитная проницаемость среды.

К математическим моделям второго уровня можно отнести следующие дифференциальные уравнения, обладающие большой общностью.

Уравнение Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Уравнение Пуассона

$$\Delta u(x, y, z) = -f(x, y, z).$$

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u.$$

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \Delta u + f(x, y, z).$$

Сюда можно отнести также уравнения электромагнитного поля (уравнения Максвелла), квантово-механические уравнения, уравнение Шредингера и т. д.

К математическим моделям III уровня можно отнести теоретические результаты, основанные на решениях вышеуказанных фундаментальных уравнений первого и второго уровня в самых различных отраслях науки и техники: механика, электроника, атомная физика, биология и т. д.

Далее рассмотрим характер решений, которые могут быть получены исходя из математических моделей, построенных на основе дифференциальных уравнений.

К первой группе отнесем **аналитические решения** (строгие или приближённые), которые, как известно, можно получить в виде конкретных формул, описывающих конкретную функцию, зависящую в общем случае от пространственных координат, времени граничных и начальных условий.

В большинстве случаев получить строгое аналитическое решение невозможно, поэтому пользуются приближенными методами. К ним можно отнести:

Метод возмущений; решение ищется в виде основного решения + малая добавка (возмущение).

Метод малого параметра; решение ищется в виде ряда по некоторому параметру, содержащемуся в данной задаче.

Метод минимизации невязок; при использовании метода минимизации невязок решение задачи ЛП разбивается на два этапа. На первом этапе решается вспомогательная задача для определения исходного допустимого базисного решения, на втором – определяется оптимальное решение исходной задачи ЛП.

Метод коллокаций. Суть метода коллокаций заключается в следующем. Приближенное решение ищется в конечномерном линейном пространстве функций. Неизвестные коэффициенты его разложения по базису пространства определяются из уравнений коллокаций и краевых условий.

Уравнения коллокаций – требования того, чтобы приближенное решение удовлетворяло дифференциальным уравнениям задачи в конечном множестве точек области постановки задачи (точках коллокаций).

Краевые условия получаются из соответствующих условий исходной постановки задачи, записанных в нескольких точках на границе области.

Также особую роль играет следующая группа решений – **численные решения**, полученные на основе численных методов: метод конечных разностей, метод конечных элементов и др. Особенностью численных решений является то, что искомая функция представляется набором дискретных значений, соответствующих дискретным значениям независимых переменных (например, пространственных переменных и времени). Вместе с тем, если использовать метод аппроксимации, в итоге можно получить решение в аналитическом виде.

Третью группу решений можно назвать **полуаналитическими**, поскольку в них используются проекты решения с заданными базисными функциями с неизвестными константами, определяемыми в процессе решения. К ним относятся решения, полученные с помощью метода Ритца и методом Бубнова – Галёркина.

Следующий блок решений на схеме можно назвать **имитационными моделями**. Обычно в этом случае объект моделирования представляет структуру с большим множеством элементов, математические модели которых известны. Примером такой системы является модель интегральной схемы, содержащая миллионы элементов.

Следующий блок математических моделей – **кибернетические модели**, эти модели не требуют обязательного знания тех или иных механизмов процессов, протекающих в объекте моделирования, который рассматривается как «черный ящик», как правило, при этом используется теория планирования эксперимента и метод наименьших квадратов, которые позволяют определить неизвестные коэффициенты регрессионного соотношения.



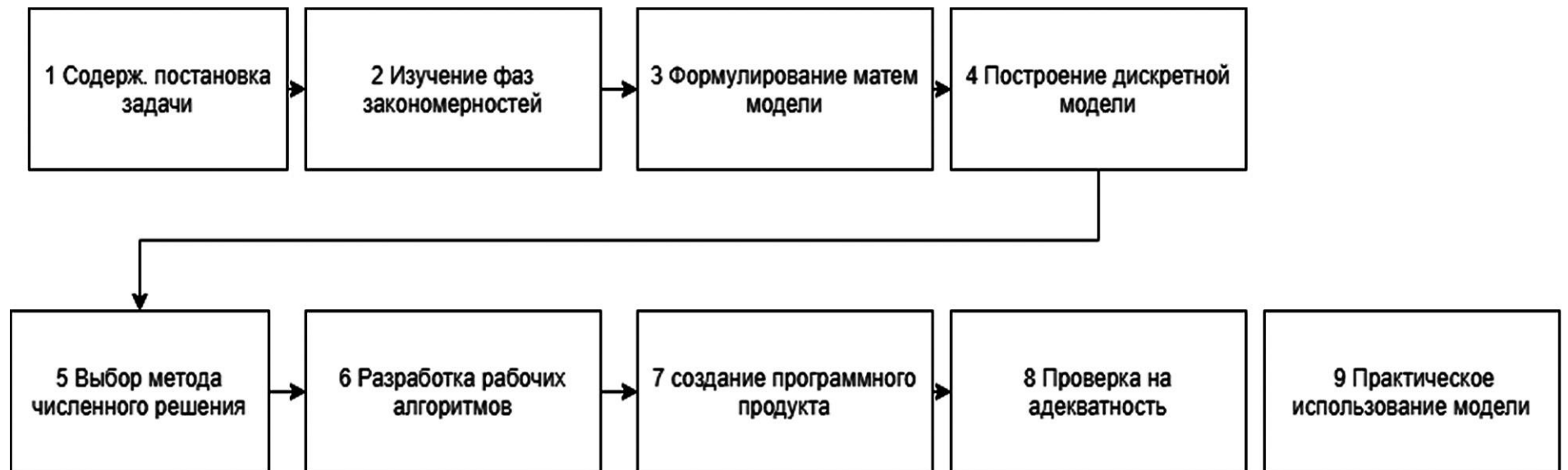


Рисунок 19. Схема этапов математического моделирования

Также на схеме показан блок **эскизных** моделей. Подобные модели не претендуют на адекватность описания основных свойства объекта, скорее, какого-либо одного, и то лишь качественно, а не строго количественно, Например, принято считать, что сложность ( $Y$ ) управления пропорциональна числу объектов  $N$ :

$$Y = N^2.$$

Другим примером эскизной модели является модель роста числа научных публикаций во времени

$$n = n_0 e^t,$$

где  $n_0$  – начальное число публикаций в момент времени  $t_0$ .

## 5.2. Этапы математического моделирования

Рассмотрим основные этапы математического моделирования.

1) Определение исследуемого объекта. Содержательная постановка задачи. Например:

а) Исследуемый объект – металлическая мембрана. Найти механические напряжения в мембране, закрепленной по краям, при заданной периодической нагрузке.

б) Исследуемый объект – автомобильный мост; необходимо разработать оптимальную конструкцию автомоста на реке шириной  $L$  с пропускной способностью  $N$  машин в минуту, устойчивого к климатическим и сейсмическим факторам в данной местности.

2) Глубокое изучение физических закономерностей, характеризующих исследуемый объект. Изучение возможных аналогов и прототипов. Выдвижение гипотез основных гипотез. Выявление основных факторов, определяющих функционирование объекта моделирования.

3) Математическая постановка задачи – формулирование **математической модели** в рамках выбранного математического аппарата, здесь очень важна следующая составная часть модели, а именно, формулировка разумных допущений (упрощений). Допущение – определенное упрощение реальных условий, в которых функционирует исследуемый объект, в том числе отбрасывание несущественных факторов. Во многих задачах можно записать математическую постановку задачи, максимально учитывая все возможные действующие факторы, однако, при этом задача может оказаться не решаемой.

В формулировке исходных допущений и проявляется талант исследователя. Исследователям необходимо построить такую математическую модель, чтобы сформулированная на её основе задача была решаемой и в то же время отражала суть объекта (явления) моделирования. В большинстве случаев в основе математических моделей лежат дифференциальные уравнения: обыкновенные, в частных производных, линейные и нелинейные.

4) Поскольку в настоящее время при решении большинства научных и инженерных задач невозможно обойтись без применения тех или иных численных методов (метод конечных разностей, метод конечных элементов и т. д.) необходимо перейти к **постановке задачи в дискретном виде**. Это означает переход от непрерывных значений независимых переменных к их дискретным значениям с некоторым дискретным шагом. Также в

дискретном виде записываются дифференциальные операторы, начальные и граничные условия.

5) Выбор и применение численного метода решения поставленной дискретной задачи. Разработка эффективного конкретного рабочего алгоритма.

6) Программирование рабочего алгоритма. Создание **программного** продукта.

7) Проведение вычислений. Проверка пригодности разработанных математических моделей и программ, т. е. **проверка её адекватности исследуемому объекту**. Здесь главный критерий – соответствие экспериментальным данным.

8) **Корректировка математической модели** по результатам проверки на адекватность.

Следует отметить, что на этапах построения математической модели возможны погрешности, влияющие на итоговый результат. Так, уже на втором этапе могут быть выявлены все основные факторы, влияющие на механизм процессов. На третьем этапе исходные допущения могут быть недостаточно обоснованы и, главное, чрезмерно упрощающие реальные условия функционирования объекта. Также выбор математического аппарата может быть безупречен, но не соответствовать данному объекту. Переход к четвёртому и пятому этапам, к дискретной модели неизбежно вносит погрешности, связанные с величиной параметра дискретизации и особенностям вычислительной схемы (явная, неявная и т. д.). Наконец, неизбежны вычислительные (компьютерные) погрешности, в том числе за счет округления, связанного с ограниченностью разрядной сетки.

В связи с изложенным в случае неадекватности модели необходим тщательный анализ возможных погрешностей и возвращением к тем или иным этапам, т. е. процесс математического моделирования может иметь итерационный характер.

### 5.3. Требования к математической модели

Исходная математическая модель и её дискретный аналог должны представлять собой корректно поставленные задачи. Задачи поставлены корректно, если выполнены следующие условия:

- а) условие существования. Задача должна иметь решение при любых наборах входных данных;
- б) задача должна иметь единственное решение, т. е. каждому набору входных данных должно соответствовать одно решение;
- в) решение должно быть устойчивым. Это означает, что если наборы входных данных отличаются достаточно мало, то и решения должны отличаться меньше заданной величины.

Задачи, для которых не выполняется хотя бы одно из перечисленных выше условий, называются некорректными.

К данному классу относят задачи, возникающие, например, в физике и других областях – задачи обработки и интерпретации результатов физических экспериментов. Это когда о некоторой физической характеристике  $Z$  судят не по её непосредственному изменению, измеряя её некоторое проявление  $U$ . К данному классу задач можно отнести распознавание образов и т. д.

Важным свойством дискретных математических моделей является сходимость. Сходимость – фундаментальное понятие анализа, которое означает, что некоторый математический объект или процесс имеет предел.

Например, понятие сходимости возникает, когда при изучении того или иного математического объекта строится последовательность более простых объектов. Так, для вычисления длины окружности используется длина стороны многогранника, вписанного в окружность, здесь параметр дискретизации – длина стороны многогранника.

Практически условие сходимости означает, что при уменьшении параметра дискретизации  $h$  решение дискретной математической модели сходится к «истинному» решению исходной математической модели в виде дифференциальных уравнений, если бы оно было получено математически строго.

Известна теорема, суть которой заключается в следующем: если исходная математическая модель в виде дифференциального уравнения корректна, а соответствующая ей дискретная модель в виде разностной вычислительной схемы аппроксимирует дифференциальное уравнение и устойчива, тогда и решение разностной вычислительной схемы сходится к решению исходного дифференциального уравнения.

Другими словами, свойство аппроксимации, означающее близость разностного (дискретного) оператора к дифференциальному оператору, ещё не означает близость решений дифференциального и разностных уравнений. Необходима ещё и устойчивость разностной схемы, которая является её внутренним свойством, не зависящим от того, аппроксимирует ли схема какое-либо дифференциальное уравнение.

При этом на практике неустойчивость разностной схемы обнаруживается достаточно быстро, например быстрое нарастание величины или противоречащее физическому смыслу задачи значение величины. Свойство аппроксимации требует достаточно тонкого анализа.

## ГЛАВА 6. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ И ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС

### 6.1. Исходные определения

Это научное направление получило развитие благодаря методам вычислительной математики и средствам вычислительной техники. Ниже изложены некоторые вводные представления математических моделей этого направления.

Дадим одно из возможных определений хаоса. *Хаос* – это некоторое явление (состояние), которое характеризуется беспорядком, непредсказуемостью, невоспроизводимостью.

*Детерминированность* – свойство, которое предполагает однозначную связь между причиной и следствием.

*Динамическая система* – это какой-либо физический объект, процесс, математический объект, состояние которого в некоторый момент времени определено однозначно, определяется совокупностью некоторых величин в начальный момент времени (начальные условия) и значениями постоянных параметров.

Долгое время считалось, что детерминированные динамические системы не могут демонстрировать хаотическое состояние, а только регулярное поведение. Предполагалось, что хаотическое (стохастическое) поведение присуще только сложным системам, либо факторы, в которых действуют случайные факторы.

*Сложные системы* – как правило, многоэлементные многосторонними связями между элементами. Примером может служить газ, содержащий миллионы частиц, взаимодействующих между собой; примером системы со случайными факторами может

служить броуновское движение частиц под действием случайных ударов молекул.

Однако оказалось, что в детерминированных динамических системах возможно хаотическое поведение.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Математическая динамическая детерминированная система описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

.....

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

.....

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где  $i = 1, 2, 3 \dots n$ ,  $f_i$  – нелинейные функции;  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – величины, которые определяют состояние системы в каждый момент времени. Решить эту систему можно только численно, необходимо задать начальные условия  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0$ . При изменении  $t$  точка будет описывать так называемую фазовую траекторию. Совокупность фазовых траекторий формирует фазовый портрет.

Фундаментальное свойство указанной выше системы – единственность решения системы ОДУ.

Иными словами, это означает, что отдельная фазовая траектория сама с собой не пересекается, фазовые траектории, соответствующие разным начальным условиям, также не пересекаются. В изложенных представлениях по поводу динамических систем нет никакого намека на возможность хаотических состояний. В начале XX века выдающийся математик Пуанкаре указал



на возможность хаотических движений в рассматриваемых системах, но эта идея не была воспринята научным сообществом и серьёзно не рассматривалась. Однако в 1967 стали известны знаменитые уравнения Лоренца – ученого, занимавшегося проблемами метеорологии в системах с очень сложными связями и практически непрогнозируемых.

Можно ли прогнозировать хаотическое движение элементов какой-либо системы? От чего зависит хаотическая динамика? Может ли, наконец, взмах крыла бабочки вызвать торнадо? Некоторые важные ответы на эти и другие вопросы нашёл американский метеоролог Эдвард Лоренц, (невольный) автор термина «эффект бабочки» и создатель «странного аттрактора».

В 1972 году профессор метеорологии из Массачусетского технологического института Эдвард Лоренц собирался выступить на конференции, но в пылу работы не успел отправить тему своей лекции. Организатор, спешивший разослать приглашения, выбрал заголовок за него: «Может ли взмах крыла бабочки в Бразилии вызвать торнадо в Техасе?» Так и появился термин «эффект бабочки», известный сегодня всему миру.

## **6.2. Система Лоренца**

Лоренц изучал конвекцию (теплообмен, возникающий за счет движения молекул жидкости или газа) в атмосфере Земли. Для описания подобных физических процессов часто пользуются моделью, которая включает уравнения Навье – Стокса, описывающие движение вязкой ньютоновской жидкости (за исключением некоторых частных случаев, их решения в общем виде на данный момент неизвестны):

Мы не будем углубляться в детальное объяснение всего вышеизложенного. Достаточно лишь понимать, что это довольно сложная модель, и Лоренцу удалось построить ее упрощение.

Его уравнения имеют вид:

$$\dot{x} = \sigma(y - z)$$

$$\dot{y} = -xz + rx - y$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

здесь  $x$  – интенсивность конвекции,  $y$  – разность температур между восходящими и нисходящими потоками;  $z$  – отклонение вертикального температурного поля  $\sigma$ ;  $r$ ,  $b$  – заданные константы.

Перед тем как приступить к непосредственному анализу полученной системы, рассмотрим некоторые виды траекторий. Воспользуемся теми же значениями параметров, что и сам Лоренц:  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$ .

Изобразим движение двух точек, расстояние между которыми изначально невелико (рис. 20):

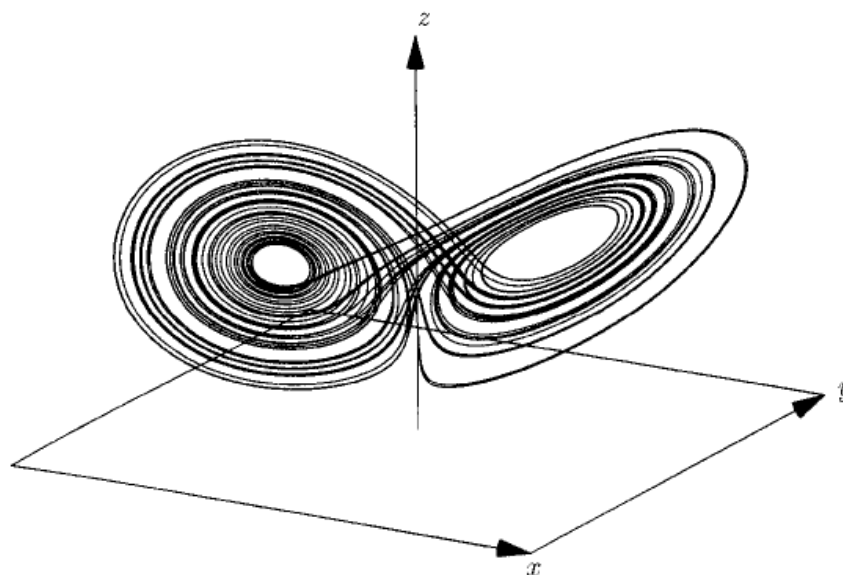


Рисунок 20. Траектории, исходящие из близкорасположенных точек.

Фазовый портрет, полученный Лоренцем

Интересный результат! Поначалу траектории почти неразличимы, потом они отклоняются совсем ненамного, после чего разница становится уже значительной.

### 6.3. Странный аттрактор Лоренца

Действительно, эта фигура на рис. 20 так и называется – странный аттрактор Лоренца (от англ. attract – «притягивать»).

*Одно из определений аттрактора*

*Аттрактор* – предельное множество точек, притягивающее фазовые траектории, странный аттрактор присущ для диссипативных систем, т. е. систем с потерями (в нашем случае вязкость сопротивление среды).

Формальное математическое определение звучит так: *аттрактор* – такое подмножество фазового пространства, что все траектории, стартующие не слишком далеко от него, стремятся к нему с течением времени. (Это одно из возможных определений понятия аттрактора, существуют и другие, не эквивалентные данному).

Основные свойства системы со странным аттрактором:

- 1) он локализован в пространстве;
- 2) фазовые траектории неустойчивы;
- 3) малое изменение параметров ведут к малым непрерывным изменением структуры аттрактора;
- 4) сколько угодно близкие фазовые траектории через определенное время становятся ушедшими на определенное расстояние.

Сказанное выше можно проиллюстрировать так: две траектории, выпущенные из близких точек, со временем разбегаются достаточно далеко.

Неустойчивость траекторий определяется по показателю Ляпунова:

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{d(t)}{d(o)} \right),$$

$d(o)$  – расстояние между траекториями в некоторый начальный момент времени  $t = 0$   $d(t)$  – расстояние между траекториями в момент времени  $t$ .

если  $\Lambda > 0$  то траектории расходятся по экспоненте

$$d(t) = d(o)e^{\lambda t},$$

устойчивые траектории остаются близкими друг к другу и в течение времени.

Аттракторов может быть много. Точки пространства, из которых из которых находят фазовые траектории, попадающие в аттрактор при  $t \rightarrow \infty$ , называются бассейном притяжения. Хаотические траектории могут быть найдены и в системах без потерь не-диссипативных, но при этом в них не будет аттракторов.

Назовём условия возникновения хаотических траекторий:

- 1) число ОДУ должно быть  $\geq 3$ ;
- 2) дифференциальные уравнения должны быть нелинейными.

В качестве примера рассмотрим генератор Ван-дер Поля, он описывается дифференциальным уравнением 2-го порядка:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \lambda(1 - x^2) \frac{d x}{dt} + \omega_0 x = 0.$$

Это уравнение может быть представлено в виде системы двух ОДУ 1-го порядка:

$$\frac{d x}{d t} = y,$$

$$\frac{d y}{d t} = \lambda(1 - x^2)y - \omega_0 x.$$

Они решаются численно.

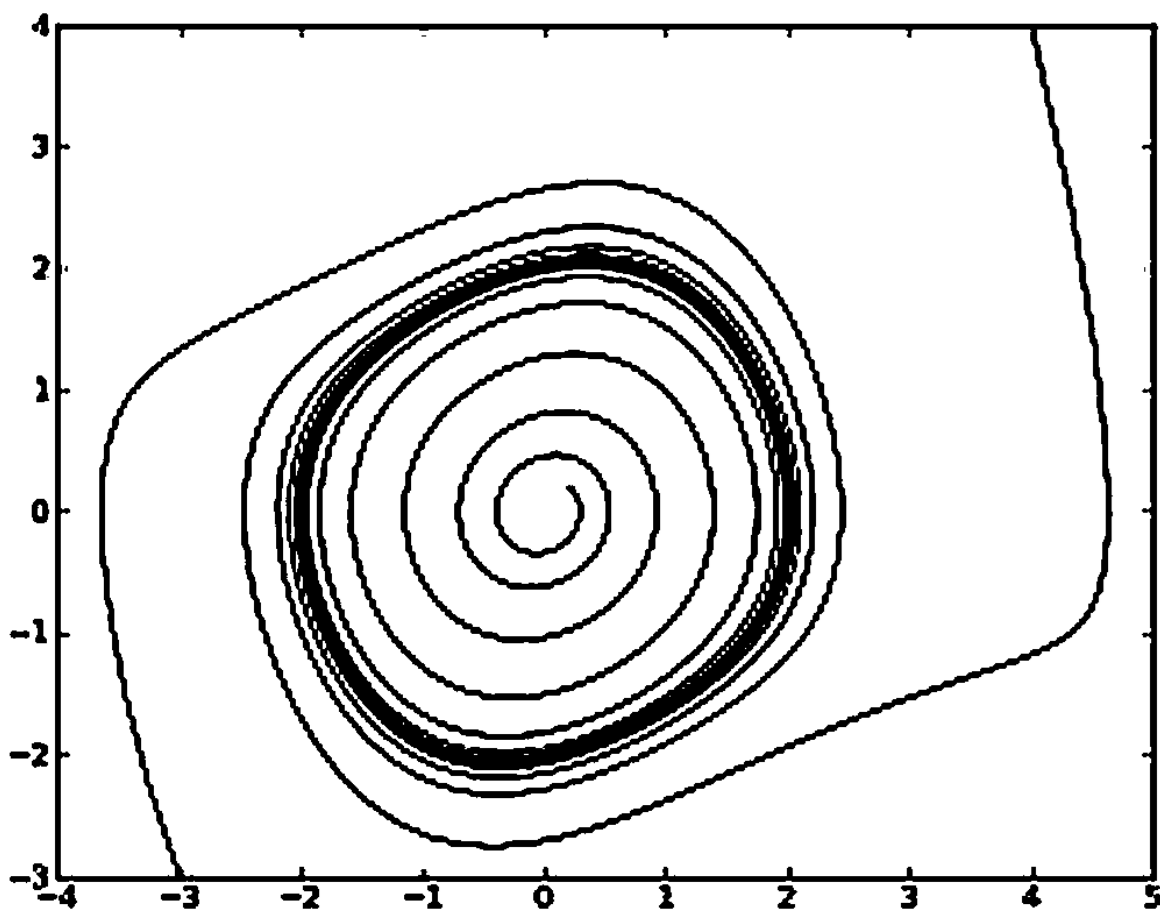


Рисунок 21. Траектории с предельным циклом

В данном фазовом портрете существует предельный цикл (обозначено темным), содержащий начало координат. Предельный цикл, но не аттрактор – место, куда все траектории приближаются. При малом смещении фазовых траекторий имеет место не-

прерывное смещение фазовых траекторий, т. е. траектории устойчивы по Ляпунову (не хаотичны). Почему в такой системе не возникает хаотических траекторий? Тут необходимо вспомнить свойство ОДУ – единственность решения. Могут ли фазовые траектории, исходящие из близких начальных условий, расходиться и пересекаться? Нет, не могут, т. к. в двумерном случае наличие непрерывной нелинейной фазовой траектории сильно ограничивает возможности другой траектории.

Вместе с этим в трехмерном пространстве такая возможность есть, т. к. одна траектория может уйти вверх, а другая – остаться в плоскости либо уйти под разными углами.

#### 6.4. Дискретные отображения

Дискретные отображения можно определять как некоторые дискретные операторы, переводящие дискретные значения некоторой переменной только в дискретные значения другой переменной.

Рассмотрим дискретное отображение

$$x_{n+1} = \{2x_n\},$$

здесь фигурные скобки обозначают дробную часть числа в скобках. Очевидно, что  $x_n$  – числа от 0 до 1. Напомним, что каждое число, представимое в позиционной системе исчисления последовательностью цифр конечной длины, является рациональным числом, в противном случае – иррациональным. Число  $1/5$  в десятичной системе счисления является рациональным, а число  $\sqrt{2}$  в десятичной системе – иррациональное число. К примеру, число  $1/25$  в двоичной системе иррациональное, а в десятичной – рациональное.

Итак, в качестве  $x_1$  возьмем число в десятичной системе счисления

$$x_1 = \frac{1}{5},$$

тогда в соответствии с отображением

$$x_2 = \left\{ 2 * \frac{1}{5} \right\} = \frac{2}{5}, x_3 = \left\{ 2 * \frac{2}{5} \right\} = \frac{4}{5}, x_4 = \left\{ 2 * \frac{4}{5} \right\} = \frac{3}{5}, x_5 = \left\{ 2 * \frac{3}{5} \right\} = \frac{1}{5},$$

т. е. начиная с  $x_5$  наблюдается периодичность. Однако если подставить в рассматриваемое отображение в  $x_1 = \sqrt{2}$  – иррациональное число, то мы получим последовательность  $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ , которая не замкнётся. При заданном  $n$  мы не узнаем  $x_n$  сразу, а нам придётся последовательно произвести расчет, например до  $n = 100$ , и последовательность чисел будет выглядеть, как цепочка последовательности случайных чисел. Мы видим в итоге, что рассматриваемое дискретное отображение – вполне детерминированная система (есть четкое правило расчёта). Однако эта простая система порождает хаос.

Если сравнить эти результаты с полученными при анализе динамических систем в виде систем ОДУ, может возникнуть следующий вопрос: почему раньше в случае динамических систем требовалось три нелинейных дифференциальных уравнения для получения хаотических режимов, а в случае дискретных отображений достаточно одного? На этот вопрос можно ответить просто: предадим  $x_n, x_{n+1}, n$  – координатные оси и получим трёхмерное координатное пространство, в котором как мы видели, уже возможны хаотические траектории.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов. Москва: Физматлит, 2003. 300 с.

2. Поршнева С. Вычислительная математика: курс лекций. Санкт-Петербург: БХВ – Петербург, 2004. 304 с.

3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Москва: Бином. Лаборатория знаний, 2006. 636 с.

4. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Ленинград: Гостехтеориздат, 1949. 695 с.

5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 427 с.

6. Трудоношин В.А., Пивоварова Н.В. Математические модели технических объектов. Москва: Высшая школа, 1986. 158 с.

7. Кузнецов С.П. Динамический хаос: курс лекций. Москва: Физматлит, 2006. 356 с.

8. Байбурин В.Б., Розов А.С., Хороводова Н.Ю., Никифоров А.А. Методы вычислительной математики для технических специальностей. Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2021. 90 с.